

УДК 517.97

*Артем Чернієнко,
студент факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Сергій Бак,
докт. фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Галина Ковтонюк,
канд. пед. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського*

ІСНУВАННЯ ВІДОКРЕМЛЕНИХ ОСНОВНИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ ТИПУ ФЕРМІ–ПАСТИ–УЛАМА–ЦИНГУ

Анотація. У статті досліджується існування відокремлених основних хвиль у системі типу Фермі–Пасті–Улама–Цінгу. Для цього використано варіаційний підхід із використанням методу многовиду Нехарі і методу періодичних апроксимацій.

Ключові слова: системи типу Фермі–Пасті–Улама–Цінгу, основні хвилі, періодичні біжучі хвилі, відокремлені біжучі хвилі, метод многовиду Нехарі, метод періодичних апроксимацій.

Abstract. The paper investigates the existence of solitary ground waves in a Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou-type system. A variational approach is employed, using the Nehari manifold method and the method of periodic approximations.

Keywords: Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou-type systems, ground waves, periodic traveling waves, solitary traveling waves, Nehari manifold method, method of periodic approximations.

Вступ. У цій роботі ми досліджуємо питання існування відокремлених біжучих хвиль у дискретних нелінійних системах, які виникають у багатьох задачах математичної фізики, механіки ланцюгів та нелінійної динаміки. Періодичні та відокремлені хвилі в системах типу ФПУ та системах типу Клейна–Гордона детально досліджені в працях [1–18]. Одним із центральних завдань дослідження є побудова так званих *основних хвиль* – розв'язків, що мінімізують енергію та мають найпростішу локалізовану структуру. Періодичні хвилі є добре зрозумілими завдяки класичним варіаційним методам, проте

безпосередній перехід до відокремлених хвиль у межі нескінченного періоду не є очевидним.

У цій роботі ми показуємо, що, незважаючи на ці труднощі, з будь-якої послідовності періодичних основних можна виділити підпослідовність, яка після відповідного зсуву збігається до відокремленої хвилі. Таким чином, відокремлені основні хвилі можна розглядати, як границю періодичних розв'язків. Останній метод називають методом періодичних апроксимацій.

Постановка задачі. Динаміка ланцюга частинок моделі Фермі–Пасті–Улама–Цингу описується системою

$$\ddot{q}_n(t) = U'(q_{n+1}(t) - q_n(t)) - U'(q_n(t) - q_{n-1}(t)), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Припускаючи, що розв'язок має вигляд біжучої хвилі

$$q_n(t) = u(n - ct),$$

та переходячи до неперервної змінної $s = n - ct$, отримуємо рівняння

$$c^2 u''(s) = U'(u(s+1) - u(s)) - U'(u(s) - u(s-1)). \quad (2)$$

Нас цікавлять два види розв'язків рівняння (2): періодичні і відокремлені хвилі з профілями, які задовольняють відповідно умови:

$$u'(s + 2k) = u'(s) \quad (3)$$

та

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u'(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} u'(s) = u'(\pm\infty) = 0. \quad (4)$$

Варто зауважити, що профілі періодичних хвиль не є обов'язково періодичними, але періодичними є їх профілі швидкостей, а отже, і профілі відносних зміщень, оскільки

$$r(s) = \int_s^{s+1} u'(\tau) d\tau.$$

Нехай виконуються умови:

$$(i) \quad \text{Потенціал } U(r) = \frac{a}{2} r^2 + V(r), \quad V \in C^1(\mathbb{R}), V(0) = V'(0) = 0,$$

$$V'(r) = o(|r|), \text{ при } r \rightarrow 0;$$

(ii) $V \in C^2, \mu \in (0,1)$ така, що $0 < r^{-1}V'(r) \leq \mu V''(r), r \neq 0$.

Введемо два гільбертові простори

$$X_k := \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u'(s+2k) = u'(s), u(0) = 0\},$$

$$X := \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}), u(0) = 0\}.$$

Зауважимо, що елементи простору X автоматично задовольняють умову (4).

Стандартні обчислення показують, що рівняння (2) є рівнянням Ейлера–Лагранжа для функціоналів дії

$$J_k(u) := \int_{-k}^k \left(\frac{c^2}{2} (u'(s))^2 - U(Au(s)) \right) ds \quad (5)$$

та

$$J(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{c^2}{2} (u'(s))^2 - U(Au(s)) \right) ds \quad (6)$$

відповідно у просторах X_k та X . Тобто критичні точки цих функціоналів є розв'язками рівняння (2), які задовольняють відповідно умови (3) та (4). Розв'язок u називають *основною періодичною хвилею* (відповідно *основною відокремленою хвилею*), якщо відповідне критичне значення $J_k(u)$ (відповідно $J(u)$) є найменшим з усіх можливих критичних значень.

