

Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет мистецтв і художньо-освітніх технологій
Кафедра образотворчого, декоративного мистецтва,
технологій та безпеки життєдіяльності

С. В. Подолянчук

ОПР МАТЕРІАЛІВ.
РОЗТЯГАННЯ. СТИСКАННЯ.

Навчальний посібник

Вінниця-2024

УДК 620.17(075.8)

DOI: [https://doi.org/10.31652/620.17\(075.8\)-1-75](https://doi.org/10.31652/620.17(075.8)-1-75)

П44

Рецензенти:

Марущак О. В., кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри декоративного, образотворчого мистецтва, технологій та безпеки життєдіяльності Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Іванчук А. В., кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри декоративного, образотворчого мистецтва, технологій та безпеки життєдіяльності Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Рекомендовано вченою радою факультету мистецтв і художньо-освітніх технологій Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол №3 від 09 жовтня 2024 року)

Подолянчук С.В.

П44 Опір матеріалів. Розтягання. Стискання : навчальний посібник. Вінниця: ВДПУ, 2024. 75 с.

Навчальний посібник містять теоретичні відомості щодо основних закономірностей розтягання та стискання, експериментального дослідження фізико-механічних властивостей матеріалів, побудови епюр, розрахунку на міцність і жорсткість тощо.

Рекомендується для здобувачів вищої освіти спеціальності 014.10. Середня освіта (Технології).

© Подолянчук С. В.

ПЕРЕДМОВА

Завдання підвищення рівня фахової підготовки, формування творчого підходу до педагогічної діяльності є особливо актуальним при підготовці учителів трудового навчання та технологій, майстрів виробничого навчання професійно–технічних навчальних закладів, викладачів спеціальних предметів закладів вищої освіти. Актуальність і важливість подібного завдання обумовлена тим, що в умовах реального виробництва, як і в освітньому процесі закладів освіти, широко використовується нові механізми, вузли, агрегати, машини. Їх ефективна експлуатація вимагає нових знань щодо принципу дії, конструкції, технології виготовлення та використання.

Педагогічні працівники можуть використати набуті знання, проектуючи та виготовляючи з учнями складні моделі, різноманітні конструкції та пристрої під час роботи гуртків технічної творчості. Ґрунтовна технічна підготовка знадобиться вчителю технологій чи майстру виробничого навчання під час проведення профорієнтаційної роботи.

В навчальному посібнику розглядається коло питань, вивчення яких є достатнім для розуміння основних закономірностей розтягання (стискання) та опанування методикою проведення типових розрахунків.

1. Деформації при розтяганні та стисканні

Розтяганням або стисканням бруса називають такий вид деформації, який обумовлений силами, що діють вздовж його осі. Брус, який працює на розтягання (стискання) називається *стержнем*. При цьому з шести внутрішніх силових факторів діє лише один – повздовжня (нормальна) сила N . Ця сила створює лише нормальне напруження, тому дотичні напруження в цьому випадку відсутні взагалі.

Розтягання (стискання) є доволі розповсюдженим видом опору. Він має місце при експлуатації багатьох болтових з'єднань, роботі корпусних деталей, елементів пристроїв для підйому вантажу (тросів, гаків, ходових гвинтів домкратів) тощо. На розтягання (стискання) працює чимало будівельних конструкцій: опори мостів, стіни будівель, блоки фундаментів та інші.

Розглянемо закріплений одним кінцем стержень довжиною l_0 (рис.2.1). Прикладемо до його крайнього кінця зовнішню силу F , що направлена вздовж осі стержня. Під дією цієї сили стержень набуде довжини l' .

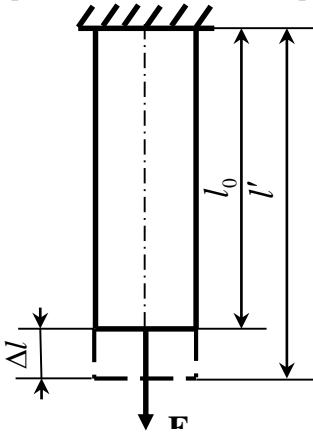


Рис. 2.1.

В опорі матеріалів різницю між кінцевою l' і початковою l_0 довжиною стержня називають **абсолютною повздовжньою деформацією** Δl і визначають за формулою

$$\Delta l = l' - l_0 \quad (2.1)$$

Абсолютна повздовжня деформація вимірюється в одиницях довжини (м, см, найчастіше – мм). При цьому, якщо довжина стержня збільшується, ведуть мову про абсолютне видовження, якщо зменшується – про абсолютне

укорочення.

Визначивши відношення абсолютної повздовжньої деформації Δl до початкової довжини стержня l_0 , отримаємо значення **відносної повздовжньої деформації** ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l' - l_0}{l_0} \quad (2.2)$$

Відносна повздовжня деформація є безрозмірною величиною і разом з абсолютною повздовжньою деформацією вважається основною геометричною характеристикою при розтяганні (стисканні).

Оскільки в більшості випадків при розтяганні (стисканні) мова піде про зміну довжини стержня слово «повздовжня» опускають і застосовують терміни «абсолютна деформація» та «відносна деформація». Проте у випадку деформування масивного тіла, у якого всі розміри одного порядку, таке спрощення є некоректним.

Розглянемо випадок, коли до відносно короткого стержня круглого поперечного перерізу прикладена повздовжня сила F (рис. 2.2). Під дією цієї сили, як і в попередньому випадку, стержень збільшить свою довжину до величини l' .

Проте об'єм тіла, як слідує з гіпотези про неперервність

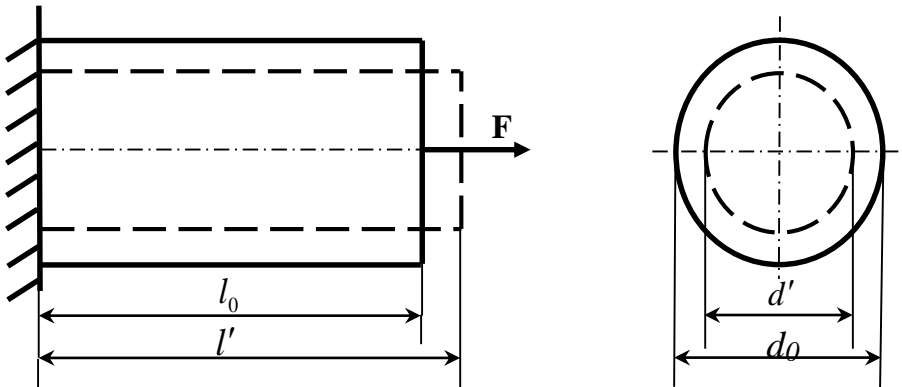


Рис. 2.2.

матеріалу, повинен залишитись незмінним. Це означає, що поперечні розміри тіла також повинні змінитись (в розглядуваному прикладі – зменшитись). Тому для таких випадків вводять ще дві геометричні характеристики:

- *абсолютну поперечну деформацію*, яка являє собою різницю між кінцевим і початковим поперечним розміром тіла, та у випадку стержня круглого поперечного перерізу визначається за формулою:

$$\Delta d = d' - d_0, \quad (2.3)$$

де Δd - абсолютна поперечна деформація, d_0 - діаметр стержня до деформації, d' - діаметр стержня після деформації,

- *відносну поперечну деформацію ε'* , яка в цьому ж випадку являє собою відношення абсолютної поперечної деформації Δd до початкового діаметра стержня d_0 і визначається за формулою

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{d' - d_0}{d_0} \quad (2.4)$$

Як і у випадку поперечної деформації, абсолютна повздовжня деформація вимірюється в одиницях довжини (м; см; мм), а відносна повздовжня деформація є безрозмірною величиною.

Для стержнів прямокутного поперечного перерізу абсолютна поперечна деформація (рис. 2.3) визначається для кожного поперечного розміру за формулами

$$\left. \begin{aligned} \Delta a &= a' - a_0 \\ \Delta b &= b' - b_0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.5)$$

де Δa , Δb - абсолютні деформації ширини і висоти стержня, відповідно a_0 , b_0 – розміри ширини і висоти стержня до деформації, a' , b' - розміри ширини і висоти стержня після деформації.

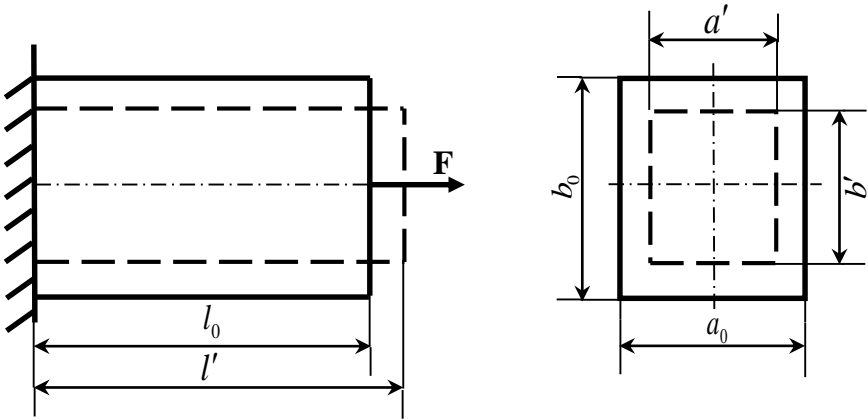


Рис. 2.3.

Відносна поперечна деформація ширини (ε') і висоти (ε'') стержня знаходиться подібним до попереднього випадку чином

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{\Delta a}{a_0} \\ \varepsilon'' &= \frac{\Delta b}{b_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

При цьому для ізотропних матеріалів відносні поперечні деформації ширини і висоти стержня однакові ($\varepsilon' = \varepsilon''$).

Між відносною повздовжньою (ε) і відносною поперечною (ε') деформаціями в межах пружних деформацій існує взаємозв'язок

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon, \quad (2.7)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона. Цей коефіцієнт характеризує пружні властивості матеріалу і є безрозмірною величиною. Його значення є довідковою величиною (додаток 1) і для ізотропних матеріалів лежать в межах 0...0,5.

Знак «мінус» у формулі (2.7) означає, що відносна повздовжня і відносна поперечна деформації завжди мають різні знаки. Наприклад, при розтяганні (збільшенні довжини) стержень зменшує свій поперечний розмір (у випадку круглого поперечного перерізу – діаметр).

2. Напруження та переміщення

Повздовжня сила N , яка діє при розтяганні (стисканні), створює в поперечному перерізі стержня нормальне напруження σ . Ці два фактори пов'язані між собою такою залежністю

$$N = \int_A \sigma dA \quad (2.8)$$

При цьому будемо вважати, що зовнішня сила F чисельно дорівнює значенню внутрішньої повздовжньої сили N .

На практиці визначення сили N безпосередньо з формули (2.8) перетворюється в достатньо складне завдання, оскільки характер розподілу нормальних напружень по площі поперечного перерізу в багатьох випадках є невідомим. Тому для розв'язання задачі

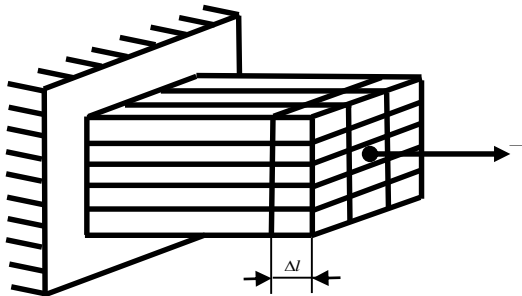


Рис. 2.4.

скористаємося моделлю стержня, який працює на розтягання (стискання).

Уявимо собі, що довільний стержень складається з великої кількості волокон, розміщених паралельно його осі (рис. 2.4). Прикладемо вздовж осі стержня повздовжню

силу F і після візуального спостереження визначимо характерні особливості його поведінки:

1. Плоскі поперечні перерізи, які були плоскими до деформації, залишаються плоскими і після деформації. Це припущення називається гіпотезою плоских перерізів (гіпотезою Бернуллі). Його з деякими застереженнями можна використати і для інших видів деформації.

2. Кожне волокно подовжиться на однакову довжину Δl . Враховуючи, що до деформації початкова довжина волокон l була однаковою, можна стверджувати, що і їхня відносна деформація ε також є величиною сталою. Тобто для такого випадку справедливим є співвідношення

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = const \quad (2.9)$$

Використовуючи подібний підхід, гіпотезу малості і лінійності деформації та численні дані експериментальних досліджень, Роберт Гук встановив закон, який стверджує що відносні деформації прямо

пропорційні нормальним напруженням. У випадку розтягання (стискання) *математичний вираз закону Гука* набуде такого вигляду

$$\sigma = \varepsilon E \quad (2.10)$$

Коефіцієнт пропорційності E називають модулем повздовжньої пружності, модулем пружності першого роду або модулем Юнга. Модуль Юнга має розмірність напруження (Па, МПа), характеризує механічні властивості матеріалу і є однією з найважливіших його констант. Значення модуля Юнга для найбільш розповсюджених конструкційних матеріалів наведені в додатку 2.

В залежності від необхідності знаходження тієї чи іншої величини, математичний вираз закону Гука можна подати в іншому вигляді:

- для повздовжньої деформації:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.11)$$

- для поперечної деформації з урахуванням формули (2.7)

$$\varepsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E} \quad (2.12)$$

Використовуючи закон Гука і підставляючи вираз для нормального напруження з формули (2.10) у формулу (2.8) отримаємо

$$N = \int_A \varepsilon E dA \quad (2.13)$$

Оскільки відносна деформація, як слідує із формули (2.9), та модуль Юнга є для вибраних умов навантаження і матеріалу постійними величинами, отримаємо

$$N = \int_A \varepsilon E dA = \varepsilon E \int_A dA = \varepsilon E A = \sigma A$$

Переписавши вираз в дещо іншому вигляді, отримаємо формулу для визначення *нормального напруження* при розтяганні (стисканні) в довільному поперечному перерізі стержня

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.14)$$

При цьому знак нормального напруження σ , оскільки площа поперечного перерізу A є скалярною величиною, буде визначатись знаком нормальної сили N .

В окремих випадках на величину розрахованого за формулою (2.14) нормального напруження може впливати цілий ряд факторів, серед яких – спосіб прикладення зовнішнього навантаження. Проте для більшості практичних розрахунків його вплив на кінцеві значення є незначним, тому в цих випадках користуються принципом Сен-Венана:

якщо тіло навантажене статичною системою сил, область прикладення яких незрівнянно мала в порівнянні з розмірами всього тіла, то в перерізах, достатньо віддалених від місця прикладення сили, напруження не залежить від способу навантаження.

Принцип Сен-Венана можна прослідкувати на такому прикладі. Візьмемо три стержня однакової довжини і поперечного перерізу. Перший навантажимо повздовжньою зосередженою силою F (рис. 2.5, а), другий – двома силами $F/2$ симетрично до осі (рис. 2.5, б), третій – розподіленим навантаженням загальною величиною F (рис. 2.5, в). При цьому на деякій відстані від місця прикладення сили нормальне напруження буде однаковим для усіх трьох випадків і складатиме величину $\sigma = F/A = N/A$ (за умови, що $F=N$). Експериментальним шляхом

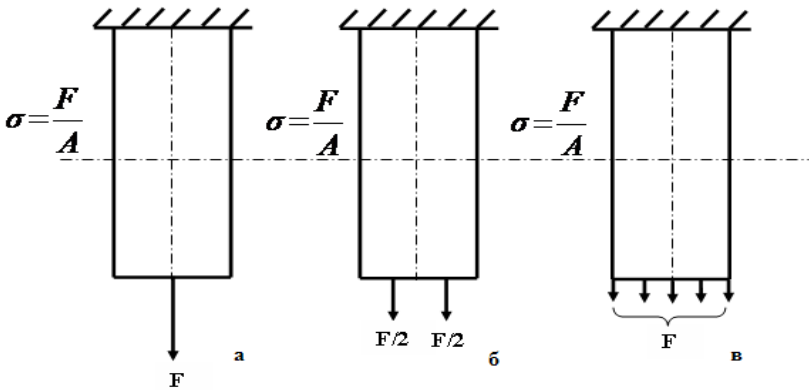


Рис. 2.5.

встановлено, що відстань, за якої напруження вже не залежить від способу навантаження, складає не менше 1,5-2 поперечних розміри (у випадку круглого поперечного перерізу – 1,5–2 діаметри).

Використовуючи формули (2.2), (2.11) і (2.14), напишемо вираз для знаходження абсолютної деформації стержня

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (2.15)$$

Добуток EA називають *жорсткістю поперечного перерізу стержня*, а вираз

$$c = \frac{EA}{l} \quad (2.16)$$

- *жорсткістю стержня під час розтягання (стискання)*.

Розв'язуючи спільно (2.15) і (2.16) отримаємо вираз, який встановлює взаємозв'язок між нормальною силою, абсолютною деформацією та жорсткістю стержня

$$N = \Delta c \quad (2.17)$$

У випадку змінної площі поперечного перерізу стержня деформація окремої ділянки знаходиться шляхом інтегрування відповідних виразів. Загальна деформація тіла являє собою суму деформації всіх його ділянок

$$\Delta l_{\text{заг}} = \sum_{i=1}^n \Delta l_i, \quad (2.18)$$

де $\Delta l_{\text{заг}}$ – загальна деформація тіла, Δl_i - деформація окремої ділянки, n – кількість ділянок.

При експлуатації деталей складної форми, наприклад, багаступінчастих стержнів, часто виникає потреба у знаходженні не лише загальної деформації тіла, а й тієї відстані, на яку зміститься вибраний поперечний переріз відносно іншого, умовно закріпленого, під дією повздовжніх сил. В цьому випадку ведуть мову про **переміщення** поперечного перерізу стержня, яке визначають за формулою

$$\lambda = \frac{Fx}{EA}, \quad (2.19)$$

де λ - переміщення поперечного перерізу стержня, F - величина зовнішнього навантаження, x – відстань до перерізу, переміщення якого визначається, E – модуль Юнга, A – площа поперечного перерізу стержня.

Переміщення стержня λ тісно пов'язане з деформацією Δl : вони мають однакові одиниці виміру і визначаються за схожими формулами. Проте ці фізичні величини не є тотожними. Можна виділити принаймні дві суттєві відмінності:

1. Переміщення поперечного перерізу стержня визначається за допомогою використання величини зовнішньої сили F , в той час як абсолютна деформація – внутрішнього силового фактору N .