Для функціоналів J_k та J означимо відповідні многовиди Нехарі

$$S_k := \{u \in X_k \mid \langle J'_k(u), u \rangle = 0, u \neq 0\}$$

та

$$S := \{u \in X \mid \langle J'(u), u \rangle = 0, u \neq 0\}.$$

Тепер розглянемо наступні задачі мінімізації

$$m_k = \inf \{J_k(u) : u \in S_k\}, \quad (7)$$

$$m = \inf \{J(u) : u \in S\}. \quad (8)$$

Виявляється, що розв'язки цих задач є розв'язками рівняння (2) у відповідних просторах. В праці [17] за допомогою теореми про гірський перевал

встановлено існування розв'язку задачі (7), тобто існування періодичних основних хвиль.

Основний результат. Оскільки функціонал J не задовольняє всі умови теореми про гірський перевал, то для встановлення існування розв'язку задачі (8), тобто існування відокремлених основних хвиль можна скористатись методом періодичних апроксимацій. У цьому випадку відокремлені основні хвилі будуються за допомогою переходу до границі при $k \rightarrow \infty$.

Теорема. Нехай виконуються умови (i), (ii) та $c^2 > \max(a, 0)$. Тоді, якщо $u_k \in X_k$ – послідовність k -періодичних основних хвиль, то існують послідовність $\zeta_k \in \mathbb{R}$ та відокремлена основна хвиля $u \in X$ такі, що після переходу до послідовності $k \rightarrow \infty$, функції $\tilde{u}_k = u_k(\cdot + \zeta_k) - u$ в X задовольняють умову

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}'_k - u'\|_{L^2(-k, k)} = 0.$$

Крім того, $t_k \rightarrow t$, $J(u) = t$.

Таким чином, у цій статті встановлено існування відокремлених основних біжучих хвиль в системі типу Фермі–Пасти–Улама–Цингу за допомогою методу многовиду Нехарі і методу періодичних апроксимацій.

Література:

1. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57, № 3. С. 45–52.
2. Бак С. М., Панков О. А. Біжучі хвилі в системах осциляторів на двовимірних ґратках. *Український математичний вісник*. 2010. Т. 7, № 2. С. 154–175.
3. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P. 75–87.
5. Bak S. M., Kovtoniuk H.M. Existence of solitary traveling waves in discrete Klein-Gordon-type equations with nonlocal interaction. *Український математичний вісник*. 2024. Т. 21, № 3. С. 296–311.
6. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Український математичний вісник*. 2020. Т. 17, № 3. С. 301–312.
7. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Український математичний вісник*. 2022. Т. 19, № 4. С. 450–461.

8. Bak S. M., Kovtoniuk H. M. Exponential decay of solitary traveling wave solutions to the Fermi–Pasta–Ulam-type systems on 2D lattice. *Український математичний вісник*. 2025. Т. 22, № 1. С. 1–9.
9. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Periodic traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2d-lattice. *Mat. Stud.* 2023. Vol. 60, № 2. P. 180–190.
10. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Solitary traveling waves in Ferm-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2D-lattice. *Український математичний вісник*. 2024. Т. 21, № 1. С. 1–15.
11. Bak S., Kovtoniuk H., Kizim S., Cherniiienko A. On solitons in Fermi–Pasta–Ulam-type systems. *Актуальні проблеми математики, фізики і комп'ютерних наук* : зб. наук. пр. [Електронне мережне наукове видання]. Вінниця, 2025. Вип. 22. С. 4–9.
12. Bates P.W., Zhang C. Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2006. Vol. 16, № 1. P. 235–252.
13. Feckan M., Rothos V. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbor interactions. *Nonlinearity*. 2007. Vol. 20. P. 319–341.
14. Friesecke G., Wattis J. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Comm. Math. Phys.* 1994. Vol. 161 (2). P. 391–418.
15. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439–464.
16. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*, 2006. Vol. 216. P. 327–345.
17. Pankov A. *Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices*. London-Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
18. Pankov A. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam chains with nonlocal interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2019. Vol. 12, № 7. P. 2097–2113.