2. Переміщення характеризує відстань, на яку змістились один відносно одного два довільно вибрані поперечні перерізи, тобто в загальному випадку переміщення залежить від координати x (відстані до визначеної точки окремої ділянки). Деформація визначається для всього тіла або окремої ділянки в цілому і при зміні координати точки, в якій вона знаходиться, не змінюється.

Очевидно, що при закріпленні одного кінця стержня переміщення іншого кінця буде чисельно дорівнювати абсолютній деформації.

3. Робота зовнішніх сил. Потенційна енергія деформації

В окремих випадках, особливо при проведенні складних розрахунків деталей, які працюють в особливих умовах навантаження, напруження не можна вважати тією фізичною величиною, за допомогою якої можна повною мірою оцінити міцність матеріалу. При втраті міцності (руйнуванні матеріалу) витрачається певна *робота зовнішніх сил*, яка в загальному випадку чисельно дорівнює добутку величини зовнішньої сили на переміщення конкретного перерізу:

$$W = Fr \quad (2.20)$$

де W – робота зовнішніх сил, F – зовнішня сила, r – переміщення.

Розглянемо стержень, який під дією сили F видовжився на величину Δl (рис.2.6). Виділимо елементарну деформацію $d(\Delta l)$. Тоді елементарна робота зовнішніх сил буде визначатись за формулою

$$dW = Fd(\Delta l) \quad (2.21)$$

Для знаходження величини повної роботи зовнішніх сил вираз (2.21) необхідно проінтегрувати в межах значень абсолютної деформації від 0 до Δl , тобто

$$W = \int_0^{\Delta l} Fd(\Delta l) \quad (2.23)$$

Використовуючи формулу (2.17) з урахуванням того, що $N=F$, отримаємо

$$W = \int_0^{\Delta l} c\Delta l d(\Delta l) = c \int_0^{\Delta l} \Delta l d(\Delta l) = \frac{c\Delta l^2}{2}$$

$$W = \frac{c\Delta l^2}{2} \quad (2.24)$$

Або з урахуванням тієї ж формули (2.17) за умови, що $F=N$

$$W = \frac{F\Delta l}{2} \quad (2.25)$$

Виконана зовнішніми силами робота акумулюється у деформованому стержні *потенційною енергією деформації* U . Якщо знехтувати незначними витратами енергії на нагрівання, то можна вважати, що робота зовнішніх сил повністю перетворюється у

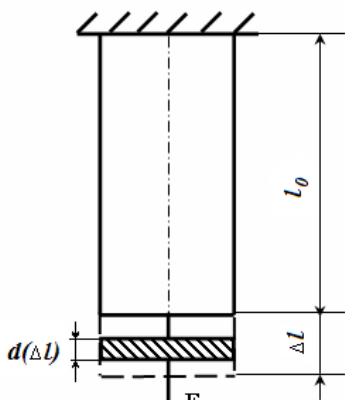


Рис. 2.6.

потенційну енергію деформації. Враховуючи рівність зовнішніх сил F і внутрішніх силових факторів N запишемо

$$U = \frac{N\Delta l}{2} \quad (2.26)$$

Використовуючи формулу (2.15), що встановлює взаємозв'язок між абсолютною деформацією Δl , внутрішніми силами N , геометричними характеристиками зразка та фізико-механічними властивостями матеріалу, отримаємо

$$U = \frac{N^2 l}{2EA} \quad (2.27)$$

При цьому величина U характеризує потенційну енергію деформації всього тіла і, природно, залежить від його геометричних розмірів. Проте в більшості випадків набагато важливіше знайти значення потенційної енергії деформації, що нагромаджується в одиниці об'єму. Для цього знаходять величину *питомої потенційної енергії деформації* u

$$u = \frac{U}{V}, \quad (2.28)$$

де V – об'єм тіла.

Враховуючи, що для більшості стержнів об'єм можна визначити за формулою

$$V = Al \quad (2.29)$$

та розв'язуючи спільно рівняння (2.27), (2.28), (2.29) і (2.14) отримаємо

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.30)$$

З урахуванням математичного виразу закону Гука (формула (2.10)) отримаємо

$$u = \frac{\varepsilon\sigma}{2} \quad (2.31)$$

4. Епюри повздовжніх сил, нормальних напружень, відносних деформацій і переміщень

Побудова епюр є важливим, а в багатьох випадках – обов'язковим компонентом розв'язання більшості задач, що стосуються визначення міцносних чи деформаційних характеристик при розтяганні (стисканні). В основі цієї побудови лежить практична реалізація методу перерізів.

Першим кроком, як правило, є розбиття тіла на ділянки. *Ділянкою* називають частину стержня незмінного поперечного перерізу, що знаходиться між двома сусідніми точками прикладання зовнішніх сил. Якщо на стержень діє розподілене навантаження, то ділянкою вважають ту частину стержня постійного поперечного перерізу, на якій розподілене навантаження змінюється за одним законом.

Побудову епюри починають з незакріпленого кінця, поступово рухаючись до місця кріплення стержня. При цьому для визначення внутрішніх силових факторів (повздовжніх сил) N використовують рівняння статичної рівноваги. Нормальні напруження знаходять за формулою (2.14), для визначення відносної деформації використовують математичний вираз закону Гука (формула (2.11)), а для визначення переміщень – вираз (2.19).

Для уникнення випадків неоднозначного трактування отриманих результатів вводять правило знаків для побудови епюр

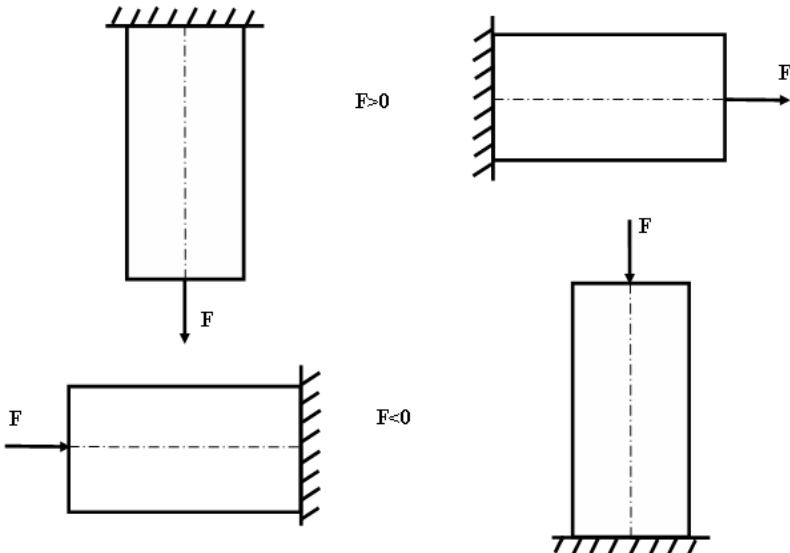
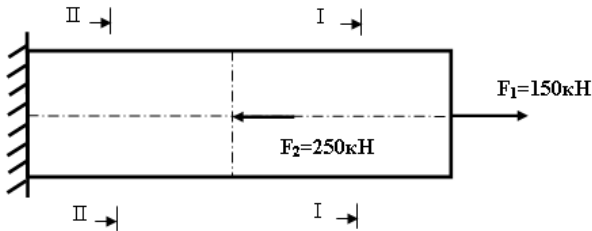


Рис. 2.7.

повздовжніх сил: повздовжня сила вважається додатною, якщо вона викликає розтягання стержня, і від'ємною – якщо викликає його стискання. При цьому напрямки сили відносно загальноприйнятих координатних осей на її знак не впливає (рис. 2.7).

Знак нормальних напружень σ і відносних деформацій ϵ визначається знаком повздовжньої сили N . Прослідкувати взаємозв'язок між знаком N і знаком переміщення λ можна лише на початкових ділянках.

Розглянемо, як описані закономірності використовуються при



практичній побудові епюру повздовжніх сил, наприклад для стержня, зображеного на рис. 2.8. Розіб'ємо стержень на ділянки, починаючи

Рис. 2.8.

будувати епюру з незакріпленого кінця. Враховуючи кількість зовнішніх сил і постійний поперечний переріз стержня, отримаємо дві ділянки (I і II).

В довільному місці першої ділянки розсічено стержень поперечною площиною. Відкинемо одну із частин (в даному випадку – ліву) і будемо розглядати рівновагу лише відсіченої частини. За умови

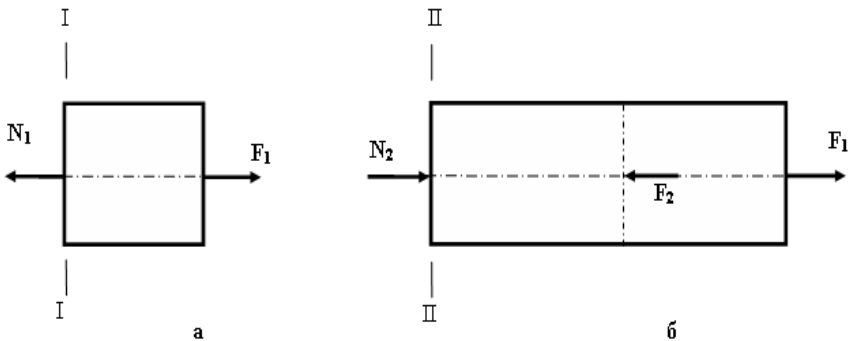


Рис. 2.9.

збереження статичної рівноваги дія зовнішніх сил повинна бути компенсована (урівноважена) дією внутрішніх силових факторів (рис.

2.9, а). Тоді рівняння статички з урахуванням правила знаків (рис. 2.7) для даного випадку буде мати вигляд

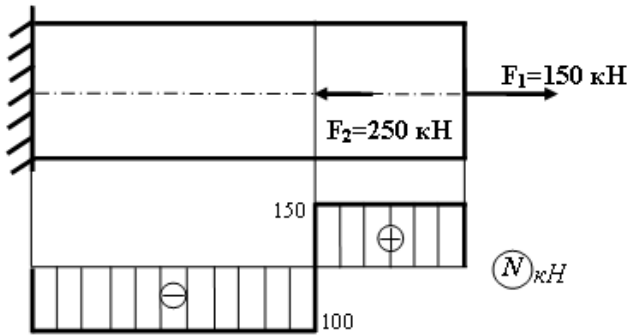


Рис. 2.10

$$N_1 = F_1 = 150 \text{кН} .$$

В довільному місці другої ділянки розсічемо стержень ще однією поперечною площиною. Відкинувши одну із частин і замінивши дію зовнішніх сил внутрішніми силовими факторами (рис. 2.9, б) отримаємо вираз для визначення N_2

$$N_2 = F_1 - F_2 = 150 \text{кН} - 250 \text{кН} = -100 \text{кН} .$$

Знаючи величини N_1 і N_2 на відповідних ділянках, побудуємо епюру повздовжніх сил стержня (рис.2.10).

Розглянемо більш складний випадок побудови епюр для східчастого стержня.

Приклад 2.1. Для зображено на рис. 2.11 східчастого стержня круглого поперечного перерізу ($d_1=20\text{мм}$, $d_2=30\text{мм}$), до якого прикладені повздовжні сили $F_1=30\text{кН}$, $F_2=20\text{кН}$, $F_3=45\text{кН}$ на відстанях $a=2,2\text{м}$, $b=3 \text{ м}$, $c=2\text{м}$ побудувати епюри повздовжніх сил, нормальних напружень, відносних деформацій і переміщень. Частини стержня виготовлені з різних матеріалів: більшого діаметра – з вуглецевої сталі ($E_2=2,0 \cdot 10^5 \text{МПа}$), меншого діаметра – з легованої сталі ($E_1=2,2 \cdot 10^5 \text{МПа}$). При цьому дію власної ваги стержня не враховувати.

Розв'язування

З урахуванням вимоги однакового поперечного перерізу і дії одного силового фактору розіб'ємо стержень на 3 ділянки: перша (I) – АВ, друга (II) – ВС, третя (III) – CD.

Використовуючи умову статичної рівноваги знаходимо величини повздовжніх сил на кожній ділянці стержня:

ділянка I $N_1 = -F_1 = -30кН$

ділянка II $N_2 = -F_1 + F_2 = -30кН + 20кН = -10кН$

ділянка III $N_3 = -F_1 + F_2 + F_3 = (-30 + 20 + 45)кН = 35кН$

Для проведення подальших розрахунків визначаємо площу поперечного перерізу кожної ділянки стержня

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ мм}^2 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

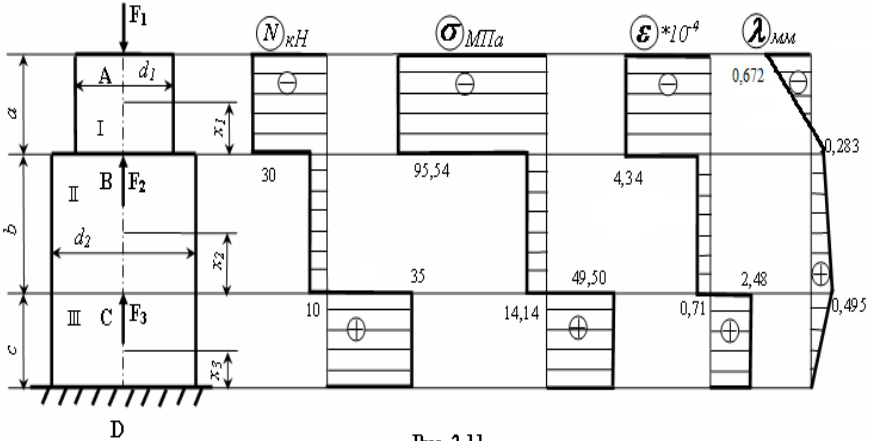


Рис. 2.11

$$A_2 = A_3 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 30^2}{4} = 706,5 \text{ мм}^2 = 7,07 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

Використовуючи формулу (2.14), знаходимо величини нормальних напружень на кожній ділянці стержня

ділянка I

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{30000 \text{ Н}}{3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -95,54 \cdot 10^6 \text{ Па} = -95,54 \text{ МПа}$$

ділянка II

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{10000 \text{ Н}}{7,07 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -14,14 \cdot 10^6 \text{ Па} = -14,14 \text{ МПа}$$

ділянка III

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{35000 \text{ Н}}{7,07 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 49,50 \cdot 10^6 \text{ Па} = 49,50 \text{ МПа}$$

За допомогою формули (2.11) визначаємо відносні деформації на кожній ділянці стержня

$$\text{ділянка I } \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = -\frac{95,54\text{МПа}}{2,2 \cdot 10^5 \text{МПа}} = -0,000434 = -4,34 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{ділянка II } \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = -\frac{14,14\text{МПа}}{2,0 \cdot 10^5 \text{МПа}} = -0,000071 = -0,71 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{ділянка III } \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_2} = \frac{49,50\text{МПа}}{2,0 \cdot 10^5 \text{МПа}} = 0,000248 = 2,48 \cdot 10^{-4}$$

Переміщення знаходимо, використовуючи формулу (2.19) та вважаючи, що $N=F$. При цьому епюру починаємо будувати із закріпленого кінця, зберігаючи, по можливості, прийнятну нумерацію:

$$\text{ділянка III } \lambda_3 = \frac{N_3 x_3}{E_2 A_3}$$

$$\text{при } x_3=0 \lambda_3 = \lambda_D = 0$$

$$\text{при } x_3=c=2\text{м}$$

$$\lambda_3 = \lambda_C = \frac{N_3 c}{E_2 A_3} = \frac{35\text{кН} \cdot 2\text{м}}{2,0 \cdot 10^5 \text{МПа} \cdot 7,07 \cdot 10^{-4} \text{м}^2} = 0,000495\text{м} = 0,495\text{мм}$$

$$\text{ділянка II } \lambda_2 = \lambda_C - \frac{N_2 x_2}{E_2 A_2}$$

$$\text{при } x_2=0 \lambda_2 = \lambda_C = 0,495\text{мм}$$

$$\text{при } x_2=b=3\text{м}$$

$$\lambda_2 = \lambda_B = \lambda_C - \frac{N_2 b}{E_2 A_2} = 0,495\text{мм} - \frac{10\text{кН} \cdot 3\text{м}}{2,0 \cdot 10^5 \text{МПа} \cdot 7,07 \cdot 10^{-4} \text{м}^2} = 0,283\text{мм}$$

$$\text{ділянка I } \lambda_1 = \lambda_B - \frac{N_1 x_1}{E_1 A_1}$$

$$\text{при } x_1=0 \lambda_1 = \lambda_B = 0,283\text{мм}$$

$$\text{при } x_1=a=2,2\text{м}$$

$$\lambda_1 = \lambda_A = \lambda_B - \frac{N_1 a}{E_1 A_1} = 0,283 - \frac{30\text{кН} \cdot 2,2\text{м}}{2,2 \cdot 10^5 \text{МПа} \cdot 3,14 \cdot 10^{-4} \text{м}^2} = -0,672\text{мм}$$

Відклавши отримані значення, побудуємо епюри повздовжніх сил, нормальних напружень, відносних деформацій і переміщень, дотримуючись описаних раніше правил. При цьому додатні значення будемо відкладати справа від вертикальної осі епюри, а від'ємні – зліва (рис. 2.11).

В окремих випадках вплив ваги стержня на отримання кінцевих значень є настільки значним, що ним нехтувати не можна. Тоді для прямолінійних стержнів постійного поперечного перерізу використовують формулу

$$N(x) = \gamma Ax \quad (2.32)$$

де $N(x)$ – поєздовжня сила, викликана власною вагою стержня, γ – питома вага матеріалу, A – площа поперечного перерізу стержня, x – відстань до точки, в якій визначається поєздовжня сила $N(x)$.

Нормальне напруження в таких випадках знаходять, використовуючи вираз

$$\sigma(x) = \frac{N}{A} + \gamma x \quad (2.33)$$

Приклад 2.2. Для східчастого стержня з площею поперечного перерізу окремих ділянок $A_1=2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, $A_2=3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ та їх довжинами $l_1=13 \text{ м}$, $l_2=25 \text{ м}$, що навантажений силою $F=15 \text{ кН}$ (рис. 2.12), побудувати епюри поєздовжніх сил та нормальних напружень. Стержень виготовлений із сталі (питома вага $\gamma = 7,85 \cdot 10^4 \text{ Н / м}^3$).

Розв'язування

Розіб'ємо стержень на дві ділянки: першу (I) – АВ і другу (II) – ВС.

Використовуючи формулу (2.32), визначимо значення поєздовжніх сил.

ділянка I

$$N_1 = F + \gamma A_1 x_1$$

при $x_1=0$

$$N_1 = F = 15 \text{ кН}$$

при $x_1=l_1=13 \text{ м}$

$$N_1 = F + \gamma A_1 l_1 = 15 \text{ кН} + 7,85 \cdot 10^4 \text{ Н / м}^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot 13 \text{ м} = 17,04 \text{ кН}$$

ділянка II

$$N_2 = F + \gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 x_2$$

при $x_2=0$

$$N_2 = F + \gamma A_1 l_1 = 17,04 \text{ кН}$$

при $x_2=l_2=25 \text{ м}$

$$N_2 = F + \gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2 = 15 \text{ кН} + 17,04 \text{ кН} + 7,85 \cdot 10^4 \text{ Н / м}^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot 25 \text{ м} = 22,93 \text{ кН}$$

Використовуючи формулу (2.33), знайдемо величини нормальних напружень

ділянка I

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} + \gamma x_1$$

при $x_1=0$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{15 \text{ кН}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 7,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,5 \text{ МПа}$$

при $x_1=l_1=13 \text{ м}$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} + \gamma l_1 = \frac{15 \text{ кН}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} + 7,85 \cdot 10^4 \frac{\text{ Н}}{\text{ м}^3} \cdot 13 \text{ м} = 8,52 \text{ МПа}$$

ділянка II

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} + \gamma x_2$$

при $x_2=0$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{17,04 \text{ кН}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 5,68 \text{ МПа}$$

при $x_2=l_2=25 \text{ м}$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} + \gamma l_2 = \frac{17,04 \text{ кН}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} + 7,85 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \cdot 25 \text{ м} = 7,64 \text{ МПа}$$

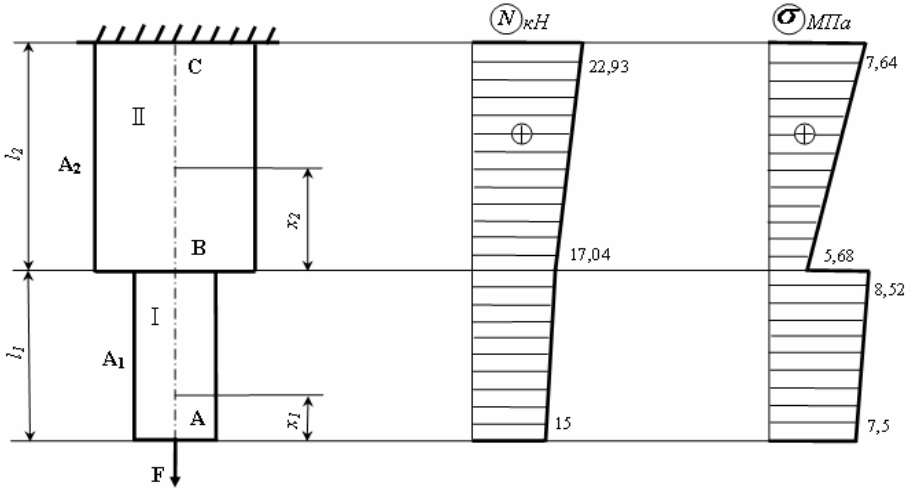


Рис. 2.12

Відклавши отримані значення, побудуємо епюри повздовжніх сил та нормальних напружень (рис. 2.12).

5. Експериментальне вивчення механічних властивостей матеріалів

Обов'язковою умовою проведення більшості розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість деталей механізмів, машин, елементів конструкцій та споруд є знання фізико-механічних властивостей матеріалів, зокрема, міцносних характеристик, модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона тощо. Практично всі ці характеристики отримують дослідним шляхом, проводячи різноманітні випробування – на розтягання, стискання, кручення, зріз, згинання та інші.

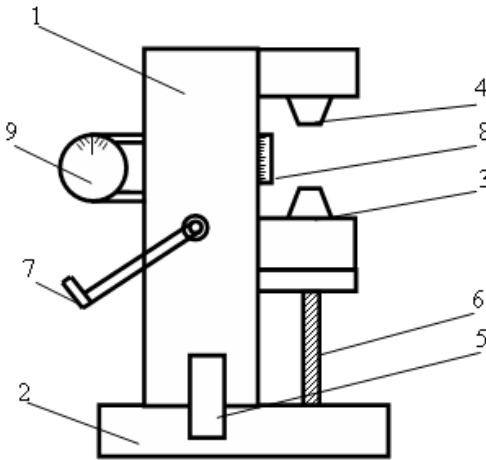


Рис. 2.13.

реалізація випробування на розтягання, як правило, не супроводжується складними технічними проблемами.

У навчальній і виробничій практиці для дослідження матеріалів на розтягання широко використовують розривні машини. Конструктивне виконання їх основних вузлів неоднакове і залежить від типу машини, величини навантаження, потужності тощо.

На рис. 2.13 зображена типова конструкція установки для дослідження матеріалів на розтягання. Ця установка (розривна машина) складається з колони 1, яка монтується на основі 2. Експериментальний зразок закріплюється за допомогою захватів 3 і 4, один з яких є рухомим. Навантажувальний пристрій являє собою редуктор 5 і передачу "гвинт-гайка" 6, через які рух передається до рухомого захвату 3. Передача руху може здійснюватись і ручним способом за допомогою рукоятки 7. Видовження зразка і величина

Найбільш розповсюдженим з цих видів є випробування матеріалів на розтягання. Основна причина полягає в тому, що характеристики матеріалу, отримані в результаті такого випробування, можна тією чи іншою мірою використати при проведенні розрахунків інших видів опору (кручення, зрізу, згинання тощо). До того ж практична

навантаження визначаються за допомогою відповідних вимірювальних пристроїв 8 і 9.

В лабораторних умовах широко використовуються установки для дослідження матеріалів на розтягання (розривні машини) інших конструкцій, одна з яких зображена на рис. 2.14. Ця установка складається із станини 1, на якій монтується електричний двигун 2 з конденсатором 3, редуктор 4, блок керування 5 та два кронштейни 6, 7, на яких закріплені відтарировані пружини 8. До пружин за допомогою болтового з'єднання монтується важіль 9. Експериментальний зразок закріплюється в захватах 10,11, один з яких є рухомим.

При вмиканні електродвигуна 2 рух вала передається на редуктор 4, який забезпечує зменшення частоти його обертання. За

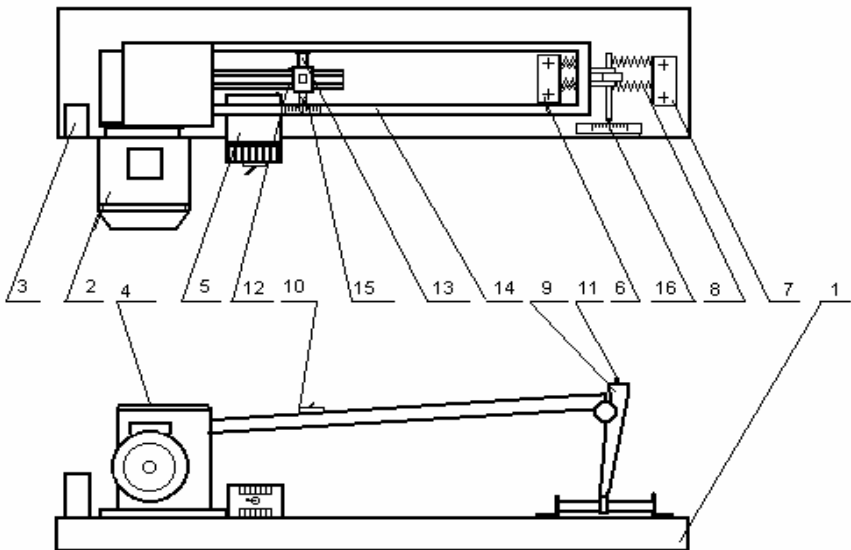


Рис. 2.14.

допомогою передачі гвинт-гайка обертальний рух гвинта 12 перетворюється в поступальний рух навантажувального пристрою 13, можливість переміщення якого забезпечують підшипники кочення, що рухаються по направляючим рами 14. Подовження зразка та величину розтягального навантаження визначають за допомогою відповідних вимірювальних пристроїв 15 та 16.

Слід відзначити, що конструктивні виконання окремих вузлів розривної машини можуть значно відрізнятись один від одного. Так, наприклад, для створення навантаження на зразок часто

використовують електро- чи гідропривід. Величина зусилля може вимірюватись за допомогою важільних, важільно-маятникових, пружинних, електричних та інших пристроїв. Визначення навантаження і деформацій може здійснюватися автоматично за допомогою спеціальних діаграмних апаратів. Проте навіть використання прикріпленого штангенциркуля забезпечує достатню для навчальних цілей точність вимірювання.

Для того, щоб результати досліджень можна було порівняти,

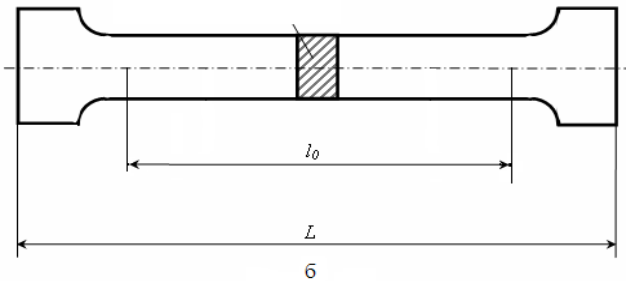
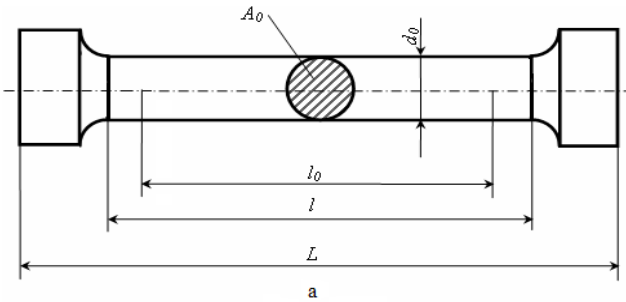


Рис. 2.15

використовують пропорційні циліндричні і плоскі зразки. Основними розмірами циліндричного зразка (рис. 2.15, а) є діаметр робочої частини d_0 , довжина робочої частини l_0 , розрахункова довжина l_0 та загальна довжина зразка L . Для плоского зразка (рис. 2.15, б), крім розрахункової l_0 та загальної довжини L , важливою є

величина площі поперечного перерізу A_0 .

Розрахунковою вважають довжину, на якій визначають деформацію. Її беруть меншою від довжини робочої частини на величину діаметра або товщини зразка з кожної сторони.

$$l_0 \cong l - 2d_0 \quad (2.34)$$

Такий підхід є реалізацією принципу Сен-Венана, оскільки на відстані діаметра (товщини) від початку робочої частини зразка напружений стан однорідний і не залежить від способу прикладення розтягальної сили.

В зразках циліндричної форми повинно витримуватись певне співвідношення між розрахунковою довжиною l_0 і діаметром робочої

частини d_0 . Для довгих зразків це співвідношення повинно складати $l_0=10d_0$, для коротких - $l_0=5d_0$, причому діаметр рекомендується вибирати в межах 3...25мм. Враховуючи, що для циліндричних зразків площа поперечного перерізу дорівнює $A_0=\pi d_0^2/4$, розрахункова довжина довгого зразка пов'язана з площею таким співвідношенням

$$l_0 \approx 11,3\sqrt{A_0} \quad (2.35)$$

Для коротких зразків

$$l_0 \approx 5,65\sqrt{A_0} \quad (2.36)$$

Ширина плоского зразка, яка приймається в межах 3...25 мм, повинна бути втричі більша його товщини. При цьому співвідношення між розрахунковою довжиною і площею зберігається.

Використання зразків із загальноприйнятими співвідношеннями основних розмірів підвищує достовірність отриманих даних. Проте для навчальних цілей, особливо у випадку наявності певних обмежень, що накладаються технічними можливостями розривної машини, допускається використання інших зразків. Отримані у цьому випадку значення фізико-механічних характеристик матеріалу можуть дещо відрізнятися від довідкових, але основні закономірності процесу розтягання при цьому зберігаються.

6. Діаграма розтягання

Для вивчення поведінки матеріалу під час його дослідження на розтягання закріплений зразок навантажують повільно зростаючою силою, що направлена вздовж його осі. При цьому фіксують величину сили розтягання F і подовження зразка Δl . За результатами експерименту будують початкову діаграму розтягання (рис. 2.16), в якій по осі ординат відкладають зусилля F , а по осі абсцис – відповідні до них подовження Δl .

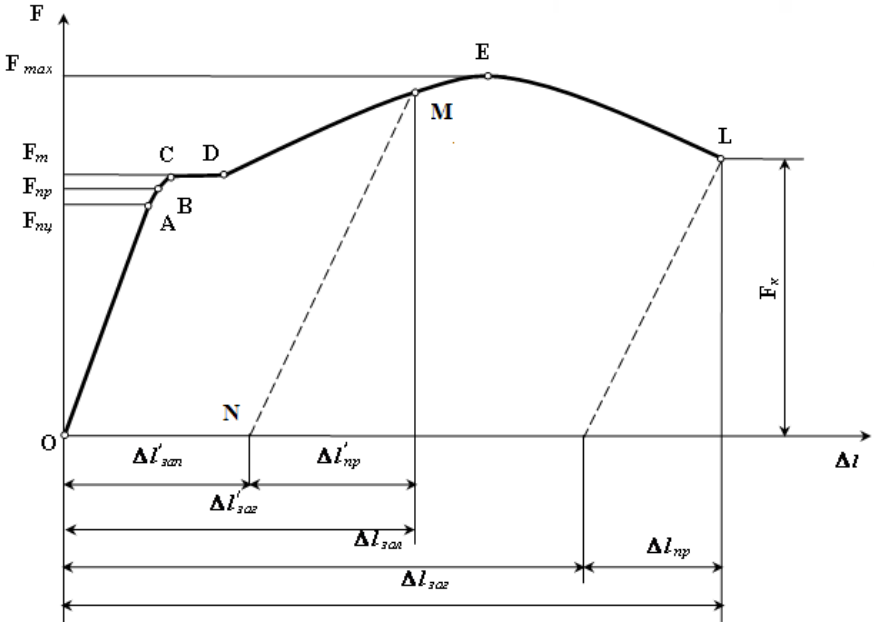


Рис. 2.16.

Розглянемо характерні ділянки і точки діаграми. На ділянці OA спостерігається лінійна залежність між навантаженням зразка і його подовженням. Це означає, що на цій ділянці виконується закон Гука. Максимальне напруження, за якого ще справджується закон Гука називається **границею пропорційності**

$$\sigma_{нц} = F_{нц}/A_0 \quad (2.37)$$

де $F_{нц}$ – сила, за якої закон пропорційності припиняє свою дію, A_0 – початкова площа поперечного перерізу зразка.

При переході за точку A справедливості закону Гука порушується: подовження проходить інтенсивніше за ріст сили F . В результаті пряма OA поступово переходить в криву AB . Ділянка OB характеризує пружну стадію розтягання, а сила, що відповідає точці B

діаграми, позначається F_{np} . Найбільше напруження, за якого залишкова деформація при розвантаженні не спостерігається, називається **границею пружності**

$$\sigma_{np} = F_{np}/A_0 \quad (2.38)$$

Границя пружності є характеристикою, мало пов'язаною з законом Гука. Точка B може бути розміщена як вище, так і нижче точки A . Проте на практиці положення цих точок, а значить і значення напружень σ_{nc} і σ_{np} , близькі і різницею між ними, як правило, нехтують.

В точці C крива переходить в горизонтальну або майже горизонтальну ділянку CD . На цій стадії зразок подовжується при постійному значенні розтягальної сили, яка позначається F_m . В цьому випадку кажуть, що матеріал “тече”, а горизонтальну ділянку CD називають площадкою текучості. Найменше напруження, за якого деформація зразка проходить при постійному зусиллі, називається

границею текучості

$$\sigma_m = F_m/A_0 \quad (2.39)$$

При досягненні границі текучості попередньо полірована поверхня зразка стає матовою, оскільки на ній з'являється густа сітка ліній, нахилених до осі приблизно під кутом 45° . Ці лінії називаються лініями Чернова-Людєрса. Вони виникають внаслідок зсуву в площинах, де діють максимальні дотичні напруження (рис. 2.17).

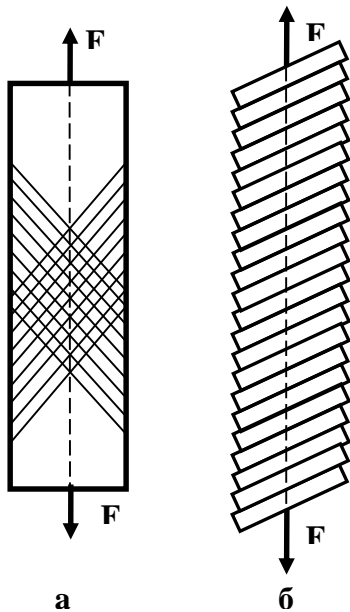


Рис. 2.17.

досліджуваний матеріал, називається **границею міцності** або **тимчасовим опором**

$$\sigma_m = \sigma_{m0} = F_{max}/A_0 \quad (2.40)$$

Основні механічні характеристики найбільш розповсюджених конструкційних матеріалів наведені в додатках 3-6.

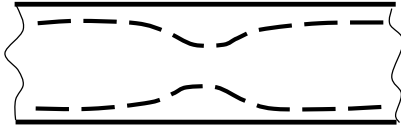


Рис. 2.18.

Після досягнення максимального навантаження при подальшому розтягуванні деформація зразка проходить головним чином на невеликій ділянці. Це приводить до утворення шийки (рис. 2.18) і до зменшення сили F . Значення **критичного напруження**

$$\sigma_k = F_k/A_0, \quad (2.41)$$

де F_k – розтягальна сила в момент розриву, носить умовний характер, оскільки в формулі (2.41) враховується початкова площа поперечного перерізу.

Точка L відповідає розриву зразка. **Дійсне напруження в момент розриву** можна знайти за такою залежністю

$$\sigma_0 = F_{роз}/A_{ш} \quad (2.42)$$

де $A_{ш}$ - площа поперечного перерізу шийки, $F_{роз}$ - зусилля розриву, яке чисельно дорівнює значенню сили F_k .

Враховуючи, що на практиці дуже складно встановити початок відхилення від закону пропорційності чи момент появи перших залишкових деформацій, вводять поняття умовної границі пропорційності та умовної границі пружності

Умовною границею пропорційності називають найменше напруження, за якого відхилення від лінійної залежності між напруженням та деформацією досягає деякого значення, що встановлюється технічними умовами (наприклад, 0,002% від вимірюваної довжини зразка)

Умовною границею пружності називають найменше напруження, за якого залишкова деформація досягає заданої величини (як правило, 0,001-0,05% від довжини зразка). Цю величину вказують у вигляді нижнього індексу відповідно до заданого значення залишкової деформації (наприклад, $\sigma_{0,001}$ або $\sigma_{0,05}$).

Крім того, існують метали, які при розтяганні не утворюють площадки текучості. Для них границя текучості визначається умовно. Умовною границею текучості називають напруження, за якого залишкова деформація складе величину, що встановлена державним стандартом або технічними вимогами. Згідно з державними стандартами, величина залишкової деформації складе 0,2% від довжини зразка і при позначенні вказується у вигляді нижнього індексу ($\sigma_{0,2}$).

Важливе значення має дослідження поведінки зразка при його розвантаженні і повторному навантаженні. Якщо цей процес

здійснювати при досягненні зусилля, що лежить в межах пружної стадії деформації (ділянка OB), то лінія розвантаження буде практично збігатись з лінією OB діаграми розтягання. Подовження зразка при цьому повільно зникає, а побудова діаграми при повторному навантаженні дасть практично такий же (як і у першому випадку) результат.

Якщо розвантаження здійснювати з точки, що лежить за межами ділянки пружності, наприклад з точки M діаграми розтягання, зображеної на рис. 2.16, то цей процес буде описуватись вже не кривою $MDCBAO$, а прямою MN , що паралельна лінії OA . При цьому подовження зразка повністю не зникає, тому загальна (повна) деформація буде складатися з двох частин – пружної і залишкової (пластичної).

$$\Delta l_{заг} = \Delta l_{пр} + \Delta l_{зал} \quad (2.43)$$

де $\Delta l_{заг}$ - загальна деформація (подовження), $\Delta l_{пр}$ - пружна частина деформації (подовження), $\Delta l_{зал}$ - залишкова (пластична) частина деформації (подовження).

Повторне навантаження буде спричиняти зміну абсолютної деформації за майже прямо пропорційним законом, утворюючи на діаграмі лінію, що майже збігається з лінією розвантаження MN . При цьому границя пропорційності підвищується до того значення напруження, до якого був розтягнутий зразок. В той же час початок координат фактично переміститься в точку N , а залишкове подовження після розриву буде меншим, ніж у випадку навантаження зразка, що не зазнав попередньої пластичної деформації.

Розвантаження деформованого зразка, що перебував за межею границі текучості, змінює деякі механічні характеристики матеріалу, зокрема, підвищує величину границі пропорційності та зменшує залишкове подовження після розриву (робить зразок більш крихким). Таку зміну механічних властивостей внаслідок деформації матеріалу за границею текучості називають **наклепом**. В багатьох випадках наклеп вважається достатньо корисним явищем, і його намагаються створити тими чи іншими технологічними методами.

При статичних випробуваннях металів на розтягання крім параметрів, що характеризують міцність, визначають ще й параметри пластичності. Пластичність в даному випадку проявляється в тому, що під дією навантаження зразки з різних матеріалів подовжуються чи звужуються неоднаковою мірою. Ці характеристики також можна отримати за допомогою діаграми розтягання.

Відносним залишковим подовженням δ (%) називають відношення абсолютного подовження зразка після розриву до його початкової довжини

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{заг}}}{l_0} 100\% = \frac{l_{\text{роз}} - l_0}{l_0} 100\% \quad (2.44)$$

де $l_{\text{роз}}$ - довжина розрахункової частини зразка після розриву, l_0 - початкова розрахункова довжина зразка.

Відносним залишковим звуженням ψ (%) називають відношення величини зменшення площі поперечного перерізу зразка після розриву до початкової площі

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{ш}}}{A_0} 100\% \quad (2.45)$$

де A_0 - початкова площа поперечного перерізу зразка, $A_{\text{ш}}$ - площа поперечного перерізу шийки.

Використовуючи діаграму розтягання (рис 2.16), можна наближено визначити *повну роботу деформації* (W)

$$W = F_{\text{max}} \Delta l_{\text{заг}} \varphi, \quad (2.46)$$

де F_{max} - найбільше зусилля, яке може сприйняти зразок, $\Delta l_{\text{заг}}$ - загальна абсолютна деформація, φ - коефіцієнт заповнення діаграми, який для «м'якої» сталі дорівнює приблизно 0,85.

Робота, що витрачається на *деформацію і розрив розрахункової частини зразка* ($W_{\text{роз}}$), визначається за формулою

$$W_{\text{роз}} = F_{\text{max}} \Delta l_{\text{зал}} \varphi, \quad (2.47)$$

де $\Delta l_{\text{зал}}$ - залишкова абсолютна деформація.

Питома робота деформації w_0 характеризує в'язкість матеріалу, його здатність поглинати енергію при розриві та чинити опір дії динамічного навантаження. Вона визначається за формулою

$$w_0 = W_{\text{роз}} / V, \quad (2.48)$$

де $V = A_0 l_0$ - об'єм зразка.

Практичне використання діаграми розтягання, побудованої в координатах $F-\Delta l$, носить дещо обмежений характер, оскільки її вигляд залежить не лише від фізико-механічних властивостей матеріалу, а й від розмірів зразка. З метою уникнення залежності від геометричних характеристик деталей, початкову діаграму розтягання перебудовують в координатах $\sigma-\varepsilon$ (крива 1, рис. 2.19). Для цього значення розтягальної сили F ділять на початкову площу поперечного перерізу A_0 (формула 2.14), а величину подовження зразка Δl - на його початкову довжину l_0 (формула 2.2).

Точкам O, A, B, C, D, E, F початкової діаграми розтягання, побудованої в координатах $F-\Delta l$, відповідають точки O, a, b, c, d, e, f діаграми, побудованої в координатах $\sigma-\varepsilon$. Ординати характерних точок (значення границь пропорційності, пружності, текучості, міцності та критичного напруження) визначають за формулами (2.37), (2.38), (2.39),

(2.40), (2.41) відповідно. Загалом, оскільки абсолютне подовження Δl прямо пропорційне відносному видовженню ε , а сила F прямо пропорційна нормальному напруженню σ , обидві діаграми (рис. 2.16 та крива 1 рис. 2.19) відрізняються лише масштабами осей абсцис і ординат.

Аналізуючи вигляд діаграми розтягання σ - ε (крива 1, рис. 2.19) можна помітити певне протиріччя: експериментальний зразок, витримавши більше за величиною напруження σ_m , зруйнувався при меншому напруженні σ_k . Це пояснюється тим, що однією з умов побудови цієї діаграми було те, що значення розтягувальної сили ділилось на початкову площу поперечного перерізу. З цієї причини криву 1 (рис. 2.19) називають *умовною діаграмою розтягання*.

Насправді площа поперечного перерізу зразка внаслідок присутності не лише поздовжньої, а й поперечної деформації, постійно змінюється (в даному випадку – зменшується). Різниця в цих значеннях

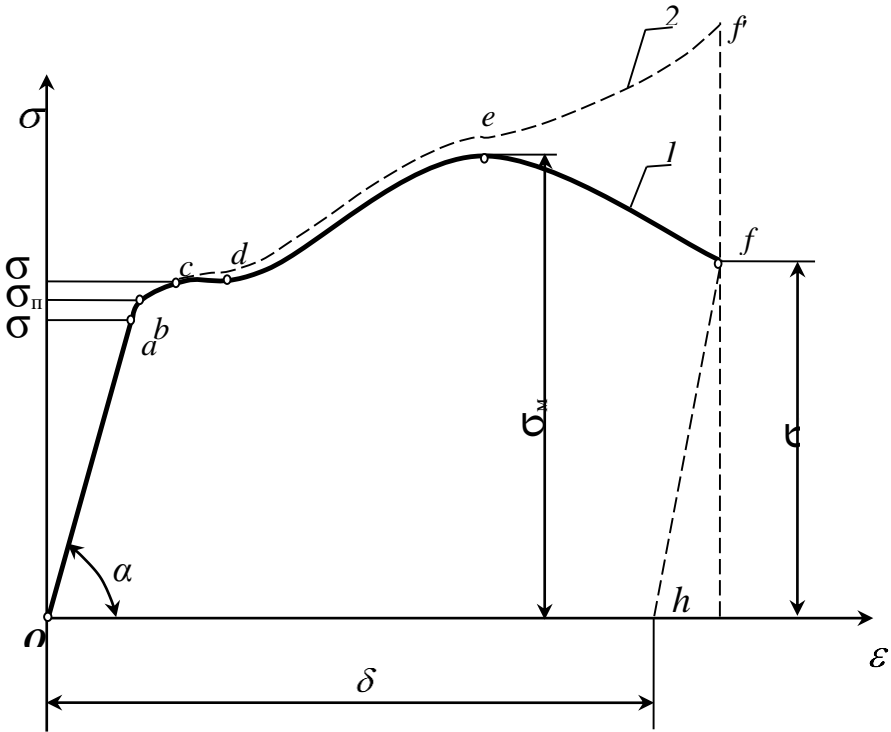


Рис. 2. 19.

стає особливо відчутною при утворенні шийки. Тому для побудови дійсної діаграми розтягання (крива 2, рис. 2.19) величину розтягувальної сили ділять на дійсну площу поперечного перерізу.

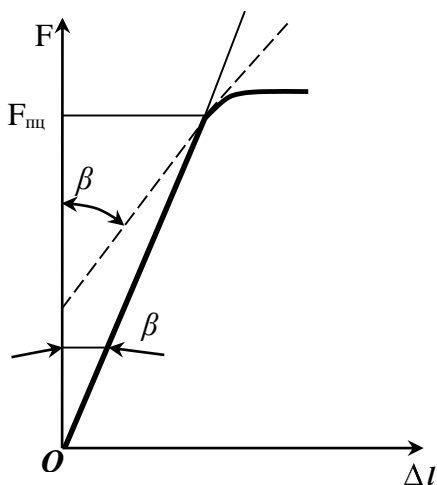


Рис. 2.20.

Використовуючи діаграму розтягання σ - ε можна отримати значення ряду важливих фізико-механічних характеристик матеріалу. Наприклад, для сталей границю пропорційності вважають досягнутою тоді, коли різко (приблизно на 50%) змінюється величина Δl (рис. 2.20), що відповідає збільшенню тангенса кута між прямолінійною ділянкою діаграм F - Δl і віссю ординат приблизно в 1,5 рази ($\text{tg}\beta_{\text{тщ}} \approx 1,5\text{tg}\beta$).

Границю текучості σ_m , особливо у випадку відсутності чітко вираженої площадки, можна знайти за наближенням залежність

$$\sigma_m \approx 1,2\sigma_{\text{тщ}} \quad (2.49)$$

Для знаходження модуля Юнга використовують прямолінійну ділянку діаграми σ - ε (рис. 2.21). Враховуючи визначення функції тангенса та математичний вираз закону Гука (формула 2.10), модуль Юнга можна знайти з такого виразу

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{tg}\alpha \quad (2.50)$$

де α - кут між прямолінійною ділянкою діаграми σ - ε та віссю абсцис.

Фактично геометричний зміст модуля пружності першого ряду (модуля Юнга) полягає в тому, що він являє собою тангенс кута нахилу до осі абсцис прямолінійної ділянки діаграми розтягання, побудованої в координатах σ - ε .

Суттєві відмінності має характер поведінки при розтяганні зразків, виготовлених із крихких матеріалів, до яких звичайно відносяться матеріали з відносним залишковим видовженням менше 5% ($\delta < 5\%$). Розрив таких зразків відбувається при дуже невеликому подовженні без утворення шийки. Діаграма розтягання, наприклад, сірого чавуну (рис. 2.22) являє лінію малої кривизни. Тому в практичних розрахунках цілком виправданим є застосування закону Гука.

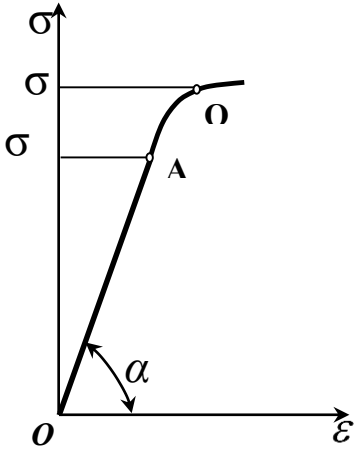


Рис. 2.21.

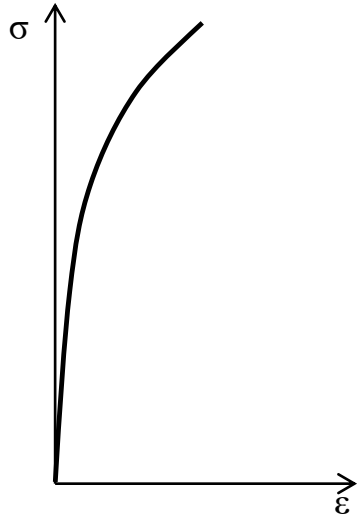


Рис. 2.22.

7. Діаграма стискання пластичних, крихких та анізотропних матеріалів.

Дослідження на стискання, не дивлячись на його простоту, проводять рідше, ніж на розтягання. Пояснюється це тим, що для більшості пластичних матеріалів границя пропорційності $\sigma_{пц}$, модуль Юнга E , границя пружності $\sigma_{пр}$, границя текучості $\sigma_{т}$ при стисканні такі ж, що й при розтяганні.

Випробовування матеріалів на стискання здійснюють на розривних машинах (рис. 2.13) або спеціальних пресах. Звичайно використовуються зразки порівняно невеликої висоти з круглим або квадратним поперечним перерізом. Деформаційні та міцносні характеристики циліндричного зразка суттєво залежать від відношення його висоти до діаметра. Так, наприклад, при необґрунтованому збільшенні висоти зразка під час його дослідження на стискання може виникнути значне бокове розширення.

На результати випробувань і характер руйнування зразка суттєво впливають умови тертя на його торцях. У звичайних умовах деформування крихкі матеріали при розтяганні руйнуються в результаті розриву. При стисканні внаслідок тертя, що виникає на опорних поверхнях, відрив ускладнюється і зразок руйнується по похилих площадках. Якщо силу тертя зменшити, наносячи на контактуючі поверхні, наприклад, шар парафіну, руйнування відбудеться по-іншому: спочатку на зразку утворюються тріщини, паралельні напрямку стискальної сили, а потім відбудеться розшарування зразка.

Під дією стискального навантаження характер поведінки зразків з різних матеріалів помітно відрізняється один від одного.

Однією з особливостей поведінки пластичних матеріалів при стисканні є відсутність в багатьох випадках руйнування зразка чи подрібнення його на частини. Тому напруження, що відповідає руйнівній силі, при стисканні пластичних матеріалів отримати не можна: стискальна сила постійно зростає, а зразок, не руйнуючись, перетворюється в диск. Характеристики, аналогічні отриманим при розтяганні відносному подовженню і відносному звууженню, в процесі дослідження пластичних матеріалів на стискання також не можна отримати. Тому пластичні матеріали обов'язково випробовують на стискання лише в окремих випадках: наприклад, сталі при виготовленні кулькових чи роликових підшипників.

Початкова ділянка діаграми стискання зразків з маловуглецевої сталі являє собою пряму (рис. 2.23), яка відображає пропорційну залежність між деформацією зразка і навантаженням (закон Гука).

Відношення сили F'_{nc} до початкової площі поперечного перерізу зразка A_0 називається *границею пропорційності* сталі при стисканні:

$$\sigma'_{nc} = F'_{nc}/A_0 \quad (2.51)$$

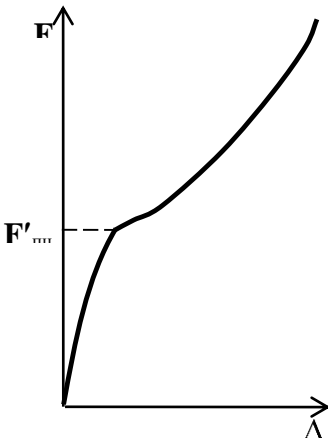


Рис. 2.23.

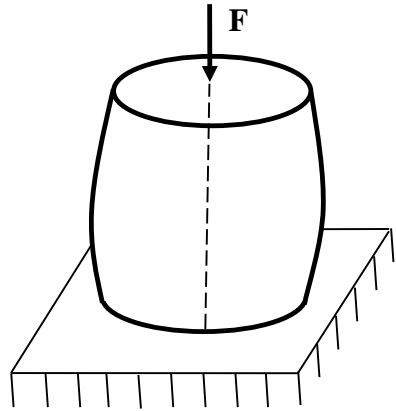


Рис. 2.24.

В процесі подальшого навантаження спостерігається значний приріст деформації, тобто матеріал «тече», але без явно вираженої площадки текучості. Циліндричний зразок починає набувати діжку подібної форми (рис. 2.24). Щоб деформація зроста, стискальне навантаження різко збільшують. При цьому внаслідок збільшення перерізу зразка деформації зростають повільніше. В результаті зразок не руйнується, а розплющуються, деколи з утворенням тріщин. Тому пластичні матеріали при стисканні не мають границі міцності - чітко виражена лише границя пропорційності.

Дослідженню на стискання піддають головним чином крихкі матеріали: чавун, фарфор, природні і штучні будівельні матеріали тощо. Ці матеріали, як правило, краще чинять опір стисканню, ніж розтягання, і використовуються для виготовлення елементів, що працюють на стискання. Для їхнього розрахунку на міцність необхідно знати характеристики, що були отримані при такому виді досліджень.

При стисканні чавунного зразка практично з початку навантаження і до моменту руйнування спостерігається нелінійна залежність між силою і деформацією. Але в умовах тих невеликих деформацій, при яких матеріал використовують в різних деталях машин та елементах конструкцій, діаграма $F-\Delta h$ являє собою лінію малої кривизни (рис. 2.25). Тому в практичних розрахунках вважають, що поведінка матеріалу підлягає закону Гука. Чітко виражене лише

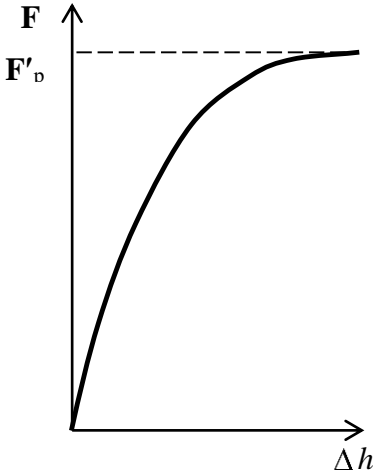


Рис. 2.25.

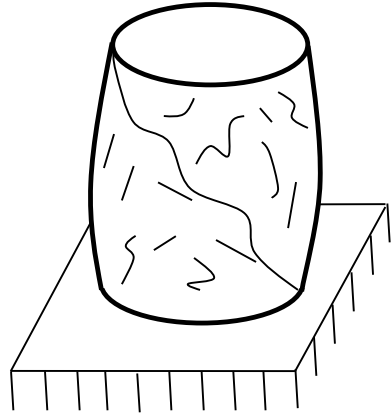


Рис. 2.26.

руйнівне навантаження F'_p , яке до того ж є максимальним. Відношення сили F'_p до початкової площі поперечного перерізу зразка A_0 називають *границею міцності* σ'_m або *тимчасовим опором* σ'_{m0} чавуну при стисканні

$$\sigma'_m = \sigma'_{m0} = F'_p / A_0 \quad (2.52)$$

Зразок, вкорочуючись, набуває діжкоподібної форми. Це свідчить про наявність невеликих пластичних деформацій. Руйнування здійснюється по площинам, нахиленим до осі зразка під кутом $\alpha \approx 40^\circ \dots 50^\circ$, тобто під дією максимальних дотичних напружень (рис. 2.26). При руйнуванні навантажувальна здатність чавуну падає практично миттєво, що є характерним для крихких матеріалів.

На стискання часто досліджують анізотропні матеріали, зокрема, деревину. Ці матеріали відзначаються різними характеристиками міцності в залежності від напрямку стискальної сили по відношенню до напрямку волокон. При цьому слід розрізняти стискання поперек волокон по радіусу стовбура і вздовж річного шару (по дотичній до кола).

Дослідження дерев'яного зразка як представника анізотропних матеріалів проводять вздовж і поперек волокон. Діаграма стискання зразка вздовж волокон, побудована в координатах $F-\Delta h$ (рис. 2.27, крива 1), зовні схожа на діаграму стискання чавуну. При цьому пропорційність між навантаженням і деформацією спостерігається майже до моменту руйнування. Хоча в багатьох випадках має місце незначна нелінійність, яка трохи зростає при збільшенні стискального зусилля. Після

досягнення максимального навантаження зразок руйнується не відразу, а величина сили F при цьому дещо зменшується.

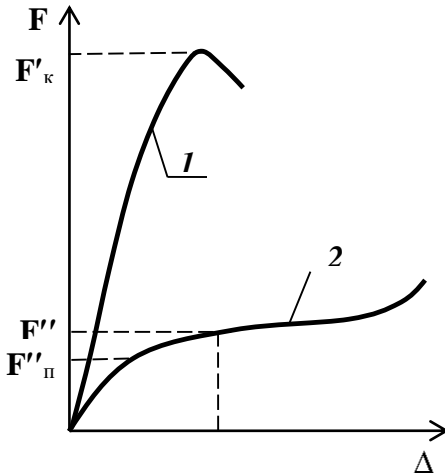


Рис. 2.27.

До деякої точки A спостерігається пропорційна залежність між силою і деформацією. Це дозволяє визначити *границю пропорційності* $\sigma''_{пч}$, яка являє собою відношення сили $F''_{пч}$ до початкової площі поперечного перерізу A_0

$$\sigma''_{пч} = F''_{пч} / A_0 \quad (2.54)$$

З подальшим збільшенням навантаження деревина здатна сильно ущільнюватись без видимих ознак руйнування. Момент втрати несучої здатності зафіксувати дуже складно. Тому вважають, що руйнівне навантаження настає тоді, коли зразок стискається на одну третину своєї початкової висоти. Відношення сили $F''_к$ до A_0 називають *границею міцності* $\sigma''_м$ або *тимчасовим опором* $\sigma''_{то}$ деревини при стисканні поперек волокон:

$$\sigma''_м = \sigma''_{то} = F''_к / A_0 \quad (2.55)$$

Руйнування твердих порід супроводжується також зсувом по похилім площадкам. Це означає, що деревина руйнується і під дією дотичних напружень.

Порівнюючи характер поведінки дерев'яних зразків в залежності від напрямку дії стискального навантаження, можна дійти до висновку, що при стисканні вздовж волокон зразок значно менше деформується, ніж при стисканні поперек волокон. Міцність зразка в першому випадку в 7...10 разів вища, ніж у другому, а характер руйнування в обох випадках помітно відрізняється один від одного.

Відношення сили $F'_к$ до початкової площі поперечного перерізу зразка A_0 , називають *границею міцності* $\sigma'_м$ або *тимчасовим опором* $\sigma'_{то}$ дерева вздовж волокон:

$$\sigma'_м = \sigma'_{то} = F'_к / A_0 \quad (2.53)$$

Руйнування зразка в цьому випадку проходить, як правило, з утворенням поперечних складок і змінанням торців.

При стисканні зразка поперек волокон діаграма $F-\Delta h$ має інший вигляд (рис. 2.27, крива 2). До деякої

Однією з головних характеристик при дослідженні дерев'яних зразків на стискання є коефіцієнт анізотропії K , який характеризує різні механічні властивості дерева вздовж і поперек волокон,

$$K = \sigma'_m / \sigma''_m \quad (2.56)$$

де σ'_m - границі міцності при стисканні вздовж волокон, σ''_m - границя міцності при стисканні поперек волокон.

8. Твердість

Однією з найважливіших характеристик матеріалу є його *твердість*, тобто здатність чинити опір механічному проникненню в поверхневий шар іншого, більш твердого тіла (індентора). Найчастіше в якості такого тіла, що вдавлюється в досліджуваний зразок, використовують індентори у вигляді кульки, конуса або піраміди.

В результаті вдавлювання поверхневі шару металу пластично деформуються. Після зняття навантаження залишається відбиток, за розмірами якого і визначають твердість матеріалу. Очевидно, що величина відбитку буде тим менша, чим твердіший досліджуваний матеріал. На практиці використовують три основні методи визначення твердості – за Брінеллем, Роквеллом та Віккерсом.

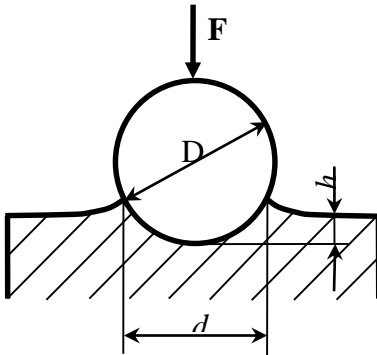


Рис.2.28

Твердість за методом Брінелля визначають шляхом вдавлювання в досліджуваний зразок під дією визначеного навантаження F протягом повного часу загартованої металеві кульки діаметром D .

В результаті такого вдавлювання (рис. 2.28) на поверхні зразка отримуємо відбиток (лунку) діаметром d і глибиною h . Тоді число твердості за Брінеллем, яке позначається HB , являє собою відношення навантаження F до площі поверхні сферичного

відбитка A .

$$HB = \frac{F}{A} \quad (2.57)$$

В залежності від розмірності F та A , твердість за Брінеллем може визначатись в $кгс/мм^2$ або $МПа$, тобто має розмірність напруження.

Оскільки глибину h як обов'язковий параметр для знаходження площі сферичного відбитку визначити складніше, ніж його діаметр d , число твердості за Брінеллем визначають за такою формулою

$$HB = \frac{2F}{\pi D \left(D - \sqrt{D^2 - d^2} \right)} \quad (2.58)$$

При вимірюванні твердості за методом Роквелла в якості індентора використовують алмазний конус або загартовану металеву кульку. На відміну від методу Брінелля твердість визначають не за

площею відбитку, а за його глибиною безпосередньо в процесі вдавлювання, що дещо спрощує процес випробовування.

Число твердості за Роквеллом не має розмірності і того фізичного змісту, що має число твердості за Брінеллем. Його вимірюють на спеціальному приладі (приладі Роквелла) за трьома шкалами в залежності від матеріалу і форми індентора та загального діючого навантаження: при використанні алмазного конуса в залежності від навантаження – за шкалою *C* (позначається *HRC*) та шкалою *A* (позначається *HRA*), при використанні сталеві кульки – за шкалою *B* (позначається *HRB*).

При дослідженні на твердість за методом Віккерса в поверхню матеріалу вдавлюється алмазна чотиригранна піраміда. Після зняття навантаження вимірюється діагональ відбитка. Число твердості за Віккерсом, яке позначається *HV*, визначається як відношення навантаження до площі поверхні відбитка.

Достатньо широке розповсюдження досліджень на твердість пояснюється рядом переваг перед іншими видами випробувань:

- простота вимірювання, що не вимагає спеціальних зразків;
- можливість вимірювань твердості безпосередньо на деталях, що перевіряються;
- можливість подальшого використання деталей, що перевірялись, оскільки вимірювання твердості, як правило, не призводить до їх руйнування;
- за результатами вимірювання можливість орієнтовно оцінити інші характеристики матеріалу, зокрема, границю міцності.

Наприклад, знаючи число твердості за Брінеллем, можна з достатньою для практичних розрахунків точністю визначити границю міцності (тимчасовий опір) при розтяганні за такою формулою

$$\sigma_m = \sigma_{m0} = k \cdot HB \quad (2.59)$$

k - коефіцієнт, що залежить від матеріалу. Зокрема для сталей з *HB*=120...175 *k*=0,34, для сталей з *HB*=175...450 *k*=0,35, для міді, латуні і відпаленої бронзи *k*=0,55, для алюмінію і його сплавів *k*=0,33...0,36.

9. Вплив різних факторів на механічні властивості матеріалів

При проведенні практичних розрахунків використовують чимало показників, які характеризують механічні властивості матеріалу (модуль Юнга, границя міцності, відносне залишкове видовження тощо). Значення цих характеристик визначається природою самого матеріалу і залежить від властивостей хімічних елементів, типу хімічного зв'язку, типу ґратки (для кристалічних тіл) тощо.

Зокрема, *іонний зв'язок* загалом характеризується обмеженою можливістю переміщення одного атома відносно іншого. Тому, наприклад, кам'яна сіль ($NaCl$), яка до того ж має кубічну кристалічну ґратку, відзначається достатньо великою твердістю та міцністю при стисканні, але дуже незначними характеристиками пластичності (великою крихкістю).

Натомість, сталі як найрозповсюдженіший конструкційний матеріал мають *металевий зв'язок*, найхарактернішою ознакою якого є наявність спільних вільних електронів. Наслідком цього є достатньо великі характеристики пластичності (відносне залишкове видовження, відносне залишкове звуження) при збереженні достатніх для широкого практичного використання міцносних показників.

Додавання інших хімічних елементів навіть в незначних кількостях (для сталей цей процес називають легуванням) здатне помітно змінити механічні властивості матеріалу. Так, марганець і кремній здатні суттєво підвищити твердість сталі, зменшуючи в той же час характеристики пластичності.

Невеликі добавки хрому надають металу твердості та стійкості проти спрацювання. Збільшення кількості цього хімічного елементу дозволяє сталі витримувати температуру до $1000^{\circ}C$. Нікель здобув широке застосування не лише завдяки своїй здатності захищати метал від корозії, а й тому, що його використання в якості легуючого елементу дозволяє суттєво збільшити твердість сталі, не знижуючи при цьому характеристик пластичності.

Використання вольфраму і молібдену дає змогу значно підвищити твердість та міцність сталі, особливо при високих температурах, хоча характеристики пластичності при цьому дещо погіршуються. Введення карбиду титану до деяких твердих сплавів підвищує їх різальні властивості та поліпшує якість обробленої поверхні.

В той же час існує цілий ряд факторів, які для матеріалів однакового хімічного складу здатні суттєво змінити їх механічні властивості. До таких факторів можна віднести:

- швидкість навантаження;

- спосіб виготовлення (технологічний фактор);
- термічна (хіміко-термічна) обробка;
- температура;
- час дії навантаження;
- особливості форми деталей (концентратори напружень).

Збільшення швидкості навантаження, що призводить до відповідного зростання напруження та деформації, у більшості конструкційних матеріалів, які перебувають за межею границі пружності, веде до росту опору деформуванню. Значення границі текучості та границі міцності при цьому зростають, а модуль Юнга практично не змінюється.

По-різному впливає на механічні властивості матеріалів, зокрема, сталей, той чи інший спосіб (технологія) виготовлення деталей. Зокрема, лиття звичайно супроводжується утворенням різноманітних внутрішніх дефектів (порожнин, включень) та дефектів поверхні (раковин, тріщин). Природно, що це призводить до зменшення міцносних і деформаційних характеристик заготовок, які в більшості випадків піддаються подальшій механічній обробці.

Прокатування сталей призводить до їх анізотропії: зерна витягуються в одному напрямку, утворюючи своєрідні волокна. Це призводить до того, що механічні властивості металу в напрямку прокатування і перпендикулярно до нього стають різними, зокрема, в напрямку прокатування металу зразки стають міцнішими.

Попереднє витягування в холодному стані за границю текучості, як уже зазначалось в п. 6, підвищує значення границі пропорційності та зменшує залишкове подовження після розриву (погіршує деформаційні характеристики металу).

Механічна обробка (точіння, свердління, фрезерування, шліфування та інші) усуває переважну більшість поверхневих дефектів, що звичайно призводить до поліпшення як міцносних, так і деформаційних характеристик деталей.

Суттєвий вплив на механічні властивості деталей може здійснити їх термічна та хіміко-термічна обробка. Так, відпалювання для сталей, що були деформовані в холодному стані, повертає пластичність і можливість подальшої деформації, а для сталей після технологічних операцій (зварювання, обробка різанням тощо) - зменшує внутрішні напруження. Подібним чином поліпшує механічні властивості деталей і нормалізація.

Достатньо розповсюджена технологічна операція гартування, підвищує твердість і ряд міцносних характеристик сталей (границю текучості, границю міцності), проте при цьому помітно знижуються характеристики пластичності – сталь стає достатньо крихкою.

Чимало деталей механізмів і машин при їх практичному використанні потребують високої твердості і міцності поверхневого шару при збереженні відносно "м'якої" серцевини. Для досягнення таких характеристик використовують поверхневе гартування струмами високої частоти та різні види хіміко-термічної обробки: цементацію (збільшення в поверхневому шарі деталі вуглецю), азотування (насищення поверхні сталі азотом), ціанування (нагрівання деталі в розправлених солях, що містять ціаністий натрій), нітроцементація (нагрівання в газовій суміші, що в тому числі містить аміак) тощо.

З метою зниження або повного усунення внутрішніх напружень попередньо загартованої сталі, зменшення її крихкості та поліпшення інших механічних властивостей використовують такий вид термічної обробки як відпуск.

Механічні характеристики деталей істотно змінюються в залежності від температури, за якої вони працюють. Так, наприклад, більшість вуглецевих сталей в інтервалі температур від 150°C до 250°C має найбільшу границю міцності. Правда при цьому суттєво зменшується значення модуля Юнга, а відносне залишкове подовження стає мінімальним. Тільки при досягненні температури біля 300°C пластичні властивості поліпшуються.

Очевидно, що, незважаючи на деяке зростання міцносних характеристик при підвищенні температури, маловуглецеві сталі при таких режимах використовують рідко: по-перше, вони швидко окислюються з утворенням окалини, по-друге, теплове розширення суттєво ускладнює роботу деталей в точних з'єднаннях. З цієї причини використовують сталі, які мають достатню жароміцність (здатність зберігати механічні властивості при високих температурах) та жаростійкість (здатність зберігати незмінність хімічного складу поверхні при підвищених температурних режимах).

По-різному впливає на матеріали пониження температури. При цьому спостерігається достатньо чітка кореляція між типом кристалічної ґратки і зміною характеристик міцності і пластичності. Так, для металів з гексагональною кристалічною ґраткою або кристалічною ґраткою у вигляді об'ємноцентрованого куба (більшість чорних металів, в тому числі – сталі, цинкові сплави), характерною є холодноламкість. Ця властивість проявляється в тому, що при зниженні температури основні механічні характеристики (границя текучості, границя пропорційності), як і характеристики пластичності (відносне залишкове видовження, відносне залишкове звуження) суттєво знижується.

Натомість, метали, що мають кристалічну ґратку з центрованими гранями (нікель, мідь, золото, срібло та інші) не

змінюють своїх характеристик під дією низьких температур. А деякі матеріали, наприклад, алюміній та його сплави, в таких температурних режимах характеризуються поліпшенням своїх механічних характеристик.

Ряд нетипових в звичайних умовах експлуатації властивостей проявляється при зростанні часу дії навантаження, особливо в комбінації з іншими факторами. Так, при постійному напруженні у багатьох матеріалах спостерігається явище *повзучості*: пластичні деформації починають збільшуватись при навантаженнях, які в звичайних умовах (при нетривалій дії) до цього не призводить.

В залежності від матеріалу і комбінації та величини зовнішніх факторів повзучість може з часом припинятись, або продовжуватись аж до руйнування матеріалу. У металів з низькою температурою плавлення (свинець, цинк), бетону та деяких інших матеріалів повзучість спостерігається при нормальних температурах, а у більшості сталей це явище проявляється при температурах, що перевищують 300°C .

При поєднанні тривалої дії навантаження і високої температури, як правило, спостерігається таке явище: деталь руйнується при напруженні, меншому за границю міцності при цій температурі. У цьому випадку ведуть мову про *тривалу міцність* матеріалу.

Чисельні значення границі тривалої міцності визначають дослідним шляхом. Суть випробування полягає у визначенні часу розриву зразка під час дії певного навантаження і температури. За побудованими кривими можна знайти величину руйнівного навантаження при заданій температурі і часу експлуатації, або, знаючи напруження і температуру, визначити тривалість роботи деталі.

Внаслідок тривалої дії навантаження помітну тенденцію до зменшення мають напруження в деталях, які характеризуються сталою величиною загальної деформації. Це явище отримало назву *релаксації напружень*. Більш окреслено воно спостерігається при підвищених температурах.

Релаксацію напружень на практиці можна спостерігати досить часто. Відомо, що з'єднання деталей з натягом, особливо у випадку його отримання при високій температурі, з часом слабшає. Потребують постійного контролю і коригування болтові з'єднання, що працюють при високих температурах. Подібні явища спостерігаються при експлуатації заклепкових з'єднань.

10. Концентрація напружень. Місцеві та контактні напруження

Практична експлуатація деталей машин та елементів конструкцій, теоретичні розрахунки та експериментальні дослідження показали, що напруження по площі поперечного перерізу стержня при розтяганні (стисканні) розподіляються рівномірно тільки у випадку незмінності форми цього перерізу по довжині або, принаймні, при його плавній зміні. Проте дія деяких факторів може призвести до помітного зростання величини σ . В цьому випадку говорять про *концентрацію напружень*.

Фактори, які призводить до зростання σ , називають *концентраторами напружень*. До таких факторів відносять будь-які різкі зміни форми деталей чи елементів конструкції: отвори, надрізи, канавки тощо. Максимального значення напруження досягають саме навколо таких концентраторів. Тому, враховуючи також незначні розміри цих елементів в порівнянні з розмірами всього тіла, напруження, що виникають в околі концентраторів називають *місцевими*.

Визначення місцевих напружень при експлуатації деталей чи елементів конструкцій в багатьох випадках має велике практичне значення. Тією чи іншою мірою ці напруження повинні враховуватись при розрахунках різноманітних з'єднань.

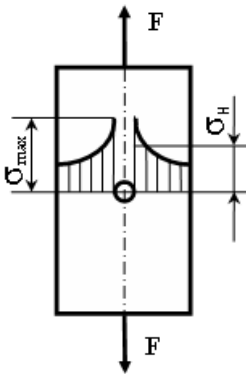


Рис.2.29

Суттєвий вплив місцеві напруження в окремих випадках можуть здійснювати на всю конструкцію. Наприклад, при розрахунках корпусів суден, які під дією вітру і хвиль зазнають різних деформацій (розтягання, стискання, згинання тощо) обов'язковим є врахуванням концентрацій напружень навколо отворів трюмів та ілюмінаторів.

Розглянемо випадок навантаження повздовжньою силою стержня з невеликим отвором (рис.2.29). Виявляється, що напруження, які виникають в околі цього отвору, будуть помітно більшими за напруження, які мали б місце в такому ж

стержні за відсутності напружень.

Кількісною характеристикою концентрації напруження є *теоретичний коефіцієнт концентрації напружень*

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (2.60)$$

де σ_{max} - максимальне місцеве напруження, σ_n - номінальне напруження.

Під номінальним розуміють те напруження, яке виникало б в тілі за умови відсутності концентратора. Номінальне напруження звичайно визначають за формулою

$$\sigma_n = \frac{N}{A_{nn}} \quad (2.61)$$

де A_{nn} – площа послабленого поперечного перерізу.

В простих розрахунках звичайно доводиться розв'язувати задачі знаходження максимальних місцевих напружень за відомими формою і розмірами концентратора, що здійснюється за формулою

$$\sigma_{max} = \alpha \sigma_n \quad (2.62)$$

Значення теоретичного коефіцієнту запасу міцності вибирають з довідників або розраховують за формулами. Так, наприклад, в стержнях круглого поперечного перерізу теоретичний коефіцієнт запасу для концентратора напружень у вигляді напівкруглої виточки буде складати 1,1-2,0 (в залежності від відношення радіуса виточки до діаметра стержня), у випадку гострої V-подібної виточки – 3,0, при переході під прямим кутом – 2,0, у вигляді отвору (при його відношенні до діаметру стержня в межах 0,1-0,33) – 2,0.

Формулою (2.62) можна користуватись лише у випадку незначного розміру концентратора напружень в порівнянні з розміром всього тіла. Коли ці дві характеристики будуть одного порядку, відбувається загальне (а не місцеве) послаблення поперечного перерізу. Для подібних випадків використовують наближені залежності з урахуванням виду і розмірів деталей (елементів конструкції), величини діючого навантаження, умов експлуатації та інших факторів.

Проте навіть дотримання умови малості розміру концентратора напружень у порівнянні зі всією конструкцією далеко не завжди при використанні формули (2.62) дає правильні значення максимальних місцевих напружень. Причина полягає в тому, що геометричний коефіцієнт концентрації напружень визначається з урахуванням припущень про справедливість закону Гука від початку деформації аж до моменту руйнування матеріалу. Оскільки подібне припущення не є справедливим для більшості матеріалів, отримані за формулою (2.62) значення σ_{max} виявились завищеними. Крім того, навіть використовуючи велику кількість спільних залежностей для визначення α , важко врахувати все різноманіття форм і розмірів концентраторів напружень.

Тому при проведенні практичних розрахунків використовують *дійсний (ефективний) коефіцієнт концентрації напружень*, який визначають за формулою

$$k = F_p / F_{кн} \quad (2.63)$$

де F_p - руйнівне навантаження без концентратора напружень, $F_{кн}$ - руйнівне навантаження з концентратором напружень.

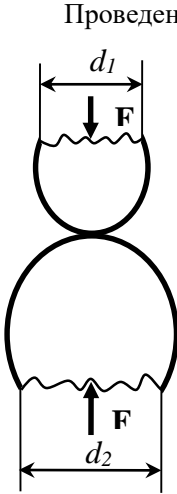


Рис.2.30

Проведені досліди свідчать, що для більшості пластичних матеріалів значення дійсного коефіцієнту концентрації напружень наближається до одиниці ($k \approx 1$). Це означає, що різноманітні різкі зміни форми і розмірів тіла суттєво не впливають на їх міцнісні характеристики. Натомість, крихкі матеріали є «чутливими» до наявності концентраторів напружень, оскільки, як правило, саме в цих місцях починається руйнування деталей (елементів концентрацій).

Місцеві напруження можуть виникати не лише у разі наявності концентраторів, а й внаслідок передачі зусилля (тиску) від одного тіла до іншого. Якщо початковий контакт тіл здійснюється в точці або по лінії, напруження, що виникають в цьому випадку, називають *контактними*.

Розрахунок контактних напружень здійснюється, як правило, за емпіричними залежностями. Наприклад, при взаємному стисканні силою F двох пружних кульок (рис. 2.30)

$$\sigma_{\max} = 0,62 \sqrt[3]{FE^2 [(d_1 + d_2) / d_1 d_2]^2} \quad (2.64)$$

де d_1, d_2 - діаметри кульок, F - стискальне навантаження, E - модуль Юнга.

При контакті двох циліндричних тіл

$$\sigma_{\max} = 0,59 \sqrt[3]{qE (d_1 + d_2) / d_1 d_2} \quad (2.65)$$

де q - розподілене за довжиною навантаження, E - модуль Юнга, d_1, d_2 - діаметри циліндрів.

Розрахунок за контактними напруженнями в окремих випадках є основним, наприклад, при проектуванні зубчатих передач. При цьому для отримання достовірних результатів необхідне врахування ряду факторів (геометрії зубчатого колеса, режиму експлуатації, матеріалу, термічної (хіміко-термічної) обробки тощо), які при розрахунках відображаються відповідними поправочними коефіцієнтами.

11. Допустимі напруження. Запас міцності

Практична експлуатація деталей машин чи елементів конструкцій є надійною лише в тому випадку, коли напруження, що виникають внаслідок дії навантаження, не перевищують деякою небезпекою значення. Такі напруження називають *граничними* або *небезпечними* і позначають σ^0 .

Для різних матеріалів граничні (небезпечні) напруження вибирають по-різному. Так, крихкі матеріали руйнуються, як правило, одразу без видимих зовнішніх попередніх ознак. Чітко визначеною є лише границя міцності, тому саме її приймають в якості небезпечного напруження $\sigma^0 = \sigma_m$.

Пластичні матеріали звичайно працюють в межах пружних деформацій, коли залишкове подовження або скорочення не допускається. Проте визначення границі пружності, яку цілком логічно можна було б приймати в якості граничного напруження, є достатньо непростим практичним завданням, особливо у випадку необхідності забезпечення достатньо високої точності. Враховуючи цю обставину для пластичних матеріалів в якості небезпечного напруження приймають границю текучості $\sigma^0 = \sigma_m$, оскільки визначення її чисельної величини не є складною проблемою.

Проте використовувати в розрахунках значення небезпечних напружень безпосередньо не можна – існує цілий ряд факторів, які можуть суттєво змінити (зменшити) отримані значення. Тому вводять поняття *допустимого напруження*, під яким розуміють величину напруження, що забезпечує надійну експлуатацію деталі навіть за наявності неврахованих факторів. Допустиме напруження позначають $[\sigma]$, або $[\tau]$, а у випадку коли матеріал має різну міцність на розтягання і стискання, вводять додаткові індекси і позначають допустиме нормальне напруження на розтягання - $[\sigma_+]$, на стискання - $[\sigma_-]$.

Допустимі і граничні (небезпечні) напруження пов'язані між собою співвідношенням

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} \quad (2.66)$$

де n – коефіцієнт запасу міцності.

Враховуючи різні підходи до вибору граничних (небезпечних) напружень, формула (2.66) набуде вигляду

- для пластичних матеріалів

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n} \quad (2.67)$$

- для крихких матеріалів

$$[\sigma_+] = \frac{\sigma'_m}{n} \quad (2.68)$$

$$[\sigma_-] = \frac{\sigma''_m}{n} \quad (2.69)$$

де σ'_m - границя міцності крихкого матеріалу при розтяганні, σ''_m - границя міцності крихкого матеріалу при стисканні.

Коефіцієнт запасу міцності хоч і є безрозмірною величиною, але несе велике змістовне навантаження. Він враховує фактори, вплив яких дуже важко спрогнозувати в процесі практичної експлуатації деталей. До таких факторів відносять:

- наявність внутрішніх (неоднорідність матеріалу) і зовнішніх дефектів;
- зміна геометричних розмірів внаслідок спрацювання деталей;
- відхилення в точності виготовлення деталі;
- наближеність розрахункових схем;
- можливість похибки у визначенні зовнішніх навантажень;
- можливість перенавантаження;
- особливості технології виготовлення деталей.

Вибір коефіцієнтів запасу міцності є достатньо складним і дуже важливим завданням. Очевидно, що збільшення запасу міцності дозволяє підвищити надійність роботи деталі, елемента конструкції і всього механізму в цілому. Проте досягнення надійності таким шляхом призводить до зростання металоємкості (збільшення маси і розмірів) тіл, що в свою чергу пов'язане як з вартістю виробу, так і з його ергономічними та дизайнерськими характеристиками.

Крім того, у багатьох галузях (космічна техніка, машинобудування, суднобудування тощо) маси вузлів і агрегатів є надзвичайно важливою технічною характеристикою, яка значною мірою впливає на експлуатаційні показники кінцевого виробу. Тому в цих випадках вибір коефіцієнтів запасу міцності жорстко регламентується відповідними нормами.

Загалом коефіцієнт запасу міцності може лежати в достатньо широкому діапазоні значень: від 1,0 до 5,0. На його вибір впливає цілий ряд чинників: вимоги до надійності, довговічності та економічності; умови виготовлення; вимоги до достовірності розрахункової схеми тощо. Наприклад, при підвищених вимогах до надійності вибирають більші значення коефіцієнту запасу міцності, при понижених вимогах – менші.

При розв'язанні типових для машинобудування задач коефіцієнт запасу міцності, як правило, приймають: для пластичних матеріалів – 1,4...1,6 для крихких матеріалів – 2,5...3,0. Ці ж величини часто використовують і для визначення допустимих напружень, значення яких для найбільш розповсюджених конструкційних матеріалів наведені в додатку 7. Такий підхід є не зовсім коректним, оскільки величина допустимого напруження залежить не лише від фізико-механічних характеристик матеріалу, а й від умов роботи деталі (елемента конструкції) як складової конкретного об'єкта. Проте використання довідкових значень допустимих напружень для розв'язання більшості типових задач дає цілком прийнятну точність та забезпечує достатню надійність роботи спроектованих деталей машин чи елементів конструкцій.

В загальному вигляді вимога забезпечення надійності зводиться до виконання умови міцності

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad (2.70)$$

де σ_{max} - максимальні напруження, що виникають в деталі (елементі конструкції).

12. Розрахунок на міцність і жорсткість при розтяганні (стисканні)

Розрахунок на міцність і жорсткість є основою проектування будь-яких деталей машин чи елементів конструкцій. Він фактично зводиться до необхідності виконання двох відповідних умов.

Для розтягання (стискання) умова міцності з урахуванням формул (2.14) і (2.70) набуде такого вигляду

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (2.71)$$

де σ_{max} - найбільше нормальне напруження в найнебезпечнішій зоні, $[\sigma]$ - допустиме нормальне напруження при розтяганні (стисканні). Значення $[\sigma]$, як уже зазначалось в п. 11, для типових розрахунків береться з довідників, а в більш специфічних випадках – визначається за спеціальними методиками.

Формула (2.71) фактично визначає необхідність виконання умови – максимальні напруження, що виникають в тілі, не повинні перевищувати допустимих. При проведенні практичних розрахунків з метою економії матеріалу максимальні напруження намагаються наблизити до допустимих. В той же час допускається перенапруження ($\sigma_{max} > [\sigma]$) не більше 5%.

Безпосереднє використання формули (2.71) здійснюється у випадку однакового поперечного перерізу. Якщо його площа змінюється, максимальне (за абсолютною величиною) нормальне напруження визначається з побудованої епюри σ . У випадку застосування матеріалу, який по різному чинить опір розтяганню та стисканню, в правій частині формули (2.71) використовують залежно від обставин значення допустимого нормального напруження на розтягання $[\sigma_+]$ або допустимого нормального напруження на стискання $[\sigma_-]$.

Формула

$$\Delta l_{max} = \frac{Nl}{EA} \leq [\Delta l], \quad (2.72)$$

де Δl_{max} - максимальна абсолютна деформація, $[\Delta l]$ - допустима абсолютна деформація, являє собою математичний вираз умови жорсткості при розтяганні (стисканні). Ця умова трактується таким чином: максимальна абсолютна деформація (в окремих випадках – переміщення визначених частин тіла) не повинна перевищувати допустимих значень. Величина допустимої абсолютної деформації $[\Delta l]$ визначається для конкретної конструкції, виходячи з її технологічних характеристик та особливостей експлуатації. Напруження, які спричиняють досягнення величини $[\Delta l]$, не повинні перевищувати

границі міцності σ_m або границі пружності $\sigma_{пр}$ для крихких і пластичних матеріалів відповідно.

Використовуючи умови міцності і жорсткості при розтяганні (стисканні) можна здійснити три основних види розрахунків.

1. **Перевірний розрахунок.** При його проведенні необхідно переконатись, що максимальні нормальні напруження та (або) максимальні абсолютні деформації не перевищують відповідних допустимих значень. На практиці суть перевірного розрахунку зводиться до математичної перевірки умови міцності (формула 2.71) та (або) умови жорсткості (формула 2.72).

2. **Проектний розрахунок.** Його основне завдання полягає у визначенні основних геометричних характеристик тіла, знаючи які можна було б спроектувати конкретну деталь. При розтяганні (стисканні) такою геометричною характеристикою є площа поперечного перерізу A . Тому суть цього виду розрахунку зводиться до її визначення з умови міцності за формулою

$$A \geq N / [\sigma] \quad (2.73)$$

або з умови жорсткості за формулою

$$A \geq \frac{Nl}{E[\Delta]} \quad (2.74)$$

3. **Визначення максимального навантаження.**

Використовується у випадку постійної зміни умов експлуатації конструкції і полягає у знаходженні величини навантаження, перевищення якого може призвести до руйнування окремих деталей та виходу з ладу всієї конструкції. Цей вид розрахунку здійснюється за формулами, отриманими з умови міцності

$$N \leq A[\sigma] \quad (2.75)$$

або з умови жорсткості

$$N \leq \frac{EA[\Delta]}{l} \quad (2.76)$$

Найрозповсюдженішими в практичній діяльності є проектний та перевірний розрахунки. Причому, якщо проектний розрахунок здійснюється, виходячи з умови міцності, то перевірний, як правило – виходячи з умови жорсткості або навпаки.

Приклад 2.3. Перевірити міцність стержня квадратного поперечного перерізу з довжиною ребра $a=4$ см, виготовленого із сірого чавуну СЧ 12-28 (допустиме нормальне напруження на розтягання – $[\sigma_+] = 25 \text{ МПа}$) і навантаженого силою $F=30 \text{ кН}$ (рис. 2.31)

Розв'язування

1. Визначимо площу поперечного перерізу стержня

$$A = \alpha^2 = 4^2 = 16(\text{см}^2) = 1,6 \cdot 10^{-3}(\text{м}^2)$$

2. Враховуючи, що для зображеного на рис. 2.31 одноступінчастого стержня зовнішнє навантаження чисельно дорівнює внутрішній силі, нормальне напруження визначаємо за формулою

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{30 \cdot 10^3 \text{ Н}}{1,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 18,75 \cdot 10^6 \text{ Па} = 18,75 \text{ МПа}$$

3. Оскільки зовнішня сила викликає розтягання, величину нормального напруження, що виникає в стержні, порівнюємо з допустимим нормальним напруженням матеріалу на розтягання. В результаті отримаємо

$$\sigma = 18,75 \text{ МПа} < [\sigma] = 25 \text{ МПа}$$

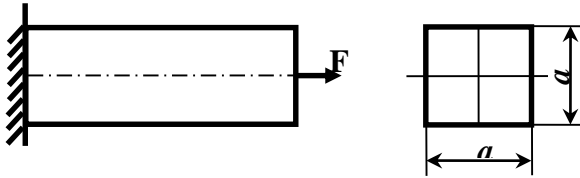


Рис. 2.31

Умова міцності виконана.

Приклад 2.4. Визначити діаметри східчастого стержня круглого поперечного перерізу (рис. 2.32), виготовленого зі сталі Ст 3 ($[\sigma]=160 \text{ МПа}$) за умови забезпечення міцності під дією сил $F_1=150 \text{ кН}$, $F_2=350 \text{ кН}$.

Розв'язування

1. Враховуючи схему навантаження і форму тіла, розбиваємо стержень на дві ділянки: I – АВ, II – ВС.

2. Використовуючи метод перерізів, визначаємо величину нормальних сил на кожній ділянці і будуємо епюру (рис.2.32).

$$N_I = -F_1 = -150 \text{ кН}$$

$$N_{II} = -F_1 + F_2 = -150 \text{ кН} + 350 \text{ кН} = 200 \text{ кН}$$

3. Для кожної ділянки з умови міцності визначаємо площу поперечного перерізу. При цьому врахуємо, що допустиме нормальне напруження сталі Ст3 на розтягання і стискання однакові, та будемо вважати східчастий стержень коротким, ($l/d < 20$), що унеможливило втрату стійкості.

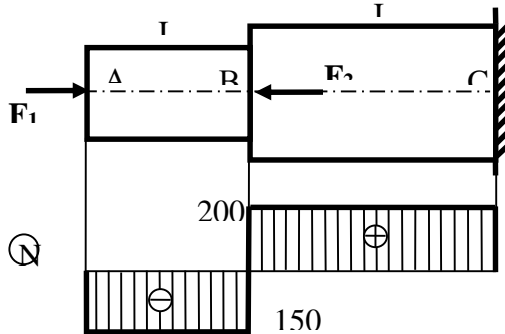


Рис. 2.32

Для першої ділянки

$$A_1 \geq \frac{N_I}{[\sigma]} = \frac{150 \cdot 10^3 \text{ Н}}{160 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 9,375 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

Для другої ділянки

$$A_2 = \frac{N_{II}}{[\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3 \text{ Н}}{160 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

4. Враховуючи, що ділянки східчастого стержня мають круглий поперечний переріз, знаходимо їх діаметри

$$d_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9,375 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 3,46 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 34,6 \text{ мм}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12,5 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 3,99 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 39,9 \text{ мм}$$

5. Округлюючи отримані значення до стандартних, остаточно отримаємо $d_1=35\text{мм}$, $d_2=40\text{мм}$.

Приклад 2.5. Визначити максимальне навантаження, яке може витримати дерев'яна опора діаметром $d=100\text{мм}$, виготовлена з дуба і навантажене вздовж волокон (рис.2.33). Допустити нормальне напруження на стискання $[\sigma]=15\text{МПа}$

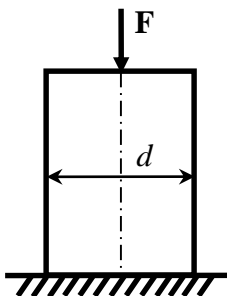


Рис. 2.33

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 100^2}{4} = 7850 \text{ мм}^2 = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

2. Визначаємо максимальне навантаження, яке може витримати стержень

$$N \leq A[\sigma] = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot 15 \cdot 10^6 \text{ Па} = 117,75 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

$$N \leq 117,75 \text{ кН}$$

Розв'язування

1. Знаходимо площу поперечного перерізу стержня

Приклад 2.6. Визначити діаметр d стержня круглого поперечного перерізу та довжиною $l=1\text{м}$, виготовленого з латуні (модуль Юнга $E=0,95 \cdot 10^3\text{МПа}$) і навантаженого силами $F_1=2,5\text{кН}$, який би унеможлилював контакт конструкції з обертовою частиною механізму (рис.2.34), що знаходиться на відстані $a=2,2\text{мм}$. При цьому необхідно забезпечити зазор $\Delta y = 0,5\text{мм}$.

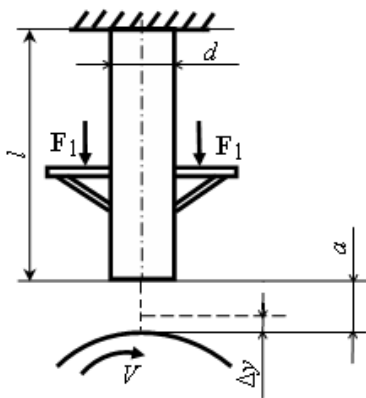


Рис.2.34

Розв'язування

1. Виходячи з особливостей конструкції та необхідності забезпечення умов надійності її експлуатації, визначаємо допустиму абсолютну деформацію

$$[\Delta l] = a - \Delta y = 2,2 - 0,5 = 1,7 (\text{мм})$$

2. Використовуючи розрахункову схему, знаходимо величину загального навантаження

$$F = 2F_1 = 2 \cdot 2,5 \text{ кН} = 5 \text{ кН}$$

3. З умови жорсткості (2.72) враховуючи рівність зовнішнього навантаження і внутрішніх сил, визначаємо мінімально необхідну площу поперечного перерізу

$$A \geq \frac{Fl}{E[\Delta l]} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{0,95 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 3,096 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

4. Знаходимо діаметр стержня

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3,096 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2}{3,14}} = 0,0628 \text{ м} = 62,8 \text{ мм}$$

5. Округлюючи отримане значення до найближчої більшої стандартної величини остаточно приймаємо $d=63 \text{ мм}$.

13. Статично невизначені задачі при розтяганні (стисканні)

В інженерній практиці при розв'язуванні окремих задач розтягання (стискання) часто зустрічаються конструкції, які містять додаткові або так звані «зайві» зв'язки. Ці зв'язки не є обов'язковими для збереження статичної чи геометричної рівноваги, проте їх наявність

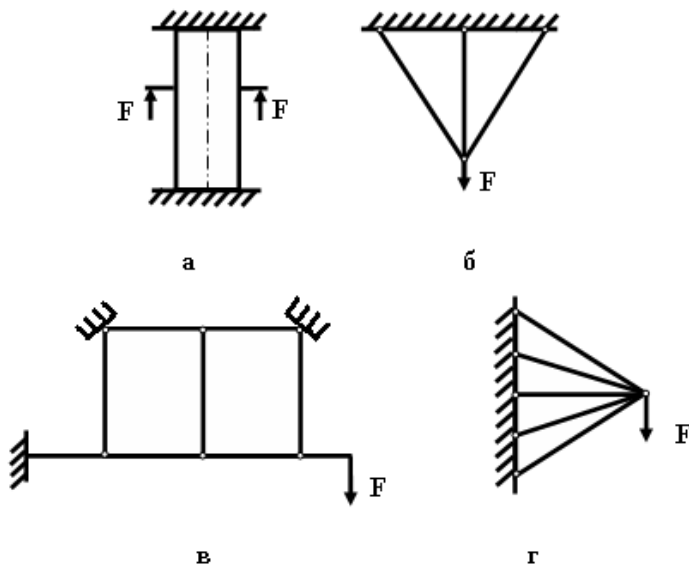


Рис. 2.35

може суттєво підвищувати міцності характеристики конструкції в цілому та поліпшувати показники надійності її роботи.

Розрахунок таких систем здійснюється за дещо відмінними від розгляненими в попередніх розділах методиками. Зокрема, для знаходження числових значень тих чи інших величин однієї умови статичної рівноваги виявляється недостатньо. Необхідно складання додаткових рівнянь, в основу яких покладені закономірності деформування матеріалу.

Системи, зусилля (реакції) яких неможливо обчислити лише з рівнянь статки, називають *статично невизначеними*. В якості прикладу таких систем можна навести закріплений двома кінцями стержень (рис. 2.35, а), стержньову підвіску (рис. 2.35, б), шарнірно-стержньову конструкцію (рис. 2.35, в), стержньовий кронштейн (рис. 2.35, г) та інші.

До статично невизначених систем відносять також конструкції, які зібрані з деталей, що виготовлені з певними відхиленнями від проектних розмірів. Після складання такої конструкції це призводить до появи монтажних напружень. Конструкції, елементи яких в процесі експлуатації нагріваються (або охолоджуються), проте не можуть змінювати своїх розмірів, що призводить до появи додаткових теплових напружень, також відносять до статично невизначених.

Кількісною характеристикою статично невизначених систем є *ступінь статичної невизначеності*, який являє собою різницю між кількістю невідомих зусиль та числом можливих рівнянь статички. Для знаходження невідомих зусиль складаються додаткові рівняння, в основу яких покладені деформаційні залежності системи.

При цьому слід мати на увазі, що загальне число можливих рівнянь статички просторової системи сил дорівнює шести, плоскої системи – трьох. В реальних конструкціях за відсутності тих чи інших силових факторів кількість можливих рівнянь статички може зменшуватись.

Незважаючи на велике різноманіття статично невизначених систем, в тому числі – при розтяганні (стисканні), алгоритми їх розв'язання є достатньо уніфікованим і складається з п'яти основних етапів.

1. Отримання розрахункової схеми та знаходження ступеня статичної невизначеності системи.
2. Складання рівняння статичної рівноваги.
3. Встановлення взаємозв'язку між деформаціями окремих елементів системи.
4. Встановлення взаємозв'язку між деформаціями елементів конструкції і діючими на них невідомими зусиллями.
5. Синтез: спільне розв'язування отриманих рівнянь і знаходження необхідних величин.

Розглянемо горизонтально закріплену за допомогою шарнірної опори та двох стержнів абсолютно жорстку балку OD , до якої прикладена сила F (рис. 2.36, а). Матеріал (E_1, E_2), площі поперечних перерізів (A_1, A_2) та довжини (l_1, l_2) стержнів є відомими. Визначимо нормальні сили та напруження, які виникають в стержнях.

Отримавши розрахункову схему (рис. 2.36, б), визначасмо кількість невідомих зусиль. Для даної схеми навантаження таких зусиль 3 – R_0 , N_1 , N_2 . Відомо, що для плоскої системи сил можна отримати три

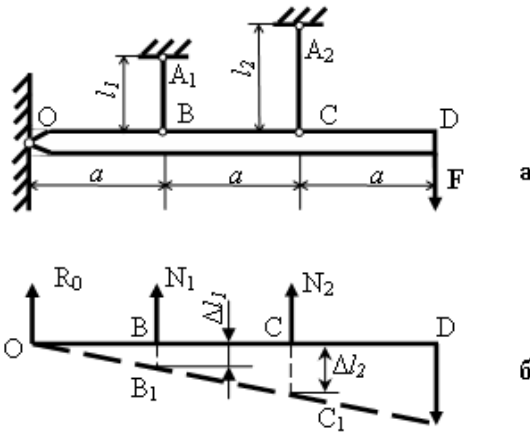


Рис. 2.36

рівняння статичної рівноваги. Проте у даному випадку немає сил, які б діяли паралельно горизонтальній осі. Тому число можливих рівнянь статичної рівноваги зменшиться до двох. Таким чином, ступінь статичної невизначеності системи складе $j=3-2=1$.

Складаємо рівняння статичної рівноваги:

$$\Sigma M_0 = 0 \quad N_1 \alpha + N_2 \cdot 2\alpha - F \cdot 3\alpha = 0 \quad (2.77)$$

$$\Sigma Y_i = 0 \quad R_0 + N_1 + N_2 - F = 0 \quad (2.78)$$

Рівняння (2.78) включає реакцію R_0 , яку за умовами задачі знаходити не потрібно, тому його подальше використання є недоцільним. Рівняння (2.77) після спрощення набуде вигляду

$$N_1 + 2N_2 - 3F = 0 \quad (2.79)$$

Оскільки за умовою задачі балка OD є абсолютно жорсткою, тобто не деформується, рівняння взаємозв'язку між деформаціями окремих елементів (стержнів) отримаємо з подібності трикутників ΔOVB_1 та ΔOCC_1 .

$$\frac{\Delta l_1}{\alpha} = \frac{\Delta l_2}{2\alpha} \quad (2.80)$$

або

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1 \quad (2.81)$$

Взаємозв'язок між деформаціями елементів конструкції і діючими на них невідомими зусиллями отримаємо з формули (2.15), яка була виведена з використанням математичного виразу закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \quad (2.82)$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \quad (2.83)$$

Підставляючи (2.82) і (2.83) у формулу (2.81), отримаємо

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = 2 \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$$

$$N_2 = 2 \frac{E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2} N_1 \quad (2.84)$$

Увівши коефіцієнт пропорційності

$$k = 2 \frac{E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2} \quad (2.85)$$

(на практиці це означає отримання конкретного числового значення), формулу (2.84) перепишемо у іншому (спрощеному) вигляді

$$N_2 = k N_1 \quad (2.86)$$

При цьому у випадку застосування однакового матеріалу стержнів ($E_1 = E_2$), рівності їх довжин ($l_1 = l_2$) чи площ поперечних перерізів ($A_1 = A_2$) формула (2.85) суттєво спроститься.

Підставляючи (2.86) у формулу (2.79) знаходимо вираз для визначення нормальної сили N_1

$$N_1 + 2k N_1 - 3F = 0$$

$$N_1 (1 + 2k) = 3F$$

$$N_1 = \frac{3}{1 + 2k} F \quad (2.87)$$

Підставляючи (2.87) у формулу (2.79) знаходимо нормальну силу N_2 .

$$N_2 = \frac{1}{2} (3F - N_1) \quad (2.88)$$

Нормальні напруження, що виникають в стержнях, знаходимо за формулою (2.14), яка для умов задача набуде такого вигляду

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}, \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \quad (2.89)$$

Слід зазначити, що залежності (2.77) – (2.88) отримані для конкретної схеми навантаження (рис. 2.36), тому вони вимагають

модифікації при зміні умов задачі. Крім того, запропоновані алгоритми необхідно коригувати залежно від початкових умов. Наприклад, для конструкцій, що складаються із стержнів круглого поперечного перерізу, одним з етапів має бути знаходженням площі цих перерізів.

Приклад 2.7. Визначити зусилля, що виникають у верхній та нижній частинах східчастого стержня круглого поперечного перерізу, навантаженого силою $F=75\text{кН}$ (рис. 2.37). При цьому ділянки східчастого стержня мають довжини $l_1=1,2\text{м}$, $l_2=1\text{м}$ та діаметри $d_1=100\text{мм}$, $d_2=80\text{мм}$.

Розв'язування

1. Як видно із схеми навантаження, у стержні виникають два невідомі зусилля – реакції R_A і R_B . Натомість, для зображеної системи можливо скласти лише одне рівняння статичної рівноваги – сума всіх сил на вертикальну вісь дорівнює нулю (горизонтальні сили відсутні, а всі зусилля діють вздовж вертикальної осі, тому моментів вони не створюють).

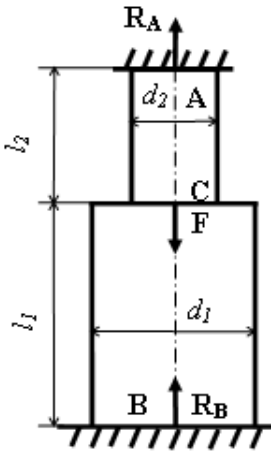


Рис. 2.37

ділянок стержня

Ступінь статичної невизначеності

$$j=2-1=1$$

2. Складаємо рівняння статичної рівноваги

$$\sum Y_i = 0$$

$$R_A + R_B - F = 0$$

3. Враховуючи незмінність положень верхньої і нижньої опор загальна абсолютна деформація $\Delta l_{заг}$ дорівнює нулю

$$\Delta l_{заг} = 0$$

З іншого боку

$$\Delta l_{заг} = \Delta l_{AC} + \Delta l_{BC}$$

де Δl_{AC} - абсолютна деформація ділянки AC, Δl_{BC} - абсолютна деформація ділянки BC.

4. Знаходимо площі поперечних перерізів

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 100^2}{4} = 7850 \text{мм}^2 = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{м}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 80^2}{4} = 5024 \text{мм}^2 \approx 5,02 \cdot 10^{-3} \text{м}^2$$

5. Встановимо взаємозв'язок між деформаціями ділянок стержня і діючими на них зусиллями:

$$\Delta l_{AC} = \frac{R_A l_2}{EA_2} = \frac{R_A \cdot 1}{E \cdot 5,02 \cdot 10^{-3}} = \frac{199,2}{E} R_A$$

$$\Delta l_{BC} = -\frac{R_B l_1}{EA_1} = -\frac{R_B \cdot 1,2}{E \cdot 7,85 \cdot 10^{-3}} = -\frac{152,87}{E} R_B$$

6. Підставляємо отримані вирази в деформаційну залежність

$$\Delta l_{заг} = \Delta l_{AC} + \Delta l_{BC} = 0$$

$$\frac{199,2}{E} R_A - \frac{152,87}{E} R_B = 0$$

$$R_A = 0,77 R_B$$

7. Підставляючи в рівняння статичної рівноваги знаходимо реакцію R_B

$$0,77 R_B + R_B - F = 0$$

$$1,77 R_B = F$$

$$R_B = \frac{F}{1,77} = \frac{75 \text{кН}}{1,77} = 42,37 \text{кН}$$

8. З цього ж рівняння знаходимо реакцію R_A

$$R_A = F - R_B = 75 \text{кН} - 42,37 \text{кН} = 32,63 \text{кН}$$

Приклад 2.8. Для три стержневої підвіски, навантаженої силою $F=120 \text{кН}$ (рис. 2.38, а), визначити діаметри стержнів, виготовлених із сталі марки Ст 3 ($[\sigma]=160 \text{МПа}$). Довжина середнього стержня $l_1=1,2 \text{м}$, кут між віссю середнього стержня і віссю бокових стержнів $\alpha=35^\circ$. Діаметри бокових стержнів однакові і вдвічі менші діаметри центрального стержня.

Розв'язування

1. Визначимо ступінь статичної невизначеності системи. Як видно із розрахункової схеми (рис.2.38, б), в стержнях виникають три невідомі зусилля: N_1, N_2, N_3 . Натомість, можливо скласти два рівняння статичної рівноваги (всі сили проходять через точку A , тому моментів не створюють). Тому ступінь статичної невизначеності

$$j=3-2=1$$

2. Аналізуючи геометричну сторону тристержневої підвіски (рис. 2.38, а), визначимо довжину бокових стержнів

$$l_2 = l_3 = l_1 / \cos \alpha$$

3. Складаємо рівняння статичної рівноваги

$$\sum X_i = 0$$

$$N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0$$

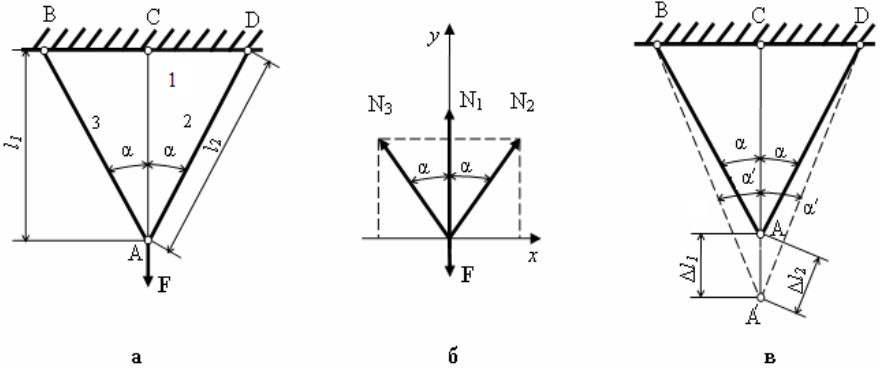


Рис. 2.38.

$$N_2 = N_3$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$N_3 \cos \alpha + N_1 + N_2 \cos \alpha - F = 0$$

або враховуючи попередню умову та значення кута $\alpha = 35^\circ$

$$N_1 + 1,64N_2 = F$$

4. Встановлюємо зв'язок між деформаціями стержнів. Оскільки система є симетричною відносно центрального стержня, точка A під дією сили F займає положення A' . Деформації центрального і бокових стержнів будуть пов'язані співвідношенням

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \alpha'$$

Беручи до уваги малість деформації можна вважати, що кути між стержнями не змінюються ($\alpha \approx \alpha'$) тому

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \alpha$$

Враховуючи, що $\alpha = 35^\circ$, отримаємо

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cos 35^\circ = 0,82 \cdot \Delta l_1$$

5. Встановлюємо взаємозв'язок між деформацією стержнів і діючими зусиллями

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}$$

6. Підставляємо отримані вирази в деформаційну залежність

$$\frac{N_2 l_2}{EA_2} = 0,82 \frac{N_1 l_1}{EA_1}$$

або

$$N_2 = 0,82 \frac{l_1 A_2}{l_2 A_1} N_1$$

7. Оскільки діаметр центрального стержня вдвічі більший за діаметр бокового стержня ($d_1=2d_2$), співвідношення між площами поперечних перерізів буде $A_1=4A_2$. Тому, враховуючи взаємозв'язок між довжинами стержнів, отримаємо

$$N_2 = 0,82 \frac{l_1 \cos \alpha A_2}{l_1 \cdot 4A_2} N_1 = 0,82 \frac{\cos 35^\circ}{4} N_1 = 0,17 N_1$$

8. Підставляючи вираз в рівняння статичної рівноваги, знаходимо значення нормальної сили N_1 , що виникає в центральному стержні

$$N_1 + 1,64 \cdot 0,17 N_1 = F$$

$$N_1 = \frac{F}{1,28} = \frac{120 \text{кН}}{1,28} = 93,75 \text{кН}$$

9. З цього ж рівняння знаходимо значення нормальних сил N_2 та N_3

$$N_2 = N_3 = 0,17 N_1 = 0,17 \cdot 93,75 = 15,94 \text{кН}$$

10. Припускаючи, що допустимому напруженню дорівнює напруження в середньому стержні, визначаємо з використанням формули (2.73) площу поперечного перерізу цього стержня

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{93,75 \cdot 10^3 \text{ Н}}{160 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 5,86 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

Оскільки стержень має круглий переріз, його діаметр визначимо за формулою

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5,86 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{3,14}} = 2,732 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 27,32 \text{ мм}$$

Приймаємо $d_1=28 \text{ мм}$.

11. Враховуючи початкові умови задачі, визначасмо діаметри бокових стержнів

$$d_2 = d_3 = d_1 / 2 = 28 / 2 = 14 \text{ мм}$$

12. Знаходимо напруження, які виникають в бокових стержнях

$$\sigma'' = \sigma''' = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 15,94 \cdot 10^3 \text{ Н}}{3,14 \cdot 0,014^2 \text{ м}^2} = 103,6 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Таким чином, бокові стержні мають надлишковий запас міцності. Це означає, що у випадку проведення проектного розрахунку для бокових стержнів, напруження в центральному стержні перевищать допустимі. З цієї причини в таких і подібних конструкціях початковий підбір поперечного перерізу слід здійснювати для центрального стержня, а інші геометричні характеристики знаходити із заданих співвідношень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гурняк Л. І., Гуцуляк Ю. В., Юзьків Т. Б. Опір матеріалів: посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. Львів: «Новий світ – 2000», 2019. 363 с.
2. Опір матеріалів : навчальний посібник : у 2 ч. / Жигілій Д. О., Верещака С. М., Некрасов С. С., Довгополов Ю. А. Суми : Сумський державний університет, 2022. Ч. І. 159 с.
3. Опір матеріалів : навчальний посібник до виконання розрахунково-графічних робіт і самостійної роботи / Довбуш Т. А., Хомик Н. І., Бабій А. В., Цьонь Г. Б., Довбуш А. Д. Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2022. 220 с.
4. Опір матеріалів : навчально-методичний посібник для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заочної та дистанційної форм навчання / Сліпченко М. В, Алфьоров О. І., Савченко В. Б., Свіргун О. А. Харків, 2023. 153 с.
5. Опір матеріалів : підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка. 2-ге вид., допов. і переробл. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.

Контрольні запитання

1. Який вид деформації називають розтяганням (стисканням)? 2. Як визначають основні геометричні характеристики при розтяганні (стисканні): абсолютну повздовжню і абсолютну поперечну деформації, відносну повздовжню і відносну поперечну деформації? 3. Запишіть математичний вираз закону Гука. Розкрийте фізичний зміст модуля Юнга. 4. За якою формулою визначають нормальне напруження при розтяганні (стисканні)? Як здійснюється визначення абсолютних деформацій і переміщень? 5. Розкрийте особливості знаходження величини роботи зовнішніх сил, потенційної енергії деформації та питомої потенційної енергії деформації при розтяганні (стисканні). 6. Розкрийте закономірності побудови епюру повздовжніх сил, нормальних напружень, відносних деформацій і переміщень. 7. З якою метою здійснюється експериментальне вивчення фізико-механічних властивостей матеріалів? Які зразки для цього використовуються? 8. Опишіть принцип роботи установок для дослідження матеріалів на розтягання. 9. Опишіть методику побудови діаграми розтягання, назвіть її характерні ділянки. 10. Дайте визначення основних характеристик міцності матеріалу. За якими формулами знаходять їх числові значення? 11. Розкрийте закономірності при розвантаженні та повторному навантаженні зразка. Назвіть характеристики пластичності матеріалу і дайте їх визначення. 12. Як і з якою метою будують діаграму розтягання в координатах σ - ϵ ? В чому полягає геометричний зміст модуля Юнга? 13. Назвіть характерні особливості діаграм стискання для пластичних, крихких та анізотропних матеріалів. Які міцносні характеристики при цьому визначають? 14. Зробіть порівняльний аналіз основних методів визначення твердості матеріалів. 15. Охарактеризуйте вплив різних факторів на механічні властивості матеріалів. 16. В чому полягають явища повзучості, тривалої міцності, релаксації напруження? 17. Що називають концентраторами напружень? Як вони впливають на значення місцевих напружень? 18. У якому випадку виникають і як визначаються контактні напруження? 19. В чому відмінність вибору граничних (небезпечних) напружень для пластичних та крихких матеріалів? Як вони пов'язані з допустимими напруженнями? 20. Вплив яких факторів враховує коефіцієнт запасу міцності? Як він вибирається? 21. Запишіть умови міцності і жорсткості. 22. За якими формулами здійснюється проектний і перевірний розрахунки та визначається максимальне навантаження? 23. Які системи називають статично невизначеними? Як визначається коефіцієнт статичної невизначеності? 24. Опишіть алгоритм розв'язання статично невизначених задач при розтяганні (стисканні).

Додатки

Додаток 1

Коефіцієнт Пуассона основних конструкційних матеріалів

№ п/п	Матеріал	Коефіцієнт Пуассона μ	№ п/п	Матеріал	Коефіцієнт Пуассона μ
1	Чавун білий, сірий	0,23...0,27	7	Алюміній катаний	0,32...0,36
2	Сталь вуглецева	0,24...0,28	8	Цинк катаний	0,27
3	Сталь легована	0,25...0,30	9	Свинець	0,42
4	Мідь прокатана	0,31...0,34	10	Скло	0,25
5	Бронза фосфориста катана	0,32...0,35	11	Латунь холоднотягнута	0,32...0,42
6	Бронза марганцевиста катана	0,35	12	Латунь корабельна катана	0,36

Модулі пружності основних конструкційних матеріалів

№ п/п	Матеріал	Модуль пружності E, МПа
1.	Чавун білий, сірий	$(1,15 \dots 1,6) \cdot 10^5$
2.	Чавун ковковий	$1,55 \cdot 10^5$
3.	Сталь вуглецева	$(2,0 \dots 2,1) \cdot 10^5$
4.	Сталь легована	$(2,1 \dots 2,2) \cdot 10^5$
5.	Мідь прокатана	$1,1 \cdot 10^5$
6.	Мідь холоднотягнута	$1,3 \cdot 10^5$
7.	Мідь лита	$0,84 \cdot 10^5$
8.	Бронза фосфориста катана	$1,15 \cdot 10^5$
9.	Бронза марганцевиста катана	$1,1 \cdot 10^5$
10.	Бронза алюмінієва лита	$1,05 \cdot 10^5$
11.	Латунь холоднотягнута	$(0,91 \dots 0,99) \cdot 10^3$
12.	Латунь корабельна катана	$1,0 \cdot 10^5$
13.	Алюміній катаний	$0,69 \cdot 10^5$
14.	Дріт алюмінієвий тягнутий	$0,7 \cdot 10^5$
15.	Дуралюмін катаний	$0,71 \cdot 10^5$
16.	Цинк катаний	$0,84 \cdot 10^5$
17.	Свинець	$0,17 \cdot 10^5$
18.	Лід	$0,1 \cdot 10^5$
19.	Скло	$0,56 \cdot 10^5$
20.	Граніт	$0,49 \cdot 10^5$
21.	Вапняк	$0,42 \cdot 10^5$
22.	Мармур	$0,56 \cdot 10^5$
23.	Пісковик	$0,18 \cdot 10^5$
24.	Кам'яна кладка з граніту	$(0,09 \dots 0,1) \cdot 10^5$
25.	Кам'яна кладка з вапняку	$0,06 \cdot 10^5$
26.	Кам'яна кладка з цегли	$(0,027 \dots 0,03) \cdot 10^5$
27.	Бетон при границі міцності, МПа,	
	10	$(0,146 \dots 0,196) \cdot 10^5$
	15	$(0,164 \dots 0,214) \cdot 10^5$
	20	$(0,182 \dots 0,232) \cdot 10^5$
28.	Деревина вздовж волокон	$(0,1 \dots 0,12) \cdot 10^5$
29.	Деревина поперек волокон	$(0,005 \dots 0,01) \cdot 10^5$
30.	Каучук	$0,00008 \cdot 10^5$
31.	Текстоліт	$(0,06 \dots 0,1) \cdot 10^5$
32.	Гетинакс	$(0,1 \dots 0,17) \cdot 10^5$
33.	Бакеліт	$(2 \dots 3) \cdot 10^3$

Границі міцності σ_m (МПа) деяких матеріалів

№ п/п	Матеріал	Розтягання	Стискання
1.	Чавун сірий; звичайний	140...180	600...1000
	дрібнозернистий	210...250	до 1400
2.	Пластмаса:		
	бакеліт	20...30	80...100
	целулоїд	50...70	-
	текстоліт	85...100	130...250
	гетинакс	150...170	150...180
	бакелізована фанера	130	115
3.	Деревина (при вологості 15%):		
	сосна вздовж волокон	80	40
	сосна поперек волокон	-	5
	ялина вздовж волокон	65	35
	ялина поперек волокон	-	4
	дуб вздовж волокон	95	50
	дуб поперек волокон	-	15
	Камінь:		
4.	граніт	3	120...260
	пісковик	2	40...150
	вапняк	-	50...150
	цегла	-	7,4...30
	бетон	-	5...35
	кам'яна кладка на розчині	0,2...0,5	2,5...9

**Механічні характеристики вуглецевих конструкційних сплавів
(МПа)**

№ п/п	Марка сталі	σ_m	σ_m	τ_m	Відносне подовження δ , %, при $l = 10d$
		не менше			
1.	10	340	210	140	31
2.	20	420	250	160	25
3.	25	460	280	-	23
4.	30	500	300	170	21
5.	35	540	320	190	20
6.	40	580	340	-	19
7.	45	610	360	220	16
8.	50	640	380	-	14
9.	55	660	390	-	13
10.	60	690	410	-	12
11.	20Г	460	280	-	24
12.	30Г	550	320	-	20
13.	50Г	660	400	-	13
14.	20Х	800	650	-	11
15.	40Х	1000	800	-	10
16.	45Х	1050	850	-	9
17.	30ХМ	950	750	-	11
18.	35 ХМ	1000	850	-	12
19.	40ХН	1000	800	390	11
20.	50ХН	1100	900	-	9
21.	40ХФА	900	750	-	10
22.	38ХМЮА	1000	850	-	14
23.	12ХН3А	950	700	400	11
24.	20 ХН3А	950	750	-	12
25.	30 ХН3А	1000	800	-	10
26.	40 ХНМА	1000	950	-	12
27.	30 ХГСА	1100	850	-	10

Механічні характеристики чавуну

№ п/п	Марка чавуну	Границя міцності, МПа, при				Твердість за Брінеллем НВ
		Розтяганні σ_m	Стисканні σ_m	Згинанні σ_m	Крученні τ_m	
1.	СЧ 12	120	500	280	-	143...229
2.	СЧ 15	150	650	320	240	163...229
3.	СЧ 18	180	700	360	-	170...229
4.	СЧ 21	210	750	400	280	171...241
5.	СЧ 24	240	850	440	300	187...217
6.	СЧ 28	280	1000	480	350	170...241
7.	СЧ 32	320	1100	520	390	187...255
8.	СЧ 35	350	1200	560	400	197...269
9.	СЧ 38	380	1400	600	460	207...269
10.	ВЧ 40-10	400	1600-700	-	480-510	156...197
11.	ВЧ 50-1,5	500	1860-2000	-	740-790	187...255
12.	ВЧ 60-2	600	2040-2290	-	660-810	197...269

Механічні характеристики деяких кольорових сплавів

Сплави	Матеріал	Марка	σ_T , МПа	σ_M , МПа	δ , %	НВ
Алюмінієві	Дуралюмін нормальний	Д1	110; 240	210; 420	18; 15	45; 113
	Дуралюмін підвищеної міцності	Д6	50; 380	180; 500	8; 20	50; 125
	Алюмінієво-магнієвий сплав	АМГ	100; 210	180; 250	6; 23	45; 60
Мідні	Латунь	Л68	91; 520	320; 660	55; 30	55; 150
	Латунь алюмінієва	ЛА77-2	140; -	400; 650	55; 12	60; 170
	Латунь марганцева	ЛМц58-2	156; -	400; 700	40; 10	85; 175
	Бронза олов'яна	БрО10	-	250; -	11; -	80; -
		БрОФ10-1	140; -	200; 300	-; 3	80; 100
	Бронза алюмінієва	БрА5	160; 500	380; 400	65; 4	60; 200
Бронза кремінна	БрК3	-	250; -	10...20	-	

Примітка: перші цифри дані для м'якого стану матеріалу, другі – для твердого.

**Орієнтовні значення основних допустимих напружень
на розтягання і стискання**

№ п/п	Матеріал	Допустиме напруження, МПа, на	
		розтягання	стискання
1.	Чавун сірий у відливках	28...80	120...150
2.	Сталь Ст2	140 160 140	
3.	Сталь Ст3		
4.	Сталь Ст3 у мостах		
5.	Сталь машинобудівна (конструкційна) вуглецева	60...250	
6.	Сталь машинобудівна (конструкційна) легована	100...400 і вище	
7.	Мідь	30...120	
8.	Латунь	70...140	
9.	Бронза	60...120	
10.	Алюміній	30...80	
11.	Бронза алюмінієва	80...120	
12.	Дуралюмін	80...150	
13.	Текстоліт	30...40	
14.	Гетинакс	50...70	
15.	Фанера бакелізована	40...50	
16.	Сосна вздовж волокон	7...10	10...12
17.	Сосна поперек волокон	-	1,5...2
18.	Дуб уздовж волокон	9...13	13...15
19.	Дуб поперек волокон	-	2...3,5
20.	Кам'яна кладка	до 0,3	0,5...4
21.	Цегляна кладка	до 0,2	0,6...2,5
22.	Бетон	0,1...0,7	1,0...9

ЗМІСТ

Передмова.....	3
1. Деформації при розтягання та стисканні	4
2. Напруження та переміщення.....	8
3. Робота зовнішніх сил. Потенційна енергія деформації..	12
4. Епюри повздовжніх сил, нормальних напружень, відносних деформацій і переміщень.....	14
5. Експериментальне вивчення механічних властивостей матеріалів.....	21
6. Діаграма розтягання.....	25
7. Діаграма стискання пластичних, крихких та анізотропних матеріалів.....	33
8. Твердість.....	38
9. Вплив різних факторів на механічні властивості матеріалів.....	40
10. Концентрація напружень. Місцеві та контактні напруження.....	44
11. Допустимі напруження. Запас міцності.....	47
12. Розрахунок на міцність і жорсткість при розтяганні (стисканні).....	50
13. Статично невизначені задачі при розтяганні (стисканні)	56
Список літератури.....	65
Контрольні запитання.....	66
Додатки	67

Навчальне видання

Подолянчук Станіслав Вікторович

Опір матеріалів.

Розтягання. Стискання

Навчальний посібник

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського