

Сільвейстр А.М., Моклюк М.О.

# ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА

## Частина 1

---

*Класична механіка*  
*Електродинаміка. Спеціальна теорія відносності*  
*Квантова механіка*

### Курс лекцій

для здобувачів освіти фізико-математичних факультетів  
педагогічних закладів вищої освіти

Вінниця  
«ТВОРИ»  
2023

УДК 530(075.1)

DOI: [https://doi.org/10.31652/530\(075.1\)-1-1-366](https://doi.org/10.31652/530(075.1)-1-1-366)

С 36

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

(Протокол № 11 від 21.06.2023 року).

Рецензенти:

Мельничук О.В., доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи та міжнародних зв'язків, професор кафедри інформаційних технологій, фізико-математичних та економічних наук Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя

Кремінський Б.Г., доктор педагогічних наук, професор, начальник відділу роботи з обдарованою молоддю Державної наукової установи «Інститут модернізації змісту освіти»

**Сільвейстр А.М., Моклюк М.О.**

С 36

Теоретична фізика: У 2 частинах. Частина 1. Класична механіка. Електродинаміка. Спеціальна теорія відносності. Квантова механіка: Курс лекцій для здобувачів освіти фізико-математичних факультетів педагогічних закладів вищої освіти. – Вінниця, ТОВ «Твори», 2023. - 366 с.

В посібнику розглядаються теоретичні основи класичної механіки, електродинаміки, спеціальної теорії відносності (СТВ) та квантової механіки. Значне місце в ньому відведено основним поняттям і законам, які вивчаються у даних розділах теоретичної фізики.

Посібник призначений для здобувачів освіти фізико-математичних факультетів педагогічних закладів вищої освіти, а також для слухачів та викладачів, які цікавляться розвитком теоретичної фізики.

© А.М. Сільвейстр, М.О. Моклюк, 2023.

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	13
<b>Розділ 1. КЛАСИЧНА МЕХАНІКА</b> .....	16
<b>Лекція 1. Основні поняття і закони класичної механіки</b> .....	17
§1. Класична механіка як теорія механічного руху макроскопічних тіл. Основні розділи та об'єкти вивчення класичної механіки .....	17
§2. Класичні уявлення про простір і час. Границі застосування класичної механіки .....	18
<b>Лекція 2. Кінематика матеріальної точки твердого тіла</b> .....	21
§3. Визначення положення точки в просторі. Система відліку. Траєкторія руху точки. Закони руху .....	21
§4. Натуральна, координатна та векторна форми кінематичних рівнянь руху матеріальної точки .....	23
§5. Вектор швидкості матеріальної точки. Секторна швидкість. Проекції швидкості матеріальної точки в декартовій системі координат .....	24
§6. Вектор прискорення матеріальної точки. Проекції прискорення матеріальної точки в декартовій системі координат .....	26
§7. Натуральний тригранник. Радіус кривизни траєкторії. Вектори швидкості і прискорення в натуральній системі координат. Тангенціальне і нормальне прискорення.....	28
§8. Проекції швидкості і прискорення в полярній системі координат .....	31
§9. Поступальний рух твердого тіла .....	33
§10. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Кінематичні рівняння Ейлера .....	35
§11. Векторні формули для швидкостей і прискорень точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі. (Кінематичні рівняння Ейлера) .....	37
<b>Лекція 3. Динаміка</b> .....	39
§12. Поняття сили і маси .....	39
§13. Інерціальні системи відліку. Перетворення Галілея. Принцип відносності .....	40
§14. Закони Ньютона. Зв'язок третього закону з однорідністю і ізотропністю простору .....	42

§15. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки. Формулювання основної задачі динаміки. Перший та другий інтеграли руху. Роль початкових умов. Принцип причинності класичної механіки .....	43
§16. Робота сили. Потенціальна енергія частинки в даному силовому полі. Приклади потенціальних полів. Центральньо-симетричне поле .....	48
§17. Класифікація сил в механіці .....	52
§18. Класифікація вільних механічних систем .....	53
<b>Лекція 4. Закони збереження та загальні теореми динаміки .....</b>	<b>54</b>
§19. Теореми про зміну кінетичної та повної механічної енергії системи матеріальних точок. Закон збереження повної механічної енергії системи, його зв'язок з однорідністю часу .....	55
§20. Теорема про зміну імпульсу незамкненої системи. Закон збереження імпульсу замкненої системи, його зв'язок з третім законом Ньютона та однорідністю простору. Симетрія зовнішнього силового поля та збереження окремих складових імпульсу системи .....	58
§21. Теорема про рух центра мас системи .....	61
§22. Теорема Кеніга .....	62
§23. Момент сили відносно центра і відносно осі .....	64
§24. Момент імпульсу частинки .....	65
§25. Теорема про зміну моментів імпульсу частинки. Закон збереження моменту імпульсу частинки в центральньо-симетричному полі відносно центра сил. Закон площ. ....	66
§26. Теорема про зміну моменту імпульсу незамкненої системи. Закон збереження моменту імпульсу замкненої системи. Симетрія зовнішнього силового поля та збереження окремих складових моменту імпульсу .....	68
§27. Одномірний рух. Якісне дослідження одномірного руху за допомогою графіків повної механічної енергії системи та потенціальної енергії системи. Границі одномірного руху. Період фінітного руху .....	71
<b>Лекція 5. Рух частинки в центральньо-симетричному полі .....</b>	<b>74</b>
§28. Задача двох тіл. Зведення цієї задачі до задачі про рух частинки в центральньо-симетричному полі (ЦСП).	

Приведена маса .....	74
§29. Розв'язок задачі про рух частинки в центрально-симетричному полі. Метод одномірного ефективного потенціалу .....	77
§30. Якісне дослідження руху частинки в центрально-симетричному полі за виглядом одномірного ефективного потенціалу .....	79
§31. Рух зарядженої частинки в кулонівському полі сил. Кеплерова задача .....	81
§32. Розсіювання частинок в центрально-симетричному полі. Знаходження функціональної залежності кута розсіювання від прицільного параметра. Формула Резерфорда для розсіювання $\alpha$ - частинок в полі атомного ядра. Ефективний диференціальний переріз розсіювання .....	85
<b>Лекція 6. Аналітична механіка .....</b>	<b>90</b>
§33. Невільна система матеріальних точок. Зв'язки та їх класифікація. Рівняння зв'язків. Число ступенів вільності системи .....	90
§34. Можливі (віртуальні) та дійсні переміщення .....	93
§35. Узагальнені координати .....	95
§36. Узагальнені сили. Віртуальна робота .....	96
§37. Реакції зв'язків. Постулат про ідеальні зв'язки .....	97
§38. Елементи аналітичної статички. Принцип можливих переміщень. Умови рівноваги голономної системи .....	98
§39. Загальне рівняння динаміки. Принцип Даламбера .....	100
<b>Лекція 7. Рівняння Лагранжа другого роду .....</b>	<b>101</b>
§40. Рівняння Лагранжа другого роду .....	101
§41. Структура рівнянь Лагранжа для різних механічних систем. Функція Лагранжа і її структура для систем з потенціальними силами .....	105
<b>Лекція 8. Рівняння Лагранжа та закони збереження .....</b>	<b>107</b>
§42. Вираз кінетичної енергії системи через її узагальнені швидкості .....	107
§43. Інтеграл енергії рівнянь Лагранжа .....	108
§44. Узагальнені імпульси. Циклічні координати та циклічні інтеграли рівнянь Лагранжа .....	111
§45. Канонічні перетворення. Канонічні рівняння Гамільтона .....	112

§46. Фізичний зміст функції Гамільтона. Зв'язок цієї функції з законами збереження .....	115
§47. Дужки Пуассона .....	117
§48. Елементи варіаційного числення. Ізохронна варіація...	118
§49. Варіаційний принцип Остроградського-Гамільтона (принцип найменшої дії) .....	119
§50. Вивід рівнянь Лагранжа з принципу Остроградського-Гамільтона .....	123
<b>Лекція 9. Динаміка точки змінної маси .....</b>	<b>125</b>
§51. Рівняння Мещерського .....	125
§52. Закон зміни маси .....	127
§53. Перша задача Ціолковського .....	128
§54. Друга задача Ціолковського .....	129
§55. Рух точки змінної маси в середовищі з гідравлічним опором .....	132
<b>Лекція 10. Коливання .....</b>	<b>135</b>
§56. Малі коливання механічних систем. Теорема Діріхле про умови стійкої рівноваги. Малі коливання з однією ступеню вільності. Функція Лагранжа для малих коливань такої системи. Гармонічний осцилятор. Квазіпружна сила. Енергетичні перетворення в коливній системі .....	135
§57. Згасаючі коливання .....	139
§58. Вимушені коливання системи з однією ступеню вільності .....	141
<b>Лекція 11. Алгоритми розв'язування задач .....</b>	<b>144</b>
§59. Алгоритм розв'язування задач з кінематики .....	144
§60. Алгоритм розв'язування задач з динаміки .....	146
<b>Питання для контролю та перевірки знань з класичної механіки .....</b>	<b>148</b>
<b>Рекомендована література з класичної механіки .....</b>	<b>151</b>
<b>Розділ 2. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА. СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ (СТВ) .....</b>	<b>152</b>
<b>Лекція 12. Основні принципи спеціальної теорії відносності. Релятивістська кінематика .....</b>	<b>153</b>
§61. Спеціальна теорія відносності, як розділ теоретичної фізики. Експериментальні основи СТВ .....	153
§62. Постулати Ейнштейна, як базисні принципи СТВ .....	154
§63. Простір, час і системи відліку в СТВ. Просторово-	

часовий інтервал та його інваріантність .....	155
§64. Перетворення координат Лоренца. Одержання їх на основі постулатів Ейнштейна .....	157
§65. Кінематичні наслідки перетворення Лоренца .....	161
§66. Перетворення швидкостей в СТВ. Відносна швидкість (закон суми швидкостей) .....	163
§67. Пояснення СТВ досліду Фізо та аберації світла .....	167
<b>Лекція 13. Простір Мінковського. Чотиривимірне представлення СТВ в просторі Мінковського .....</b>	<b>170</b>
§68. Чотиривимірний простір Мінковського. Геометрична інтерпретація простору Мінковського .....	170
§69. Чотиривимірні вектори і тензори .....	173
§70. Чотиривимірні вектори швидкості і прискорення .....	175
<b>Лекція 14. Елементи динаміки СТВ .....</b>	<b>178</b>
§71. Імпульс і маса тіла в СТВ. Чотиривимірний вектор імпульсу .....	179
§72. Вираз сили в чотиривимірному просторі. Перетворення координат чотиривимірного вектора сили.....	180
§73. Другий закон Ньютона в СТВ. Релятивістське рівняння руху частинки .....	181
§74. Релятивістський вираз для енергії. Взаємозв'язок між масою та енергією тіла. Чотиривимірний вектор енергії, імпульсу .....	183
§75. Енергія зв'язку системи. Дефект мас та його експериментальне підтвердження .....	185
§76. Закони збереження релятивістської механіки .....	187
<b>Лекція 15. Класична електродинаміка .....</b>	<b>188</b>
§77. Предмет і методи класичної електродинаміки. Електромагнітна взаємодія та її характеристики .....	188
§78. Експериментальні основи електродинаміки: закон Кулона; закон збереження електричного заряду; закон Біо-Савара-Лапласа; електромагнітна індукція; закон Фарадея; гіпотеза Максвелла про струм зміщення .....	189
<b>Лекція 16. Електричний заряд та електромагнітне поле у вакуумі .....</b>	<b>194</b>
§79. Електричний заряд та його властивості. Густина заряду та густина струму. Закон збереження електричних зарядів .....	195
§80. Електричне та магнітне поля у вакуумі. Напруженість	

електричного та індукція магнітного полів. Дія електричного та магнітного полів на заряди та струми (сила Лоренца та сила Ампера) .....	196
§81. Змінне електромагнітне поле. Вектори $\vec{E}$ , $\vec{B}$ , як змінні стани електромагнітного поля. Принцип суперпозиції електромагнітних полів .....	198
<b>Лекція 17. Загальні властивості електромагнітного поля у вакуумі</b> .....	199
§82. Система основних рівнянь Максвелла для електромагнітного поля у вакуумі в диференціальній формі. Фізичний зміст кожного рівняння Максвелла ...	200
§83. Електродинамічний потенціал електромагнітного поля та його математичний вираз. Колібровочна інваріантність та умова Лоренца .....	202
§84. Загальне поняття про енергію, густину енергії, густину потоку енергії і густину енергії електромагнітного поля. Закон збереження енергії в електромагнітному полі.....	205
§85. Поняття про імпульс електромагнітного поля. Тиск світла .....	206
<b>Лекція 18. Основи релятивістської електродинаміки</b> ...	208
§86. Чотиривимірні вектори густини струму і потенціалу. Перетворення цих компонентів чотирьох векторів при зміні інерціальної системи відліку (ІСВ). Відносність поняття заряду і струму .....	208
§87. Закон збереження зарядів у СТВ в коваріантній формі. Умова Лоренца в коваріантній формі .....	209
§88. Тензори електромагнітного поля .....	211
§89. Перетворення електричних і магнітних полів при змінні ІСВ .....	212
§90. Коваріантна форма рівнянь Максвелла у вакуумі .....	214
§91. Чотиривимірний вектор. Пояснення аберації світла ...	215
§92. Ефект Доплера в оптиці та його пояснення в СТВ .....	218
<b>Лекція 19. Електростатичне поле у вакуумі</b> .....	219
§93. Рівняння електростатики у вакуумі. Електростатичний потенціал у вакуумі. Рівняння Пуассона .....	219
§94. Загальний розв'язок рівняння Пуассона .....	220
§95. Електростатичне поле у дипольному наближенні. Дипольний момент і його властивості .....	222

§96. Потенціал в системі зарядів на великих віддальх .....	225
§97. Енергія системи нерухомих зарядів. Об'ємна густина енергії електростатичного поля .....	227
§98. Система нерухомих зарядів у зовнішньому електричному полі. Сила, момент сили, що діє з боку поля на електричні заряди .....	230
<b>Лекція 20. Постійний електричний струм у речовинах</b>	232
§99. Густина електричного струму і провідність речовин. Диференціальна форма закону Ома і Джоуля – Ленца ....	232
§100. Закон збереження електричних зарядів. Рівняння неперервності електричного струму .....	234
§101. Сторонні електрорушійні сили (ЕРС). Закон Ома і закон Джоуля – Ленца при наявності сторонніх ЕРС ....	236
<b>Лекція 21. Стаціонарне магнітне поле</b> .....	237
§102. Магнітне поле струму. Рівняння Максвелла магнітостатичного поля. Закон Біо-Савара-Лапласа .....	237
§103. Векторний потенціал магнітного поля. Рівняння Пуассона для векторного потенціалу. Граничні умови ...	239
§104. Електромагнітне поле заряду, що перебуває в рівномірному русі .....	240
§105. Векторний потенціал системи струмів на великих віддальх. Стаціонарне магнітне поле у дипольному наближенні .....	241
§106. Магнітний момент та його властивості. Магнітний момент витка з струмом .....	244
<b>Лекція 22. Квазістаціонарне електромагнітне поле</b> .....	245
§107. Умови і характеристики квазістаціонарного електромагнітного поля .....	245
§108. Закон електромагнітної індукції Фарадея і вираз його у диференціальній формі .....	246
§109. Вираз напруженості електричного поля через електродинамічні потенціали. Струм зміщення .....	248
§110. Енергія магнітного поля. Об'ємна густина енергії магнітного поля .....	250
<b>Лекція 23. Електромагнітні хвилі</b> .....	252
§111. Хвильові рівняння для напруженостей електромагнітного поля. Плоскі електромагнітні хвилі...	252
§112. Монохроматичні плоскі електромагнітні хвилі та їх рівняння. Хвильовий вектор .....	254

§113. Структура поля плоских монохроматичних хвиль. Вираз густини потоку енергії для плоских хвиль .....	256
<b>Лекція 24. Електромагнітне поле довільно рухомих зарядів</b> .....	257
§114. Рівняння Даламбера та їх загальний розв'язок для електромагнітного поля довільно рухомих зарядів. Запізнювальні потенціали електромагнітного поля .....	258
§115. Дипольне випромінювання зарядів і струмів. Вирази для запізнювальних електродинамічних потенціалів.....	259
§116. Випромінювання електричного диполя. (гармонічного осцилятора) Герца .....	261
§117. Поле гармонічного осцилятора Герца в ближній зоні (дипольне наближення) і у хвильовій (далекій) зоні - наближення плоских хвиль .....	262
<b>Лекція 25. Електромагнітне поле у речовині</b> .....	265
§118. Рівняння Лоренца для мікроскопічного електричного і мікроскопічного магнітного полів. Вільні та зв'язані заряди. Мікроструми в речовині .....	265
§119. Макроскопічне усереднення рівнянь Лоренца. Струми провідності та намагніченості .....	267
§120. Вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ електромагнітного поля. Рівняння Максвелла і матеріальні рівняння в речовині. Граничні умови .....	268
<b>Питання для контролю та перевірки знань з електродинаміки та спеціальної теорії відносності ...</b>	270
<b>Рекомендована література з електродинаміки та спеціальної теорії відносності</b> .....	274
<b>Розділ 3. КВАНТОВА МЕХАНІКА</b> .....	275
<b>Лекція 26. Особливості поведінки мікрооб'єктів. Квантові властивості світла</b> .....	276
§121. Проблема рівноважного теплового випромінювання.	276
§122. Фотоефект. Поняття про фотони .....	278
§123. Ефект Комптона .....	279
<b>Лекція 27. Хвильові властивості частинок</b> .....	281
§124. Гіпотеза де Бройля .....	281
§125. Дифракція електронів .....	283
§126. Уявний експеримент - дифракція електронів на двох щілинах .....	285
§127. Статистичне тлумачення хвиль де Бройля .....	286

§128. Принцип доповненості .....	286
<b>Лекція 28. Зображення механічних величин операторами .....</b>	<b>286</b>
§129. Лінійні і самоспряжені (ермітові) оператори .....	286
§130. Умова одночасності виміру двох фізичних величин...	288
§131. Оператори координати, імпульсу, моменту імпульсу і енергії мікрооб'єкта (частинки) .....	288
<b>Лекція 29. Основні положення квантової механіки .....</b>	<b>290</b>
§132. Хвильова функція. Квантово-механічний принцип суперпозиції .....	291
§133. Ймовірнісний характер поведінки мікрооб'єктів .....	291
§134. Принцип невизначеності Гейзенберга .....	292
<b>Лекція 30. Рівняння Шредінгера .....</b>	<b>294</b>
§135. Принцип причинності в квантовій механіці .....	294
§136. Загальне рівняння Шредінгера .....	294
§137. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів .....	295
§138. Зміна механічних величин з часом .....	296
<b>Лекція 31. Рух мікрооб'єктів в потенціальних полях ....</b>	<b>298</b>
§139. Рух вільної частинки .....	298
§140. Рух частинки в потенціальній ямі з безмежно високими стінками .....	299
§141. Лінійний гармонічний осцилятор .....	301
§142. Тунельний ефект .....	305
§143. Явище холодної емісії електронів .....	307
<b>Лекція 32. Рух у полі з центральною симетрією .....</b>	<b>308</b>
§144. Зв'язок енергетичного спектру з видом потенціалу...	308
§145. Рух мікрооб'єкта в центрально-симетричному полі...	312
§146. Рух електрона в кулонівському полі ядра .....	319
<b>Лекція 33. Закони збереження .....</b>	<b>324</b>
§147. Закони збереження в квантовій механіці та їх зв'язок у фундаментальними властивостями часу і простору .....	324
§148. Парність станів .....	327
<b>Лекція 34. Матрична форма квантової механіки .....</b>	<b>328</b>
§149. Оператори і матриці .....	328
§150. Основи теорії представлень .....	331
<b>Лекція 35. Експериментальні дослідження в області квантування стаціонарних станів атома та виявлення спіну електрона .....</b>	<b>333</b>
§151. Досліди Франка-Герца .....	333

§152. Дослід О. Штерна і В. Герлаха .....	334
<b>Лекція 36. Теорія збурень .....</b>	<b>336</b>
§153. Постановка задачі .....	336
§154. Збурення при відсутності виродження .....	339
§155. Збурення при наявності виродження .....	339
§156. Теорія збурень у випадку, коли збурення залежить від часу .....	340
§157. Випромінювання і поглинання атомами світла .....	341
<b>Лекція 37. Квантова механіка систем однакових частинок .....</b>	<b>344</b>
§158. Принцип тотожності мікрочастинок .....	344
§159. Частинки Бозе і частинки Фермі (бозони і ферміони).	346
<b>Лекція 38. Багатоелектронні атоми .....</b>	<b>347</b>
§160. Атом гелію .....	348
§161. Молекула водню .....	351
§162. Мікрочастинка у зовнішньому магнітному полі .....	352
<b>Питання для контролю та перевірки знань з квантової механіки .....</b>	<b>355</b>
<b>Рекомендована література з квантової механіки .....</b>	<b>357</b>
<b>Предметний покажчик.....</b>	<b>359</b>

## ВСТУП

Теоретична фізика зародилась в ХІХ столітті: молекулярна теорія, теорія Максвелла. Фізичні процеси описувались математичною мовою.

Теоретична фізика - це узагальнення експериментів загальної фізики, побудова відповідних теорій, встановлення зв'язків між фактами, на основі яких застосували методи дедукції і індукції, вдалося зробити нові відкриття. Це вища форма мислення. Розвиток теоретичної фізики перетинається з такими відкриттями:

1. Першим відкриттям було відкриття Максвеллом електромагнітного поля і електромагнітних хвиль та їх властивостей (1886 рік). Це було зроблено за 25 років до їх експериментального підтвердження.

2. В подальшому Ейнштейн одержав формулу  $E = mc^2$ , яка досить часто зустрічається в ядерній фізиці.

3. Оскільки розрізняють ефект Доплера в акустиці й оптиці, то виникли проблеми пояснення даного ефекту в механіці та оптиці. Ефект Доплера в оптиці пояснити було неможливо, а в механіці – можна. Іншими словами, частота хвиль, яку сприйматиме спостерігач, залежить не лише від джерела, а й від системи відліку, з якою пов'язаний приймач.

4. Дірак застосовуючи закони спеціальної теорії відносності показав, що повинен існувати антиелектрон. Електрон та антиелектрон, взаємодіючи, повинні анігілювати:  $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$  (можливо  $3\gamma$ ). Через 5 років ця частинка дійсно була відкрита.

Механіка – розділ фізики, одна з наук про природу. Вона швидко розвивається, і новостворені в ній розділи збільшують міцність знань людини. Теоретична механіка є науковою основою багатьох розділів сучасної техніки. Зібраний у цій науці досвід полегшує розуміння науково-технічного прогресу та спрямовує на вірний шлях самостійного творчого пошуку.

Курс теоретичної механіки в педагогічному університеті повинен: 1) забезпечити опанування здобувачами вищої освіти основ класичної механіки; 2) створити базу для вивчення курсу теоретичної фізики; 3) стати міцною основою для глибокого розуміння тих найпростіших закономірностей механічного руху, які вивчаються в школі; 4) розкрити зв'язок теоретичної механіки з технікою, практикою. Курс теоретичної механіки в педагогічному університеті вносить свій вклад у формування наукового світогляду здобувачів

вищої освіти. Тому у даному курсі необхідно приділяти увагу як методологічним питанням механіки, так і питанням історії.

Вивчення курсу електродинаміки має важливе значення у практиці суспільства. На законах електродинаміки базуються електротехнічні, радіотехнічні, електронні та інші багаточисельні прилади й пристрої.

Важливе значення в майбутніх космічних польотах будуть відігравати іонні та плазмові реактивні двигуни. При створенні таких двигунів електродинамічні проблеми виступають на перший план.

Одна із самих важливих задач, що стоїть перед наукою, - це проблема керованих термоядерних реакцій. У своїй головній проблемі вона є електродинамічною проблемою і зводиться до використання електромагнітних полів.

Електродинамічні явища відіграють важливу роль і в астрономії. Існуючі в міжзоряному просторі магнітні поля прискорюють космічні заряджені частинки, спалахи на Сонці супроводжуються зміною магнітного поля поблизу поверхні Сонця, магнітне поле Землі втримує поблизу Землі заряджені частинки, завдяки чому створюються радіаційні пояси. Таким чином, можна стверджувати, що електромагнітні явища відіграють важливу роль в природі.

Квантову фізику (механіку) слід розглядати, як теоретичну основу сучасних уявлень про будову і властивості матерії (речовини).

Квантова механіка виникла і розвивалась як фізика мікросвіту, а тому на перших порах її можна розглядати як науку, що вивчає мікрооб'єкти за допомогою макроскопічних приладів, що з достатньою точністю підлягають законам класичної фізики. Однак в процесі розвитку виявилось, що закони квантової механіки являються більш фундаментальними і більш загальними, ніж закони класичної фізики. Квантова механіка вбирає в себе класичну фізику як граничний випадок. Квантову механіку поділяють на релятивістську і нерелятивістську.

В даному посібнику розглядаються теоретичні основи класичної механіки, електродинаміки, спеціальної теорії відносності (СТВ) та квантової механіки. Значне місце в ньому відведено основним поняттям і законам, які вивчаються у даних розділах теоретичної фізики. Систематизовано викладено програмний матеріал з класичної механіки, електродинаміки, спеціальної теорії відносності (СТВ) та квантової механіки.

У розділі «Класична механіка» приділено увагу основним

поняттям і законам механіки. В основі, якої лежать закони Ньютона та декілька простих гіпотез, які ґрунтуються на таких поняттях, як простір і час, сила і маса, інерціальна система відліку. Класична механіка, як окремий розділ теоретичної фізики вивчає: по-перше, рух тіл з швидкостями значно меншими ніж швидкість світла; по-друге, класична механіка вивчає рух лише макроскопічних тіл, тобто тіл маса яких значно більша маси електрона. Розглядаються основні поняття (моделі): матеріальна точка, система матеріальних точок, абсолютно тверде тіло та ін.

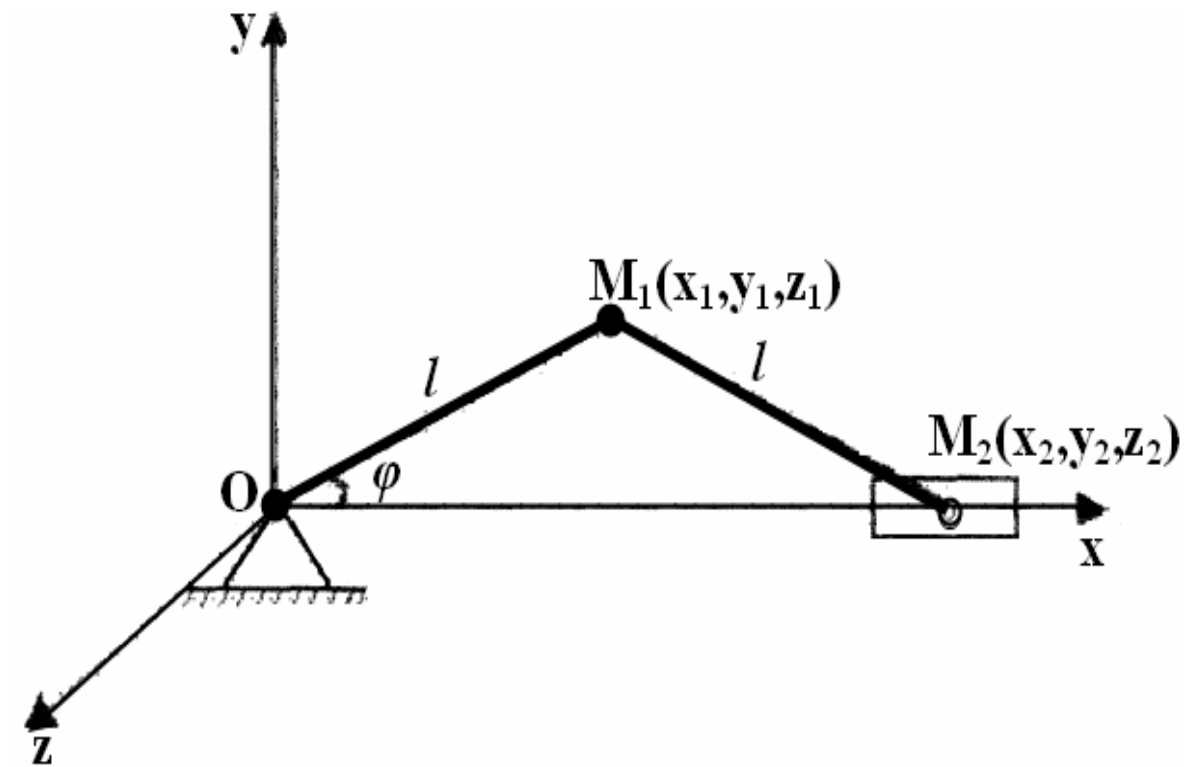
«Електродинаміка. Спеціальна теорія відносності» як окремий розділ теоретичної фізики вивчає: основні принципи спеціальної теорії відносності (СТВ), релятивістську кінематику; простір Мінковського, чотиривимірне представлення СТВ в просторі Мінковського; елементи динаміки СТВ; класичну електродинаміку; електричний заряд та електромагнітне поле у вакуумі; загальні властивості електромагнітного поля у вакуумі; основи релятивістської електродинаміки; електростатичне поле у вакуумі; постійний електричний струм у речовинах; стаціонарне магнітне поле; квазістаціонарне електромагнітне поле; електромагнітні хвилі; електромагнітне поле довільно рухомих зарядів; електромагнітне поле у речовині.

«Квантова механіка» як один із розділів теоретичної фізики спирається на вивчення особливостей поведінки мікрооб'єктів, квантових та хвильових властивостей частинок, рівняння Шредінгера, рух мікрооб'єктів в потенціальних полях, систему однакових частинок, багатоелектронні атоми тощо. В даному розділі описані способи виведення загального рівняння Шредінгера та загальне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів.

Даний посібник призначений для здобувачів освіти фізико-математичних факультетів педагогічних закладів вищої освіти, а також для слухачів та викладачів, які цікавляться розвитком теоретичної фізики.

# Розділ 1.

## КЛАСИЧНА МЕХАНІКА



# Лекція 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАКОНИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

§1. Класична механіка як теорія механічного руху макроскопічних тіл. Основні розділи та об'єкти вивчення класичної механіки.

§2. Класичні уявлення про простір і час. Границі застосування класичної механіки.

[1. §1; 3. §1; 5. §1- §3; 6. В.1-В.3]

## **§1. Класична механіка як теорія механічного руху макроскопічних тіл. Основні розділи та об'єкти вивчення класичної механіки**

Класична механіка вивчає найпростіший вид руху матерії, а саме механічного руху. Під *механічним рухом* ми розуміємо переміщення в просторі з часом одних тіл відносно інших.

В основі механіки лежать закони Ньютона та декілька простих гіпотез, які ґрунтуються на таких поняттях, як простір і час, сила і маса, інерціальна система відліку.

Основними розділами механіки є кінематика, динаміка, статика.

*Кінематика* - вивчає рух тіл не залежно від причин, які обумовлюють цей рух.

*Динаміка* - вивчає рух тіл в залежності від взаємодії цих тіл з іншими тілами, тобто в залежності від прикладених сил.

*Статика* встановлює умови рівноваги тіла, під дією системи сил. При вивченні кожного окремого фізичного явища у взаємозв'язку з іншими явищами природи потрібно його спростити, відкидаючи всі другорядні фактори, що впливають на це явище.

Цей процес заміни реального об'єкту його спрощеною моделлю, призводить до того, що кожна наукова теорія лише наближено відповідає дійсним законам природи. Кожна наукова теорія має границі свого застосування. Класична механіка обмежена у двох напрямках.

По-перше, класична механіка вивчає рух тіл з швидкостями значно меншими ніж швидкість світла. Для вивчення руху тіл зі швидкостями близькими до швидкості світла закони класичної механіки замінюються законами релятивістської механіки (законами спеціальної теорії відносності).

По-друге, класична механіка вивчає рух лише макроскопічних тіл, тобто тіл, маса яких значно більша маси електрона. Для вивчення руху елементарних частинок класична механіка замінюється квантовою механікою.

Основними моделями в класичній механіці є поняття про *матеріальну точку, систему матеріальних точок, абсолютно тверде тіло*.

*Матеріальною точкою* називають модель фізичного тіла розмірами і формою якого можна знехтувати за певних умов, вважаючи що вся маса зосереджується в одній геометричній точці. Поняття матеріальної точки є відносним. Оскільки одне і теж тіло в одних задачах можна вважати матеріальною точкою, а в інших задачах, ні.

У випадку вивчення руху тіла довільної форми і розмірів можна мислено розбити таке тіло на сукупність малих елементів і розглядати його, як *систему матеріальних точок*.

*Абсолютно тверде тіло* це система матеріальних точок взаємні відстані між якими залишаються не змінними. Отже, абсолютно тверде тіло є абсолютно недеформованим тілом. В природі такі тіла відсутні. Однак в реальних задачах доцільно знехтувати деформацією тіл для спрощення розв'язування задачі.

## **§2. Класичні уявлення про простір і час. Границі застосування класичної механіки**

Рух матеріальних тіл відбувається в просторі і в часі. При цьому представлення про простір і час є основними поняттями не тільки класичної механіки, але й всієї фізики. Ці поняття відображають реальне існування в світі просторових співвідношень взаємного розміщення матеріальних об'єктів і реальних співвідношень, тривалість і слідування один за одним різних матеріальних процесів. Таким чином, ці поняття відображають об'єктивно існуючі (тобто існуючі поза нашою свідомістю) простір і час як важливі атрибути матерії, як основні форми її існування.

Простір і час за своєю природою однорідні, абсолютні і відносні. Їх абсолютність полягає в тому, що вони є основними формами існування матеріальних об'єктів, а відносність простору і часу означає залежність властивостей від конкретних процесів руху і зміни матеріальних тіл і полів.

Наші уявлення про простір і час не залишаються незмінними,

вони постійно розвиваються і вдосконалюються.

В класичній механіці постуляються те, що абсолютний простір скрізь неперервний, однорідний і ізотропний, а його метричні властивості повністю описуються системою аксіом геометрії Евкліда.

Відрив в класичній механіці простору і часу один від одного і від тіл, що рухаються пов'язано з припущенням можливості миттєвої передачі взаємодії між тілами. Однак реальна взаємодія тіл не може передаватися миттєво. При цьому вказане припущення, що витікає із визнання безвідносності простору і часу до тіл, які рухаються було серйозною методологічною трудностю в класичній механіці. Ця трудність була подолана з створенням спеціальної теорії відносності (СТВ).

Постулювавши існування граничної швидкості передачі взаємодії (швидкості світла в вакуумі), СТВ показала, що абсолютних простору і часу, не пов'язаних один з одним і безвідносних до руху матеріальних тіл, в природі не існує, а існує єдиний простір-час, тісно пов'язаний з рухом тіл. Тим самим була доведена відносність просторових і часових інтервалів і відносність поняття одночасності подій.

Наступний великий крок у розвитку уявлень про простір і час був зроблений загальною теорією відносності (або теорією тяжіння Ейнштейна), що встановила нерозривний зв'язок властивостей простору і часу з матеріальними процесами, які в них відбуваються.

На завершення коротко сформулюємо основні постулати про властивості простору і часу, котрі необхідні для пояснення і побудови класичної механіки.

*Постулат 1.* В класичній механіці вважається можливим одночасне вимірювання з будь-якою точністю будь-яких фізичних величин, що характеризує рух макроскопічних тіл.

Це означає, що взаємодією, яка виникає в процесі виміру між вимірними приладами і макроскопічним тілом, завжди можна знехтувати в силу її малості. При цьому можна вважати, що процес зміни будь-якої фізичної величини не змінює стану руху макроскопічного тіла і, відповідно, не змінює самої величини, яку вимірюють (наприклад, вимірювання положення тіла не впливає на його координати, а вимірювання тривалості якого-небудь механічного процесу не впливає на його тривалість). Наведене припущення з більшою точністю виконується при розгляді руху макроскопічних тіл, однак для атомних явищ ця гіпотеза вважається невірною.

*Постулат 2.* В класичній механіці приймається, що продовження будь-якого процесу однакове у всіх системах відліку, які рухаються відносно один одного довільним чином, тобто

$$t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1, \quad (2.1)$$

де  $t_2 - t_1$  і  $t'_2 - t'_1$  - тривалість одного і того ж процесу в двох різних системах відліку. Цим постулатом стверджується *абсолютність часових інтервалів між подіями*.

Фактично постулат 2 стверджується існуванням таких годинників, період яких не залежить від характеру їх руху і не змінюється при перенесенні із однієї довільної рухомої системи відліку в іншу.

*Постулат 3* класичної механіки стверджує, що значення просторового інтервалу між положеннями будь-яких матеріальних точок  $M_1$  і  $M_2$  в даний момент часу однакове у всіх системах відліку, тобто

$$\begin{aligned} \vec{r}_{12} &= \vec{r}'_{12}; \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= \\ &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В частинному випадку, відстань між двома нескінченно близькими точками визначається рівністю:

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.3)$$

Таким чином, цим постулатом стверджується *абсолютність просторових інтервалів*, що розширюють межі макроскопічних тіл. Простір з метричними властивостями, що визначають рівність (2,3), називається *евклідовим*.

Наповнимо ще раз, що перераховані постулати необхідно розглядати як загальні результати спостереження повільних ( $v \ll c$ ) рухів макроскопічних тіл в земних умовах. При цьому всі ці постулати справедливі тільки в класичній механіці. При переході до розгляду атомних явищ або руху макроскопічних тіл із швидкостями, рівними зі швидкістю світла, система постулатів 1 - 3 стає невірною.

## Лекція 2. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

§3. Визначення положення точки в просторі. Система відліку. Траєкторія руху точки. Закони руху.

§4. Натуральна, координатна та векторна форми кінематичних рівнянь руху матеріальної точки.

§5. Вектор швидкості матеріальної точки. Секторна швидкість. Проекції швидкості матеріальної точки в декартовій системі координат.

§6. Вектор прискорення матеріальної точки. Проекції прискорення матеріальної точки в декартовій системі координат.

§7. Натуральний тригранник. Радіус кривизни траєкторії. Вектори швидкості і прискорення в натуральній системі координат. Тангенціальне і нормальне прискорення.

§8. Проекції швидкості і прискорення в полярній системі координат.

§9. Поступальний рух твердого тіла.

§10. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Кінематичні рівняння Ейлера.

§11. Векторні формули для швидкостей і прискорень точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі. (Кінематичні рівняння Ейлера).

[1. §13-§19; 2. §1-§9, §11-§15; 6. §7.1-§7.15, §8.1-§8.4]

### **§3. Визначення положення точки в просторі. система відліку. Траєкторія руху точки. Закони руху**

*Основною задачею* кінематики точки є визначення положення рухомої точки в просторі в будь-який момент часу.

Але положення деякої точки, або тіла можна визначити лише по відношенню до інших тіл. Відносно одних тіл ця точка буде рухатись відносно інших тіл – перебувати в стані спокою. В цьому полягає *відносність руху*. Рух матеріальної точки будемо розглядати відносно певної системи відліку.

*Системою відліку* називається система координат, яка незмінно пов'язана з певним фіксованим тілом (тілом відліку) і включає метод підрахунку часу (годинник).

В багатьох задачах механіки такою системою відліку може бути, наприклад, декартова система координат, яка пов'язана з Землею.

Положення матеріальної точки в декартовій системі координат можна задати трьома координатами або радіусом-вектором (див. рис. 1).

Радіус-вектор матеріальної точки є вектор, який має своїм початком початок координат, а кінцем – дану точку.

Очевидно, що проєкції радіуса-вектора матеріальної точки на осі координат є координатами цієї точки:

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z.$$

Тоді радіус-вектор  $\vec{r}$  точки  $M$  можна представити у вигляді:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (3.1)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори, які напрямлені вздовж відповідних осей координат  $x, y, z$ .

При русі точки кінець її радіуса-вектора описує криву, яка називається *траєкторією руху* цієї точки.

Розглянемо на траєкторії два нескінченно близьких положення матеріальних точок  $M_1$  і  $M_2$  з радіусами-векторами  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$ . Нехай матеріальна точка  $M$  за час  $\Delta t$  переміщується по траєкторії із положення  $M_1$  в положення  $M_2$  (див. рис. 2)

Приріст радіуса-вектора точки називають *вектором її переміщення* за даний час:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Вектор переміщення матеріальної точки за нескінченно малий проміжок часу  $\Delta t$  називають *вектором елементарного переміщення* і позначають  $d\vec{r}$ .

З рівності (3.1) видно, що

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}. \quad (3.2)$$

Модуль вектора елементарного переміщення рівний елементарному пройденому шляху  $ds = |d\vec{r}|$ .

Оскільки вектор елементарного переміщення задається рівнянням (3.2), то елементарний шлях буде рівний:

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \quad (3.3)$$

Розв'язування основної задачі кінематики зводиться до

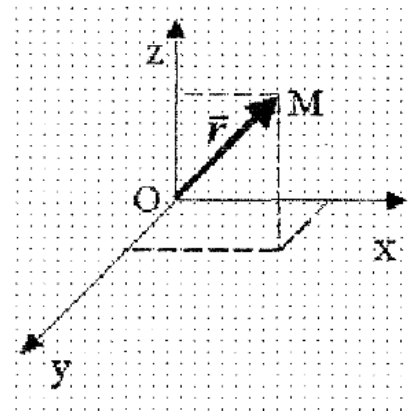


Рис. 1

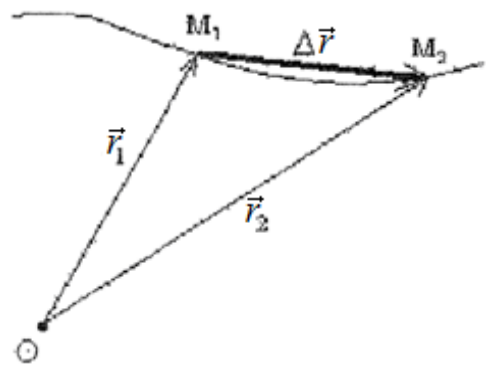


Рис. 2

знаходження закону руху матеріальної точки.

*Законом руху* матеріальної точки називається, сукупність таких математичних рівнянь, за допомогою яких можна знайти положення цієї точки в будь-який момент часу.

#### **§4. Натуральна, координатна та векторна форми кінематичних рівнянь руху матеріальної точки**

А. Натуральна форма полягає в тому, що задається рівняння траєкторії точки:  $F(x, y, z) = 0$ , початкове положення точки на цій траєкторії, плюс напрям руху, а також шлях, як функція від часу:

$$s = f(t). \quad (4.1)$$

Рівняння (4.1) називається *кінематичним рівнянням руху* матеріальної точки в скінченій формі. Очевидно, що  $f(t)$  повинна бути неперервна однозначна і диференційована.

Б. Координатна форма (параметрична) полягає в тому, що задаються як функції від часу, координати точки:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t). \quad (4.2)$$

Ці рівняння називаються *кінематичними рівняннями руху матеріальної точки* або *законом руху точки в координатній формі*.

Від координатної форми задання руху матеріальної точки легко перейти до натуральної. Для цього потрібно знайти рівняння траєкторії і шлях, як функцію від часу. Рівняння траєкторії знаходять з рівнянь (4.2), виключаючи з них параметр  $t$ .

Наприклад, з першого рівняння (4.2) визначаємо  $t$  і підставляємо в два інших. Для того, щоб знайти шлях, як функцію від часу  $t$  скористаємося співвідношенням:

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Оскільки

$$dx = f_1'(t)dt, dy = f_2'(t)dt, dz = f_3'(t)dt,$$

то елементарний шлях:

$$ds = \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2} dt.$$

Після інтегрування отримаємо вираз для шляху:

$$s = \int_0^t \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2} dt. \quad (4.3)$$

В. Векторна форма задання руху матеріальної точки полягає в тому, що задається, як функція від часу  $t$ , радіус-вектор точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (4.4)$$

Очевидно, що векторна форма цілком еквівалентна координатній, оскільки радіус-вектор фактично задається трьома координатами  $(x, y, z)$  точки.

*Примітка:* для того, щоб задати закон руху точки в координатній формі можна задавати як функцію від часу не лише декартові координати, а й інші (наприклад, циліндричні, сферичні, полярні).

## §5. Вектор швидкості матеріальної точки. Секторна швидкість. Проекції швидкості матеріальної точки в декартовій системі координат

Нехай закон руху матеріальної точки заданий у векторній формі:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (5.1)$$

В момент часу задана точка була в положенні  $M$  і мала радіус-вектор  $\vec{r}(t)$ . Через деякий час  $\Delta t$  вона перейшла в  $M'$  і її радіус-вектор став рівним  $\vec{r}(t + \Delta t)$ . Визначимо вектор переміщення:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$

*Вектором швидкості* називають границю відношення вектора переміщення  $\Delta r$  до часу  $\Delta t$  для:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (5.2)$$

тобто

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

це перша похідна радіус-вектора за часом. Так як радіус-вектор є функцією від часу ( $\vec{r}(t)$ ) то права частина рівняння (5.2) дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу і відповідно, першій похідній від радіус-вектора матеріальної точки по часу.

Отже

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (5.3)$$

Оскільки напрям вектора швидкості співпадає з граничним напрямом вектора переміщення  $\Delta \vec{r}$ , який є січною траєкторії, а

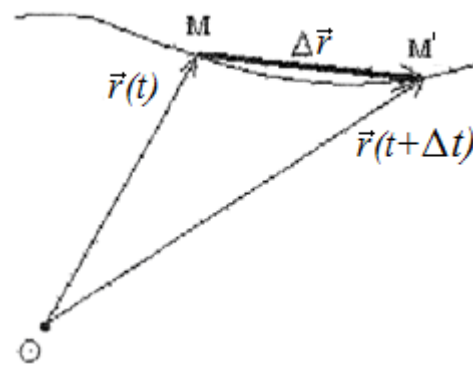


Рис. 3

граничне положення січної є дотична, то вектор швидкості завжди напрямлений по дотичній до траєкторії руху точки. Модуль вектора швидкості:

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt}.$$

І оскільки  $|d\vec{r}| = ds$ , то величина модуля швидкості:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Крім миттєвої швидкості розрізняють середню швидкість переміщення, середню швидкість руху по траєкторії, секторну швидкість.

*Середньою швидкістю переміщення* матеріальної точки за час  $\Delta t$  називається вектор, який дорівнює відношенню вектора переміщення  $\Delta\vec{r}$  до проміжку часу  $\Delta t$ , протягом якого відбулось це переміщення:

$$\vec{v}_c = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Очевидно, що середня швидкість переміщення напрямлена по напрямку вектора переміщення.

*Середню швидкість руху* матеріальної точки по траєкторії називають фізичну величину, яка чисельно дорівнює відношенню всього пройденого шляху до всього часу руху:

$$v = \frac{s}{t}.$$

У випадку, коли точка проходить  $n$  відрізків шляху, або здійснює  $n$  переміщень, відповідно швидкості визначаються за формулами:

$$\vec{v}_c = \frac{\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \dots + \Delta\vec{r}_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n}, \quad v_c = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}.$$

Знайдемо площу, яку замітає радіус-вектор матеріальної точки за час  $\Delta t$ . Її величина:

$$\Delta f = \frac{1}{2} |[\vec{r} \Delta\vec{r}]|. \quad (5.4)$$

*Секторною швидкістю точки*, відносно декартової системи початку координат, називається фізична величина, що дорівнює площі, яку замітає радіус - вектор цієї точки за одиницю часу:

$$v_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|[\vec{r} \cdot \Delta\vec{r}]|}{2\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \left[ \vec{r} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right] \right| = \frac{1}{2} |[\vec{r} \vec{v}]| \quad (5.5)$$

де  $v_c$  - секторна швидкість.

Секторна швидкість - величина скалярна. Це поняття використовується в космічній механіці.

Нехай рух матеріальної точки, задано в координатній формі:  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ ,  $z = f_3(t)$ . Знайдемо швидкість точки в даному випадку. Відомо, що радіус-вектор:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Тоді вектор швидкості:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (5.6)$$

або

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.$$

З іншої сторони як будь-який вектор в декартовій системі координат:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \quad (5.7)$$

де  $v_x, v_y, v_z$  - проекції вектора швидкості на осі координат. З двох останніх рівнянь видно, що

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Величину вектора швидкості знаходять за формулою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (5.8)$$

або

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (5.9)$$

Напрямок вектора швидкості при координатній формі, задання руху знаходять за направляючими косинусами. Тобто косинусами кутів між векторами швидкості і осями координат:

$$\cos(\vec{v} \wedge \overrightarrow{Ox}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v} \wedge \overrightarrow{Oy}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vec{v} \wedge \overrightarrow{Oz}) = \frac{v_z}{v}. \quad (5.10)$$

Отже, спочатку визначають направляючі косинуси, а потім самі кути.

## **§6. Вектор прискорення матеріальної точки. Проекції прискорення матеріальної точки в декартовій системі координат**

Задамо рух матеріальної точки векторним способом, тобто

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Прискорення матеріальної точки є вектор, який рівний змінні

вектора швидкості за змінну часу, тобто

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (6.1)$$

Але

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

тоді

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$$

або

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}}.$$

Запишемо закон руху точки в координатній формі, тобто задамо як функцію від часу координати точки:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t). \quad (6.2)$$

За означенням:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Оскільки радіус-вектор точки  $\vec{r}$  можна виразити через її координати:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

то вектор прискорення:

$$\vec{w} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

або

$$\vec{w} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \quad (6.3)$$

Разом з тим вектор прискорення як будь-який вектор в декартовій системі координат можна виразити через його проекції на осі координат:

$$w = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}. \quad (6.4)$$

Порівнюючи два останніх рівняння можна зробити висновок, що проекції прискорення та осі декартової системи координат дорівнюють другим похідним по часу від відповідних координат:

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z}.$$

Нагадаємо, що

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Тоді

$$w_x = \dot{v}_x, \quad w_y = \dot{v}_y, \quad w_z = \dot{v}_z.$$

Знаючи проєкції вектора прискорення на осі координат можна знайти величину вектора прискорення (або його модуль). Величину вектора прискорення знаходять за рівнянням:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{(\dot{v}_x)^2 + (\dot{v}_y)^2 + (\dot{v}_z)^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}. \quad (6.5)$$

Напрямок вектора прискорення визначають за його направляючими косинусами, тобто косинусами кутів між векторами прискорення і осями координат:

$$\cos(\vec{w} \wedge \vec{Ox}) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos(\vec{w} \wedge \vec{Oy}) = \frac{w_y}{w}, \quad \cos(\vec{w} \wedge \vec{Oz}) = \frac{w_z}{w}. \quad (6.6)$$

## §7. **Натуральний тригранник. Радіус кривизни траєкторії. Вектори швидкості і прискорення в натуральній системі координат. Тангенціальне і нормальне прискорення**

Нехай матеріальна точка рухається по деякій просторовій кривій. В певний момент часу вона буде знаходитися в положенні  $M$  на кривій (див. рис. 4). Проведемо в цій точці до кривої дотичну, її одиничний вектор  $\vec{\tau}_0$ .

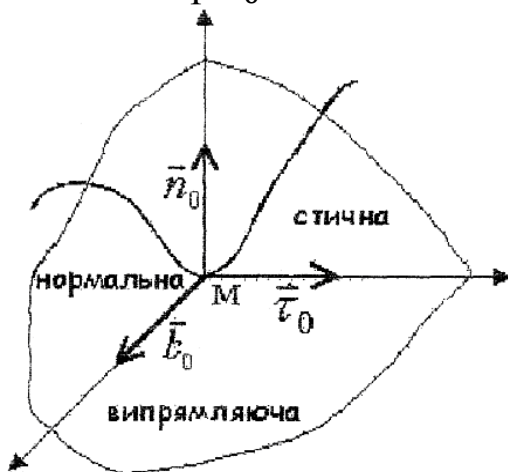


Рис. 4

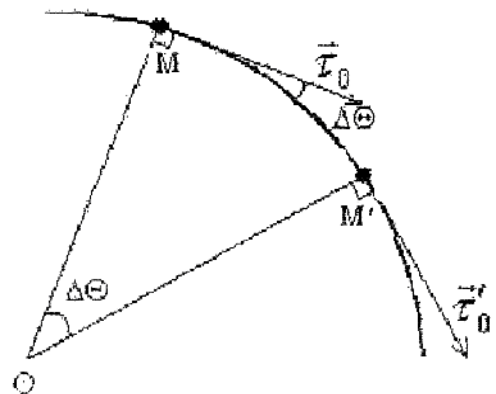


Рис. 5

Площина, яка перпендикулярна до дотичної називається *нормальною площиною*. Площина яка проходить через дотичну і нескінченно близьку до точки  $M$  ще одну точку траєкторії називається *стичною* (вона перпендикулярна до нормальної). Площина, яка перпендикулярна до цих двох площин і містить дотичну називається *випрямляючою*. Лінія перетину нормальної і стичної площин

називається *головною нормаллю* з одиничним вектором  $\vec{n}_0$ . Лінія перетину нормальної і випрямляючої площин називається *бінормаллю*, її одиничний вектор  $\vec{b}_0$ . Нормальна, стична і випрямляюча площини утворюють натуральний тригранник, а лінії їх перетину - дотична, головна нормаль і бінормаль утворюють натуральну систему координат. Ця система координат є рухомою, тому що її початок завжди пов'язаний з рухомою матеріальною точкою (на відміну від декартової).

Нехай матеріальна точка переходить з положення  $M$  в  $M'$  траєкторії (див. рис. 5). При цьому вона за час  $\Delta t$  пройде шлях  $\Delta s$ . Кут  $\Delta\theta$  між дотичними в точках  $M$  і  $M'$  називається *кутом суміжності*.

*Радіусом кривизни траєкторії* називається фізична величина яка дорівнює границі відношення шляху, пройденого точкою по траєкторії, до кута суміжності при умові що кут суміжності прямує до нуля:

$$\rho = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{ds}{d\theta}. \quad (7.1)$$

Оскільки вектор швидкості завжди напрямлений по дотичній до траєкторії, то його можна представити як добуток його величини на одиничний вектор  $\vec{\tau}_0$ , який напрямлений так як і він:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}_0. \quad (7.2)$$

Знайдемо, в даному випадку, вектор прискорення. За означенням:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Підставимо замість вектора швидкості його значення у рівняння (7.2):

$$\vec{w} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}_0) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}_0 + \frac{d\vec{\tau}_0}{dt}v.$$

За теоремою про диференціювання одиничного вектора:

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{n}_0, \quad (7.3)$$

де  $\vec{n}_0$  - одиничний вектор, який лежить в одній площині із вектором  $\vec{\tau}_0$  і перпендикулярний до нього;  $\theta$  - кут повороту;  $\frac{d\theta}{dt}$  - його змінна.

Домножимо і поділимо праву частину останньої рівності на  $ds$ :

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{n}_0 = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt}\vec{n}_0, \quad (7.4)$$

але

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

а

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho}.$$

Тоді

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{n}_0$$

із врахуванням цього, вектор прискорення буде рівний:

$$\vec{w} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_0 + \frac{v}{\rho} \vec{n}_0. \quad (7.5)$$

Ми отримали вектор прискорення як геометричну суму двох взаємно перпендикулярних векторів. Перший із них (перший доданок в правій частині рівняння (7.5)) називається *тангенціальним (дотичним) прискоренням*. Його величина:

$$|\vec{w}_\tau| = \left| \frac{dv}{dt} \right| = |\dot{v}|. \quad (7.6)$$

Другий *нормальне прискорення*. Його величина:

$$|\vec{w}_n| = \frac{v^2}{\rho}. \quad (7.7)$$

Величини  $w_\tau$  і  $w_n$  слід розглядати як проекції повного прискорення  $\vec{w}$  на дотичну і головну нормаль.

Тангенціальне прискорення характеризує зміну швидкості за абсолютною величиною. Нормальне прискорення характеризує зміну напрямку швидкості. Величина вектора прискорення буде:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}, \quad (7.8)$$

а напрям вектора прискорення визначається за тангенсом кута  $\alpha$  між ним і нормальним прискоренням (головною нормаллю). Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_\tau}{w_n}. \quad (7.9)$$

Відмітимо, що

$v_n = 0 \rightarrow$  проекція швидкості на нормаль;

$v_b = 0 \rightarrow$  проекція швидкості на бінормаль;

$w_b = 0 \rightarrow$  проекція прискорення на бінормаль.

*Висновок:* натуральний спосіб задання руху вигідний тим, що ми отримали тільки одну складову вектора швидкості, а саме, тангенціальна, і дві складові прискорення - тангенціальне і нормальне

прискорення.

## §8. Проекції швидкості і прискорення в полярній системі координат

Нехай матеріальна точка рухається по деякій плоскій кривій, тобто здійснює рух в одній площині. Запишемо закон руху матеріальної точки в полярній системі координат координатним способом, тобто як функції від часу задамо полярні координати: полярний радіус  $\vec{r}$  (величину радіус-вектора) і кут повороту  $\varphi$ :

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad (8.1)$$

Радіус-вектор точки можна представити як добуток його модуля на одиничний вектор (див. рис. 6):

$$\vec{r} = r\vec{r}_0. \quad (8.2)$$

Значення швидкості точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{r}_0) = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + \frac{d\vec{r}_0}{dt}r. \quad (8.3)$$

Кутом повороту першого (одиничного) вектора  $\vec{r}_0$  буде полярний кут  $\angle\varphi$ . Одиничний вектор  $\vec{p}_0 \perp \vec{r}_0$  і лежить з ним в одній (першій) площині.

Тоді

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\varphi_0}{dt}\vec{p}_0. \quad (8.4)$$

Перехід від  $\vec{r}_0$  до  $\vec{p}_0$  відбувається проти годинникової стрілки.

Тепер

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + \frac{d\varphi}{dt}\vec{p}_0. \quad (8.5)$$

Ми отримали вектор швидкості, як величину суми (геометричну суму) двох взаємно перпендикулярних векторів. Перший - це *радіальна швидкість*. Його величина:

$$|\vec{v}_r| = \left| \frac{dr}{dt} \right| = |\dot{r}|. \quad (8.6)$$

Другий - це *трансверсальна швидкість*. Його величина:

$$|v_p| = \left| r \frac{d\varphi}{dt} \right| = |r\dot{\varphi}|.$$

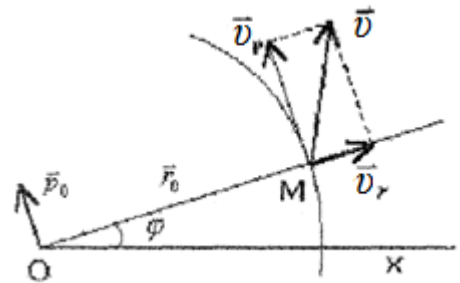


Рис. 6

Оскільки ці два вектори взаємно перпендикулярні, то величина швидкості буде рівна:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2}.$$

Тангенс кута між швидкістю і радіальним напрямком:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_p}{v_r}, \quad (8.7)$$

де  $v_r$  і  $v_p$  слід розглянути як проекції вектора швидкості на радіальний і трансверсальний напрями (осі полярної системи координат).

Визначимо вектор прискорення матеріальної точки в полярній системі координат. Відомо, що

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (8.8)$$

Користуючись рівнянням (8.3), отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \vec{r}_0 + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}_0 \right) = \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{r}_0 + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{r}_0}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{p}_0 + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}_0 + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{p}_0}{dt} \cdot \frac{d\vec{p}_0}{dt} = \\ &= - \frac{d\varphi}{dt} \vec{r}_0. \end{aligned}$$

Підставимо значення похідних від чотирьох (одичних) векторів, отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{d^2 r}{dt^2} \cdot \vec{r}_0 + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}_0 + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{p}_0 - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \vec{r}_0; \\ \vec{w} &= (\ddot{r} - r\ddot{\varphi}) \vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{p}_0. \end{aligned}$$

Вектор прискорення дорівнює сумі двох взаємно перпендикулярних векторів. Перший вектор є *радіальним прискоренням*:

$$\vec{w}_r = (\ddot{r} - r\ddot{\varphi}) \vec{r}_0. \quad (8.9)$$

Другий - *трансверсальним прискоренням*:

$$\vec{w}_p = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \quad (8.10)$$

Знаючи проекції  $w_r$  і  $w_p$  вектора прискорення на два взаємно перпендикулярні напрями (радіальний і трансверсальний) можна знайти його величину:

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_p^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w_p}{w_r}. \quad (8.11)$$

## §9. Поступальний рух твердого тіла

*Поступальним рухом* називають такий рух твердого тіла при якому будь-яка пряма, що проходить через довільні точки цього тіла рухається паралельно сама собі.

Властивості поступального руху характеризують дві теореми.

*Теорема 1.* При поступальному русі твердого тіла всі його точки мають в кожний момент часу однакову швидкість і однакове прискорення.

*Доведення.* Розглянемо рух твердого тіла. Нехай тверде тіло рухається поступально. Виберемо в ньому дві довільні точки:  $A$  і  $B$ . Їх радіус-вектори відносно початку координат будуть  $\vec{r}_A$  і  $\vec{r}_B$ . Сполучимо точки  $A$  і  $B$  напрямленим відрізком  $\overrightarrow{BA}$  (див. рис. 7).

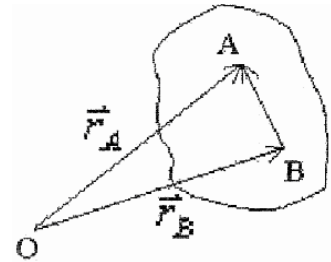


Рис. 7

З рисунка видно, що  $\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overrightarrow{BA}$ . Продиференціюємо цю рівність по часу:

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d}{dt}(\overrightarrow{BA}). \quad (9.1)$$

Але

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_A}{dt} &= \vec{v}_A; \\ \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \vec{v}_B. \end{aligned}$$

За означенням поступального руху і абсолютно твердого тіла:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{BA}) = 0.$$

Тоді

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B.$$

Продиференціюємо останню рівність ще раз по часу. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_A}{dt} &= \frac{d\vec{v}_B}{dt}; \\ \vec{w}_A &= \vec{w}_B. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Теорему доведено.

*Теорема 2.* При поступальному русі твердого тіла, траєкторії всіх його точок однакові за формою, паралельні у відповідних місцях та при накладанні співпадають (траєкторії конгруентні).

*Доведення* Виберемо дві довільні точки  $A$  і  $B$  абсолютно

твердого тіла і сполучимо їх відрізком. Нехай при поступальному русі це тіло перейде в наступне положення (див. рис. 8).

При цьому  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$ . Розіб'ємо час руху абсолютно твердого тіла на відрізки так щоб  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots$ . Нехай, наприклад, за час  $\Delta t_1$  це тіло переміститься в положення 1', за час  $\Delta t_1$ , - переміститься в положення 2 тощо. Сполучимо точки  $A, A_1, \dots, A'$ ,  $B, B_1, \dots, B'$  прямими лініями. Ми отримаємо дві ламані лінії. Розглянемо чотирикутник  $AA_1BB_1$ . За означенням абсолютно твердого тіла  $AB = A_1B_1$ , а за означенням поступального руху  $AB \parallel A_1B_1$ . За означенням чотирикутник, в якого протилежні сторони рівні і паралельні є паралелограмом. Тоді  $AA_1 = BB_1$  і  $AA_1 \parallel BB_1$ . Такий же висновок можна зробити про всі інші пари ланок в обох ламаних.

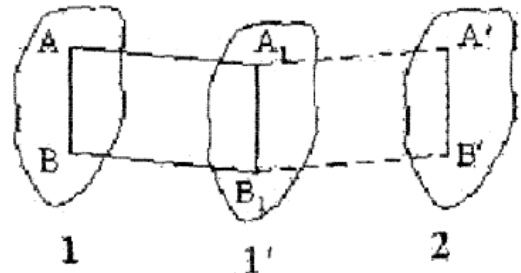


Рис. 8

Отже, обидві ламані  $AA_1 \dots A'$  і  $BB_1 \dots B'$  будуть однакові за формою і паралельні в відповідних місцях. А оскільки ламані, вписані в траєкторії точок  $A$  і  $B$ , то такими ж будуть і траєкторії обох точок, до яких ці ламані прямують.

*Висновок.* З доведених теорем видно, що рух всіх точок тіла (поступальний рух) буде однаковий. Отже, щоб задати поступальний рух твердого тіла достатньо вибрати в тілі довільну точку, яку називають *полюсом* і задати закон руху цієї точки.

*Теорема про проекції швидкостей точок твердого тіла.*

Розглянемо будь-який плоский рух твердого тіла, наприклад, його обертання відносно точки  $O$  за годинниковою стрілкою. Виберемо в ньому дві довільні точки  $A$  і  $B$  (див. рис. 9).

Нехай їх радіус-вектори  $\vec{r}_A$  і  $\vec{r}_B$ . Сполучимо точку  $A$  і точку  $B$  напрямленим відрізком  $AB$  і позначимо його через  $\vec{l}$ . Швидкості точок  $A$  і  $B$  рівні відповідно  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_B$ . Вони утворюють кути  $\alpha$  і  $\beta$  з прямою, проведеною через точку  $A$  та  $B$ .

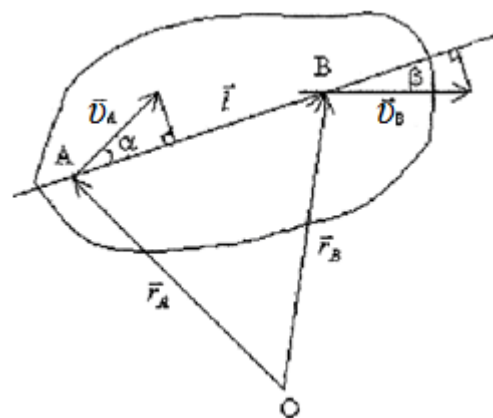


Рис. 9

З рис. 9 видно, що  $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{l} = A\vec{B}$ . Піднесемо ліву і праву

частину цього рівняння до квадрату:

$$\begin{aligned}(\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 &= \vec{l}^2; \\ (\vec{r}_B - \vec{r}_A)(\vec{r}_B - \vec{r}_A) &= (\vec{l})^2, \quad (\vec{l})^2 = l^2.\end{aligned}\quad (9.3)$$

$l = \text{const}$  як відстань між двома точками твердого тіла. Продиференціюємо ліву і праву частину (9.1) за часом, отримаємо:

$$2(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \left( \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \right) = 0. \quad (9.4)$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B, \quad \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A.$$

$$2\vec{l}\vec{v}_B - 2\vec{l}\vec{v}_A = 0;$$

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha. \quad (9.5)$$

Але,  $v_A \cos \alpha$  - проекція швидкості  $\vec{v}_A$  точки  $A$  на  $AB$ ;  $v_B \cos \beta$  - проекція швидкості  $\vec{v}_B$  точки  $B$  на  $AB$ .

Очевидно, що всі точки твердого тіла які розміщені на прямій  $AB$ , мають однакові проекції швидкостей на цю пряму.

## §10. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Кінематичні рівняння Ейлера

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі, всі точки тіла будуть рухатись по колам, центри яких лежать на осі та радіуси, яких дорівнюють відстаням точок тіла до осі.

*Обертанням твердого тіла навколо нерухомої осі* називається такий рух твердого тіла, при якому принаймні дві точки його залишаються нерухомі.

Пряма, що проходить через вказані точки, називається *віссю обертання*.

Всі точки твердого тіла, які лежать на осі обертання будуть нерухомі. При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі всі його точки будуть рухатись по концентричних колах з центрами на осі обертання і радіусами, рівними віддалі цих точок до осі.

Проведемо в початковий момент часу через вісь обертання площину. Через деякий час при обертанні тіла навколо осі площина повернеться відносно свого початкового положення на кут  $\varphi$ . Це буде змінний двогранний кут, який називається *кутом повороту*. Ребрам його буде вісь обертання.

Будемо вважати кут повороту  $\varphi$  додатнім, якщо дивлячись з кінця осі  $OZ$ , обертання твердого тіла відбувається проти годинникової

стрілки (див. рис. 10).

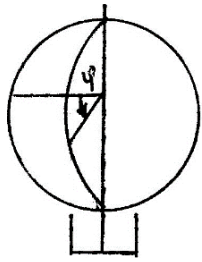


Рис. 10

Очевидно, щоб задати положення твердого тіла в будь-який момент часу, достатньо задати кут повороту як функцію від часу:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (10.1)$$

Це рівняння і буде *законом обертання твердого тіла навколо нерухомої осі*.

Основними кінематичними характеристиками обертання тіла навколо нерухомої осі є поняття: кут повороту, кутова швидкість і кутове прискорення.

*Кутова швидкість* - це величина, яка вимірюється зміною кута повороту за одиницю часу.

Якщо за час  $\Delta t$  тіло повернеться на кут  $\Delta\varphi$ , то:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (10.2)$$

Кутова швидкість буде додатна, якщо обертання відбувається проти годинникової стрілки і від'ємна якщо обертання відбувається за годинниковою стрілкою:

$$[\omega]_{\text{СИ}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}. \quad (10.3)$$

В техніці використовують величину  $n$  (визначається в обертах за хвилину):

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30} \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

*Кутове прискорення* - це величина, яка визначається зміною кутової швидкості за одиницю часу:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}. \quad (10.4)$$

З врахуванням зв'язку між кутовою швидкістю і кутом повороту:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (10.5)$$

Знаючи швидкості і прискорення окремих точок, що обертаються навколо нерухомої осі, розглянемо траєкторію деякої точки цього тіла.  $R$  - віддаль від точки до осі обертання. При обертанні твердого тіла воно повернулось на кут  $\varphi$ . При цьому сама точка пройде по траєкторії шлях  $s$  рівний довжині дуги (див. рис. 11):

$$s = R \cdot \varphi \text{ (довжина дуги).}$$

Тоді

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(R\varphi) = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \quad (10.6)$$

$$v = R\omega.$$

Отже, швидкості окремих точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі прямо пропорційні віддалі цих точок до осі обертання.

Щоб знайти прискорення точки  $M$ , розкладемо його тангенціальну і нормальну складові:

$$w_r = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon;$$

$$w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2;$$

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (10.7)$$

Отже, прискорення точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі також пропорційна віддалі цих точок до осі обертання.

Знайдемо кут між векторами  $\vec{w}$  і  $\vec{w}_n$ , тобто між  $\vec{w}$  і  $R$ :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w_r}{w_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (10.8)$$

Цей кут буде однаковий для всіх точок твердого тіла в кожний момент часу.

## §11. Векторні формули для швидкостей і прискорень точок тіла, що обертаються навколо нерухомої осі. (Кінематичні рівняння Ейлера)

Узагальнимо поняття кутової швидкості і кутового прискорення. Будемо вважати кутову швидкість вектором, який напрямлений вздовж осі обертання так, що дивлячись з його кінця ми бачимо обертання тіла проти стрілки годинника. Позначаємо цей вектор так  $\vec{\omega}$ .

Кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  вважається вектор, який напрямлений вздовж осі обертання так, що дивлячись з його кінця (кінця осі), ми бачимо обертання тіла проти годинникової стрілки:

$$\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = |\dot{\varphi}|. \quad (11.1)$$

Кутовим прискоренням називатимемо вектор, який дорівнює зміні вектора кутової швидкості за одиницю часу:

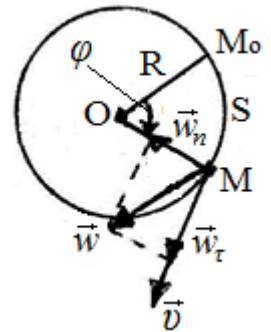


Рис. 11

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (11.2)$$

Нехай деяке тіло обертається навколо нерухомої осі. Виберемо на цій осі деяку точку твердого тіла  $O$ . Відкладемо від точки  $O$  вектор кутової швидкості. Виберемо довільну точку  $M$ , яка не лежить на осі обертання. Вона буде рухатись по колу радіуса  $R$  (див. рис. 12).

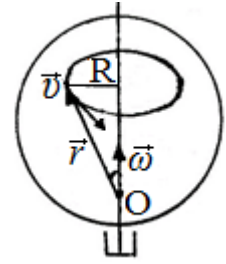


Рис. 12

Точку  $O$  прийємо за початок координат. Тоді точка  $M$  буде мати радіус-вектор  $\vec{r}$ . Знайдемо швидкість точки  $M$  (модуль швидкості цієї точки):

$$v = \omega R. \quad (11.3)$$

З рисунка видно, що

$$R = r \sin(\vec{r} \wedge \vec{\omega}),$$

тоді

$$v = \omega r \sin(\vec{r} \wedge \vec{\omega}).$$

Відмітимо також, що вектор швидкості  $\vec{v}$  перпендикулярний до площини в якій лежать вектори  $\vec{\omega}$  та  $\vec{r}$ . Тоді

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (11.4)$$

Це є перше кінематичне рівняння Ейлера або векторна формула. Запишемо це рівняння в проекціях:

$$\begin{aligned} v_x &= [\vec{\omega} \vec{r}]_x = \omega_y r_z - \omega_z r_y; \\ v_y &= [\vec{\omega} \vec{r}]_y = \omega_z r_x - \omega_x r_z; \\ v_z &= [\vec{\omega} \vec{r}]_z = \omega_x r_y - \omega_y r_x. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Так як  $r_x, r_y, r_z$  - координати точки, то:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y; \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z; \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \quad (11.6)$$

де  $x, y, z$  - координати точки  $M$ .

Продиференціюємо (11.1) по часу і знайдемо вектор прискорення (вектор прискорення точки  $M$ ):

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right]; \\ \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Звідси отримаємо друге кінематичне рівняння Ейлера:

$$\vec{w} = |\vec{\varepsilon} \vec{r}| + |\vec{\omega} \vec{v}|. \quad (11.8)$$

Як відомо, вектор:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}],$$

тоді

$$\vec{w} = [\vec{\epsilon}\vec{r}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]].$$

Перший доданок рівняння (11.8) – тангенціальна складова прискорення, а другий – нормальна:

$$w_r = |[\vec{\epsilon}\vec{r}]| = \epsilon r \sin(\vec{\epsilon}\vec{r}) = \epsilon R, \quad (11.9)$$

$$w_n = |[\vec{\omega}\vec{v}]| = \omega v \sin(\vec{\omega}\vec{v}) = \omega v \sin 90^\circ = \omega v = \omega^2 R. \quad (11.10)$$

### Лекція 3. ДИНАМІКА

§12. Поняття сили і маси.

§13. Інерціальні системи відліку. Перетворення Галілея. Принцип відносності.

§14. Закони Ньютона. Зв'язок третього закону з однорідністю і ізотропністю простору.

§15. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки. Формулювання основної задачі динаміки. Перший та другий інтеграли руху. Роль початкових умов. Принцип причинності класичної механіки.

§16. Робота сили. Потенціальна енергія частинки в даному силовому полі. Приклади потенціальних полів. Центральносиметричне поле.

§17. Класифікація сил в механіці.

§18. Класифікація вільних механічних систем.

[1. §2; 2. §19-§27; 3. §2.1-§2.2; 5. §13.1- §13.6]

#### §12. Поняття сили і маси

*Динаміка* вивчає рух тіл в залежності від взаємодії цих тіл з іншими тілами, в залежності від прикладених сил.

Основними поняттями динаміки є поняття сили і маси.

*Сила* – це кількісна міра взаємодії двох тіл.

Під силою  $\vec{F}$ , з якою тіло  $B$  діє на тіло  $A$  ми розуміємо таку механічну дію тіла  $B$  на тіло  $A$ , в результаті якої тіло  $A$  – отримує прискорення.

Існує два методи вимірювання сили. По перше силу можна знайти за прискоренням, якого вона надає певному тілу. А саме, чим більша сила, що діє на дане тіло, тим більше його прискорення. Цей

метод називають *динамічним*. На практиці частіше користуються другим методом, який називають *статичним*. Силу вимірюють за деформацією певного тіла.

А саме, чим більша сила, тим більшу деформацію отримує дане тіло, наприклад, пружина динамометра. Процес вимірювання сили ґрунтується на кількох правилах, які є результатом досвіду:

а) принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції). Він формулюється так: якщо на тіло діє декілька сил, то рух тіла складається із тих рухів, яке тіло мало б під дією кожної сили окремо;

б) правило паралелограма сил;

в) стан тіла під дією системи сил не змінюється, якщо до цієї системи сил додати нову систему сил.

Маса є одним із проявів матеріальності тіл. Масу тіла можна виміряти також двома методами.

1. Масу тіла можна знайти за прискоренням, яке отримує тіло під дією певної сили. А саме, чим більша маса тіла, тим менше прискорення тіла під дією даної сили. Маса тіла знайдена цим методом називається *інертною*.

2. Масу тіла можна знайти, як міру притягання до іншого тіла, а саме, чим більша маса тіла, тим з більшою силою, це тіло притягується до деякого іншого, наприклад, до Землі.

Маса тіла знайдена таким способом, (тобто шляхом зважування на важільних терезах) зветься *вагомою*, або *гравітаційною* масою.

Численні досліді показують, інертна маса та гравітаційна маса пропорційні (рівні). Класична механіка не змогла дати пояснення цьому факту і лише в загальній теорії відносності (ЗТВ) розкривається внутрішня єдність цих двох проявів матеріальності тіл.

### **§13. Інерціальні системи відліку. Перетворення Галілея.**

#### **Принцип відносності**

Закони механіки в різних системах відліку мають різний вигляд. Необхідно знайти таку систему відліку, в якій вигляд законів механіки найпростіший. По відношенню до такої системи відліку, простір повинен бути однорідним та ізотропним, а час однорідним. Однорідність та ізотропність простору означає фізичну еквівалентність всіх положень, та всіх напрямків, будь-якої замкненої системи матеріальних точок.

Так само однорідність часу означає фізичну еквівалентність всіх моментів часу для замкненої системи матеріальних точок.

Система відліку, по відношенню до якої простір однорідний та ізотропний, а час однорідний називається *інерціальною*. В інерціальній системі ізольована частинка знаходиться в стані спокою, або рухається рівномірно і прямолінійно.

Система відліку, в якій ізольована частинка має прискорення називається *неінерціальною*.

Для багатьох задач можна вважати інерціальну систему відліку пов'язаною з Землею. Ближче до інерціальної буде система відліку пов'язана з Сонцем. Ще кращим наближення до інерціальної буде система відліку пов'язана з центром Галактики.

Таким чином, в кожній задачі можна говорити про ступінь наближення до інерціальної. Якщо деяку систему відліку можна вважати інерціальною, то будь-яка інша система відліку, яка рухається відносно даної рівномірно і прямолінійно буде також інерціальною. Нехай системи відліку  $K$  і  $K'$  будуть інерціальними. Причому нехай система  $K$  є умовно нерухомою, а система  $K'$  рухається відносно системи  $K$  рівномірно і прямолінійно з  $\vec{v}_0 = \overline{\text{const}}$ .

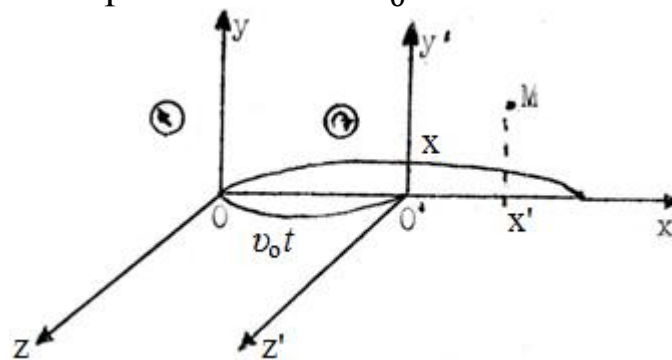


Рис. 13

Розглянемо рух деякої частинки  $M$  – відносно обох систем (див. рис. 13). Для координат цієї точки можна записати:

$$\begin{aligned} x &= x' + v_0 t; \\ y &= y'; \\ z &= z'; \\ t &= t'. \end{aligned}$$

Ці рівняння зветься перетвореннями Галілея. Продиференціювавши дані рівняння одержимо такі співвідношення для швидкостей:

$$v_x = v_{x_1} + v_0; \quad v_y = v_{y_1}; \quad v_z = v_{z_1}.$$

Від проекції швидкості можна перейти до вектора. Одержимо:

$$\vec{v} = v' + \vec{v}_0.$$

Продиференціювавши цю рівність ще раз по часу матимемо:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_0}{dt};$$
$$\frac{d\vec{v}_0}{dt} = 0,$$

а тому:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}.$$

Тобто, одна і та ж частинка має в різних системах відліку однакові прискорення.

Сили, що діють на частинку, обумовлені взаємодією цієї частинки з іншими тілами. А отже, визначаються взаємною конфігурацією тіл. Так як ця конфігурація буде однаковою в усіх системах відліку, то і сили, що діють на дану частинку будуть однаковими в усіх системах відліку (необов'язково інерціальних).

Таким чином, в інерціальних системах відліку однакові сили, викликають однакові прискорення. Іншими словами, другий закон Ньютона справедливий в усіх інерціальних системах відліку. Поскілки з другого закону Ньютона випливають всі інші закони механіки, можна зробити такий висновок: *всі механічні процеси відбуваються однаково в усіх інерціальних системах відліку.*

Ейнштейном в спеціальній теорії відносності (СТВ) показано, що цей принцип відносності справедливий не лише для механічних явищ, але і для електричних, магнітних, оптичних та всіх інших явищ.

## **§14. Закони Ньютона. Зв'язок третього закону з однорідністю і ізотропністю простору**

I. Закон інерції. *Кожне тіло зберігає стан спокою, або рівномірного прямолінійного руху, поки деяка сила не виведе його з цього стану.*

Відомо, що в інерціальних системах відліку закон інерції несправджується. Ми можемо розглядати перший закон Ньютона, як твердження про існування інерціальних систем відліку.

II. *Прискорення матеріальної точки прямо пропорційне прикладеній силі і обернено пропорційно масі цієї точки:*

$$m\vec{w} = \vec{F}.$$

Відмітимо, що в СТВ, яка враховує залежність маси від швидкості, математично вираз другого закону, узагальнюється так:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

III. Сила, з якою одне тіло діє на друге, рівна за величиною та протилежна за напрямом силі, з якою друге тіло діє на перше:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Всі три закони Ньютона знайдено експериментально. Однак, третій закон можна вивести з факту однорідності та ізотропності простору. Розглянемо замкнену систему з двох взаємодіючих частинок. З'єднаємо обидві частинки вектором (див. рис. 14).

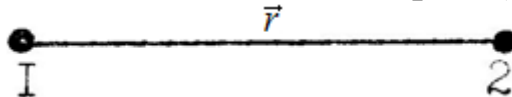


Рис. 14

Однорідність та ізотропність простору означає фізичну еквівалентність всіх положень та напрямів цієї системи двох частинок. Отже, сила з якою одна частинка діє на іншу буде по модулю залежати лише від відстані між частинками, тобто  $F_{12} = F(r)$ .

Механіка розглядає безструктурні частинки, тобто частинки в яких відсутні внутрішні векторні характеристики. А тому напрям цієї сили може бути лише вздовж прямої, що сполучає обидві частинки, тому вектор:

$$\vec{F}_{12} = F(r)\vec{r}_0,$$

де  $\vec{r}_0$  - це одиничний вектор напрямлений від першої до другої частинки.

Аналогічно можна довести, що вектор:

$$\vec{F}_{21} = F(r)(-\vec{r}_0) = -F(r)(\vec{r}_0).$$

Отже:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

## §15. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки. Формулювання основної задачі динаміки. Перший та другий інтеграли руху. роль початкових умов. Принцип причинності класичної механіки

Запишемо другий закон Ньютона для рухомої матеріальної точки:

$$m\vec{w} = \vec{F}. \quad (15.1)$$

Враховуючи те, що  $\vec{w} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ , то рівняння (15.1) можна

записати так:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (15.2a)$$

або

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (15.2б)$$

Ми отримали диференціальне рівняння першого порядку відносно вектора швидкості точки, або диференціальне рівняння другого порядку відносно радіуса-вектора точки. Від векторної форми диференціальних рівнянь руху можна перейти до координатної форми. Для цього споектуємо рівняння (15.1) на осі координат:

$$\begin{aligned} mw_x &= F_x; \\ mw_y &= F_y; \\ mw_z &= F_z \end{aligned}$$

але

$$\begin{aligned} w_x &= \dot{x}; \\ w_y &= \dot{y}; \\ w_z &= \dot{z}. \end{aligned}$$

Підставимо в попередні вирази значення проекцій прискорення:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x; \\ m\ddot{y} &= F_y; \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Ми отримали систему диференціальних рівнянь другого порядку відносно координат рухомої точки.

Диференціальне рівняння руху можна отримати і в інших координатних системах (полярна, циліндрична, сферична). Нехай частинка рухається по плоскій кривій. Споектуємо рівняння другого закону Ньютона (15.1) на радіус-вектор частинки та на напрям перпендикулярний до радіуса-вектора. Маємо

$$\begin{aligned} mw_r &= F_r; \\ mw_\varphi &= F_\varphi. \end{aligned}$$

Підставимо сюди значення радіального і трансверсального прискорення. Але:

$$\begin{aligned} w_r &= \dot{r} - r\dot{\varphi}, \\ w_\varphi &= 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}, \end{aligned}$$

тоді

$$\left. \begin{aligned} m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) &= F_r; \\ m \left( r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr d\varphi}{dt dt} \right) &= F_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

або

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r; \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= F_\varphi. \end{aligned} \right\}$$

Ми отримали систему рівнянь відносно полярних координат точки.

Якщо рух матеріальної точки заданий натуральним способом, то проекції вектора прискорення на осі натуральної системи координат будуть рівні:

$$w_r = \frac{dv}{dt} = \dot{v},$$

де  $v = v_\tau$ ,

$$w_n = \frac{v^2}{\rho},$$

де  $\rho$  - радіус кривизни.

Проекції прискорення та швидкості на бінормаль дорівнюють нулю, тобто

$$w_b = 0, v_b = 0.$$

Тоді диференціальні рівняння руху в натуральній системі координат матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_\tau; \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n \end{aligned}$$

або

$$m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n.$$

Диференціальні рівняння руху дають можливість розв'язати дві задачі динаміки:

*пряма задача динаміки* формулюється так: заданий рух точки (і її закон руху), необхідно знайти сили, що діють на точку;

*обернена, або основна задача динаміки*: задані сили, що діють на точку необхідно знайти її закон руху.

Маса точки в обох задачах динаміки вважається заданою.

Досить простою є пряма задача динаміки для її рішення необхідно виконати математичну операцію диференціювання.

Дійсно хай закон руху точки заданий в координатній формі рівняннями:

$$\begin{aligned}x &= f_1(t); \\y &= f_2(t); \\z &= f_3(t).\end{aligned}$$

Знайдемо спочатку проекцію сили:

$$\begin{aligned}F_x &= m\ddot{x} = mf_1''(t); \\F_y &= m\ddot{y} = mf_2''(t); \\F_z &= m\ddot{z} = mf_3''(t).\end{aligned}$$

Звідси можна знайти модуль сили та його напрям:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Напрямок сили визначаємо за напрямними косинусами:

$$\begin{aligned}\cos(\vec{F}, \hat{Ox}) &= \frac{F_x}{F}; \\ \cos(\vec{F}, \hat{Oy}) &= \frac{F_y}{F}; \\ \cos(\vec{F}, \hat{Oz}) &= \frac{F_z}{F}.\end{aligned}$$

Значно складнішою є обернена задача динаміки. Для її розв'язання необхідно інтегрувати систему диференціальних рівнянь (15.3). Складність полягає ще в тому, що величина сили може бути змінною. Вона може залежати від часу, від положення рухомої точки (від її координати). Прикладами таких сил є: сила всесвітнього тяжіння, електростатичні сили, сила пружності.

Сила, що діє на частинку, може залежати від швидкості частинки (від перших похідних по часу координат точки). Прикладами таких сил є: сила опору середовища, сила Лоренца, з якою магнітне поле діє на рухомий електричний заряд.

Сила також може залежати від часу. Тому в загальному випадку диференціальне рівняння (15.3) має вигляд:

$$\left. \begin{aligned}F_x &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t); \\ F_y &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t); \\ F_z &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t).\end{aligned} \right\}$$

Диференціальні рівняння руху приймуть такий ще вигляд:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t); \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t); \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

Щоб знайти рівняння руху точки, необхідно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь (15.5). Після першого інтегрування зникнуть похідні другого порядку. Ми отримаємо співвідношення, які пов'язують між собою координати точки, перші похідні та час. Крім цього до них ввійдуть ще три константи інтегрування. Такі співвідношення називаються першими інтегралами руху. Вони можуть мати такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, C_1, C_2, C_3) &= 0; \\ \Phi_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, C_1, C_2, C_3) &= 0; \\ \Phi_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, C_1, C_2, C_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

Далі ми покажемо, що до перших інтегралів руху можна прийти й іншим шляхом. Зокрема, всі закони збереження в механіці можна вважати першими інтегралами руху. Після повторного інтегрування зникнуть похідні першого порядку. Ми одержимо так звані другі інтеграли руху, які мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0; \\ \Psi_2(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0; \\ \Psi_3(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

З рівнянь (15.7) можна знайти координати  $(x, y, z)$ , як функцію від часу. Однак в ці функції ввійдуть ще координати інтегрування. Отже, ми отримаємо замість одного розв'язку безліч розв'язків. Це означає, що одне і теж тіло під дією одних і тих же сил може здійснювати безліч різноманітних рухів.

Для того, щоб зробити розв'язок задачі однозначним необхідно задати початкові умови матеріальної точки або системи точок, а саме необхідно задати початкове положення частинки та її початкову швидкість. Вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = v_{0x}; \\ y|_{t=0} &= y_0; \quad \dot{y}|_{t=0} = v_{0y}; \\ z|_{t=0} &= z_0; \quad \dot{z}|_{t=0} = v_{0z}. \end{aligned}$$

На основі початкових умов виключаються константи інтегрування, після чого можна знайти закон руху точки у вигляді:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t). \end{aligned}$$

Таким чином, якщо відомі сили, що діють на матеріальну точку або систему точок, то задання початкового стану точки або системи точок однозначно визначає стан цієї точки або цієї системи точок в будь-який наступний момент часу.

Це твердження носить назву *принципу причинності класичної механіки* (принцип Лапласівського детермінізму).

Цей принцип не має місця в квантовій механіці.

## **§16 Робота сили. Потенціальна енергія частинки в даному силовому полі. Приклади потенціальних полів. Центральносиметричне поле**

Поняття роботи є одним з найважливіших енергетичних понять. Робота служить кількісною мірою перетворення енергії з одного виду в інший. За означенням Енгельса «... Работа – это изменение формы движения, рассматриваемое с её количественной стороны».

Фізичне означення роботи вимагає наявності двох факторів:

- дії сили;
- переміщення під дією сили.

Відомо, що *робота постійної сили* у прямолінійному переміщенні

$$A = Fs \cos \alpha,$$

де  $s$  - модуль вектора переміщення;  $\alpha$  - кут між вектором сили і вектором переміщення.

Розглянемо більш загальний випадок, коли частинка рухається під дією сил довільного силового поля. Силове поле вважається заданим, якщо в кожній точці цього поля можна визначити силу, що діє на дану частинку. Отже, щоб задати силове поле, можна задати проекції сили, як функції координат точок поля.

В загальному випадку проекції сили:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(x, y, z); \\ F_y &= F_y(x, y, z); \\ F_z &= F_z(x, y, z). \end{aligned} \tag{16.1}$$

Замість цих трьох скалярних рівнянь можна записати одне векторне рівняння:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z).$$

В свою чергу останнє векторне рівняння скорочено можна записати так:

$$\vec{F} = \vec{F}(r), \tag{16.2}$$

де  $r$  - це радіус-вектор точки (її векторна координата).

Отже, векторне поле задано рівняннями (16.1) і (16.2).

Знайдемо роботу, яку виконують сили поля по переміщенню частинки з положення  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  в положення  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  вздовж деякої кривої  $(L)$ . Для цього розіб'ємо криву на елементарні переміщення і обчислимо елементарні роботи на цих переміщеннях (див. рис. 15).

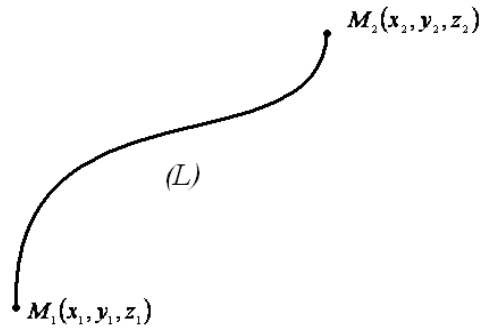


Рис. 15

Елементарна робота має вигляд:

$$\delta A = F ds \cos \alpha.$$

Але

$$ds = |d\vec{r}|.$$

Тоді

$$\delta A = F |d\vec{r}| \cos \alpha,$$

де  $F |d\vec{r}| \cos \alpha$  - скалярний добуток, то:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}. \quad (16.3)$$

Останнє рівняння можна переписати в такому вигляді:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (16.4)$$

*Примітка:* Елементарна робота позначається через  $\delta A$ , а не  $dA$  через те, що вираз елементарної роботи (16.4) не обов'язково є повним диференціалом.

*Робота для переміщення частинки в силовому полі* вздовж кривої  $L$  дорівнює такому криволінійному інтегралу:

$$A = \int_{(L)} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (16.5)$$

З математики відомо, що такий інтеграл залежить від форми кривої. Отже, і робота сил поля з переміщення частинки з однієї точки поля в іншу буде в загальному випадку залежати від форми кривої, яка сполучає ці точки, тобто від форми шляху.

Є, однак, силові поля в яких робота сил поля по переміщенню частинки не залежить від форми шляху. Такі поля називаються *потенціальними*.

Відомо, що криволінійний інтеграл не залежатиме від форми кривої тоді, коли підінтегральний вираз (елементарна робота) є повним диференціалом.

*Теорема.* Для того, щоб елементарна робота в даному силовому полі була повним диференціалом, тобто для того, щоб поле було потенціальним, необхідно і достатньо щоб існувала така скалярна функція від координат  $V(x, y, z)$ , частинні похідні якої дорівнюють відповідним проекціям сили, тобто щоб виконувалась умова:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}; F_y = \frac{\partial V}{\partial y}; F_z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (16.6)$$

Функція  $V$  називається *силовою функцією* даного поля.

*Доведення:* Дослідимо лише необхідність умови (16.6). Знайдемо елементарну роботу:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz,$$

а цей вираз є повним диференціалом від функції  $V$ . Отже:

$$\delta A = dV \quad (16.7)$$

Обчислюємо вектор сили, що діє в потенціальному силовому полі:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}.$$

Отже:

$$\vec{F} = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}, \quad (16.8)$$

або

$$\vec{F} = \text{grad}V.$$

Тобто в потенціальному силовому полі в кожній точці вектор сили дорівнює градієнтові від силової функції  $V$ .

Застосуємо оператор  $\text{rot}$  до обох частин рівняння (16.8):

$$\text{rot}\vec{F} = \text{rot}(\text{grad}V).$$

Оскільки  $\text{rot}$  від  $\text{grad}$  скалярної функції дорівнює нулю, то отримаємо:

$$\text{rot}\vec{F} = 0. \quad (16.9)$$

Це є найбільш загальна умова потенціальності силового поля, а саме: *поле буде потенціальним, якщо в усіх точках цього поля  $\text{rot}$  від  $\vec{F}$  (вектор сили) буде дорівнювати нулю.*

Оператор  $\text{rot}$  від  $\vec{F}$  - це є вектор, проєкції на осі координат якого мають вигляд:

$$\text{rot}_x \vec{F} = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z};$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_y \vec{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}; \\ \operatorname{rot}_z \vec{F} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}.\end{aligned}$$

Підставивши в ці рівняння значення проекцій сили з (16.1) ми можемо перевірити: буде задане силове поле потенціальним чи ні?

Введемо замість силової функції нову функцію, яка відрізняється від неї лише знаком:

$$U = -V$$

і назвемо її *потенціальною енергією частинки* в даному силовому полі. Тоді рівняння (16.7) буде мати вигляд:

$$\delta A = -dU. \quad (16.10)$$

Останнє рівняння означає, що *робота по переміщенню частинки в потенціальному силовому полі виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії цієї частинки.*

Рівняння (16.8) прийме вигляд:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right)$$

або

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}U.$$

Праву частину останнього рівняння в математиці прийнято записувати так:

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}, \quad (16.11)$$

де  $\vec{r}$  - це радіус-вектор (вектор координат) частинки в силовому полі.

Тобто сила є частинною похідною від потенціальної енергії по векторній координаті точки, взятій із знаком мінус.

Відмітимо, що є силові поля, в яких сила змінюються з часом. Такі поля називаються *нестационарними силовими полями*. Для таких полів можна записати:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t).$$

Нестационарні силові поля також можуть бути потенціальними, якщо виконується умова (16.9).

Зручною графічною характеристикою потенціальності поля є поняття про екіпотенціальні поверхні, тобто поверхні, в усіх точках, яких потенціальна енергія частинки приймає однакове значення. Розглянемо деякі приклади потенціальних полів:

1. *Однорідне або плоскопаралельне поле* - це поле, в усіх точках

якого сила однакова за величиною і напрямом. Прикладами такого поля є поле земного тяжіння біля поверхні Землі на невеликій площі; електростатичне поле між пластинами плоского конденсатора. Еквіпотенціальними поверхнями в такому полі буде сукупність паралельних площин, перпендикулярних напрямку сил.

2. Особливо важливим є випадок *центрально-симетричного поля*. В такому полі сила, що діє на частинку повністю задовольняє умовам:

а) де  $b$  не знаходилась частинка, лінії дії сили повністю проходять через деяку нерухому точку, яка зветься центром сил;

б) модуль сили однозначно залежить від відстані частинки до центра сил.

Прикладами центральносиметричних полів може бути гравітаційне поле точкової маси; електростатичне поле точкового заряду.

Якщо вибрати початок координати в центрі сил, то сила, що діє на частину в даному полі матиме вигляд:

$$\vec{F} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Потенціальна енергія в такому полі є функцією від величини радіус-вектора:

$$U = U(r).$$

Еквіпотенціальними поверхнями такого поля будуть концентричні сфери.

## §17. Класифікація сил в механіці

В механіці розглядають такі сили: потенціальні, гіроскопічні, дисипативні.

1. *Потенціальна сила* - це є сила, яка залежить від положення частинки на яку вона діє, (а інколи від часу), коли поле не стаціонарне:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t). \quad (17.1)$$

При цьому виконується умова потенціальності поля:

$$\text{rot} \vec{F} = 0. \quad (17.2)$$

Потенціальна сила, що діє на частинку також залежить від потенціальної енергії частинки:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \quad (17.3)$$

2. *Гіроскопічна сила* – це сила, яка пропорційна швидкості частинки та напрямлена перпендикулярно до швидкості частинки.

Прикладом цієї сили може бути сила Коріоліса, сила Лоренца, з якою магнітне поле діє на рухомий електричний заряд:

$$\vec{F}^g = e[\vec{B}\vec{v}]. \quad (17.4)$$

3. *Дисипативна сила* – це сила, яка напрямлена в протилежну сторону до швидкості частинки. Прикладом їх є сили тертя, сили опору середовища тощо. Дисипативна сила позначається літерою  $\vec{F}^d$ .

Таким чином, будь-яку силу, в загальному випадку, можна представити так:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \vec{F}^g + \vec{F}^d. \quad (17.5)$$

## §18. Класифікація вільних механічних систем

*Механічною системою* називають будь-яку сукупність матеріальних точок.

Розглянемо рухому систему матеріальних точок. Сили, що діють на точки системи можна поділити на *внутрішні* і *зовнішні*.

*Внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками системи. Внутрішні сили будемо позначати  $\vec{F}^{(in)}$ .

*Зовнішні сили* – це сили, що діють на точки системи з боку тіл, які не входять в дану систему. Зовнішні сили будемо позначати  $\vec{F}^{(e)}$ .

Нехай внутрішні і зовнішні сили є потенціальні. Тоді потенціальну енергію системи можна записати так:

$$U = U^{(e)} + U^{(in)}, \quad (18.1)$$

де  $U^{(e)}$  - потенціальна енергія системи в зовнішньому силовому полі;  $U^{(in)}$  - внутрішня потенціальна енергія системи, тобто енергія взаємодії між частинками даної системи.

Потенціальна енергія системи в зовнішньому силовому полі ( $U^{(e)}$ ) складається з потенціальної енергії всіх частинок системи і залежить від положення цих частинок, а також і від часу, коли силове поле буде нестационарним, тобто

$$U^{(e)} = U^{(e)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t), \quad (18.2)$$

Енергія взаємодії між частинками даної системи ( $U^{(in)}$ ) залежить від взаємних відстаней між частинками, а отже, від положення цих частинок в середині системи.

Відмітимо, що внаслідок однорідності часу, всі моменти часу фізично еквівалентні для даної системи частинок і внутрішня потенціальна енергія системи від часу явно не залежить, тобто

$$U^{(in)} = U^{(in)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n). \quad (18.3)$$

Проведемо таку класифікацію вільних механічних систем:

1. *Замкнені системи* - це системи матеріальних точок, які рухаються у відсутності зовнішнього силового поля. Тобто

$$U^{(e)} = 0; \\ U^{(in)} = U^{(in)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n). \quad (18.4)$$

2. Системи матеріальних точок, які рухаються в стаціонарних потенціальних полях. Для такої системи потенціальна енергія записується:

$$U = U^{(e)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) + U^{(in)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n), \quad (18.5)$$

або

$$U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n). \quad (18.6)$$

Інколи ці два класи механічних систем об'єднують в один і називають *консервативними механічними системами*. Ознакою консервативної системи є те, що її потенціальна енергія від часу явно не залежить.

3. Системи матеріальних точок, які рухаються в нестаціонарному силовому полі. Для таких систем:

$$U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n, t). \quad (18.7)$$

4. Всі інші вільні механічні системи (системи на які діють гіроскопічні і дисипативні сили).

## **Лекція 4. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ТА ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ**

§19. Теореми про зміну кінетичної та повної механічної енергії системи матеріальних точок. Закон збереження повної механічної енергії системи, його зв'язок з однорідністю часу.

§20. Теорема про зміну імпульсу незамкненої системи. Закон збереження імпульсу замкненої системи, його зв'язок з третім законом Ньютона та однорідністю простору. Симетрія зовнішнього силового поля та збереження окремих складових імпульсу системи.

§21. Теорема про рух центра мас системи.

§22. Теорема Кеніга.

§23. Момент сили відносно центра і відносно осі.

§24. Момент імпульсу частинки.

§25. Теорема про зміну моментів імпульсу частинки. Закон

збереження моменту імпульсу частинки в центральній-симетричному полі відносно центра сил. Закон площ.

§26. Теорема про зміну моменту імпульсу незамкненої системи. Закон збереження моменту імпульсу замкненої системи. Симетрія зовнішнього силового поля та збереження окремих складових моменту імпульсу.

§27. Одномірний рух. Якісне дослідження одномірного руху за допомогою графіків повної механічної енергії системи та потенціальної енергії системи. Границі одномірного руху. Період фінітного руху.

[1. §4-§8; 2. §34-§36; 3. §3.1-§3.7; 6. §16.1-§16.13, §17.1-§17.7, §18.1-§18.4]

## **§19. Теорема про зміну кінетичної та повної механічної енергії системи матеріальних точок. Закон збереження повної механічної енергії системи, його зв'язок з однорідністю часу**

Розглянемо рухому систему матеріальних точок. Оскільки на кожну точку цієї системи діють як зовнішні так і внутрішні сили, то другий закон Ньютона для руху  $i$ -тої точки системи буде мати вигляд:

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(in)}. \quad (19.1)$$

Введемо позначення:

$$\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(in)} = \vec{F}_i,$$

де  $\vec{F}_i$  - це рівнодійна зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на дану точку. Тоді рівняння (19.1) прийме вигляд:

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i.$$

Помножимо скалярно обидві частини цього рівняння на вектор переміщення вибраної точки. Маємо:

$$m_i w_i d\vec{r}_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i. \quad (19.2)$$

Перетворимо ліву частину цього рівняння і прискорення розпишемо як похідну вектора швидкості цієї точки по часові:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i;$$

$$m_i w_i d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} d\vec{v}_i = m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = m_i d\left(\frac{\vec{v}_i^2}{2}\right) =$$

$$= m_i d\left(\frac{v_i^2}{2}\right) = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right).$$

Рівняння (19.2) прийме вигляд:

$$d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \vec{F}_i d\vec{r}_i.$$

Такі рівняння можна скласти для кожної точки системи. Обчислимо суму цих рівнянь:

$$\sum d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \vec{F}_i d\vec{r}_i. \quad (19.3)$$

Перетворимо ліву частину рівняння (19.3):

$$\sum d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = d \sum \left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dT;$$

$$\sum \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = T,$$

де  $T$  - це кінетична енергія системи.

Рівняння (19.3) приймає вигляд:

$$dT = \sum \vec{F}_i d\vec{r}_i, \quad (19.4)$$

але

$$\sum \vec{F}_i d\vec{r}_i = \delta A,$$

де  $\delta$  - неповний диференціал;  $\delta A$  - це елементарна робота всіх сил (як зовнішніх так і внутрішніх) по переміщенню точок системи.

Тоді маємо:

$$dT = \delta A. \quad (19.5)$$

Ми отримали математичний вираз теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи, яка формулюється так: *зміна кінетичної енергії системи матеріальних точок дорівнює роботі всіх сил (як зовнішніх так внутрішніх) прикладених до точок цієї системи.*

Нехай система рухається в потенціальному силовому полі. Потенціальна енергія цієї системи залежить від положення всіх точок системи, а інколи від часу, якщо силове поле буде стаціонарним.

Тоді

$$U = U(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n). \quad (19.6)$$

Сила, що діє на кожну точку системи буде пов'язана з потенціальною енергією системи рівністю:

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}.$$

Тоді рівняння (19.4) прийме вигляд:

$$dT = -\sum \frac{dU}{dr_i} d\vec{r}_i. \quad (19.7)$$

Обчислимо повний диференціал від обох частин рівняння (19.6):

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i.$$

Звідси

$$\sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i = dU - \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Підставимо це значення в рівняння (19.7) і отримаємо:

$$dT = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt;$$

$$dT + dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt;$$

$$d(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} dt,$$

але  $T + U$  - це є повна механічна енергія системи. Тобто

$$T + U = E.$$

Отже, попереднє рівняння набуде вигляду:

$$dE = \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (19.8)$$

Відомо, що потенціальна енергія системи складається з зовнішньої потенціальної енергії і внутрішньої, тобто

$$U = U^{(e)} + U^{(in)}.$$

Запишемо значення частинних похідних від потенціальної енергії по часу:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} + \frac{\partial U^{(in)}}{\partial t}.$$

Також відомо, що внаслідок однорідності часу внутрішня потенціальна енергія системи від часу явно не залежить:

$$\frac{\partial U^{(in)}}{\partial t} = 0.$$

Тому:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} + 0.$$

Тоді рівняння (19.8) остаточно прийме вигляд:

$$dE = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} dt \quad (19.9)$$

або

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t}.$$

Рівняння (19.9) є математичний запис теореми про зміну повної механічної енергії системи.

Розглянемо випадок консервативної системи матеріальних точок. В цьому випадку зовнішня потенціальна енергія системи від часу явно не залежить. Тобто

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} &= 0, \\ dE &= 0. \end{aligned} \quad (19.10)$$

Звідси

$$E = \text{const}$$

або

$$T + U = \text{const}.$$

Ми отримали закон збереження повної механічної енергії; який формулюється так: *повна механічна енергія консервативної системи матеріальних точок залишається постійною при будь-якому русі точок системи.*

У виведенні цього закону ми враховували факт однорідності часу. Отже, закон збереження повної механічної енергії є наслідком однорідності часу. Закону збереження можна надати вигляд першого інтегралу руху. Дійсно його можна записати так:

$$\sum \frac{m_i (\vec{r}_i)^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \text{const}. \quad (19.11)$$

Йому можна надати й інший вигляд:

$$E = T + U = \sum \frac{m \vec{v}_i^2}{2} + U(\vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n).$$

**§20. Теорема про зміну імпульсу незамкненої системи. Закон збереження імпульсу замкненої системи, його зв'язок з третім законом Ньютона та однорідністю простору. Симетрія зовнішнього силового поля та збереження окремих складових імпульсу системи**

*Імпульсом (кількістю руху) системи матеріальних точок називається вектор, який дорівнює сумі імпульсів всіх точок системи:*

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i. \quad (20.1)$$

Запишемо рівняння другого закону Ньютона для деякої точки системи. Оскільки на систему діють як зовнішні так і внутрішні сили, то рівняння матиме вигляд:

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(in)}.$$

В даній формулі прискорення прийемо  $\vec{w}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ , тоді маємо:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(in)}. \quad (20.2)$$

Перетворимо ліву частину цього рівняння:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt}.$$

Тоді рівняння (20.2) прийме вигляд:

$$\frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(in)}.$$

Такі рівняння можна скласти для всіх точок системи. Просумуємо ці рівняння:

$$\sum \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum \vec{F}_i^{(e)} + \sum \vec{F}_i^{(in)}. \quad (20.3)$$

Розглянемо кожну суму окремо:

$$\sum \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \frac{d \sum m_i \vec{v}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (20.4)$$

Тоді вираз (20.3) прийме вигляд:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i^{(e)} + \sum \vec{F}_i^{(in)}.$$

Відомо, що всі внутрішні сили, як сили взаємодії між точками системи будуть за третім законом Ньютона попарно рівними і протилежно направленими. Тому векторна сума всіх внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum \vec{F}_i^{(in)} = 0. \quad (20.5)$$

Назвемо суму всіх зовнішніх сил, що діють на точку системи *головним вектором зовнішніх сил* і позначимо його так:

$$\sum \vec{F}_i^{(e)} = \vec{R}^{(e)}. \quad (20.6)$$

Підставимо вирази (20.4), (20.5) і (20.6) в формулу (20.3), одержимо:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}^{(e)}. \quad (20.7)$$

Ми отримали математичний вираз теореми про зміну імпульсу системи математичних точок яка формулюється так: *зміна імпульсу (його вектора) системи матеріальних точок за одиницю часу дорівнює головному вектору зовнішніх сил системи.*

В проекціях математичний вираз теореми (20.7) запишеться так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= R_x^{(e)}; \\ \frac{dp_y}{dt} &= R_y^{(e)}; \\ \frac{dp_z}{dt} &= R_z^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (20.7a)$$

Примітка:

$$\begin{aligned} p_x &= \sum m_i v_{ix} = \sum m_i \dot{x}_i; \\ p_y &= \sum m_i v_{iy} = \sum m_i \dot{y}_i; \\ p_z &= \sum m_i v_{iz} = \sum m_i \dot{z}_i. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок *замкненої системи*, тобто системи на яку не діють зовнішні сили. В цьому випадку головний вектор зовнішніх сил рівний нулеві ( $\vec{R}^{(e)} = 0$ ) і теорема, яка записується виразом (20.7) приймає вигляд:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0,$$

звідки

$$d\vec{p} = \overline{\text{const}}. \quad (20.8)$$

Ми отримали закон збереження імпульсу для замкненої системи, який формулюється так: *вектор імпульсу замкненої системи матеріальних точок залишається постійним при будь-якому русі точок системи.*

При виведенні цього закону ми враховували третій закон Ньютона, який в свою чергу є наслідком однорідності простору. В проекціях закон збереження імпульсу має вигляд:

$$\begin{aligned} p_x &= C_1; \\ p_y &= C_2; \\ p_z &= C_3 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}\sum m_i \dot{x}_i &= C_1; \\ \sum m_i \dot{y}_i &= C_2; \\ \sum m_i \dot{z}_i &= C_3.\end{aligned}$$

Ми отримали три перших інтеграли руху, тобто в проекціях закон збереження імпульсу має вигляд трьох перших інтегралів руху. Розглянемо випадок, коли система рухається в зовнішньому силовому полі, тобто коли головний вектор не дорівнює нулю ( $\vec{R}^{(e)} \neq 0$ ), але в той же час зовнішнє силове поле має певну симетрію. Нехай, наприклад, проекція головного вектора зовнішніх сил напрямлена перпендикулярно осі  $Ox$ . В цьому випадку проекція головного вектора зовнішніх сил на  $Ox$  дорівнює нулю, тобто  $R_x^{(e)} = 0$ . З рівнянь (20.7а) маємо:

$$\frac{dp_x}{dt} = 0,$$

то

$$p_x = C$$

або

$$\sum m_i \dot{x}_i = 0.$$

Ми маємо в цьому випадку лише один інтеграл руху, який відповідає збереженню однієї складової імпульсу системи.

## §21. Теорема про рух центра мас системи

В багатьох задачах механіки доводиться вивчати рух центрів мас системи. *Центром мас* механічної системи матеріальних точок називається точка, векторна координата якої має вигляд:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

або

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (21.1)$$

де  $m$  - маса всієї системи, точка  $C$  - центр маси.

Запишемо другий закон Ньютона для  $i$ -ої точки системи:

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(in)}.$$

Такі рівняння можна записати для всіх точок системи. Просумуємо ці рівняння по всім точкам системи:

$$\sum m_i \vec{w}_i = \sum \vec{F}_i^{(e)} + \sum \vec{F}_i^{(in)}. \quad (21.2)$$

Але з попереднього параграфу відомо, що сума всіх внутрішніх сил  $\sum \vec{F}_i^{(in)} = 0$  (на основі третього закону Ньютона), а сума зовнішніх сил  $\sum \vec{F}_i^{(e)} = \vec{R}^{(e)}$ . Тому вираз (21.2) прийме вигляд:

$$\sum m_i \vec{w}_i = \vec{R}^{(e)}. \quad (21.3)$$

З рівняння (21.1) маємо:

$$m \vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i.$$

Продиференціюємо цю рівність двічі по часу:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (m_i \vec{r}_i) &= \frac{d^2}{dt^2} \sum (m_i \vec{r}_i); \\ m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} &= \sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Але  $m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \vec{w}_c$  - це вектор прискорення центру мас системи,  $\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{w}_i$  є прискорення її точки.

Тоді рівняння (21.4) прийме вигляд:

$$m \vec{w}_c = \sum m_i \vec{w}_i. \quad (21.5)$$

З врахуванням рівняння (21.3) маємо:

$$m \vec{w}_c = \vec{R}^{(e)}. \quad (21.6)$$

Ми отримали теорему про рух центра мас системи матеріальних точок.

*Центр мас системи матеріальних точок, рухається так як точка, в якій зосереджена вся маса системи і до якої прикладені всі зовнішні сили.*

В проекціях ми отримаємо диференціальні рівняння руху центра мас системи:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_c &= R_x^{(e)}; \\ m \ddot{y}_c &= R_y^{(e)}; \\ m \ddot{z}_c &= R_z^{(e)}. \end{aligned}$$

Тобто це є три диференціальні рівняння другого порядку, які описують рух центра мас даної системи.

Нехай система замкнена. В цьому випадку головний вектор зовнішніх сил  $\vec{R}_x^{(e)} = 0$ ,  $m \vec{w}_c = 0$  (з виразу (21.6)) або  $m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0$  звідси

слідуює  $\vec{v}_c = \text{const}$ , тобто центр мас замкненої системи знаходиться в стані спокою або ж рухається рівномірно і прямолінійно.

## §22. Теорема Кеніга

Інколи доцільно розглядати рух системи матеріальних точок як сукупність двох рухів: поступального руху в цілому разом з її центром мас та рухом точок системи відносно центра мас.

Нехай система матеріальних точок рухається відносно деякої нерухомої системи координат, початок якої знаходиться в точці  $O$ .  $C$  - це центр мас системи матеріальних точок в даний момент часу. Будемо точку  $C$  вважати точкою нової рухомої системи координат. Розглянемо деяку точку  $M_i$  системи з масою  $m_i$ . Введемо позначення:  $\vec{r}_i$  - радіус-вектор вибраної точки системи відносно нерухомої системи координат;  $\vec{r}'_i$  - радіус-вектор відносно центра мас системи;  $\vec{r}_c$  - радіус-вектор точки  $C$  відносно нерухомої системи координат (див. рис. 16).

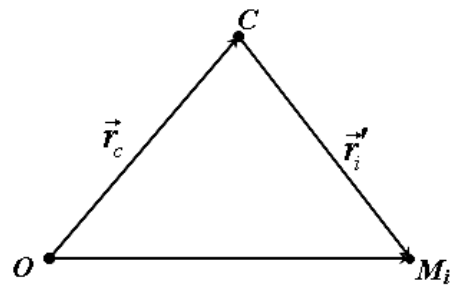


Рис. 16

З рис. 16 видно, що  $\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}'_i$ .

Продиференціюємо це рівняння по часові:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} + \frac{d\vec{r}'_i}{dt}$$

або

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}'_i,$$

де  $\vec{v}_i$  - це швидкість її точки  $M_i$  відносно нерухомої системи координат ( $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ );  $\vec{v}'_i$  - швидкість тієї ж точки відносно центра механічної системи ( $\frac{d\vec{r}'_i}{dt} = \vec{v}'_i$ );  $\vec{v}_c$  - швидкість центра мас системи відносно нерухомої системи координат ( $\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c$ ).

Піднесемо останню рівність до квадрату і отримаємо:

$$v_i^2 = v_c^2 + v_i'^2 + 2\vec{v}_c\vec{v}'_i.$$

Домножимо обидві частини на половину маси вибраної точки:

$$\frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i v_c^2}{2} + \frac{m_i v_i'^2}{2} + m_i \vec{v}_c \vec{v}'_i.$$

Такі рівняння ми можемо скласти для всіх точок системи. Просумуємо їх, отримаємо:

$$\sum \frac{m_i v_i^2}{m} = \sum \frac{m_i v_c^2}{2} + \sum \frac{m_i v_i'^2}{2} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_c \vec{v}_i'. \quad (22.1)$$

Розглянемо кожну із цих чотирьох сум окремо:

$$\sum \frac{m_i v_i^2}{m} = T. \quad (22.2)$$

Вираз (22.2) - це кінетична енергія руху точок системи відносно нерухомої системи координат:

$$\sum \frac{m_i v_c^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \sum m_i = \frac{m v_c^2}{2}, \quad (22.3)$$

де  $m$  - маса всієї системи.

Вираз (22.3) – це кінетична енергія точок системи разом з центром мас в поступальному русі відносно нерухомої системи координат:

$$\sum \frac{m_i v_i'^2}{2} = T'. \quad (22.4)$$

Вираз (22.4) – це кінетична енергія руху точок системи відносно центра мас (рух системи). Перед тим як розглянути останню суму, згадаємо, що початок рухомої (штрихованої) системи координат знаходиться в центрі мас  $C$ . Тому  $\vec{r}'_c = 0$ , але:

$$\vec{r}'_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}.$$

Звідси

$$\sum m_i \vec{r}_i = 0.$$

Тому сума:

$$\sum m_i \vec{v}_c \vec{v}_i' = \vec{v}_c \sum m_i v_i' = \vec{v}_c \sum m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} = \vec{v}_c \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i' = 0.$$

Якщо підставити всі значення в рівняння (22.1), то отримаємо:

$$T = \frac{m v_c^2}{2} + T'.$$

Це є теорема Кеніга, вона формулюється так: кінетична енергія системи матеріальних точок дорівнює сумі кінетичної енергії

поступального руху системи разом з її центром мас та кінетичної енергії руху всіх точок системи відносно центра мас.

### §23. Момент сили відносно центра і відносно осі

Моментом сили відносно центра  $O$  називається вектор, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора проведеного із центра  $O$  в точку прикладання сили на вектор цієї сили:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = [\vec{r}\vec{F}].$$

Легко довести, що модуль моменту сили дорівнює добутку величини сили на плече (див. рис. 17):

$$|\vec{m}_0(\vec{F})| = Fh.$$

Моментом сили відносно координатної осі зветься скалярна величина, яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту сили відносно початку координат:

$$m_x(\vec{F}) = [\vec{r}\vec{F}]_x = (r_y F_z - r_z F_y);$$

$$m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y;$$

$$m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z;$$

$$m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x,$$

де  $x, y, z$  - координати точки прикладання сили.

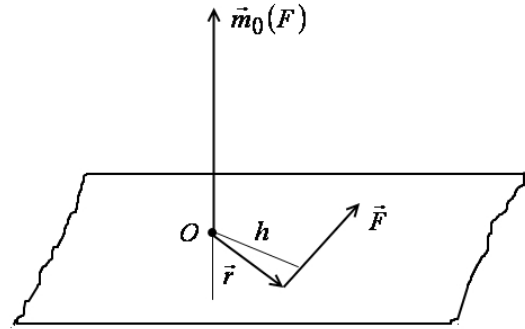


Рис. 17

### §24. Момент імпульсу частинки

Нехай частинка рухається по деякій кривій і має в даний момент часу імпульс  $m\vec{v}$  (див. рис. 18).

Моментом імпульсу частинки відносно центра  $O$  зветься вектор, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора частинки на вектор імпульсу:

$$\vec{l}_0 = [\vec{r}m\vec{v}];$$

$$\vec{l}_0 = m[r\vec{v}].$$

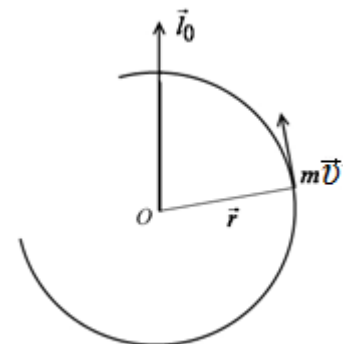


Рис. 18

Моментом імпульсу відносно координатної осі зветься скалярна величина, яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу відносно початку координат:

$$\begin{aligned}
l_x &= m[\vec{r}\vec{v}]_x = (r_y v_z - r_z v_y)m; \\
l_y &= m(y\dot{z} - z\dot{y}); \\
l_x &= m(z\dot{x} - x\dot{z}); \\
l_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}).
\end{aligned}$$

**§25. Теорема про зміну моментів імпульсу частинки. Закон збереження моменту імпульсу частинки в центральній-симетричному полі відносно центра сил. Закон площ**

Запишемо другий закон Ньютона для руху частинки:

$$\begin{aligned}
m\vec{w} &= \vec{F}, \\
m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}.
\end{aligned} \tag{25.1}$$

Помножимо обидві частини цього рівняння векторно на радіус-вектор частинки:

$$m \left[ \vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = [\vec{r}\vec{F}]. \tag{25.2}$$

Але векторний добуток:

$$[\vec{r}\vec{F}] = \vec{m}_0(\vec{F}). \tag{25.3}$$

Вираз (25.3) – це момент сили відносно початку координат.

Перетворимо ліву частину рівняння (25.2). Для цього скористаємось формулою з математичного аналізу:

$$u \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(uv) - \frac{du}{dt}v.$$

У нашому випадку:

$$\left[ \vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r}\vec{v}] - \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{v} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r}\vec{v}] - [\vec{v}\vec{v}] = \frac{d}{dt} [\vec{r}\vec{v}] - 0.$$

Отже:

$$\begin{aligned}
m \left[ \vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt} \right] &= m \frac{d}{dt} [\vec{r}\vec{v}] = \frac{d}{dt} [\vec{r}m\vec{v}]; \\
m \left[ \vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt} \right] &= \frac{d\vec{l}_0}{dt}.
\end{aligned} \tag{25.4}$$

Підставимо значення виразу (25.3) і виразу (25.4) в рівняння (25.2), маємо:

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{m}_0(\vec{F}). \tag{25.5}$$

Спроектуємо вектори рівняння (25.5) на осі координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{l}_x}{dt} &= m_x(\vec{F}); \\ \frac{d\vec{l}_y}{dt} &= m_y(\vec{F}); \\ \frac{d\vec{l}_z}{dt} &= m_z(\vec{F}). \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

Рівняння (25.5) і (25.6) являють собою теорему про зміну моменту імпульсу частинки. *Зміна за одиницю часу моменту імпульсу частинки відносно будь-якого центра (будь-якої осі) дорівнює моменту діючої на частинку сили відносно цього ж центра (цієї ж осі).*

Нехай частинка рухається в центральносиметричному полі. Виберемо центр сил за початок координат. Тоді сила, що діє на частинку має вигляд:

$$\vec{F} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Знайдемо момент сили відносно центра сил:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = [\vec{r}\vec{F}] = \frac{F(r)}{r} [\vec{r}\vec{r}] = 0.$$

Теорема (25.5) прийме вигляд:

$$\frac{dl_0}{dt} = 0, \Rightarrow \vec{l}_0 = \overline{\text{const}} \quad (25.7)$$

або

$$m[\vec{r}\vec{v}] = \overline{\text{const}}. \quad (25.7a)$$

Ми отримали закон збереження, який формулюється так: *при русі частинки в центральносиметричному полі, момент імпульсу частинки відносно центра сил залишається постійним.*

Виявимо зміст цього результату. Спроектуємо рівняння (25.7) на осі координат:

$$l_x = C_1; \quad l_y = C_2; \quad l_z = C_3,$$

або

$$\begin{aligned} m(y\dot{z} - z\dot{y}) &= C_1; \\ m(z\dot{x} - x\dot{z}) &= C_2; \\ m(x\dot{y} - y\dot{x}) &= C_3. \end{aligned}$$

Помножимо перше рівняння на  $x$ , друге на  $y$ , третє на  $z$  і додамо їх, одержимо:

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0.$$

Ми отримали рівняння площини, в якій розташована траєкторія частинки. Ця площа проходить через початок координат, тобто через центр сил. Запишемо вираз секторної швидкості частинки:

$$\text{секторна швидкість} = \frac{1}{2} |[\vec{r}\vec{v}]|.$$

З рівняння (25.7а) випливає, що секторна швидкість частинки буде постійною. Одержаний результат можна сформулювати так: *в центральносиметричному полі, частинка рухається в площині, яка містить центр сил, причому за будь-які рівні проміжки часу радіус вектор частинки замітає однакові площі.* Цей закон називається *законом площі, або другим законом Кеплера.*

## **§26. Теорема про зміну моменту імпульсу незамкненої системи. Закон збереження моменту імпульсу замкненої системи. Симетрія зовнішнього силового поля та збереження окремих складових моменту імпульсу**

*Моментом імпульсу системи матеріальних точок відносно деякого центра (деякої осі) зветься вектор (скаляр), який дорівнює сумі моментів імпульсу всіх точок системи відносно даного центра (даної осі).* Нехай  $L_O$  - момент імпульсу системи відносно центра  $O$ :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum \vec{l}_{iO}; \\ L_x &= \sum l_{ix} = \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i); \\ L_y &= \sum l_{iy} = \sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i); \\ L_z &= \sum l_{iz} = \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i). \end{aligned}$$

Запишемо теорему про зміну моменту імпульсу для  $i$ -ої точки системи:

$$\frac{dl_{iO}}{dt} = \vec{m}_0(F_i). \quad (26.1)$$

В цьому рівнянні:

$$\vec{m}_0(\vec{F}_i) = [\vec{r}_i \vec{F}_i] = [\vec{r}_i (F_i^{(e)} + F_i^{(in)})] = [\vec{r}_i \vec{F}_i^{(in)}].$$

Підставимо це значення в рівняння (26.1), маємо:

$$\frac{d\vec{l}_{iO}}{dt} = [\vec{r}_i \vec{F}_i^{(e)}] + [\vec{r}_i \vec{F}_i^{(in)}].$$

Такі рівняння можна складати для всіх точок системи.

Просумуємо всі ці рівняння:

$$\sum \frac{d\vec{l}_{iO}}{dt} = \sum [\vec{r}_i \vec{F}_i^{(e)}] + \sum [\vec{r}_i \vec{F}_i^{(in)}]. \quad (26.2)$$

Перетворимо ліву частину рівняння (26.2):

$$\begin{aligned} \sum \frac{d\vec{l}_{iO}}{dt} &= \frac{d \sum \vec{l}_{iO}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{iO}}{dt}. \\ \frac{d\vec{L}_{iO}}{dt} &= \sum [\vec{r}_i \vec{F}_i^{(e)}] + \sum [\vec{r}_i \vec{F}_i^{(in)}]. \end{aligned} \quad (26.3)$$

Доведемо, що друга сума, тобто сума моментів всіх внутрішніх сил дорівнює нулю (відносно будь-якого центра).

*Доведення:* візьмемо дві довільні точки системи  $A_1$  та  $A_2$ . Для сил взаємодії між цими точками можна за третім законом Ньютона записати, що вектори (див. рис. 19):

$$\vec{F}_1^{(in)} = -\vec{F}_2^{(in)}.$$

Обчислимо суму моментів обох сил, відносно будь-якого центра  $O$ :

$$\begin{aligned} [\vec{r}_1 \vec{F}_1^{(in)}] + [\vec{r}_2 \vec{F}_2^{(in)}] &= [\vec{r}_1 \vec{F}_1^{(in)}] - [\vec{r}_2 \vec{F}_1^{(in)}] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{F}_1^{(in)}] = \\ &= [\overrightarrow{A_2 A_1} \vec{F}_1^{(in)}] = 0, \end{aligned}$$

тому, що

$$\left( \overrightarrow{A_2 A_1}, \wedge \vec{F}_1^{(in)} \right) = 180^\circ.$$

Аналогічно можна зробити висновок, що сума моментів внутрішніх сил відносно будь-якого центра дорівнює нулю. Тобто

$$\sum [\vec{r}_i \vec{F}_i^{(in)}] = 0. \quad (26.4)$$

Назвемо суму моментів всіх зовнішніх сил, відносно даного центра, *головним моментом зовнішніх сил відносно центра* і позначимо його так:

$$\sum [\vec{r}_i \vec{F}_i^{(e)}] = \vec{M}_O^{(e)}. \quad (26.5)$$

Підставимо значення виразі (26.4) (26.5) в рівняння (26.3), маємо:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(e)}. \quad (26.6)$$

Спроектуємо векторне рівняння (26.6) на осі координат:

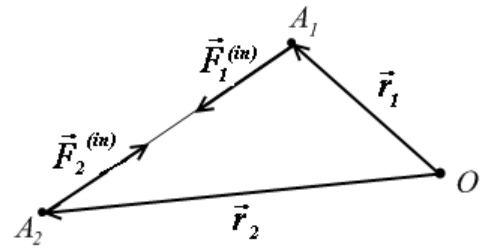


Рис. 19

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{L}_x}{dt} &= \vec{M}_x^{(e)}; \\ \frac{d\vec{L}_y}{dt} &= \vec{M}_y^{(e)}; \\ \frac{d\vec{L}_z}{dt} &= \vec{M}_z^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (26.7)$$

Рівняння (26.6) і (26.7) являють собою теорему про зміну моменту імпульсу. *Зміна за одиницю часу моменту імпульсу системи матеріальних точок відносно будь-якого центра (будь-якої осі) дорівнює головному моменту зовнішніх сил системи відносно центру (цієї ж осі).*

Розглянемо частинний випадок. Нехай система є замкненою на систему, тобто не діють зовнішні сили і їх головний момент дорівнює нулю. Отже:

$$\vec{M}_O^{(e)} = 0.$$

Теорема, що виражена рівністю (26.6) приймає вигляд:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0, \Rightarrow \vec{L}_O = \overline{\text{const}}. \quad (26.8)$$

Ми отримали закон збереження, який формулюється так: *момент імпульсу замкненої механічної системи відносно будь-якого центра (будь-якої осі) залишається постійним при будь-якому русі точок системи.*

Спроектуємо рівняння (26.8) на осі координат:

$$L_x = C_1, \quad L_y = C_2, \quad L_z = C_3$$

або

$$\begin{aligned} \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) &= C_1; \\ \sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) &= C_2; \\ \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) &= C_3. \end{aligned}$$

Ми отримали закон збереження моменту імпульсу системи у вигляді трьох перших інтегралів руху. (Є сім інтегралів руху). При виведенні закону збереження ми використали третій закон Ньютона.

Розглянемо ще один частинний випадок. Хай зовнішнє силове поле існує, тоді  $\vec{M}_O^{(e)} \neq 0$ . Разом з цим нехай це поле має деяку симетрію. Наприклад, головний момент зовнішніх сил відносно деякої осі дорівнює нулю. Тобто нехай  $\vec{M}_x^{(e)} = 0$ .

З рівняння (26.7) маємо  $\frac{dL_x}{dt} = 0, \Rightarrow L_x = \text{const}$ . Ми маємо в цьому випадку один перший інтеграл руху.

## §27. Одномірний рух. якісне дослідження одномірного руху за допомогою графіків повної механічної енергії системи та потенціальної енергії системи. Границі одномірного руху. Період фінітного руху

*Числом ступенів вільності механічної системи* зветься найменша кількість незалежних параметрів, якими можна задати положення системи в кожний момент часу. Ці параметри називаються *узагальненими координатами*.

*Приклад 1.* Положення матеріальної точки в просторі задається трьома незалежними координатами  $x, y, z$ . Отже, матеріальна точка має три ступені вільності.

*Приклад 2.* Тіло обертається навколо нерухомої осі. Положення тіла в кожний момент часу можна задати одним параметром – кутом повороту тіла. Отже, таке тіло має одну степінь вільності.

*Одновимірним* зветься рух консервативної механічної системи, що має одну степінь вільності. Повну механічну енергію такої системи можна завжди записати так:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const}, \quad (27.1)$$

де  $x$  - узагальнена координата;  $\dot{x}$  - зветься узагальненою швидкістю;  $m$  - це додатне число, що називається кінематичним параметром системи або узагальненою масою.

*Приклад 3.* Коливання математичного маятника будуть одномірним рухом (див. рис. 20):

$$E = \frac{mv^2}{2} - mgh;$$

$$h = l \cos \varphi;$$

$$v = R\omega = l\omega = l \frac{d\varphi}{dt} = l\dot{\varphi};$$

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi,$$

де  $\varphi$  - відіграє роль узагальненої координати;  $\dot{\varphi}$  - узагальнена швидкість;  $ml^2$  - узагальнена маса (момент інерції).

З рівняння (27.1) знайдемо закон руху системи. Дійсно з цього

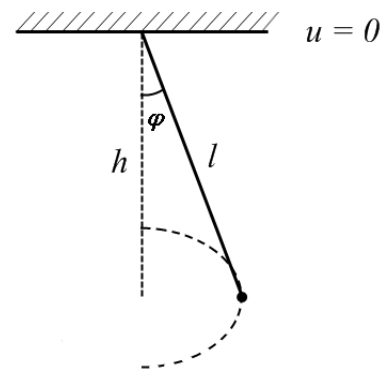


Рис. 20

рівняння:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}; \\ dt &= \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \end{aligned} \quad (27.2)$$

Звідки

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (27.3)$$

Ми отримали час  $t$ , як функцію від узагальненої координати. Звідси можна знайти і обернену функцію:

$$x = x(t). \quad (27.4)$$

Це і буде закон руху системи.

Одномірний рух зручно досліджувати за допомогою графіків повної механічної і потенціальної енергій системи, нанесених на один рисунок (див. рис. 21).

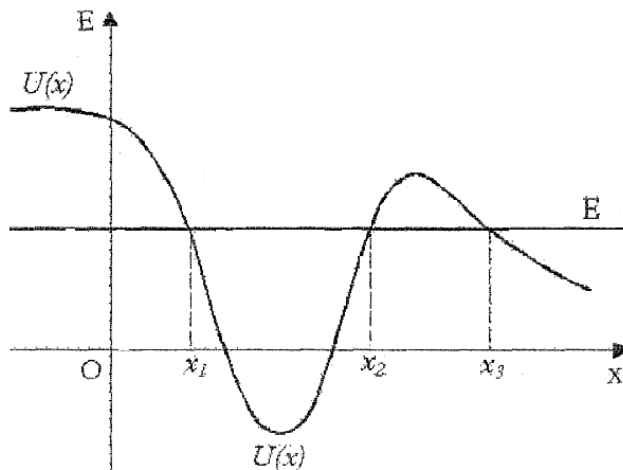


Рис. 21

Так як повна механічна енергія системи є величина постійна і її графіком буде пряма паралельна осі абсцис. Нехай графік потенціальної енергії має вигляд показаний на рисунку. Точки перетину обох графіків називаються *зворотними точками*, або *точками зупинки системи*. В цих точках до речі, узагальнена швидкість системи стає рівною нулю. Дійсно в цих точках  $E = U(x)$ , а

тому з рівняння (27.1) випливає, що  $\dot{x} = 0$ .

Для дослідження руху системи скористаємось таким фактом, що кінетична енергія системи завжди додатна (невід'ємна). З рівняння (27.1) маємо:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \geq 0.$$

З цієї нерівності можна знайти області простору, в яких рух можливий. Це будуть області, в яких:

$$U(x) \leq E.$$

Області простору, в яких рух можливий, називаються *дозволеними областями*. В нашому випадку дозволеними областями будуть  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_3, \infty)$ .

Області, в яких рух системи неможливий називаються *забороненими*. В нашому прикладі забороненими є області  $(-\infty, x_1)$ ,  $(x_2, x_3)$ .

Заборонена область  $(x_2, x_3)$  називається *потенціальним бар'єром*.

Дозволена область  $(x_1, x_2)$ , яка обмежена двома зворотними точками називається *потенціальною ямою*.

Для того, щоб система перейшла з дозволеної області  $(x_1, x_2)$  в дозволену область  $(x_3, \infty)$ , тобто для того, щоб вона пододала потенціальний бар'єр, необхідно системі надати додаткової кінетичної енергії.

Рух в потенціальній ямі буде рухом в обмеженій частині простору. Такий рух називається *фінітним*.

Якщо ж дозволена область простору, в якій відбувається рух системи не обмежена хоча б з однієї, або з обох сторін, то рух називається *інфінітним*.

Отже, в областях:  $(x_1; x_2)$  - фінітний рух,  $(x_2; x_3; )$  - інфінітний рух.

Фінітний рух одномірний в області  $(x_1; x_2)$  буде коливним, оскільки система рухається з положення  $x_1$  в  $x_2$  і назад. Період такого руху можна знайти з рівняння (27.2):

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

## Лекція 5. РУХ ЧАСТИНКИ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИМЕТРИЧНОМУ ПОЛІ

§28. Задача двох тіл. Зведення цієї задачі до задачі про рух частинки в центральньо-симетричному полі (ЦСП). Приведена маса.

§29. Розв'язок задачі про рух частинки в центральньо-симетричному полі. Метод одномірного ефективного потенціалу.

§30. Якісне дослідження руху частинки в центральньо-симетричному полі за виглядом одномірного ефективного потенціалу.

§31. Рух зарядженої частинки в кулонівському полі сил. Кеплерова задача.

§32. Розсіювання частинок в центральньо-симетричному полі. Знаходження функціональної залежності кута розсіювання від прицільного параметра. Формула Резерфорда для розсіювання  $\alpha$ -частинок в полі атомного ядра. Ефективний диференціальний переріз розсіювання.

[1. §9-§12; 2. §37-§43; 3. §5.1-§5.4, §6.1-§6.5, §7.1-§7.3; 4. §16-§22]

### §28. Задача двох тіл. зведення цієї задачі до задачі про рух частинки в центральньо-симетричному полі (ЦСП). Приведена маса

*Задачею двох тіл* зветься задача про рух замкненої системи двох взаємодіючих частинок. На відміну від задачі трьох тіл та більше задача двох тіл має повний розв'язок в загальному вигляді. Розв'язок цієї задачі використовується в небесній механіці та атомній фізиці.

Розглянемо замкнену систему двох взаємодіючих частинок. Рух такої системи можна розглядати як сукупність двох рухів: поступального руху системи разом з центром мас системи та руху обох точок системи відносно цього центра мас.

Оскільки система замкнена, то рух її центра мас буде рівномірний і прямолінійний і особливого інтересу не викликає. Більш цікавим буде вивчення руху обох частинок відносно їх центра мас. Виберемо початок координат в центрі мас системи та проведемо радіус вектор обох частинок.

Нехай частинки  $m_1$  і  $m_2$ , що входять в замкнену систему,

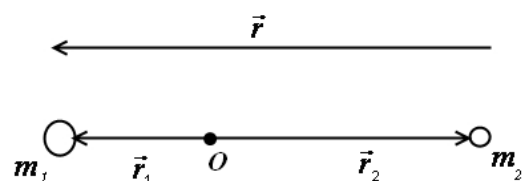


Рис. 22

знаходяться на відстані  $r$  одна відносно одної, а точка  $O$  є їх центр мас. Проведемо з центра мас радіус-вектори частинок  $m_1$  і  $m_2$ . Сполучимо точки  $m_1$  і  $m_2$  напрямленим відрізком  $\vec{r}$  від  $m_2$  до  $m_1$ . З рис. 22 видно, що

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (28.1)$$

Для сил взаємодії між частинками можна за третім законом Ньютона записати, що

$$\vec{F}_1 = F(r) \frac{\vec{r}}{r};$$

$$\vec{F}_2 = -F(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

де  $\frac{\vec{r}}{r}$  - одиничний вектор.

Запишемо другий закон Ньютона для кожної частинки:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = F(r) \frac{\vec{r}}{r};$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -F(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

З цих рівнянь знаходимо прискорення частинок:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_1} F(r) \frac{\vec{r}}{r};$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{1}{m_2} F(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Віднімемо від першого рівняння друге, тобто знайдемо різницю прискорень першої і другої частинок:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (28.2)$$

або

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (28.3)$$

Перетворимо ліву частину рівняння:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

З врахуванням попередніх виразів:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

або

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (28.4)$$

Введемо позначення:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m \quad (28.5)$$

і  $m$  назвемо *приведеною масою* двох частинок.

З врахуванням (28.5) рівняння (28.4) прийме вигляд:

$$m \ddot{\vec{r}} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (28.6)$$

Ми отримали рівняння, яке формально описує рух фіктивної частинки з масою  $m$ , яка рухається в центрально-симетричному полі, в якому центр сил співпадає з центром мас даної системи. Потенціальна енергія частинки в такому полі залежить лише відносно її відстані  $r$  до нерухомої частинки. Сила, що діє на частинку в центрально-симетричному полі, теж залежить лише від відстані  $r$  і напрямлена в кожній точці вздовж радіус-вектора  $\vec{r}$ .

Проінтегрувавши рівняння (28.6) можемо знайти закон руху цієї фіктивної частинки, тобто знайти радіус-вектор  $\vec{r}$  як функцію відносно часу, тобто знайти рівняння  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Маючи це рівняння для фіктивної частинки можна знайти закон руху кожної з частинок  $\vec{r}_1(t)$  та  $\vec{r}_2(t)$ , що входять до даної системи:

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} &= F(r) \frac{\vec{r}}{r}; \\ m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= F(r) \frac{\vec{r}}{r}; \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -F(r) \frac{\vec{r}}{r}; \\ m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= m \ddot{\vec{r}}; \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -m \ddot{\vec{r}}; \\ \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m}{m_1} \ddot{\vec{r}}; \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m}{m_2} \ddot{\vec{r}}; \\ \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \frac{m}{m_1} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}; \\ \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \frac{m}{m_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}; \end{aligned}$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m}{m_1} \vec{r}(t);$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m}{m_2} \vec{r}(t).$$

Розглянемо важливий для практики випадок, коли маса однієї з частинок значно більша відносно маси другої, тобто  $m_1 \ll m_2$ . Тепер приведена маса дорівнює:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \approx m_1.$$

Приведена маса в цьому випадку і дорівнює меншій частинці. Крім того можна вважати, що центр мас співпадає з більш масивною частинкою. Таким чином, в цьому випадку можна (з наближенням) вважати, що центр мас такої системи буде знаходитися в положенні  $m_2$  (більш масивної частинки), а в полі цієї частинки рухається частинка з малою масою  $m_1$ .

Прикладом такого руху може бути рух планети навколо Сонця, рух електрона навколо масивного ядра.

## §29. Розв'язок задачі про рух частинки в центрально-симетричному полі. Метод одномірного ефективного потенціалу

Нехай частинка рухається в центрально-симетричному полі. Потенціальна енергія частинки в такому полі:

$$U = U(r),$$

де  $r$  - відстань відносно частинки до центра сил.

Таке поле є консервативним, а тому в ньому має місце закон збереження повної механічної енергії частинки:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = \text{const.} \quad (29.1)$$

Крім цього в центрально-симетричному полі має місце і закон збереження моменту імпульсу частинки відносно центра сил:

$$\vec{L}_0 = \overline{\text{const.}} \quad (29.2)$$

Відомо також, що в такому полі траєкторія частинки розміщена в одній площині. Нехай частинка рухається в площині  $XOY$ . Тоді її координати  $z = 0$ ;  $\dot{z} = 0$ . Запишемо проєкції момент імпульсу частинки на осі координат:

$$L_x = m(y\dot{z} - \dot{z}) = 0;$$

$$L_y = m(z\dot{x} - \dot{x}) = 0;$$

$$L_0 = L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = L_0.$$

Перейдемо до полярної системи координат. Зв'язок:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Значення похідної:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}; \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}.$$

Після підстановки всіх цих значень, отримаємо:

$$L_0 = mr^2 \dot{\varphi}$$

в полярній системі координат.

Запишемо вираз для швидкості в полярній системі координат:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$$

і підставимо це значення в рівняння (28.1):

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r); \quad (29.3)$$

$$L_0 = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (29.4)$$

З рівняння (29.4) визначимо похідну кута відносно часу:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_0}{mr^2}. \quad (29.5)$$

Підставимо значення виразу (29.5) в рівняння (29.3):

$$E = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{m^2 r^2} \right) + U(r);$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r). \quad (29.6)$$

Введемо позначення:

$$U_{\text{еф}}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r), \quad (29.7)$$

де  $U_{\text{еф}}(r)$  - одномірний, ефективний потенціал; величина  $\frac{L_0^2}{2mr^2}$  - відцентрова енергія.

З урахуванням виразу (29.7) рівняння (29.6) приймає вигляд:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{еф}}(r). \quad (29.8)$$

Ми отримали задачу подібну до задачі про одномірний рух. З рівняння (29.8) знайдемо  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{E - U_{\text{еф}}(r)}}.$$

Звідси визначимо  $dt$ :

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}}$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}}. \quad (29.9)$$

Ми отримали час  $t$  як функцію від першої полярної координати  $r$ . З виразу (29.9) можна знайти обернену функцію  $r$ , як функцію відносно часу, тобто

$$r = r(t). \quad (29.10a)$$

Щоб знайти другу полярну координату  $\varphi$ , як функцію від часу, підставимо значення  $r$  з виразу (29.10a) в рівняння (29.5), маємо:

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_0}{m(r(t))^2}.$$

Звідси

$$d\varphi = \frac{L_0 dt}{m(r(t))^2}.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\varphi = \int_0^t \frac{L_0 dt}{m(r(t))^2}. \quad (29.10б)$$

Рівняння (29.10a) і (29.10б), які виражають обидві полярні координати частинки, як функції відносно часу являють собою шуканий закон руху частинки. Якщо з цих двох рівнянь виключити час  $t$ , то ми отримаємо рівняння траєкторії частинок.

### **§30. Якісне дослідження руху частинки в центральнометричному полі за виглядом одномірного ефективного потенціалу**

Нехай частинка рухається в центральносиметричному полі. Її траєкторія розміщена в одній площині, яка містить центр сил. Повна механічна енергія частинки має при цьому вигляд:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{эф}}(r), \quad (30.1)$$

де  $U_{\text{эф}}(r)$  - ефективний потенціал частинки, який має вигляд:

$$U_{\text{еф}}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r), \quad (30.2)$$

де  $r$  - відстань від частинки до центра сил;  $U(r)$  - потенціальна енергія частинки;  $L_0$  - момент імпульсу частинки відносно центра сил.

Проведемо якісне дослідження руху частинки за виглядом її ефективного потенціалу. Розглянемо важливий для практики частинний випадок, коли потенціальна енергія частинки дорівнює:

$$U = -\frac{\alpha}{r^n}; \alpha > 0; 1 \leq n \leq 2.$$

Тоді одномірний ефективний потенціал частинки при цьому матиме вигляд:

$$U_{\text{еф}}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^n}. \quad (30.3)$$

Графік залежності одномірного ефективного потенціалу в даному випадку має приблизно такий вигляд (див. рис. 23).

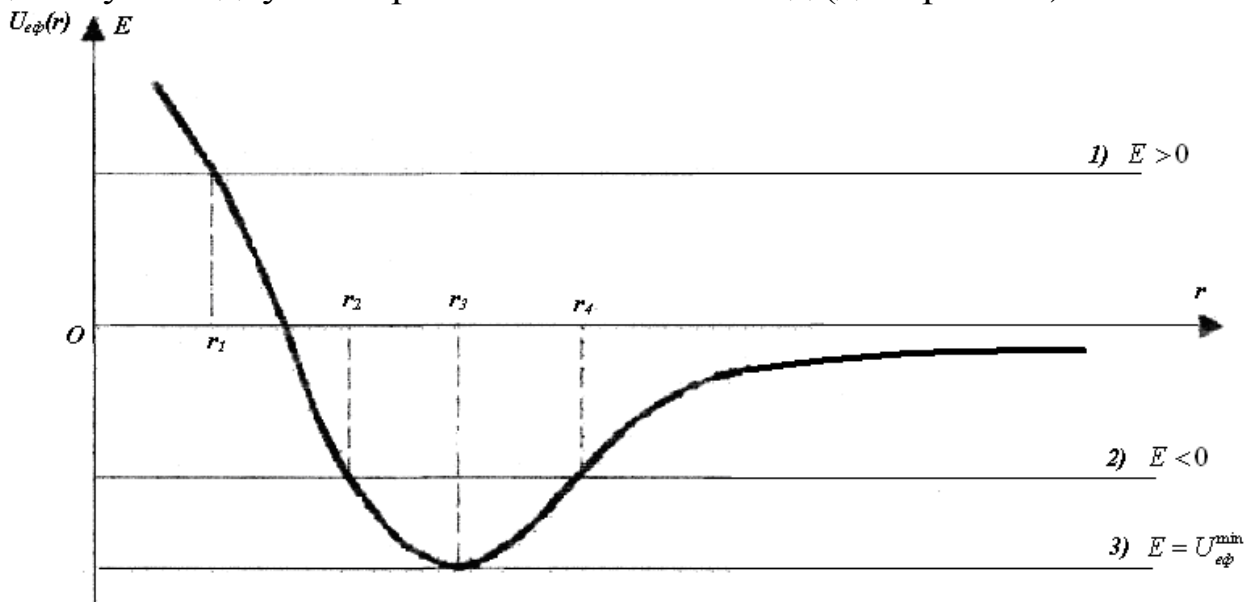


Рис. 23

Побудуємо на цьому рисунку графіки повної механічної енергії. Повна механічна енергія – величина постійна. Її графік – пряма лінія.

Для дослідження руху з рівняння (30.1) знайдемо радіальну частину кінетичної енергії частинки:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U_{\text{еф}}(r) \geq 0. \quad (30.4)$$

З нерівності (30.4) можна знайти ті області площини, в яких рух частинки можливий. Для дозволених областей має місце нерівність:

$$U_{\text{еф}}(r) \leq E.$$

Знайдемо дозвалені області для різних значень повної

механічної енергії.

1). Нехай повна мінімальна енергія  $E > 0$ . В цьому випадку дозволеною областю буде  $(r_1; +\infty)$ , тобто частинка в даному випадку буде наближатися до центру сил не ближче ніж на відстань  $r_1$  і знову буде віддалятися в нескінченність. Область  $(0; r_1)$  буде забороненою, тобто заборонена область буде мати вигляд круга з центром у центрі сил і з радіусом  $r_2$  (див. рис. 24). Траєкторії, які описує частинка, в даному випадку, називаються *траєкторіями гіперболічного виду*.

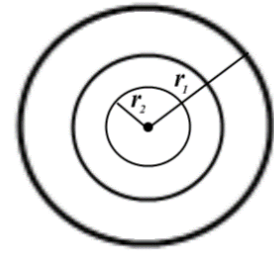


Рис. 24

2).  $E < 0$ . В даному випадку дозволена область буде  $(r_2; r_3)$ . Це буде кільце обмежене радіусами  $r_2$  і  $r_3$ . Траєкторії частинки, які розташовані в межах кільця називаються *траєкторіями еліптичного виду*.

3).  $E = U_{\text{еф}}^{\min(r)}$ . В цьому випадку дозволена область стягується в коло радіусом  $r_4$ . Даний рух частинки буде найбільш стійким, оскільки ефективний потенціал частинки приймає мінімальне значення (частинка має найменшу потенціальну енергію).

### §31. Рух зарядженої частинки в кулонівському полі сил. Кеплерова задача

Одним із методів експериментального дослідження будови атома є бомбардування речовини швидкими зарядженими частинками (електронами,  $\alpha$  - частинками, тощо). Фотографуючи сліди цих частинок, наприклад в камері Вільсона, спостерігають їх розсіювання, тобто відхилення від початкових траєкторій. Розсіювання частинок пояснюється тим, що при проходженні поблизу масивного позитивного зарядженого ядра атома речовини, частинка взаємодіє з цим ядром за законом Кулона.

Задача про рух частинки, зарядженої частинки в полі ядра, подібна до задачі про рух планет навколо Сонця, тому і носить назву *Кеплерова задача*.

Позначимо атомний номер досліджуваної речовини через  $Z$ . Тоді заряд ядра буде:

$$q_0 = +Ze,$$

де  $e$  - чисельно дорівнює заряду електрона.

Заряд бомбардуючої частинки позначимо через  $q$  (у випадку

електрона  $q = -e$ , а у випадку  $\alpha$  - частинки  $q = +2e$ ). За законом Кулона, сила взаємодії між ядром:

$$F = \frac{qq_0}{r^2}.$$

Тоді

$$F = \frac{Zeq}{r^2}.$$

Ця сила буде потенціальною. Вона зв'язана з потенціальною енергією частинки співвідношенням:

$$F = -\frac{dU}{dr}.$$

Звідки

$$dU = -Fdr.$$

Або підставивши значення сили одержимо:

$$dU = -\frac{Zeqdr}{r^2}.$$

Проінтегруємо:

$$U = -Zeq \int \frac{dr}{r^2} + C.$$

Отже:

$$U = -\frac{Zeq}{r} + C.$$

Нехай при  $r = \infty$ ,  $U = 0$ . Тоді  $C = 0$ :

$$U = \frac{Zeq}{r}. \quad (31.1)$$

Запишемо вираз повної механічної енергії в полярній системі координат:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r).$$

Підставляючи у попередній вираз значення формули (31.1), одержимо:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{Zeq}{r} = E. \quad (31.2)$$

Запишемо також вираз для моменту імпульсу частинки відносно центра сил:

$$L_0 = mr^2\dot{\phi}. \quad (31.3)$$

Звідси

$$\dot{\phi} = \frac{L_0}{mr^2}.$$

Знайдемо  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L_0}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

Підставимо значення  $\dot{\varphi}$  та  $\dot{r}$  в рівняння (31.2):

$$\frac{m}{2} \left( \frac{L_0^2}{m^2 r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \frac{L_0^2}{m^2 r^4} \right) + \frac{Zeq}{r} = E;$$

$$\frac{L_0^2}{2mr^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{L_0^2}{m^2 r^2} + \frac{Zeq}{r} = E.$$

Домножимо на  $\frac{2m}{L_0^2}$ :

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{2mZeq}{L_0^2 r} + \frac{1}{r^2} = \frac{2mE}{L_0^2};$$

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mE}{L_0^2} - \frac{2mZeq}{L_0^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}. \quad (31.4)$$

Перейдемо до змінної  $\rho = \frac{1}{r}$ ,  $r = \frac{1}{\rho}$ . Тоді

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}; \quad \frac{dr}{d\varphi} = -r^2 \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Підставимо значення  $r$  і  $\frac{d\rho}{d\varphi}$  в рівняння (31.4), отримаємо:

$$\left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mE}{L_0^2} - \frac{2mZeq}{L_0^2} \rho - \rho^2. \quad (31.5)$$

Щоб проінтегрувати дане диференціальне рівняння його зручно буде спочатку продиференціювати по  $d\varphi$ :

$$2 \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -2 \frac{mZeq}{L_0^2} \frac{d\rho}{d\varphi} - 2\rho \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Скоротимо дане рівняння на  $2 \frac{d\rho}{d\varphi}$  і останній доданок з правої частини перенесемо вліво:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\frac{mZeq}{L_0^2} - \rho,$$

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = -\frac{mZeq}{L_0^2}. \quad (31.6)$$

Ми отримали лінійне диференціальне рівняння другого порядку з сталою в правій частині. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$\rho = A \cos \varphi + B \sin \varphi - \frac{mZeq}{L_0^2}, \quad (31.7)$$

де  $A$  і  $B$  - це константи інтегрування. Дане рівняння описує криву другого порядку.

Доведення:

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad r = \frac{1}{\rho},$$

$$r \cos \varphi = x, \quad r \sin \varphi = y,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Крім цього введемо позначення:

$$-\frac{mZe q}{L_0^2} = k.$$

Рівняння (31.7) приймає вигляд:

$$\frac{1}{r} = A \cos \varphi + B \sin \varphi + k$$

або

$$1 = Ar \cos \varphi + Br \sin \varphi + kr;$$

$$1 = Ax + By + k\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(1 - Ax + By)^2 + k^2(x^2 + y^2).$$

А це і є крива другого порядку.

Знайдемо за яких умов дана крива буде еліпсом. Еліпс має два екстремальні значення радіуса вектора. Умова екстремуму:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 0.$$

З рівняння (31.5), маємо:

$$\rho^2 + \frac{2mZe q}{L_0^2} \rho - \frac{2mE}{L_0^2} = 0.$$

Це є квадратне рівняння, яке має два кореня:  $\rho_{\max}$  та  $\rho_{\min}$ .

За теоремою Вієта:

$$\rho \frac{2mE}{L_0^2} \min_{\max}.$$

У випадку еліпса обидва екстремальні значення радіуса-вектора додатні. А це можливо, коли  $E < 0$ . Якщо ж  $E > 0$ , то один екстремальний радіус-вектор додатній, а другий – від'ємний. В математиці два знаки для радіус-векторів точок кривої відповідає двом виткам гіперболи.

Маємо такі наслідки:

1.  $E < 0$  - траєкторія еліпс.
2.  $E > 0$  - траєкторія гіпербола.

3.  $E = 0$  - траєкторія парабола.

Запишемо повну механічну енергію для бомбардуючої частинки:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U$$

або підставивши формулу (31.1), маємо:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{Zeq}{r}.$$

Розглянемо випадки:

а) бомбардуючою частинкою є електрон. Тоді  $q = -e$ :

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r}.$$

За великих швидкостей  $E > 0$  і електрон розсіюється поблизу ядра по гіперболі (див. рис. 25).

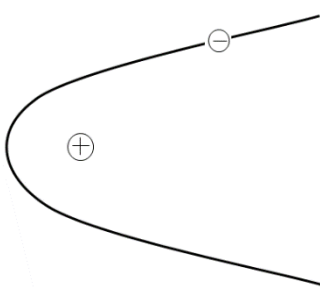


Рис. 25

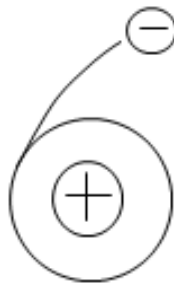


Рис. 26

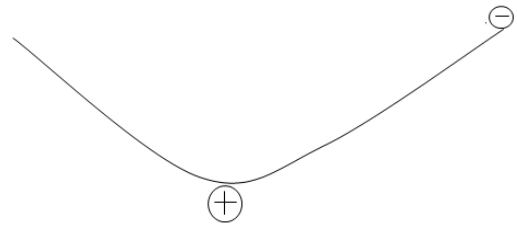


Рис. 27

За малих швидкостей  $E < 0$ , електрон захоплюється ядром і рухається по еліпсу (див. рис. 26).

б) бомбардуючою частинкою є  $\alpha$ -частинка:  $q = 2e$ . Отже:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{2Ze^2}{r} > 0.$$

Тобто  $\alpha$  - частинка в полі атомного ядра завжди розсіюється по параболі (див. рис. 27).

**§32. Розсіювання частинок в центрально-симетричному полі. Знаходження функціональної залежності кута розсіювання від прицільного параметра. Формула Резерфорда для розсіювання  $\alpha$  - частинок в полі атомного ядра. Ефективний диференціальний переріз розсіювання**

Розглянемо це питання для частинного випадку розсіяних  $\alpha$ -

частинок в полі атомного ядра. Таке розсіювання спостерігають при бомбардуванні  $\alpha$ -частинками речовини будова атома якої досліджується.

Нехай в точці  $O$  (див. рис. 28) розміщене розсіююче ядро, заряд якого  $Ze$ . Виберемо точку  $O$  за початок полярної і декартової системи координат. Вісь  $Ox$  направимо паралельно до початкової траєкторії  $\alpha$ -частинки.

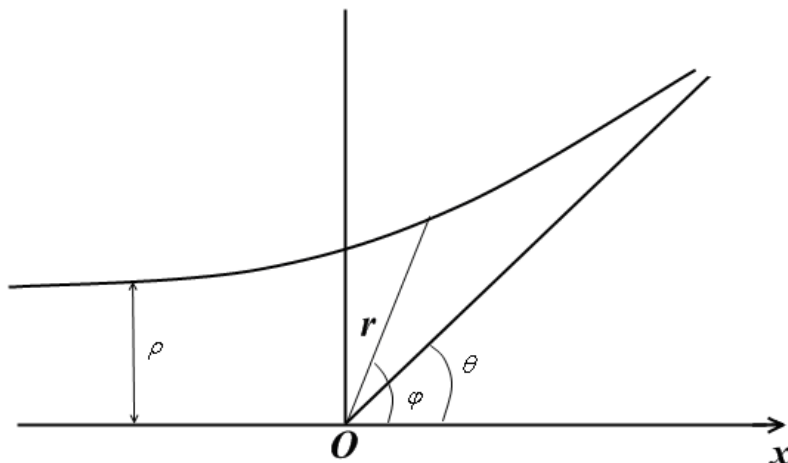


Рис. 28

Назвемо відстань від ядра до початкової траєкторії  $\alpha$ -частинки *прицільною відстанню (прицільним параметром)*. При проходженні  $\alpha$ -частинки поблизу ядра, вона внаслідок взаємодії з ядром розсіюється по гіперболі рівняння якої в полярній системі координат має вигляд:

$$\frac{1}{r} = A \cos \varphi + B \sin \varphi + k, \quad (32.1)$$

де  $k = -\frac{mZe q}{L_0^2}$ .

У випадку  $\alpha$ -частинки:  $q = 2e$ , а тому:

$$k = -\frac{2mZe^2}{L_0^2}. \quad (32.2)$$

В цьому рівнянні  $Z$  - це атомний номер досліджуваної речовини;  $m$  - маса  $\alpha$ -частинки;  $L_0$  - момент імпульсу  $\alpha$ -частинки відносно розсіючого ядра  $O$ .

Визначимо константи інтегрування  $A$  та  $B$ . Якщо  $\varphi = \pi$ , то  $r = \varphi = \infty$ .

Підставимо дане значення в формулу (32.1):

$$0 = -A + k \Rightarrow A = k.$$

Рівняння (32.1) приймає вигляд:

$$\frac{1}{r} = k \cos \varphi + B \sin \varphi + k$$

або

$$\begin{aligned}\frac{1}{r \sin \varphi} &= \frac{k(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi} + B; \\ \frac{1}{r \sin \varphi} &= k \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + B; \\ r \sin \varphi &= y.\end{aligned}\tag{32.3}$$

Отже:

$$\frac{1}{y} = k \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + B.$$

Якщо  $\varphi = \pi$ , то  $y = \rho$ .

Підставимо це значення в попереднє рівняння:

$$\frac{1}{\rho} = 0 + B; \rightarrow B = \frac{1}{\rho}.$$

Рівняння (32.3) прийме вигляд:

$$\frac{1}{r \sin \varphi} = k \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\rho}.\tag{32.4}$$

Назвемо *кутом розсіювання*  $\theta$  кут між напрямками початкової та кінцевої траєкторії. Якщо  $\varphi = 0$ , то  $r = \infty$ .

Підставимо ці значення в рівняння (32.4):

$$\begin{aligned}0 &= k \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\rho}; \\ \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} &= -\frac{1}{k\rho}.\end{aligned}$$

Підставимо в даний вираз значення  $k$  з формули (32.2):

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{L_0^2}{2mZe^2\rho}.$$

Момент імпульсу  $\alpha$  - частинки відносно ядра є величина постійна, яку можна записати як добуток імпульсу на плече. Тобто

$$L_0 = mv\rho.$$

Тому:

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{mv^2\rho}{2Ze^2}.\tag{32.5}$$

Ми отримали функціональну залежність між кутом розсіювання  $\theta$  і прицільною відстанню  $\rho$ . Чим більша прицільна відстань  $\rho$ , тим менший кут розсіювання  $\theta$ . Формулу (32.5) експериментально безпосередньо перевірити не можливо. Оскільки прицільну відстань  $\rho$  зафіксувати в експерименті не можливо.

Перейдемо від формули (32.5) до іншої формули, яку можна

перевірити експериментально. Будемо пучок  $\alpha$  - частинок характеризувати його інтенсивністю  $n$ .

*Інтенсивність  $n$*  - це число  $\alpha$  - частинок, яке проходить за одиницю часу через одиничної площі площадку, поставленої перпендикулярно до пучка на достатній відстані від розсіюючого ядра.

Будемо шукати  $dn$   $\alpha$  - частинок, які розсіюються за одиницю часу під кутами, що лежать в межах між  $\theta$  до  $\theta + d\theta$  (див. рис. 29).

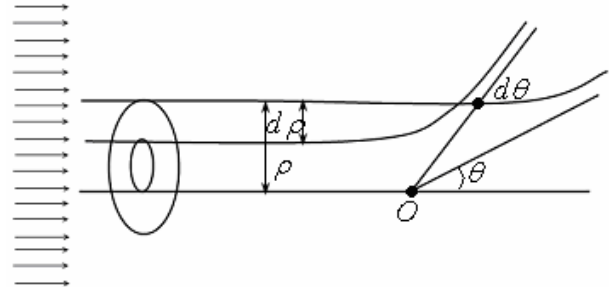


Рис. 29

Це очевидно буде число частинок прицільні відстані, яких лежать в межах між  $\rho$  та  $\rho - d\rho$ .

В свою чергу  $dn$  - це число частинок, які за одиницю часу проходять кільце обмежене колами з радіусами  $\rho$  та  $\rho - d\rho$ . Площа цього кільця дорівнює  $2\pi\rho d\rho$ , а тому:

$$dn = n2\pi\rho d\rho.$$

Знайдемо відоме число  $\alpha$  - частинок, які за одиницю часу розсіюються під кутами, що лежать в межах між  $\theta$  та  $\theta + d\theta$ , тобто знайдемо число  $\frac{dn}{n}$ . Назвемо це число *ефективним диференціальним перерізом розсіювання*:

$$d\delta = \frac{dn}{n} = 2\pi\rho d\rho. \quad (32.6)$$

Відмітимо, що це число має розмірність площі. Піднесемо формулу (32.5) до квадрату, маємо:

$$\left(\text{ctg} \frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{m^2 v^4 \rho^2}{4Z^2 e^4}.$$

Це рівняння пов'язує змінні величини  $\theta$  і  $\rho$ . Візьмемо диференціал від обох частин даного рівняння:

$$\frac{2\text{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{m^2 v^4 2\rho d\rho}{4Z^2 e^4}.$$

Звідси знайдемо:

$$2\rho d\rho = 4 \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \frac{\text{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = 4 \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta.$$

Підставимо це значення в формулу (32.6):

$$d\delta = \frac{dn}{n} = 4\pi \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (32.7)$$

Перейдемо до поняття тілесного кута. Проведемо мислено сферу довільного радіуса  $R$  з центром у точці  $O$ , де розміщене розсіююче ядро (див. рис. 30). Виділимо на цій сфері елементарний сегмент, через який проходить частинки і розсіюються під кутами в межах між  $\theta$  і  $\theta + d\theta$ .

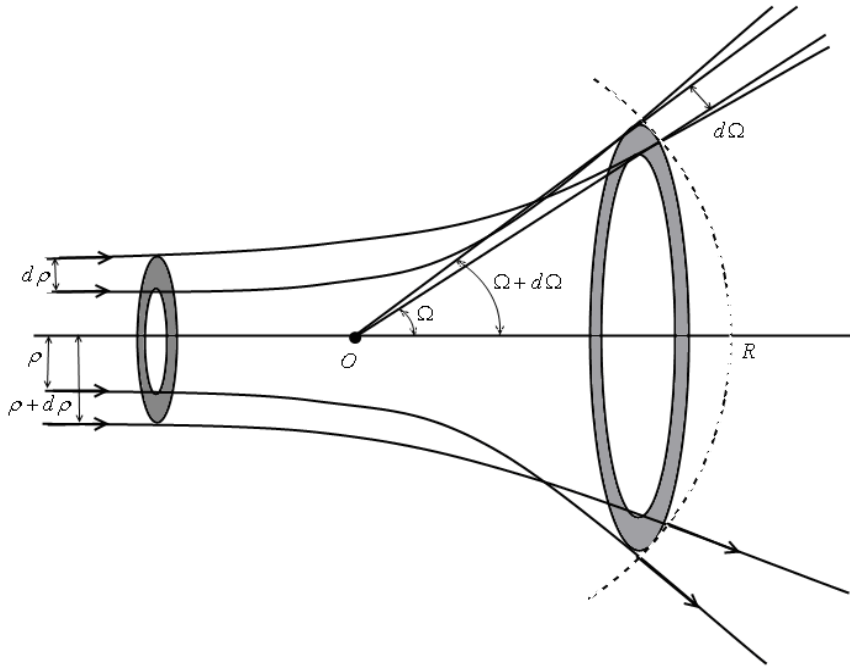


Рис. 30

Назвемо *елементарним тілесним кутом* величину рівну відношенні площі цього сегмента на квадрат радіуса сфери цього сегмента:

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2};$$

$$dS = 2\pi r dr,$$

але

$$r = R \sin \theta;$$

$$dr = R d\theta.$$

Тоді

$$dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta,$$

тому:

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Перетворимо рівняння (32.7) так:

$$d\delta = \frac{dn}{n} = 2 \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} 2\pi \frac{\sin \theta}{\sin \theta} d\theta$$

або

$$d\delta = 2 \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \frac{d\Omega}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}};$$

$$d\delta = \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (32.8)$$

Ми отримали формулу Резерфорда, яка широко використовується в атомній фізиці.

## Лекція 6. АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА

§33. Невільна система матеріальних точок. Зв'язки та їх класифікація. Рівняння зв'язків. Число ступенів вільності системи.

§34. Можливі (віртуальні) та дійсні переміщення.

§35. Узагальнені координати.

§36. Узагальнені сили. Віртуальна робота.

§37. Реакції зв'язків. Постулат про ідеальні зв'язки.

§38. Елементи аналітичної статички. Принцип можливих переміщень. Умови рівноваги голономної системи.

§39. Загальне рівняння динаміки. Принцип Даламбера.

[1. §22, §23, §28-§37; 2. §10, §24-§27, §54-§60; 6. §25.1-§25.7, §26.1-§26.3]

### **§33. Невільна система матеріальних точок. Зв'язки та їх класифікація. Рівняння зв'язків. Число ступенів вільності системи**

Рух матеріальної точки може бути вільним або невільним. Якщо траєкторія точки однозначно визначається з заданими силами та початковими умовами, то рух точки зветься *вільним*, а сама точка зветься *вільною матеріальною точкою*. Прикладами вільного руху можуть бути політ снаряду, рух планет та інших астрономічних тіл.

На практиці частіше зустрічаються випадки невільного руху,

коли форма і розташування траєкторії обмежуються додатковими умовами. Прикладами невольного руху може бути рух частинки по деякій поверхні, рух кульки підвішеної до нитки, рух будь-якої деталі працюючої машини або механізму.

*Аналітична механіка* вивчає невольні системи матеріальних точок. Умови, які зменшують свободу руху невольної точки називаються *зв'язками*. Зв'язки примушують рухатись невольну точку на наперед заданих поверхнях або навіть вздовж кривих.

Зв'язки, які обмежують лише положення невольної точки називаються *голономними*.

Зв'язки, які обмежують також і швидкість невольних точок називають *неголономні*. (Надалі ми розглядатимемо лише голономні зв'язки).

Зв'язки, які не змінюються з часом називаються *стаціонарними*. Зв'язки, які змінюються з часом називаються *нестаціонарними*.

Аналітично зв'язки можна задавати за допомогою рівнянь, яким задовольняють під час зміни координати невольних точок.

*Приклад 1:* Кулька  $M$  прикріплена до кінця стержня довжиною  $l$ , другий кінець якого за допомогою шарніра приєднаний до нерухомої точки  $O$  (див. рис. 31). Виберемо точку  $O$  за початок координат, то координати точки  $M(x, y, z)$  при її русі задовольняють рівнянню:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

Це буде рівняння сфери по якій зв'язок примушує рухатись кульку. Одночасно воно є і рівнянням зв'язку.



Рис. 31

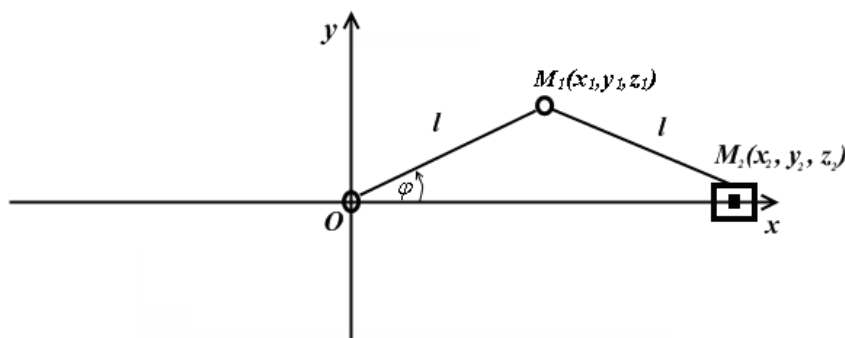


Рис. 32

*Приклад 2:* Розглянемо кривошипно-шатунний механізм. Його можна розглядати, як систему, що складається з двох точок: шарніра  $M_1$  і повзуна  $M_2$  (див. рис. 32).

При русі системи координати обох точок задовольняють таким рівнянням:

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= l^2, \\(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= l^2\end{aligned}$$

але  $z_1$  і  $z_2$  дорівнюють нулю і  $y_2 = 0$  (так як точка  $M_2$  рухається вздовж осі  $OX$ ). Тоді

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 &= l^2, \\(x_1 + x_2)^2 + y_1^2 &= l^2.\end{aligned}$$

Ми отримали число рівнянь зв'язків, що дорівнює 5.

Розглянемо загальний випадок системи, що складається з  $n$  матеріальних точок. Координати цих точок можуть в загальному випадку задовольняти певній кількості рівнянь зв'язків, які можна записати так:

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0,$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots, s$ .

Очевидно, що  $s < 3n$ . В цьому випадку  $3n$  координат задовольняють  $s$  рівнянням. Тому число незалежних координат буде:

$$r = 3n - s.$$

Число незалежних координат, якими можна задати положення системи, називається *числом ступенів вільності*.

Знайдемо для першого і другого прикладів число ступенів вільності:

в прикладі 1:  $r = 3 \cdot 1 - 1 = 2$  ступені вільності;

в прикладі 2:  $r = 3 \cdot 2 - 5 = 1$  ступінь вільності.

*Примітка.* У випадку нестационарних зв'язків в їх рівняння явно входить ще час, а тому рівняння нестационарних зв'язків мають вигляд:

$$f_k(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0,$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots, s$ .

### **§34. Можливі (віртуальні) та дійсні переміщення**

Розглянемо невільну механічну систему, що складається з  $n$  матеріальних точок, з стаціонарними зв'язками. Нехай рівняння зв'язків має вигляд:

$$f_k(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad (34.1)$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots, s$ .

Візьмемо деяку  $i$ -ту точку системи з радіусом-вектором  $\vec{r}_i$ .

Назвемо *можливим (віртуальним) переміщенням*  $i$ -тої точки, переміщення, яке вона могла б здійснити наскільки воно дозволяється зв'язками. Позначимо можливе переміщення, як  $\delta\vec{r}_i$ . В проекціях для  $i$ -тої точки маємо 3 можливих переміщення:  $\delta x, \delta y, \delta z$ . Для всіх  $n$  точок система матимемо  $3n$  можливих переміщення. Як би система була вільною, то всі  $3n$  можливих переміщення були б незалежними. Однак, у випадку невідільної системи, число незалежних можливих переміщень буде менше ніж  $3n$ .

Знайдемо число незалежних можливих переміщень. Для цього застосуємо до рівняння (34.1) операцію диференціювання, причому прирости відповідних величин позначимо символом  $\delta$ .

Отримаємо:

$$\delta f_k = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0. \quad (34.2)$$

По суті це знаходження вібрації відносно функції  $f_k$ . Бачимо, що число можливих переміщень  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  задовольняють  $s$  рівнянням. Тому число незалежних можливих переміщень буде рівне:

$$3n - s = r,$$

де  $r$  - це число ступенів вільності системи.

Таким чином, число ступенів вільності системи дорівнює числу незалежних можливих переміщень системи.

*Дійсними переміщеннями невідільної системи* називаються переміщення точок системи, які фактично виконуються точкою під час її руху. Дійсні переміщення позначимо через  $dx_i, dy_i, dz_i$ .

Очевидно, що у випадку стаціонарних зв'язків дійсні переміщення будуть в кожний момент часу частинним випадком можливих переміщень. Іншою буде картина у випадку нестаціонарних зв'язків. Тут під можливими переміщеннями розуміють переміщення за зупинними вмиль зв'язками.

Нехай на систему накладені нестаціонарні зв'язки, рівняння яких має вигляд:

$$f_k(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad (34.3)$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots, s$ .

У випадку нестаціонарних зв'язків ми під можливими переміщеннями розуміємо переміщення за зупинними вмиль зв'язками. Отже, щоб знайти можливі переміщення в якийсь момент часу ми фіксуємо цей момент часу і починаючи з нього вважаємо

нестационарні зв'язки - *стаціонарними*. Очевидно, що при нестационарних зв'язках дійсні переміщення вже не будуть частинними випадками можливих, оскільки дійсні переміщення включають рух обумовлений зміною зв'язків. Доведемо це твердження аналітично. Для цього спочатку складемо рівняння яким задовольняють дійсні переміщення:

$$f_k(t, x_i, y_i, z_i, \dots, x_k, y_k, z_k) = 0.$$

Продиференціюємо рівняння зв'язків (34.3):

$$df_k = \frac{\partial f_k}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} dz_i \right) = 0. \quad (34.4)$$

Щоб знайти рівняння, яким задовольняють можливі переміщення ми повинні зафіксувати час  $t$ , тобто вважати його незмінним. З рівнянь (34.3), одержимо:

$$\delta f_k = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad (34.5)$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots, s$ .

Таким чином, так як рівняння (34.4) яким задовольняють дійсні переміщення  $dx_i, dy_i, dz_i$  відрізняються від рівнянь (34.5), яким задовольняють можливі переміщення  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ , то можна стверджувати, що у випадку нестационарних зв'язків дійсні переміщення не є частинним випадком можливих.

Математична операція, яка зводиться до знаходження приросту функції при фіксованому основному аргументі зветься *варіюванням*. А прирости відповідних величин називаються *варіаціями*.

Отже:

$$df_k, dx, dy, dz - \text{це диференціал};$$

$$\delta f_k, \delta x, \delta y, \delta z - \text{це варіація}.$$

*Приклад:*

$$U = 2t^2 + \sin x - \sin 2y;$$

$$dU = Utdt + \cos x dx - 2 \cos 2y dy;$$

$$\delta U = \cos x \delta x - 2 \cos 2y \delta y.$$

### §35. Узагальнені координати

Розглянемо систему, що складається з  $n$  матеріальних точок. Нехай система має  $r$  ступенів вільності. В цьому випадку немає потреби задавати положення системи за допомогою  $3n$  координат. Положення невіЛЬНОї системи можна задавати за допомогою меншої

кількості незалежних змінних параметрів, число, яких дорівнює числу ступенів вільності системи  $r$ . Ці незалежні параметри сукупність, яких в кожний момент часу визначає положення системи називаються *узагальненими координатами*, вони позначаються так:

$$q_1, q_2, \dots, q_r.$$

*Приклад 1.* Тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі має одну ступінь вільності  $r = 1$ . Узагальненою координатою може бути кут повороту тіла  $q = \varphi$ .

*Приклад 2.* Вільна матеріальна точка має три ступені вільності  $r = 3$ . Узагальненими координатами можуть бути три декартові координати точки  $q_1 = x$ ;  $q_2 = y$ ;  $q_3 = z$ .

*Приклад 3.* Кривошипно-шатунний механізм (див. рис. 32 §33) має одну ступінь вільності. Узагальненою координатою може бути кут між кривошипом і віссю  $OX$ , тобто

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z.$$

З прикладу 2 видно, що при цьому декартові координати точок системи будуть відомими функціями відносно узагальнених координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= l \cos \varphi; \\ y_1 &= l \sin \varphi; \\ z_1 &= 0; \\ x_2 &= 2l \cos \varphi; \\ y_2 &= 0; \\ z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Узагальнимо цей висновок для довільної системи. Нехай система складається з  $n$  точок і має  $r$  ступенів вільності. Декартові координати всіх точок системи будуть відомими функціями від узагальнених координат системи (а інколи ще й від часу, коли зв'язки нестационарні). Отже:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(t, q_1, q_2, \dots, q_r); \\ y_i &= y_i(t, q_1, q_2, \dots, q_r); \\ z_i &= z_i(t, q_1, q_2, \dots, q_r), \end{aligned} \right\}$$

де  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Замість цих трьох  $n$  рівнянь можна записати, лише  $n$  рівнянь для векторних координат (радіусів – векторів) точок системи:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_r),$$

де  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Обчислимо варіації від обох частин останніх рівнянь:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{v=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \delta q_v,$$

де  $v = 1, 2, 3, \dots, r$ .

Варіації відносно узагальнених координат  $\delta q_v$  називаються узагальненими можливими переміщеннями.

### §36. Узагальнені сили. Віртуальна робота

Нехай механічна система з  $n$  матеріальних точок має  $r$  ступенів вільності. Відповідно для системи виберемо  $r$  узагальнених координат  $q_1, q_2, \dots, q_r$ .

При цьому вектор координат кожної точки системи буде відомою функцією від узагальнених координат системи, а інколи і відносно часу, якщо зв'язки нестационарні, тобто

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_r), \quad (36.1)$$

де  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Обчислимо сумарну роботу, яку могли б виконати задані сили на можливих переміщеннях точок системи. Назвемо цю роботу *віртуальною*:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i. \quad (36.2)$$

З рівнянь (36.1) знайдемо варіацію від відповідної координати  $\delta \vec{r}_i$ :

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{v=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \delta q_v,$$

де  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Підставимо значення  $\delta \vec{r}_i$  в (36.2):

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \left( \vec{F}_i \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \delta q_v \right).$$

В цій подвійній сумі поміняємо порядок сумування:

$$\delta A = \sum_{v=1}^r \left( \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \right) \delta q_v. \quad (36.3)$$

Кожну внутрішню суму називають *узагальненою сумою віднесеної узагальненої координати*. Позначимо її так:

$$Q_v = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v}, \quad (36.4)$$

де  $v = 1, 2, 3, \dots, r$ .

Рівність (36.3) приймає значення:

$$\delta A = \sum_{v=1}^r Q_v \delta q_v. \quad (36.5)$$

Ми отримали стандартний вираз для *віртуальної роботи*, а саме, вона дорівнює сумі добутків узагальнених сил на узагальнені можливі переміщення. Порівнявши рівняння (36.5) з рівнянням (36.2), маємо:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{v=1}^r Q_v \delta q_v.$$

### §37. Реакції зв'язків. Постулат про ідеальні зв'язки

Наявність зв'язків приводить до того, що рух невільної матеріальної точки (рис. 34) відрізняється від руху вільної точки (рис. 33) за однакових заданих сил і початкових умовах.

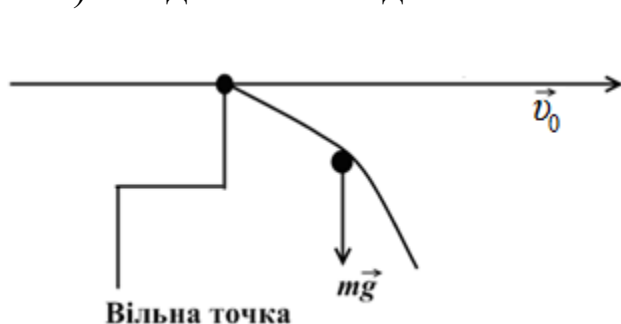


Рис. 33



Рис. 34

Це можна пояснити тим, що на невільну точку крім заданих сил діють ще сили взаємодії з зв'язками. Ці сили називаються *реакціями*. В нашому прикладі реакція нитки.

Бачимо, що матеріальна точка в різних випадках рухається по різних траєкторіях. Це можна пояснити тим, що на невільну точку, крім заданих сил, діють сили взаємодії з зв'язками.

Такі сили називаються *реакціями зв'язків* - це реальні сили, які відрізняються відносно заданих сил.

Їх відмінність полягає в тому, що

1) реакції не можуть бути наперед відомі, вони залежать відносно заданих сил і стану руху системи і знаходяться в процесі розв'язку задачі;

2) реакції самі по собі не можуть викликати рух, вони можуть тільки впливати на рух системи, тому їх інколи називають пасивними силами, на відміну відносно заданих активних сил.

Нехай задана сила, що діє на дану точку системи буде  $\vec{F}_i$ . А реакція, що діє на цю точку буде  $\vec{N}_i$ . Тоді рівняння руху точки буде мати вигляд:

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{N}_i.$$

Реакції це реальні сили, які однак дещо відрізняються від заданих сил. Справа в тому, що реакції залежать від даних сил та від стану руху системи. Тому реакції залежать від даних сил та від стану руху системи. Тому реакції ніколи не бувають відомими. Реакції визначаються в процесі розв'язку задачі.

По відношенню до своїх реакцій зв'язки поділяються на реальні та ідеальні. *Реальні зв'язки* – це зв'язки з тертям. *Ідеальні зв'язки* – це зв'язки без тертя.

Дослід показує, що у відсутності тертя реакція, що діє на кожну точку системи перпендикулярна до можливого переміщення цієї точки, тобто

$$\vec{N}_i \perp \delta \vec{r}_i.$$

Тому нулю дорівнює такий скалярний добуток:

$$\vec{N}_i \delta \vec{r}_i = 0.$$

Отже, у відсутності тертя віртуальна робота кожної реакції дорівнює нулю. Розширимо клас ідеальних зв'язків. На практиці трапляються випадки, коли в невідільній системі віртуальні роботи окремих реакцій не дорівнюють нулю, але сума віртуальних робіт всіх реакцій дорівнює нулю. Будемо такі зв'язки вважати *ідеальними*.

Маємо такий постулат: *у випадку систем з ідеальними зв'язками сума віртуальних робіт всіх реакцій дорівнює нулю:*

$$\sum_{i=1}^n \vec{N}_i \delta \vec{r}_i = 0.$$

### **§38. Елементи аналітичної статички. Принцип можливих переміщень. Умови рівноваги голономної системи**

Принцип можливих переміщень є принципом аналітичної статички, оскільки він встановлює умови рівноваги невідільної системи. Певна перевага принципу можливих переміщень над методом

геометричної статистики полягає в тому, що користуючись цим принципом для встановлення умов рівноваги системи необхідно враховувати лише задані сили і не приймати до уваги реакції. Для того, щоб невільна система з ідеальними зв'язками була в рівновазі необхідно і достатньо, щоб віртуальна робота всіх заданих сил дорівнювала нулю, тобто, щоб виконувалась умова:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0.$$

Доведемо необхідність цього принципу. Нехай система перебуває в рівновазі, тоді в рівновазі буде кожна точка системи, а це буде тоді коли сума всіх сил (як заданих, так і реакцій), які діють на цю точку дорівнюють нулю, тобто

$$\vec{F}_i + \vec{N}_i = 0.$$

Помножимо скалярно це рівняння на можливе переміщення даної точки. Маємо:

$$\begin{aligned} (\vec{F}_i + \vec{N}_i) \delta \vec{r}_i &= 0; \\ \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{N}_i \delta \vec{r}_i &= 0. \end{aligned}$$

Такі рівняння можна для всіх точок системи. Візьмемо їх суму:

$$\begin{aligned} \sum (\vec{F}_i + \vec{N}_i) \delta \vec{r}_i &= 0; \\ \sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum \vec{N}_i \delta \vec{r} &= 0. \end{aligned}$$

Але за постулатом про ідеальні зв'язки:

$$\sum \vec{N}_i \delta \vec{r} = 0,$$

тоді

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0.$$

Що треба було й довести.

Особливо простий вигляд приймає принцип можливих переміщень в узагальнених координатах. Відомо:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \delta A = \sum_{v=1}^r Q_v \delta q_v.$$

При рівновазі системи одержимо:

$$\sum_{v=1}^r Q_v \delta q_v = 0.$$

Але узагальненні можливі переміщення  $\delta q_\nu$  є величини незалежні, які можуть приймати довільні значення. Тому тотожня рівність останньої суми можлива лише тоді, коли кожний коефіцієнт при  $\delta q_\nu$  дорівнюватиме нулю ( $\delta q_\nu = 0$ ).

Отже, принцип можливих переміщень можна сформулювати так: *для того, щоб невільна система з ідеальними зв'язками була в рівновазі необхідно і достатньо, щоб кожна узагальнена сила системи дорівнювала окремо нулю.*

### 39. Загальне рівняння динаміки. Принцип Даламбера

Розглянемо рухому систему з ідеальними зв'язками. Запишемо постулат про ідеальні зв'язки:

$$\sum_{i=1}^n \vec{N}_i \delta \vec{r}_i = 0.$$

Запишемо для кожної точки системи другий закон Ньютона:

$$m\vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{N}_i,$$

звідси

$$\vec{N}_i = m\vec{w}_i - \vec{F}_i.$$

Підставимо це значення в попереднє рівняння та помножимо його на  $(-1)$ . Отримаємо:

$$-\vec{N}_i = \vec{F}_i - m\vec{w}_i;$$

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m\vec{w}_i) \delta \vec{r}_i = 0.$$

Це рівняння було виведено Лагранжем і одержало назву *загального рівняння динаміки*, або *рівняння Даламбера*.

Якщо якась точка системи рухається під дією деякої сили, то за другим законом Ньютона ця сила дорівнює  $m_i\vec{w}_i$ . За третім Законом Ньютона рухома точка діє на тіла, що рухаються з силою рівною за величиною та оберненою за напрямом. Назвемо цю силу – *силою інерції* і позначимо так:

$$\vec{F}_i^{(in)} = -m_i\vec{w}_i.$$

*Сила інерції* – це реальна сила, яка прикладена збоку рухомого тіла до рухомих тіл, тобто ця сила прикладена до рухомих тіл та частково до зв'язків. Для математичної зручності будемо вважати силу інерції, що прикладена до рухомої точки. Підставимо значення цієї сили в загальне рівняння динаміки:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{F}_i^{(in)}) \delta \vec{r}_i = 0.$$

Одержане рівняння зветься *принципом Даламбера*. Він формулюється так: *при будь-якому русі невільної системи з ідеальними зв'язками сума віртуальних робіт, заданих сил та сил інерції, дорівнює нулю*.

Ми бачимо, що формулювання принципу Даламбера подібно до формулювання принципу можливих переміщень, які є принципом статички. Іншими словами, принцип Даламбера розглядає при русі системи формально рівновагу заданих сил та сил інерції.

Тим самим, принцип Даламбера дозволяє формально звести задачу динаміки до задачі статички, що значно спрощує складання вихідних рівнянь руху.

## Лекція 7. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ

§40. Рівняння Лагранжа другого роду.

§41. Структура рівнянь Лагранжа для різних механічних систем. Функція Лагранжа і її структура для систем з потенціальними силами. [1. §24-§27; 2. §76-§81; 3. §9.1-§9.3; 5. §6, §7; 6. §27.3-§27.8]

### §40. Рівняння Лагранжа другого роду

Рівняння Лагранжа другого роду являють собою найбільш загальний і зручний для практики метод вивчення руху невільних систем.

Основна ідея рівнянь Лагранжа полягає в застосуванні узагальнених координат. Завдяки цьому число рівнянь Лагранжа є невеликим, а саме, воно дорівнює числу ступенів вільності системи.

Розглянемо невільну механічну систему з голономними ідеальними зв'язками. Нехай система складається з  $n$  точок та має  $r$  ступенів вільності. Відповідно цьому виберемо для системи  $r$  узагальнених координат:

$$q_1, q_2, \dots, q_r.$$

При цьому вектор координат кожної точки системи буде відомою функцією від узагальнених координат системи (а інколи і від часу коли зв'язки нестационарні). Тобто

$$r_i = r_i(t, q_1, q_2, \dots, q_r), \quad (40.1)$$

де  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Знайдемо швидкість  $i$ -тої точки системи:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \frac{dq_v}{dt},$$

де  $v = 1, 2, 3, \dots, r$ .

Величини  $\frac{dq_v}{dt} = \dot{q}_v$  назвемо узагальненими швидкостями. Тоді попереднє рівняння запишеться так:

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \dot{q}_v. \quad (40.2)$$

Виведемо дві допоміжні формули. Відмітимо, що останню рівність можна представити так:

$$\vec{v}_i = a_0 + a_i \dot{q}_i + \dots + a_v \dot{q}_v + \dots + a_r \dot{q}_r,$$

де  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v}, \dots, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_r}$  – коефіцієнти з формули (40.1), що залежать тільки від  $q_1, q_2, \dots, q_r, t$ .

Продиференціюємо рівняння (40.2) по одній з узагальнених швидкостей  $\dot{q}_v$ :

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_v} = \dot{q}_v = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v}.$$

Так як права частина рівняння (40.2) є лінійна функція від узагальнених швидкостей, то похідна цього виразу по одній із узагальнених швидкостей дорівнює відповідному коефіцієнту при цій узагальненій швидкості, тобто

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_v} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v}. \quad (40.3)$$

Це буде перша допоміжна формула.

Другу допоміжну формулу запишемо без доведення:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \right). \quad (40.4)$$

Приступимо до виведення рівнянь Лагранжа. Запишемо загальне рівняння динаміки:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i) \delta \vec{r}_i = 0.$$

Розкриємо дужки:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (40.5)$$

Вираз (40.5) – це те рівняння з якого будемо виводити рівняння Лагранжа. Перша сума була вже приведена до узагальнених координат. Дійсно - це є сума віртуальних робіт заданих сил, яку можна записати як суму добутків узагальнених сил на узагальнені можливі переміщення системи, тобто суму:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{v=1}^n Q_v \delta q_v. \quad (40.6)$$

Перетворимо другу суму в рівнянні (40.5), тобто перейдемо до узагальнених координат:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} \delta \vec{r}_i.$$

З рівнянь (40.1) знайдемо  $\delta \vec{r}_i$ :

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \delta q_v$$

і підставимо ці значення в попереднє рівняння:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \left( m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \delta q_v \right).$$

Поміняємо в цій подвійній сумі порядок сумування:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{v=1}^r \left( \sum_{i=1}^n m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \right) \delta q_v. \quad (40.7)$$

Перетворимо кожний доданок під знаком другої суми. Для цього скористаємося формулою з математики для похідної добутку двох функцій:

$$\frac{d}{dt} (vu) = \frac{dv}{dt} u + v \frac{du}{dt},$$

звідки

$$\frac{dv}{dt} u = \frac{d}{dt} (vu) - v \frac{du}{dt} \Bigg|_{\substack{v = \vec{v}_i \\ u = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v}}}$$

отже:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} = \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \right).$$

Скористаємося допоміжними формулами (40.3) і (40.4), після чого продовжимо перетворення одержаних виразів:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} &= \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_v} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_v} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_v} \left( \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_v} \left( \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Підставимо отриманий результат перетворень в рівняння (40.7):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i \partial \vec{r}_i &= \sum_{v=1}^r \left( \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_v} \left( \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_v} \left( \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \right) \right) \delta q_v = \\ &= \sum_{v=1}^r \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_v} \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_v} \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \right) \delta q_v, \end{aligned}$$

але

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = T,$$

де  $T$  – кінетична енергія всієї системи.

Тоді попереднє рівняння приймає вигляд:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i \partial \vec{r}_i = \sum_{v=1}^r \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_v} T - \frac{\partial T}{\partial q_v} \right) \delta q_v. \quad (40.8)$$

Підставимо значення рівнянь (40.6) і (40.8) в загальне рівняння динаміки (40.5):

$$\sum_{i=1}^n Q_r \delta q_v - \sum_{v=1}^r \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v} \right) \delta q_v = 0.$$

Об'єднаємо обидві суми в одну:

$$\sum_{v=1}^r \left( Q_v - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} + \frac{\partial T}{\partial q_v} \right) \delta q_v = 0.$$

Оскільки узагальнені можливі переміщення  $\delta q_v$  є величинами незалежними і можуть приймати довільні значення, то тотожна рівність останньої суми буде дорівнювати тоді, коли кожний коефіцієнт при  $\delta q_v$  дорівнює окремо нулю. Тобто

$$Q_v - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} + \frac{\partial T}{\partial q_v} = 0,$$

де  $Q_v$  - узагальнена сила.

Або

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v} = Q_v, \quad (40.9)$$

де  $v = 1, 2, 3, \dots, r$ .

Ми отримали рівняння Лагранжа другого роду. Число цих рівнянь дорівнює  $r$ , тобто числу ступенів вільності системи. Рівняння Лагранжа другого роду дають найбільш можливий і зручний для практики метод вивчення невільних систем. Зручність цих рівнянь полягає в тому, що число рівнянь Лагранжа дорівнює числу ступенів вільності системи, а це число є невеликим навіть для складних машин. Рівняння Лагранжа другого роду не є диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Відмітимо також, що в кожній конкретній задачі ми на початку визначали кінетичну енергію системи  $T$ . Далі виражали її через вибрані узагальнені координати та узагальнені швидкості, після чого отриманий вираз для кінетичної енергії системи  $T$  підставляли в рівняння Лагранжа. В результаті цього рівняння Лагранжа другого роду перетворювалося в звичайні диференціальні рівняння другого порядку відносно узагальнених координат системи.

#### **§41 Структура рівнянь Лагранжа для різних механічних систем. Функція Лагранжа і її структура для систем з потенціальними силами**

Для кожної механічної системи з голономними ідеальними зв'язками, можна скласти рівняння руху у вигляді рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v} = Q_v, \quad (41.1)$$

де  $v = 1, 2, \dots, r$

Розглянемо випадок консервативної механічної системи, тобто системи, на точки якої діють потенціальні сили. Потенціальна сила, що діє на кожну точку системи залежить від потенціальної енергії системи. Вираз для цих сил можна записати так:

$$\vec{F}_i = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}, \quad (41.2)$$

де  $U$  - потенціальна енергія;  $\vec{r}_i$  - векторна координата точки.

Запишемо вираз для узагальненої сили:

$$Q_\nu = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}.$$

Підставимо в цю рівність значення виразу (41.2):

$$Q_\nu = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \right) = - \frac{\partial U}{\partial q_\nu}.$$

Отже:

$$Q_\nu = - \frac{\partial U}{\partial q_\nu}. \quad (41.3)$$

Враховуючи те, що потенціальна енергія не залежить від швидкостей точок та не залежить вона і від узагальненої швидкості  $\dot{q}_\nu$ , маємо:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\nu} = 0,$$

звідси

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\nu} = 0.$$

Додамо цей вираз зі знаком мінус до лівої частини рівняння (41.1) і крім того в рівняння (41.1) підставимо значення виразу (41.3). Отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\nu} = - \frac{\partial U}{\partial q_\nu}.$$

Згрупуємо даний вираз, отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_\nu} = 0. \quad (41.4)$$

Назвемо різницю між кінетичною і потенціальною енергією системи функцією Лагранжа (лагранжіаном), або її кінетичним потенціалом такий вираз:

$$L = T - U. \quad (41.5)$$

Фізичний зміст рівняння (41.5) – це різниця кінетичної і потенціальної енергії.

Тоді рівняння (41.4) приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0, \quad (41.6)$$

де  $\nu = 1, 2, \dots, r$ .

Ми отримали рівняння Лагранжа для консервативних механічних систем.

## Лекція 8. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ТА ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

§42. Вираз кінетичної енергії системи через її узагальнені швидкості.

§43. Інтеграл енергії рівнянь Лагранжа.

§44. Узагальнені імпульси. Циклічні координати та циклічні інтеграли рівнянь Лагранжа.

§45. Канонічні перетворення. Канонічні рівняння Гамільтона.

§46. Фізичний зміст функції Гамільтона. Зв'язок цієї функції з законами збереження.

§47. Дужки Пуассона.

§48. Елементи варіаційного числення. Ізохронна варіація.

§49. Варіаційний принцип Остроградського-Гамільтона (принцип найменшої дії).

§50. Вивід рівнянь Лагранжа з принципу Остроградського-Гамільтона.

[1. §28-§35, §37; 2. §48-53; 3. §13.1, §13.2, §14.1-§14.3; 5. §13-§15; 6. §28.1-§28.5]

### §42. Вираз кінетичної енергії системи через її узагальнені швидкості

Запишемо кінетичну енергію системи з  $n$  матеріальних точок:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (42.1)$$

Нехай система має  $r$  ступенів вільності. Відповідно цьому виберемо  $r$  узагальнених координат  $q_1, q_2, \dots, q_r$ . При цьому вектор координат кожної точки системи буде відомою функцією від узагальнених координат системи (а інколи від часу, коли зв'язки нестационарні). Отже:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_r). \quad (42.2)$$

Знайдемо швидкість  $i$ -тої точки:

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \frac{dq_v}{dt}$$

або

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \dot{q}_v.$$

Обчислимо квадрат швидкості:

$$\vec{v}_i^2 = \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \dot{q}_v + \left( \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \dot{q}_v \right)^2. \quad (42.3)$$

Важливим для практики є випадок систем з стаціонарними зв'язками. В цьому випадку вектор координат  $\vec{r}_i$  від часу явно не залежить, а тому:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0.$$

Попередній вираз приймає вигляд:

$$\vec{v}_i^2 = \left( \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \dot{q}_v \right)^2.$$

Підставимо це значення у вираз кінетичної енергії системи (42.1):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \sum_{v=1}^r \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_v} \dot{q}_v \right)^2. \quad (42.4)$$

Таким чином, у випадку стаціонарних зв'язків кінетична енергія системи є однорідна квадратична функція від узагальнених швидкостей системи.

### §43. Інтеграл енергії рівнянь Лагранжа

Розглянемо механічну систему з голономними ідеальними та стаціонарними зв'язками. Кінетична енергія системи буде однорідною функцією від узагальненої швидкості системи. Однак вона може ще залежати від узагальнених координат. Тому можна записати:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_r, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_r). \quad (43.1)$$

Знайдемо зміну кінетичної енергії системи за одиницю часу:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{v=1}^r \left( \frac{\partial T}{\partial q_v} \frac{dq_v}{dt} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \frac{d\dot{q}_v}{dt} \right)$$

або

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{v=1}^r \left( \frac{\partial T}{\partial q_v} \dot{q}_v + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \frac{d\dot{q}_v}{dt} \right). \quad (43.2)$$

Запишемо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_v} &= Q_v, \\ \frac{\partial T}{\partial q_v} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \right) - Q_v. \end{aligned}$$

Підставимо це значення в рівняння (43.2):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{v=1}^r \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \right) \dot{q}_v - Q_v \dot{q}_v + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \frac{d\dot{q}_v}{dt} \right). \quad (43.3)$$

Перший і третій доданок під знаком суми можна записати так:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \right) \dot{q}_v + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \frac{d\dot{q}_v}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \right) \dot{q}_v.$$

Підставимо отримане значення в рівняння (43.3):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{v=1}^r \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \right) \dot{q}_v - Q_v \frac{d\dot{q}_v}{dt} \right).$$

Розіб'ємо суму на дві суми:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{v=1}^r \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \right) \dot{q}_v - \sum_{v=1}^r Q_v \frac{d\dot{q}_v}{dt}.$$

Помножимо дане рівняння на  $(-dt)$  та перенесемо перший доданок з правої сторони в ліву:

$$d \left( \sum_{v=1}^r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v - T \right) = \sum_{v=1}^r Q_v dq_v. \quad (43.4)$$

Скористаємось теоремою Ейлера про однорідні функції: *сума добутків частинних похідних однорідної функції по відповідним змінним на ці змінні дорівнює добутку самої функції на показник однорідності.*

*Приклад.*

$$v = 3x_1^5 + 2x_1^4x_2 + 7x_1^2x_2^2x_3 + 4x_2^5 + 3x_2^3x_3^2 + 8x_3^5.$$

$$\sum_{v=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_v} x_v = \frac{\partial v}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_3} x_3.$$

$$\sum_{v=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_v} x_v = 15x_1^5 + 8x_1^4x_2 + 14x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^4x_2 +$$

$$+ 14x_1^2x_2^2x_3 + 20x_2^5 + 9x_2^3x_3^2 + 7x_1^2x_2^2x_3 + 6x_2^3x_3^2 + 40x_3^5 =$$

$$= 5(3x_1^5 + 2x_1^4x_2 + 7x_1^2x_2^2x_3 + 4x_2^5 + 3x_2^3x_3^2 + 8x_3^5) = 5v.$$

Так як при стаціонарних зв'язках кінетична енергія системи є однорідна квадратична (другого степеня) функція від узагальненої швидкості  $\dot{q}_v$ , то сума:

$$\sum_{v=1}^r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v = 2T$$

і рівняння (43.4) приймає вигляд:

$$d(2T - T) = \sum_{v=1}^r Q_v dq_v;$$

$$dT = \sum_{v=1}^r Q_v dq_v. \quad (43.5)$$

Оскільки в правій частині ми маємо суму добутків узагальнених сил на переміщення, то вираз правої частини є елементарною роботою всіх сил, що діють в системі. В цілому рівняння (43.5) являє теорему про зміну кінетичної енергії.

Розглянемо випадок консервативної системи. В цьому випадку кожен узагальнену систему можна записати так:

$$Q_v = -\frac{\partial U}{\partial q_v}.$$

Права частина рівняння (42.5) приймає вигляд:

$$\sum_{v=1}^r Q_v dq_v = -\sum_{v=1}^r \frac{\partial U}{\partial q_v} dq_v = -dU.$$

З врахуванням останньої рівності рівняння (43.5) запишеться:

$$dT = -dU,$$

$$d(T + U) = 0,$$

$$T + U = \text{const}. \quad (43.6)$$

Ми отримали інтеграл енергії рівнянь Лагранжа (закон збереження повної механічної енергії): *повна механічна енергія консервативної системи з ідеальними і стаціонарними зв'язками залишається постійною під час руху системи.*

#### §44. Узагальнені імпульси. циклічні координати та циклічні інтеграли рівнянь Лагранжа

Узагальненими імпульсами консервативної механічної системи називаються величини, які дорівнюють частинним похідним від функції Лагранжа системи по узагальненим швидкостям:

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad (44.1)$$

де  $\nu = 1, 2, \dots, r$ .

Фізичний зміст узагальнених імпульсів виявимо для частинного випадку. Розглянемо систему, що складається з однієї матеріальної точки, яка рухається в полі земного тяжіння біля поверхні Землі. Точка в просторі має три ступені вільності. За узагальнені координати виберемо декартові координати цієї точки, причому вісь  $OZ$  направимо вертикально вгору. Отже,  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ .

Обчислимо функцію Лагранжа для цієї системи:

$$L = T - U = \frac{mv^2}{2} - mgz = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - mgz,$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Тому:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (44.2)$$

Знайдемо узагальнені імпульси:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = mv_x = p_x;$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = mv_y = p_y;$$

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = mv_z = p_z.$$

В цьому випадку узагальнені імпульси системи це є проекції вектора імпульсу системи на осі координат. Взагалі узагальнені імпульси мають більш широкий фізичний зміст. Так як в деяких випадках узагальнені імпульси можуть бути не лише проекцією вектора імпульсу системи, але й проекцією вектора моменту імпульсу системи.

Запишемо рівняння Лагранжа для консервативних систем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0, \quad (44.3)$$

де  $\nu = 1, 2, \dots, r$ .

Врахувавши означення виразу (44.1), можна рівняння Лагранжа переписати так:

$$\frac{dp_\nu}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0. \quad (44.4)$$

Циклічними координатами назвемо такі координати, які не входять явно у вираз функції Лагранжа. В нашому рівнянні (44.2) є циклічні координати  $x$  та  $y$ . Нехай з  $r$  узагальнених координат,  $k$  - координат є циклічними, тобто координати  $q_1, q_2, \dots, q_k$  не входять явно у вираз функції Лагранжа ( $k \leq r$ ). Для цих координат  $\frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0$  і рівняння Лагранжа (44.4) для цих координат приймуть вигляд:

$$\frac{dp_\nu}{dt} = 0,$$

де  $\nu = 1, 2, \dots, k$ .

Тоді

$$p_\nu = \text{const}, \quad (44.5)$$

де  $\nu = 1, 2, \dots, k$ .

Ми отримали циклічні інтеграли рівнянь Лагранжа, які формулюються так: *узагальнені імпульси системи, які відповідають циклічним координатам залишаються постійними при будь-якому русі системи*. Цей результат відповідає об'єднаному закону збереження імпульсу та моменту імпульсу системи.

## §45. Канонічні перетворення. Канонічні рівняння Гамільтона

Для кожної консервативної механічної системи з голономними та ідеальними зв'язками можна рівняння руху записати у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0, \quad (45.1)$$

де  $\nu = 1, 2, \dots, r$ .

Це є система з  $r$  звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат. Поставимо задачу замінити цю систему  $r$  рівнянь другого порядку системою з  $2r$  рівнянь першого порядку. Для цього потрібно зробити заміну змінних. Відомо, що будь-яка функція, яка характеризує стан механічної системи (наприклад, функція Лагранжа  $L$ , кінетична енергія  $T$ ) залежить від узагальнених координат, узагальнених швидкостей, а також від часу, якщо зв'язки не стаціонарні. Сукупність змінних, які включають час, узагальнені координати та узагальнені швидкості називаються *звичайними* або

лагранжєвими змінними:

$(t, q_1, q_2, \dots, q_r, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_r)$  - звичайні змінні.

Перейдемо від узагальнених швидкостей до узагальнених імпульсів:

$$P_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v}, \quad (45.2)$$

де  $v = 1, 2, \dots, r$ .

Сукупність змінних, які включають час, узагальнені координати та узагальнені імпульси називаються *канонічними змінними*:

$(t, q_1, q_2, \dots, q_r, p_1, p_2, \dots, p_r)$ .

Перехід від звичайних до канонічних змінних називається *канонічним перетворенням*. Запишемо функцію Лагранжа системи в залежності від звичайних змінних:

$L = L(t, q_1, q_2, \dots, q_r, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_r)$ .

Обчислимо варіацію від функції Лагранжа (приріст функції при сталому часі  $t$ ):

$$\delta L = \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial q_v} \delta q_v + \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta \dot{q}_v. \quad (45.3)$$

Кожний доданок під знаком другої суми перетворимо за формулою:

$$u \delta v = \delta(uv) - v \delta u,$$

причому  $u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v}$ ,  $v = \dot{q}_v$ .

Тоді

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta \dot{q}_v = \delta \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v \right) - \dot{q}_v \delta \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right).$$

Вся сума прийме вигляд:

$$\sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta \dot{q}_v = \delta \sum_{v=1}^r \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v \right) - \sum_{v=1}^r \dot{q}_v \delta \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right).$$

Підставимо цей вираз в рівняння (44.3):

$$\delta L = \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial q_v} \delta q_v + \delta \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v - \sum_{v=1}^r \dot{q}_v \delta \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right).$$

Перенесемо другий доданок з правої частини рівняння вліво та домножимо одержане рівняння на  $(-1)$ :

$$\delta \left( \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v - L \right) = - \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial q_v} \delta q_v + \sum_{v=1}^r \dot{q}_v \delta \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right). \quad (45.4)$$

Назвемо функцією Гамільтона системи такий вираз:

$$\sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v - L = H. \quad (45.5)$$

Рівняння (45.4) приймає вигляд:

$$\delta H = - \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial q_v} \delta q_v + \sum_{v=1}^r \dot{q}_v \delta \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right). \quad (45.6)$$

Здійснимо канонічні перетворення. З рівняння (45.2) маємо:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} = p_v.$$

З рівняння (45.1) маємо:

$$\frac{\partial L}{\partial q_v} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} = \frac{dp_v}{dt} = \dot{p}_v.$$

Тоді рівняння (45.6) приймає вигляд:

$$\delta H = - \sum_{v=1}^r \dot{p}_v \delta q_v + \sum_{v=1}^r \dot{q}_v \delta p_v. \quad (45.7)$$

Запишемо функцію Гамільтона в залежності від канонічних змінних:

$$H = H(t, q_1, q_2, \dots, q_r, p_1, p_2, \dots, p_r).$$

Візьмемо варіацію від функції Гамільтона:

$$\delta H = \sum_{v=1}^r \frac{\partial H}{\partial q_v} \delta q_v + \sum_{v=1}^r \frac{\partial H}{\partial p_v} \delta p_v. \quad (45.8)$$

Оскільки ліві частини рівнянь (45.7) та (45.8) рівні, то рівними будуть і праві частини. Так як варіації від узагальнених координат та узагальнених імпульсів  $\delta q_v$  та  $\delta p_v$  є величини незалежні, які можуть приймати довільні значення, то рівність правих частин рівнянь (45.7) і (45.8) можлива лише тоді, коли коефіцієнти при відповідних варіаціях від  $q$  і  $P_i$  в обох рівняннях рівні між собою:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_v &= \frac{\partial H}{\partial p_v}; \\ \dot{p}_v &= - \frac{\partial H}{\partial q_v}, \end{aligned} \right\} \quad (45.9)$$

де  $v = 1, 2, \dots, r$ .

Ми отримали систему з  $2r$  рівнянь першого порядку відносно узагальнених координат та узагальнених імпульсів. Ці рівняння називаються *рівняннями Гамільтона*. Відмітимо, що рівняння

Лагранжа більш зручні при розв'язуванні практичних задач, а рівняння Гамільтона більш зручні при розгляді теоретичних питань.

#### §46. Фізичний зміст функції Гамільтона. Зв'язок цієї функції з законами збереження

Запишемо вираз функції Гамільтона для даної консервативної системи:

$$H = \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v - L. \quad (46.1)$$

Обчислимо такий вираз (частинну похідну від функції Лагранжа по узагальненій швидкості) маємо:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} = \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_v} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_v} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v},$$

так як потенціальна енергія  $U$  від узагальнених швидкостей не залежить, то  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_v} = 0$ .

Тоді рівняння (46.1) прийме вигляд:

$$H = \sum_{v=1}^r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v - L. \quad (46.2)$$

Розглянемо частинний випадок системи з стаціонарними зв'язками. В цьому випадку кінетична енергія системи є однорідна квадратична функція (2 степеня) від її узагальнених швидкостей, а тому за теоремою Ейлера про однорідні функції:

$$\sum_{v=1}^r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v = 2T.$$

Тоді рівняння (46.2) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} H &= 2T - L = 2T - (T - U), \\ H &= T + U. \end{aligned} \quad (46.3)$$

Отже, у випадку консервативної системи з стаціонарними зв'язками функція Гамільтона це є не що інше як повна механічна енергія системи.

Запишемо вираз функції Гамільтона для випадку стаціонарних зв'язків:

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_r, p_1, p_2, \dots, p_r).$$

Знайдемо зміну функції Гамільтона за одиницю часу:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{v=1}^r \left( \frac{\partial H}{\partial q_v} \dot{q}_v + \frac{\partial H}{\partial p_v} \dot{p}_v \right). \quad (46.4)$$

Запишемо тепер рівняння Гамільтона:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_v &= \frac{\partial H}{\partial p_v}; \\ p_v &= -\frac{\partial H}{\partial q_v}, \end{aligned} \right\} \quad (46.5)$$

де  $v = 1, 2, \dots, r$ .

Підставимо в рівняння (46.4) значення  $\dot{q}_v$  і  $\dot{p}_v$ . Отримаємо:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{v=1}^r \left( \frac{\partial H}{\partial q_v} \frac{\partial H}{\partial p_v} - \frac{\partial H}{\partial p_v} \frac{\partial H}{\partial q_v} \right) = 0.$$

Отже:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= 0; \\ H &= \text{const}, \end{aligned}$$

тоді

$$T + U = \text{const}. \quad (46.6)$$

Ми отримали математичний запис закону збереження повної механічної енергії консервативної системи з стаціонарними зв'язками.

Нехай з  $r$  узагальнених координат,  $k$  координати є циклічними координатами по відношенню до функції Гамільтона, тобто координати  $(q_1, q_2, \dots, q_k)$  не входять у вираз функції Гамільтона. Для цих координат:

$$\frac{\partial H}{\partial q_v} = 0,$$

де  $v = 1, 2, \dots, k$

і рівняння Гамільтона для цих координат приймають вигляд:

$$\dot{p}_v = -\frac{\partial H}{\partial q_v} = 0$$

або

$$\frac{dp_v}{dt} = 0,$$

звідки

$$p_v = \text{const},$$

де  $v = 1, 2, \dots, k$ .

Отже, узагальнені імпульси, які відповідають циклічним

координатам залишаються постійними при русі системи. Цей результат відповідає законам збереження імпульсу та моменту імпульсу системи.

### §47. Дужки Пуассона

Нехай деяка величина  $F$ , яка характеризує стан системи є функція від її канонічних змінних:

$$F = F(t, q_1, q_2, \dots, q_r, p_1, p_2, \dots, p_r). \quad (47.1)$$

Знайдемо умови, при яких величина  $F$  залишається з часом постійною при русі системи. Тобто знайдемо умови, при яких має місце такий інтеграл руху:

$$F = F(t, q_1, q_2, \dots, q_r, p_1, p_2, \dots, p_r) = \text{const}. \quad (47.2)$$

Це буде очевидно тоді, коли:

$$\frac{dF}{dt} = 0. \quad (47.3)$$

З рівняння (47.1) знайдемо:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{v=1}^r \left( \frac{\partial F}{\partial q_v} \dot{q}_v + \frac{\partial F}{\partial p_v} \dot{p}_v \right). \quad (47.4)$$

Запишемо рівняння Гамільтона:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_v &= \frac{\partial H}{\partial p_v}; \\ \dot{p}_v &= -\frac{\partial H}{\partial q_v}, \end{aligned} \right\} \quad (47.5)$$

де  $v = 1, 2, \dots, r$ .

Підставимо значення виразу (47.5) в рівняння (47.4). Маємо:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{v=1}^r \left( \frac{\partial F}{\partial q_v} \frac{\partial H}{\partial p_v} - \frac{\partial F}{\partial p_v} \frac{\partial H}{\partial q_v} \right). \quad (47.6)$$

Назвемо дужками Пуассона для функцій  $F$  та  $H$  такий вираз:

$$[F, H] = \sum_{v=1}^r \left( \frac{\partial F}{\partial q_v} \frac{\partial H}{\partial p_v} - \frac{\partial F}{\partial p_v} \frac{\partial H}{\partial q_v} \right). \quad (47.7)$$

Тоді рівність (47.6) прийме вигляд:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H].$$

Отже, умова рівності (47.3) - збереження величини  $F$ , приймає вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] = 0. \quad (47.8)$$

Досить важливим для практики є випадок систем з стаціонарними зв'язками. В цьому випадку величина  $F$  від часу  $t$  явно не залежить, а тому  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$  і ми отримаємо таку умову збереження величини  $F$ :

$$[F, H] = 0. \quad (47.9)$$

За допомогою дужок Пуассона можна знайти всі перші інтеграли руху (всі закони збереження, отже, виявити чи є величина  $F$  постійною, незалежною від часу, тим самим знайти перший інтеграл руху будь-якої консервативної системи (тобто потрібно перевірити чи  $F = H$ ).

Дійсно, щоб перевірити, що якась величина залишається постійною при русі системи, то ми складаємо дужки Пуассона для цієї величини та для функції Гамільтона. Якщо дужки Пуассона будуть дорівнювати нулю, то ця величина дійсно залишається постійною, а якщо ні, то немає місця збереження цієї величини.

## §48. Елементи варіаційного числення. Ізохронна варіація

Нехай деякий фізичний процес описується рівнянням  $x = f(t)$ .

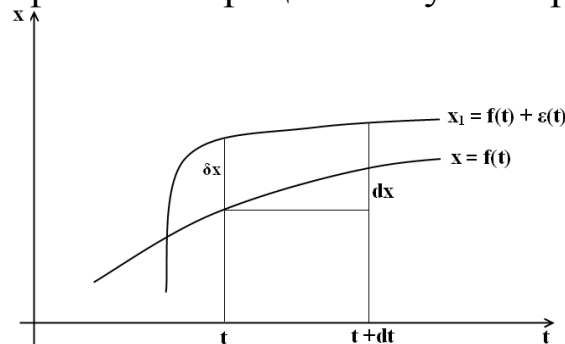


Рис. 35

На графіку (рис. 35) ми одержимо деяку криву. Знайдемо диференціал цієї функції. Для цього надамо приросту аргументу.

Отже, на графіку ми матимемо нову криву, яка розташована нескінченно близько до даної. Приріст функції одержаний внаслідок зміни її вигляду при фіксованому аргументі називається *варіацією*.

В механіці основним аргументом є час. Варіація обчислена при незмінному часі зветься *ізохронною*.

На графіку диференціал — це приріст функції вздовж самої

кривої, а варіація – це приріст функції при переході від даної кривої до нескінченно близької.

Операція варіювання виконується так само як операція диференціювання при умові постійності основного аргумента. Наприклад, нехай дана така функція:

$$y = F(x, t).$$

Диференціал цієї функції дорівнює:

$$dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

Варіація функції дорівнює:

$$dy = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x.$$

Можна довести, що операції диференціювання і варіювання взаємозалежні і можна поміняти місцями порядок їх здійснення. Наприклад:

$$d(\delta x) = \delta(dx).$$

Так же саме похідна:

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \delta\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Можна також довести, що взаємозалежними є операції варіювання й інтегрування, тобто

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F(x, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta F(x, t) dt.$$

Останнє твердження справедливе, коли межі інтегрування не варіюються.

## **§49. Варіаційний принцип Остроградського-Гамільтона (принцип найменшої дії).**

Варіаційний принцип Остроградського-Гамільтона на відміну від принципів Даламбера та можливих переміщень, які є диференціальними принципами, – інтегральний принцип.

Розглянемо консервативну систему з ідеальними зв'язками. Нехай система має  $r$  ступеней вільності. Тоді стан системи в будь-який момент часу буде характеризуватися набором  $2r$  величин:  $r$  узагальнених координат та  $r$  узагальнених імпульсів.

Запровадимо  $2r$  вимірний простір узагальнених координат та узагальнених імпульсів. Назвемо цей простір *фазовий*. В цьому

просторі стан системи в кожний момент часу можна зобразити однією точкою. При русі системи ця точка буде описувати деяку криву.

Нехай система переходить з стану якому відповідає момент часу  $t = t_1$  в стан якому відповідає момент часу  $t = t_2$  (рис. 36).

Назвемо шлях пройдений системою при дійсному русі її *прямим шляхом системи*. Будь-який інший дозволений зв'язками рух, який також міг би привести систему з стану 1 в стан 2 назвемо *суміжним* або *обхідним шляхом*.

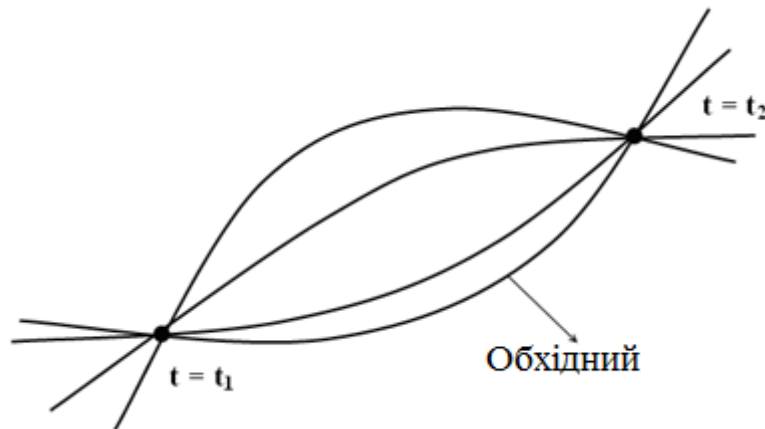


Рис. 36

Нехай система в певний момент часу  $t_1$  була в положенні, яке в  $r$  - мірному просторі характеризується точкою  $A$ , а в момент часу  $t_2$  прийшла в положення, яке характеризується точкою  $B$ .

Умовно зобразимо прямий шлях системи та кілька суміжних. Розглядаючи диференціал функції, що описує стан системи ми розглядаємо переміщення системи вздовж її прямого шляху за скінченно малий проміжок часу. Якщо ж розглядати варіацію цієї функції, то тим самим ми будемо розглядати перехід системи з прямого шляху на нескінченно близький суміжний шлях в фіксований момент часу.

Запишемо загальне рівняння динаміки для системи з  $n$  точок:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i) \delta \vec{r}_i = 0,$$

де  $\delta \vec{r}_i$  - можливе переміщення;  $F_i$  - зовнішні сили.

Або

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (49.1)$$

В цьому рівнянні перша сума:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \delta A \quad (49.2)$$

є *віртуальна* робота або це можлива робота заданих сил на можливих переміщеннях точок системи. Перетворимо вираз, який стоїть під знаком другої суми рівняння (49.1):

$$\begin{aligned} m_i \vec{w}_i \delta \vec{r}_i &= m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i) - m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_i) = \\ &= \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i) - -m_i \vec{v}_i \delta \vec{v}_i = \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i) - \delta \left( \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Тоді друга сума рівняння (49.1) прийме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i) \right) - \sum_{i=1}^n \delta \left( \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i - \delta \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i - \delta T. \quad (49.3) \end{aligned}$$

З врахуванням рівнянь (49.3) і (49.2) рівняння (49.1) прийме вигляд:

$$\delta A - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i + \delta T = 0.$$

Домножимо останнє рівняння на  $dt$  і перенесемо другий доданок в праву частину:

$$(\delta A + \delta T) dt = d \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i$$

або

$$\delta(A + T) dt = d \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i.$$

Проінтегруємо це рівняння в межах від  $t_1$  до  $t_2$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T) dt = \int_{t_1}^{t_2} d \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2}$$

або

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(A + T) dt = \int_{t_1}^{t_2} d \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Але в момент часу  $t_1$  і  $t_2$  всі суміжні шляхи перетинаються з прямим шляхом системи, тому можливі переміщення  $\delta\vec{r}_i$ , які показують перехід від прямого шляху до будь-якого суміжного шляху будуть дорівнювати нулю. Отже, підстановка верхньої і нижньої межі інтегрування перетворить одержаний вираз в нуль. Тобто

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \delta\vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Таким чином:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T) dt &= 0, \\ \int_{t_1}^{t_2} \delta(A + T) dt &= 0. \end{aligned} \quad (49.4)$$

Розглянемо випадок консервативної системи. В цьому випадку можлива робота  $\delta A$  виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії системи, тобто

$$\delta A = -\delta U.$$

З врахуванням цього рівняння (49.4) прийме вигляд:

$$\int_{t_1}^{t_2} (-\delta U + \delta T) dt = 0$$

або

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt &= 0; \\ \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt &= 0. \end{aligned}$$

Але різниця потенціальної і кінетичної енергії є функція Лагранжа:

$$T - U = L.$$

Отже:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

або

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (49.5)$$

Це і є математичний вираз принципу Остроградського-Гамільтона. Інтеграл від функції Лагранжа по часу називається *інтегралом дії* або просто *дією*. Принцип Остроградського-Гамільтона можна сформулювати так: *варіація від дії системи при переході з прямого шляху до будь-якого суміжного дорівнює нулю*.

На основі положень математики можна зробити висновок, що дія приймає на прямому шляху екстремальне значення. Таким чином, принцип Остроградського-Гамільтона дозволяє з усіх можливих рухів системи вибрати дійсний рух. Це буде той рух, при якому дія системи приймає екстремальне (як правило мінімальне) значення. Тому цей принцип часто називають *принципом найменшої дії*.

## §50. Вивід рівнянь Лагранжа з принципу Остроградського-Гамільтона

Принцип Остроградського-Гамільтона - це найважливіший принцип механіки, оскільки з нього можна вивести всі інші принципи механіки. Шляхом деякого узагальнення функції Лагранжа і поширення її на електромагнітне та гравітаційне поля, можна показати, що принцип Остроградського-Гамільтона є основним принципом і в електродинаміці і загальній теорії відносності. Обмежимося механікою.

Покажемо, що із принципу Остроградського-Гамільтона можна вивести рівняння Лагранжа другого роду. Запишемо:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

або

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0. \quad (50.1)$$

Нехай функція Лагранжа задана через звичайні лагранжеві змінні, тобто

$$L = L(t, q_1, q_2, \dots, q_r, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_r).$$

Знайдемо варіацію від функції Лагранжа:

$$\delta L = \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial q_v} \delta q_v + \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \dot{q}_v. \quad (50.2)$$

Перетворимо другу суму:

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta \dot{q}_v &= \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta \left( \frac{dq_v}{dt} \right) = \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \frac{d}{dt} (\delta q_v) = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta q_v - \sum_{v=1}^r \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right) \delta q_v. \end{aligned}$$

Підставимо значення цього виразу у рівняння (50.2). Тоді

$$\delta L = \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial q_v} \delta q_v + \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta q_v - \sum_{v=1}^r \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right) \delta q_v. \quad (50.3)$$

Значення варіації з функції Лагранжа підставимо в рівняння (50.1), отримаємо:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial q_v} \delta q_v dt + \int_{t_1}^{t_2} d \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta q_v - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{v=1}^r \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right) \delta q_v dt = 0.$$

Помножимо це рівняння на (-1), перший і третій доданок згрупуємо, а другий доданок перенесемо в праву частину і проінтегруємо:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{v=1}^r \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right) \delta q_v - \frac{\partial L}{\partial q_v} \delta q_v \right] dt &= \int_{t_1}^{t_2} d \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta q_v; \\ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{v=1}^r \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_v} \right] \delta q_v dt &= \sum_{v=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \delta q_v \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (50.4) \end{aligned}$$

Але в момент часу  $t_1$  і  $t_2$  всі можливі суміжні шляхи перетинаються з дійсним прямим шляхом. Тому варіації від узагальнених координат при підстановці часу  $t_1$  і  $t_2$  будуть дорівнювати нулю. І ми отримаємо, що права частина рівняння (50.4) буде дорівнювати нулю. Тоді

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{v=1}^r \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_v} \right] \delta q_v dt = 0.$$

Останній інтеграл дорівнює нулю при будь-яких межах інтегрування, а це можливо коли підінтегральна функція дорівнює

нулю, тобто ця сума буде дорівнювати нулю:

$$\sum_{v=1}^r \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_v} \right] \delta q_v = 0.$$

Але оскільки узагальнені можливі переміщення  $\delta q_v$  є величинами незалежними і можуть приймати довільні значення, то тотожна рівність нулю останньої суми можлива лише тоді, коли кожен коефіцієнт при  $\delta q_v$  окремо рівний нулю. Тобто

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_v} = 0,$$

де  $v = 1, 2, \dots, r$ .

Це і є *рівняння Лагранжа другого роду*.

## Лекція 9. ДИНАМІКА ТОЧКИ ЗМІННОЇ МАСИ

§51. Рівняння Мещерського.

§52. Закон зміни маси.

§53. Перша задача Ціолковського.

§54. Друга задача Ціолковського.

§55. Рух точки змінної маси в середовищі з гідравлічним опором.

[2. §75; 5. §23; 6. §24.1-§24.5]

### §51. Рівняння Мещерського

Рівняння Мещерського ґрунтується на двох основних законах механіки. *Перший* - це закон збереження кількості руху (закон збереження імпульсу), згідно якого кількість руху замкненої системи залишається величиною постійною при будь-якому русі точок системи. Отже, якщо точка змінної маси  $M$  рухається внаслідок безперервного випромінювання частинок з масами  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , то сумарна кількість руху всієї системи буде залишатися незмінною (постійною). При виведенні рівняння Мещерського ми будемо дотримуватися принципу близькодії. А саме: будемо вважати, що центральна випромінююча точка взаємодіє з відкритими частинками тільки в момент безпосереднього контакту.

*Другим* законом або принципом є принцип незалежності дії сил. Позначимо через  $d\vec{v}_1$  зміну швидкості точки, яку вона одержує внаслідок випромінювання частинок. Нехай крім цього на точку діють

ще зовнішні сили. Позначимо через  $d\vec{v}_2$  зміну швидкості точки, обумовлену дією зовнішніх сил. Тоді повна зміна швидкості буде дорівнювати:

$$d\vec{v} = d\vec{v}_1 + d\vec{v}_2.$$

Нехай в даний момент часу точка змінної маси  $M$  має швидкість  $\vec{v}$ , тоді її кількість руху буде:

$$\vec{k} = M\vec{v}. \quad (51.1)$$

Нехай за якийсь час  $dt$  точка відкинула частинки загальною (сумарною) масою  $dM$  і їх абсолютна швидкість дорівнює  $\vec{u}$ . Внаслідок цього швидкість центральної точки внаслідок випромінювання змінилась на величину  $d\vec{v}_1$ :

$$\vec{k} = (M - dM)(\vec{v} + d\vec{v}_1) + \vec{u}dM. \quad (51.2)$$

Це буде кількість руху системи через час  $dt$ . Тут скористаємось законом збереження імпульсу. Прирівняємо рівняння (51.1) і (51.2):

$$M\vec{v} = (M - dM)(\vec{v} + d\vec{v}_1) + \vec{u}dM.$$

Розкриємо дужки у правій частині:

$$M\vec{v} = M\vec{v} + Md\vec{v}_1 - \vec{v}dM - dMd\vec{v}_1 + \vec{u}dM,$$

але

$$dMd\vec{v}_1 \rightarrow 0.$$

Тоді

$$Md\vec{v}_1 - \vec{v}dM + \vec{u}dM = 0.$$

З цього рівняння знайдемо зміну швидкості  $d\vec{v}_1$ :

$$d\vec{v}_1 = -\frac{dM}{M}(\vec{u} - \vec{v}).$$

Різницю швидкості  $(\vec{u} - \vec{v})$  позначимо через  $\vec{v}'$  і це є відносна швидкість відкинутих частинок:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}'.$$

З врахуванням цього, попереднє рівняння прийме вигляд:

$$d\vec{v}_1 = -\frac{dM}{M}\vec{v}'. \quad (51.3)$$

Нехай на дану точку діють також зовнішні сили. Результуючу силу, яких позначимо через  $\vec{F}$ . Тоді за другим законом Ньютона і незалежністю дії сил можна записати:

$$M \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}.$$

Тоді з цього рівняння:

$$d\vec{v}_2 = \frac{1}{M}\vec{F}dt. \quad (51.4)$$

На основі незалежності дії сил:

$$d\vec{v} = d\vec{v}_1 + d\vec{v}_2.$$

Підставивши вирази (51.3) і (51.4) в останнє рівняння, отримаємо:

$$d\vec{v} = \frac{1}{M} \vec{F} dt - \frac{dM}{M} \vec{v}'.$$

Це рівняння домножимо на  $M$  і поділимо на  $dt$ :

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{dM}{dt} \vec{v}'. \quad (51.5)$$

Рівняння (51.5) це і є *рівняння Мещерського*. Йому можна надати іншого вигляду. Дійсно другий доданок правої частини можна розглядати як внутрішню силу, тобто силу взаємодії точки змінної маси з відкинутими частинками. Ця сила називається *реактивною* і позначається:

$$\vec{\Phi} = - \frac{dM}{dt} \vec{v}'.$$

В цій рівності  $\frac{dM}{dt}$  є секундна витрата маси. Отже, реактивна сила дорівнює добутку секундної витрати маси на відносну швидкість відкинутих частинок. Враховуючи це, ми рівняння Мещерського можемо переписати:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi}. \quad (51.7)$$

## §52. Закон зміни маси

На практиці найчастіше відтворюються наступні закони зміни маси:

1. *Лінійний закон зміни маси:*

$$M = M_0(1 - \alpha t),$$

де  $M$  - це маса точки в момент часу  $t = 0$ ;  $\alpha$  - коефіцієнт, який зветься питомою витратою маси.

2. *Показниковий закон зміни маси:*

$$M = M_0 e^{-\alpha t}.$$

Виявимо фізичний зміст кожного з цих законів:

1. *Лінійний закон.*

Знайдемо секундну витрату маси:

$$\frac{dM}{dt} = -\alpha M_0 = \text{const.}$$

Ця величина є константа (постійна). Отже, секундна витрата

маси буде постійною.

Знайдемо реактивну силу:

$$\Phi_r = \alpha M_0 \vec{v}' = \text{const.}$$

Отже, лінійний закон зміни маси відповідає руху точки під дією постійної реактивної сили. Лінійний закон зміни маси реалізується на практиці при роботі двигунів реактивних літаків.

*2. Показниковий закон.*

Знайдемо секундну зміну маси:

$$\frac{dM}{dt} = -\alpha M_0 e^{-\alpha t} \text{ величина змінна.}$$

Знайдемо реактивну силу:

$$\vec{\Phi}_r = \alpha M_0 e^{-\alpha t} \vec{v}' - \text{теж величина змінна.}$$

Знайдемо реактивне прискорення:

$$\vec{W}_r = \frac{\vec{\Phi}_r}{M} = \alpha \vec{v}' = \text{const.}$$

Отже, показниковий закон зміни маси відповідає руху точки з постійним реактивним прискоренням. На практиці він здійснюється при роботі двигунів космічних ракет.

### §53. Перша задача Ціолковського

Нехай точка змінної маси рухається у відсутності дії зовнішніх сил, тобто результуюча зовнішніх сил  $\vec{F} = 0$  і рівняння Мещерського прийме вигляд:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dM}{dt} \vec{v}'.$$

Якщо відносна швидкість відкинутих частинок  $\vec{v}'$  направлена по дотичній до траєкторії руху центральної точки. Враховуючи, що  $M$  є від'ємна величина, спроектуємо це рівняння на дотичну, маємо:

$$M \frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt} v'. \quad (53.1)$$

З цього рівняння знайдемо зміну швидкості  $dv$

$$dv = -\frac{dM}{dt} v'.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_{v_0}^v dv = -v' \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}.$$

Після інтегрування в лівій частині:

$$v - v_0 = -v' \ln \frac{M}{M_0}$$

або

$$v = v_0 + v' \ln \frac{M_0}{M}. \quad (53.2)$$

Нехай закон зміни маси буде показниковий, тобто

$$M = M_0 e^{-\alpha t}.$$

Підставимо в рівняння (53.2) замість маси  $M$  її значення:

$$v = v_0 + v' \ln \left( \frac{M_0}{M_0} e^{\alpha t} \right);$$

$$v = v_0 + \alpha v' t. \quad (53.3)$$

Тобто рух точки (частинки) змінної маси буде рівноприскореним. Звідки закон руху буде:

$$s = v_0 t + \frac{\alpha v' t^2}{2}. \quad (53.4)$$

*Задача.* Знайдемо максимальну швидкість ракети, тобто її швидкість в кінці активного процесу. Для цього скористаємось рівнянням (53.2):

$$v_{\max} = v_0 + v' \ln \frac{M_0}{M_{\text{об}\max}},$$

де  $M_{\text{об}}$  - маса оболонки ракети;  $M_0$  - початкова маса ракети.

$$M_0 = M_{\text{об}} + m,$$

де  $m$  - маса палива.

$$v_{\max} = v_0 + v' \ln \left( 1 + \frac{m}{M_{\text{об}}}_{\max} \right), \quad (53.5)$$

де  $\frac{m}{M_{\text{об}}} = Z$  - називається *числом Ціолковського*.

З рівняння (53.5) можна зробити наступні висновки:

- для отримання більших швидкостей ракет, необхідно збільшувати відносну швидкість спрацьованих газів (відкинутих частинок);

- кінцева швидкість ракети буде тим більша, чим більший запас палива на одиницю маси ракети.

Ці висновки можна об'єднати в один загальний і дуже важливий. Для одержання максимальних швидкостей ракет вигідніше збільшувати відносну швидкість відкинутих частинок ніж збільшувати запас палива. Або іншими словами, вигідніше покращувати якість палива, ніж збільшувати його кількість.

## §54. Друга задача Ціолковського

Нехай точка змінної маси рухається вертикально вгору в однорідному полі тяжіння Землі, що подібно до підйому метеорологічної ракети на порівняно невелику висоту. Направимо вісь координат вертикально вгору і спроектуємо на неї рівняння Мещерського

$$M \frac{dv}{dt} = -Mg - v' \frac{dM}{dt}. \quad (54.1)$$

Нехай маса змінюється за показниковим законом:

$$M = M_0 e^{-\alpha t};$$
$$\frac{dM}{dt} = -\alpha M_0 e^{-\alpha t}.$$

З врахуванням цих двох рівнянь підставимо їх значення в рівняння (54.1):

$$M_0 e^{-\alpha t} \frac{dv}{dt} = -M_0 e^{-\alpha t} g + M_0 \alpha v' e^{-\alpha t};$$
$$\vec{F}_T = M \vec{g};$$
$$\frac{dv}{dt} = (\alpha v' - g). \quad (54.2)$$

З рівняння (54.2), помноживши ліву і праву частину на  $dt$ , знайдемо:

$$dv = (\alpha v' - g) dt.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_0^v dv = \int_0^t (\alpha v' - g) dt;$$
$$v = (\alpha v' - g)t. \quad (54.3)$$

Рівняння (54.3) ми можемо переписати в такому вигляді:

$$\frac{ds}{dt} = (\alpha v' - g)t,$$
$$ds = (\alpha v' - g)t dt.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_0^s ds = \int_0^t (\alpha v' - g)t dt;$$
$$s = \frac{\alpha v' - g}{2} t^2. \quad (54.4)$$

Відмітимо, що рівняння (54.4) є законом руху ракети для тих

проміжків часу протягом яких працює двигун.

Знайдемо повну висоту підняття ракети, вона буде складатись із двох ділянок шляху:

1. Активної ділянки, тобто ділянці шляху на протязі якої буде працювати двигун. (Час польоту ракети, поки не згорить все паливо).

2. Пасивної ділянки, яку проходить ракета з постійною масою (оболонкою), завдяки швидкості набутої на активній ділянці:

$$h = s_a + s_n, \quad (54.5)$$

де  $s_a$  - знайдемо із формули (53.4):

$$s_a = \frac{\alpha v' - g}{2} t_1^2, \quad (54.6)$$

де  $t_1$  - час роботи двигуна ракети.

З рівняння (54.3) початкова швидкість на пасивній ділянці:

$$v_1 = (\alpha v' - g)t_1.$$

Шлях пройдений на пасивній ділянці:

$$s_n = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Швидкість  $v_1$  підставимо в останнє рівняння:

$$s_n = \frac{(\alpha v' - g)^2}{2g} t_1^2. \quad (54.7)$$

Час роботи двигуна ракети знайдемо із закону зміни мас. Це буде той час, коли паливо згорить і залишиться лише оболонка ракети, тобто

$$M_{об} = M_0 e^{-\alpha t_1};$$

$$\frac{M_{об}}{M_0} = e^{-\alpha t_1}.$$

Прологарифмуємо:

$$-\alpha t_1 = \ln \frac{M_{об}}{M_0};$$

$$\alpha t_1 = \ln \frac{M_0}{M_{об}} = \mu.$$

Тоді  $t_1 = \frac{\mu}{\alpha}$  - час роботи двигуна.

Підставимо значення часу роботи двигуна в рівняння (54.6) і (54.7), маємо:

$$s_a = \frac{\alpha v' - g}{2} \frac{\mu^2}{\alpha^2};$$

$$s_n = \frac{(\alpha v' - g)^2 \mu^2}{2g \alpha^2}.$$

Підставимо значення  $s_a$  і  $s_n$  в рівняння (54.5):

$$\begin{aligned} h &= \frac{\alpha v' - g}{2} \frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{(\alpha v' - g)^2 \mu^2}{2g \alpha^2} = \frac{v' \mu^2}{2\alpha} - \frac{g \mu^2}{2\alpha^2} + \frac{v'^2 \mu^2}{2g} - \frac{v' \mu^2}{\alpha} + \frac{g \mu^2}{2\alpha^2} = \\ &= \frac{v'^2 \mu^2}{2g} - \frac{v' \mu^2}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Отже, повна висота підняття:

$$h = \frac{v'^2 \mu^2}{2g} - \frac{v' \mu^2}{2\alpha}. \quad (54.8)$$

Ми бачимо, що при заданій відносній швидкості відкинутих частинок  $v'$  (при заданій якості палива) і при заданому  $\mu$  ( $\mu$  - відносний запас палива) висота підняття  $h$  залежить від питомої витрати маси палива ( $\alpha$ ). Знайдемо при яких умовах висота підняття ракети буде максимальною.

Очевидно, що висота підняття ракети буде максимальною тоді, коли другий доданок в рівнянні (54.8) буде дорівнювати нулю:

$$\frac{v' \mu^2}{2\alpha} = 0,$$

коли  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Значення  $\alpha = \infty$  відповідає миттєвому значенню (згорання) всього палива:

$$h = \frac{v'^2 \mu^2}{2g}_{\max}.$$

Отже, для досягнення більших висот підняття ракети в однорідному полі тяжіння Землі, необхідно як найшвидше спалити все паливо.

На практиці однак так не поступають. Оскільки при великих значеннях питомого розходу палива  $\alpha$ , великою буде реактивна сила і реактивне прискорення. Це в свою чергу приводить до великих перевантажень. Тому на практиці добиваються інших більш оптимальних режимів роботи двигунів, при яких висота підняття достатня, а перевантаження приймає допустимі значення.

## §55. Рух точки змінної маси в середовищі з гідравлічним опором

Розглянемо рух точки змінної маси в середовищі з гідравлічним опором, тобто в середовищі сила опору якого пропорційна квадрату швидкості.

Прийmemo всі інші зовнішні сили, що діють на точку будуть зрівноважуватися. Цей випадок буде відповідати горизонтальному рухові реактивного літака для якого сила тяжіння зрівноважується підйомною силою крила літака.

Спрямуємо рівняння Мещерського на напрямок руху літака:

$$M \frac{dv}{dt} = -F_{\text{оп}} - v' \frac{dM}{dt};$$

$$F_{\text{оп}} = k_1 v^2.$$

Тоді

$$M \frac{dv}{dt} = -k_1 v^2 - v' \frac{dM}{dt}.$$

В цьому випадку прийmemo, що маса змінюється за лінійним законом:

$$M = M_0(1 - \alpha t); \quad \frac{dM}{dt} = -\alpha M_0;$$

$$M_0(1 - \alpha t) \frac{dv}{dt} = -k_1 v^2 + \alpha M_0 v'.$$

Поділимо ліву і праву частину на  $M_0$ :

$$(1 - \alpha t) \frac{dv}{dt} = -\frac{k_1 v^2}{M_0} + \alpha v'.$$

Величина  $\frac{k_1}{M_0} = k$ , тоді

$$(1 - \alpha t) \frac{dv}{dt} = \alpha v' - kv^2.$$

Розділимо змінні в цьому рівнянні:

$$\frac{dv}{dv' - kv^2} = \frac{dt}{1 - \alpha t}; \quad \rightarrow \quad \int_0^v \frac{dv}{dv' - kv^2} = \int_0^t \frac{dt}{1 - \alpha t};$$

$$\int_0^t \frac{dt}{1 - \alpha t} = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \alpha t);$$

$$\int_0^v \frac{dv}{dv' - kv^2} = \frac{1}{k} \frac{dv}{\left(\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}}\right)^2 - v^2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha v' k}} \ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} + v}{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} - v};$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C.$$

Тоді

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha v' k}} \ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} + v}{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} - v} = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \alpha t);$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha v' k}} \ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} - \sqrt{k}v}{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} + \sqrt{k}v} = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \alpha t).$$

Домножимо ліву і праву частину на  $2\sqrt{\alpha v' k}$ :

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} - \sqrt{k}v}{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} + \sqrt{k}v} = \frac{2\sqrt{\alpha v' k}}{\alpha} \ln(1 - \alpha t).$$

Позначимо величину

$$\frac{2\sqrt{\alpha v' k}}{\alpha} = n; \rightarrow \ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} - \sqrt{k}v}{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} + \sqrt{k}v} = n \ln(1 - \alpha t).$$

Проекспоненціюємо ліву і праву частину цього рівняння:

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} - \sqrt{k}v}{\sqrt{\frac{\alpha v'}{k}} + \sqrt{k}v} = (1 - \alpha t)^n.$$

При умові  $(1 - \alpha t)^n = 0$  швидкість буде максимальна. В техніці величина  $n > 10$  і через деякий час  $(1 - \alpha t)^n = 0$ :

$$v = \sqrt{\frac{\alpha v'}{k}}_{\max}.$$

Це і буде максимальна швидкість літака. Тоді

$$v = \sqrt{\frac{\alpha v' M_0}{k_1}} = \sqrt{\frac{\alpha v' P_0}{k_1 g}}_{\max},$$

де  $M_0 = \frac{P_0}{g}$ .

В експериментальній аеродинаміці силу гідравлічного опору знаходять як величину:

$$F_{\text{оп}} = \frac{1}{2} C_x S \rho v^2,$$

де  $S$  - це характеристична площа літака;  $\rho$  - густина повітря;  $C_x$  - аеродинамічний коефіцієнт опору.

Тоді коефіцієнт опору

$$k_1 = \frac{1}{2} C_x S \rho$$

і вираз для максимальної швидкості буде таким:

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2\alpha v' P_0}{C_x S \rho g}}_{\text{max}}.$$

За цією формулою визначають максимальну швидкість реактивного літака при його горизонтальному польоті.

## Лекція 10. КОЛИВАННЯ

§56. Малі коливання механічних систем. Теорема Діріхле про умови стійкої рівноваги. Малі коливання з однією ступеню вільності. Функція Лагранжа для малих коливань такої системи. Гармонічний осцилятор. Квазіпружня сила. Енергетичні перетворення в коливній системі.

§57. Згасаючі коливання.

§58. Вимушені коливання системи з однією ступеню вільності.

[1. §38-§44; 2. §85, §86; 3. §12.1-§12.3; 5. §26-§32; 6. §30.1-§30.11]

**§56. Малі коливання механічних систем. Теорема Діріхле про умови стійкої рівноваги. Малі коливання з однією ступеню вільності. Функція Лагранжа для малих коливань такої системи. Гармонічний осцилятор. Квазіпружня сила. Енергетичні перетворення в коливній системі**

Нехай консервативна система при русі проходить положення рівноваги. Згідно з принципом можливих переміщень в положенні рівноваги всі узагальнені сили дорівнюють нулю:  $Q_\nu = 0$ ,  $\nu =$

1, 2, ..., r. Оскільки система консервативна, то кожна узагальнена сила визначається так:

$$Q_v = - \frac{\partial U}{\partial q_v}.$$

В положенні рівноваги узагальнені сили дорівнюють нулю, тому  $\frac{\partial U}{\partial q_v} = 0$ . Звідси слідує, що в положенні рівноваги потенціальна енергія системи буде мати екстремальне значення - це твердження є першою частиною теореми Дірехле.

Друга частина теореми стверджує, що в положенні рівноваги потенціальна енергія приймає мінімальне значення.

Розглянемо консервативну систему з стаціонарними зв'язками, яка має одну ступінь вільності. Положення системи можна задати за допомогою однієї узагальненої координати, а рух системи можна описати рівнянням Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \quad (56.1)$$

Виберемо початок координат в положенні стійкої рівноваги системи. Це означатиме, що в положенні стійкої рівноваги системи її узагальнена координата буде дорівнювати нулю. Потенціальна енергія буде функцією від узагальненої координати

$$U = U(q).$$

Так як в положенні стійкої рівноваги потенціальна енергія приймає мінімальне значення, домовимось вважати, що в цьому положенні потенціальна енергія буде дорівнювати нулю  $U(0) = 0$ . І в положенні рівноваги:

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 0$$

або

$$U'(0) = 0.$$

Незначно введемо систему з положення рівноваги. При цьому узагальнена координата прийме деяке значення. Обчислимо при цьому потенціальну енергію системи. Для цього розкладемо потенціальну енергію в ряд Тейлора в околі точки  $O$ , яка відповідає положенню рівноваги:

$$U(q) = U(0) + U'(0)q + \frac{U''(0)}{2!}q^2$$

і обмежимося доданками другого порядку малості.

Введемо позначення:

$$U''(0) = C.$$

Очевидно, що  $C > 0$ . На основі того, що в цій точці потенціальна енергія приймає мінімальне значення. Тоді отримується, що

$$U = \frac{Cq^2}{2}. \quad (56.2)$$

Так як зв'язки стаціонарні, то кінетична енергія системи буде однорідною квадратичною функцією від узагальнених швидкостей. Тобто кінетична енергія системи буде пропорційна квадрату узагальнених швидкостей. Позначимо через коефіцієнт пропорційності  $k = \frac{a}{2}$ . Тоді

$$T = \frac{a\dot{q}^2}{2}. \quad (56.3)$$

Обчислимо функцію Лагранжа:

$$L = T - U = \frac{a\dot{q}^2}{2} - \frac{Cq^2}{2}. \quad (56.4)$$

Механічна система для якої функція Лагранжа має такий вигляд називається *одномірним гармонічним осцилятором*.

Обчислимо силу, яка діє на систему при виведенні її з положення рівноваги:

$$Q = -Cq. \quad (56.5)$$

Узагальнена сила, яка має такий вигляд як вираз (56.5) називається *квазіпружною силою*.

Обчислимо величини, які стоять в лівій частині рівняння Лагранжа другого роду (рівняння (56.1))

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} &= a\dot{q}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} &= a\ddot{q}. \end{aligned} \right\} \quad (56.6)$$

Підставимо значення виразів (56.6) і (56.5) в рівняння (56.1):

$$a\ddot{q} + Cq = 0. \quad (56.7)$$

Ми отримали диференціальне рівняння другого порядку:

$$\ddot{q} + \frac{C}{a}q = 0.$$

Введемо позначення:

$$\frac{C}{a} = \omega_0^2. \quad (56.8)$$

Попереднє рівняння прийме вигляд:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (56.9)$$

Для розв'язку даного рівняння треба скласти характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

і розв'язуючи його

$$\lambda = \pm i\omega_0.$$

Коренями характеристичного рівняння є комплексні числа, тому розв'язок диференціального рівняння (56.9) будемо шукати у вигляді:

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \quad (56.10)$$

Замінімо константи  $C_1$  і  $C_2$ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= A \sin \varepsilon; \\ C_2 &= A \cos \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (56.11)$$

де  $A$  і  $\varepsilon$  - це деякі константи.

Підставимо значення  $C_1$  і  $C_2$  в попереднє рівняння:

$$\begin{aligned} q &= A(\sin \varepsilon \cos \omega_0 t + \cos \varepsilon \sin \omega_0 t) = A \sin(\omega_0 t + \varepsilon); \\ \dot{q} &= A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (56.12)$$

Отже, система виведена з положення рівноваги буде здійснювати власні гармонічні коливання навколо положення рівноваги. Причому в цих коливаннях  $A$  є амплітуда;  $\varepsilon$  - це початкова фаза. Вони є константами інтегрування і залежать від початкового зміщення системи від положення рівноваги  $A$  і від початкової швидкості;  $\omega_0$  - є власна частота коливань системи і її можна визначити з рівняння (56.8):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{a}}.$$

Тоді період коливань такої системи:

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{C}}. \quad (56.13)$$

Обчислимо кінетичну і потенціальну енергію з врахуванням рівнянь (56.12):

$$U = \frac{CA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varepsilon); \quad T = \frac{aA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varepsilon).$$

З врахуванням формули (56.8) вираз для кінетичної енергії буде наступним:

$$T = \frac{CA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varepsilon).$$

Сума кінетичної і потенціальної енергії системи буде повною механічною енергією цієї системи:

$$E = T + U = \frac{CA^2}{2}.$$

Вона буде постійною, оскільки величини  $C$  і  $A$  постійні. При малих коливаннях системи повна енергія такої системи пропорційна квадрату амплітуди і залишається постійною за величиною.

## §57. Згасаючі коливання

Реальні коливання механічної системи є згасаючими, це обумовлено тим, що повна механічна енергія системи при здійсненні нею коливань зменшується внаслідок опору середовища і поступово перетворюється у внутрішню енергію середовища і системи. При цьому говорять, що внутрішня енергія розсіюється. Отже, на системи крім повертаючої сили (квазіупругої сили) діє і ще сила опору середовища:

$$Q = -Cq. \quad (57.1)$$

Розглянемо випадок в'язкого опору, коли сила опору пропорційна першій степені швидкості:

$$Q_{\text{оп}} = -b\dot{q}. \quad (57.2)$$

З урахуванням цього рівняння Лагранжа другого роду прийме вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + Q_{\text{оп}}. \quad (56.3)$$

Врахуємо рівності (56.6) і (56.7) з попереднього параграфа і підставимо їх значення  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial q}$ , а також для сил: повертаючої сили і сили опору в рівняння (57.3)

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + Cq = 0. \quad (57.4)$$

Ми отримали диференціальне рівняння другого порядку. Поділимо його на  $a$ :

$$\ddot{q} + \frac{b}{a}\dot{q} + \frac{C}{a}q = 0. \quad (57.5)$$

Введемо наступні позначення:

$$\frac{C}{a} = \omega_0^2; \quad \frac{b}{a} = 2\beta. \quad (57.6)$$

Тоді з врахуванням формул (56.6) диференціальне рівняння (57.5) прийме вигляд:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2q = 0. \quad (57.7)$$

Щоб розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (57.8)$$

Коренями цього характеристичного рівняння є:

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (57.9)$$

Можуть бути два випадки:

1)  $\beta < 0$ ;

2)  $\beta > 0$ .

Перший випадок відповідає малому опору середовища, а другий випадок відповідає великому опору середовища.

Розглянемо перший випадок. З розгляду рівняння (57.9):

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Введемо позначення:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (57.10)$$

Тоді

$$\lambda = -\beta \pm i\omega.$$

Оскільки характеристичне рівняння має такий розв'язок, то загальний розв'язок диференціального рівняння (57.7) буде мати вигляд:

$$q = e^{-\beta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Замінімо константи інтегрування:

$$C_1 = A_0 \sin \varepsilon; \quad C_2 = A_0 \cos \varepsilon.$$

З врахуванням замін, розв'язок диференціального рівняння має такий вигляд:

$$q = A_0 e^{-\beta t}(\sin \varepsilon \cos \omega t + \cos \varepsilon \sin \omega t).$$

За формулами зведення, вираз, який буде знаходитися в дужках буде дорівнювати  $\sin(\omega t + \varepsilon)$ .

Тоді

$$q = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (57.11)$$

В цьому випадку система буде виконувати коливання навколо положення рівноваги з частотою:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Введемо позначення замість  $\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \frac{b}{a} = 2\beta$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}$$

Період цих коливань буде дорівнювати:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{C}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}}$$

Коливання системи в цьому випадку будуть згасаючими. Роль амплітуди цих коливань буде величина:

$$A = A_0 e^{-\beta t},$$

де  $\beta$  - коефіцієнт згасання.

Амплітуда з часом буде зменшуватися за експоненціальним законом (рис. 37).

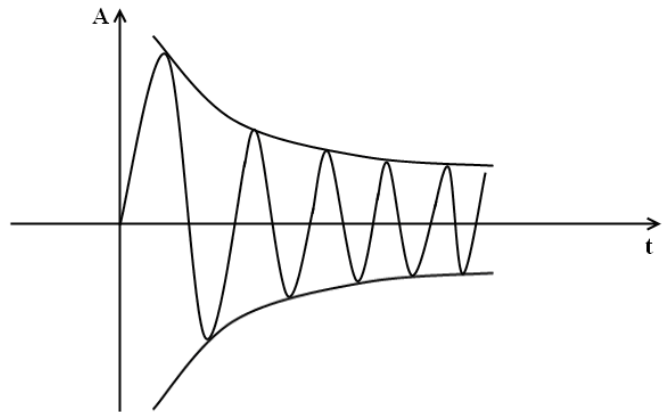


Рис. 37

Якщо скласти ряд амплітуд, через кожний період часу, то ми можемо знайти *логарифмічний декремент згасання* - величину, яка характеризує інтенсивність згасання коливань.

*Декрементом згасання* називають логарифм натуральний відношення двох послідовних амплітуд. Позначають:

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

Розглянемо другий випадок ( $\beta > \omega_0$ ). В цьому випадку обидва корені, що характеризують рівняння будуть дійсними від'ємними числами. І тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (57.7) будемо шукати в такому вигляді:

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Рух в цьому випадку вже не буде періодичним. Отже, якщо у випадку великого опору середовища вивести систему із стану стійкої рівноваги, то ця система почне асимптотично повертатися в свій початковий стан не виконуючи при цьому коливань, такий рух називають *аперіодичним*.

## §58. Вимушені коливання системи з однією ступеню вільності

Нехай на виведену із стану стійкої рівноваги систему крім повертаючої сили  $Q = -C_1 q$  і сили опору  $Q_{\text{оп}} = -b\dot{q}$  діє, ще деяка зовнішня змінна сила  $Q' = Q'(t)$ . Тоді вираз для рівняння Лагранжа другого роду буде наступний:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + Q_{\text{оп}} + Q'. \quad (58.1)$$

Нехай зовнішня сила буде періодичною і її величина буде змінюватись за законом:

$$Q' = H_0 \sin f t, \quad (58.2)$$

де  $H_0$  - це є максимальне значення цієї сили;  $f$  - це частота, з якою змінюється зовнішня сила.

З врахуванням результатів рівнянь (56.6), (56.7) і (57.6), (57.7) попередніх двох параграфів, а також, що сила змінюється згідно рівняння (58.2), то рівняння Лагранжа другого роду (58.1) прийме вигляд:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + Cq = H_0 \sin f t.$$

Поділимо отриманий вираз на  $a$ , отримаємо:

$$\ddot{q} + \frac{b}{a}\dot{q} + \frac{C}{a}q = \frac{H_0}{a} \sin f t.$$

Введемо позначення:

$$\frac{b}{a} = 2\beta; \quad \frac{C}{a} = \omega_0^2; \quad \frac{H_0}{a} = h_0.$$

Тоді попереднє рівняння прийме вигляд:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = h_0 \sin(ft). \quad (58.3)$$

Це є диференціальне лінійне рівняння другого порядку з правою частиною. Загальний розв'язок цього рівняння буде складатись із суми двох розв'язків: загального розв'язку однорідного диференціального рівняння:

$$q = q_0 + q'; \quad (58.4)$$

і частинного розв'язку цього рівняння.

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння  $q_0$ :

$$q_0 = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (58.5)$$

Частинний розв'язок рівняння (57.5) будемо шукати у вигляді:

$$q' = B \sin(ft + \varphi), \quad (58.6)$$

де  $B$  і  $\varphi$  - невідомі константи.

Оскільки рівняння (58.6) є частинним розв'язком рівняння (58.3), то ми можемо підставити його в це рівняння. Попередньо знайдемо  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$ :

$$\dot{q} = Bf \cos(ft + \varphi),$$

$$\ddot{q} = -Bf^2 \sin(ft + \varphi).$$

Зробимо в цих рівняннях заміну:

$$ft + \varphi = \theta.$$

Підставимо значення для  $\dot{q}$  і  $\ddot{q}$  в рівняння (58.3):

$$-Bf^2 \sin \theta + 2\beta Bf \cos \theta + \omega_0^2 B \sin \theta = h_0 \sin ft =$$

замість  $ft$  зробимо заміну  $\theta - \varphi$  і перепишемо:

$$= h_0 \sin(\theta - \varphi) = h_0 \sin \theta \cos \varphi - h_0 \sin \varphi \cos \theta.$$

При цьому врахувавши формулу для  $\sin$  різниці двох кутів:

$$(\omega_0^2 B - Bf^2) \sin \theta + 2\beta Bf \cos \theta = h_0 \cos \varphi \sin \theta - h_0 \sin \varphi \cos \theta.$$

Тоді

$$\begin{aligned} B(\omega_0^2 - f^2) &= h_0 \cos \varphi, \\ 2\beta Bf &= -h_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (58.7)$$

Піднесемо рівняння (58.7) до квадрату і додамо:

$$B^2(\omega_0^2 - f^2)^2 + 4\beta^2 B^2 f^2 = h_0^2;$$

$$B = \frac{h_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - f^2)^2 + 4\beta^2 f^2}}. \quad (58.8)$$

Знайдемо ще одну невідому константу  $\varphi$ , тобто знайдемо відношення: поділимо друге рівняння системи (58.7) на перше. Тоді

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta f}{f^2 - \omega_0^2}. \quad (58.9)$$

Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (58.3) прийме вигляд:

$$q' = \frac{h_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - f^2)^2 + 4\beta^2 f^2}} \sin(ft + \varphi). \quad (58.10)$$

З врахуванням рівнянь (58.5) і (58.10) розв'язок диференціального рівняння (58.3) отримаємо в такому вигляді. Підставимо ці значення в (58.4)

$$q = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varepsilon) + \frac{h_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - f^2)^2 + 4\beta^2 f^2}} \sin(ft + \varphi). \quad (58.11)$$

Таким чином, у випадку дії зовнішньої сили на систему при здійсненні нею власних коливань має місце накладання власних коливань з частотою  $\omega$  і вимушених коливань системи з частотою  $f$ . Але таке накладання коливань має місце лише в початковий момент часу. З часом власні коливання системи згасають і система буде здійснювати коливання лише під дією зовнішньої змінної сили за законом (58.10). Це будуть *вимушені коливання* з амплітудою

$$B = \frac{h_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - f^2)^2 + 4\beta^2 f^2}}.$$

При умові  $\omega_0 = f$  амплітуда коливань буде максимальною. При цьому спостерігається явище різкого збільшення амплітуди - *резонанс*.

## Лекція 11. АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

§59. Алгоритм розв'язування задач з кінематики.

§60. Алгоритм розв'язування задач з динаміки.

[2. §28, §29; 4. Т.1, Т.2]

### §59. Алгоритм розв'язування задач з кінематики

Способи задання руху:

1. *Векторний*:  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

2. *Натуральний*:  $s = f(t)$ . Задається положення точки.

3. *Координатний*:  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ ;  $z = z(t)$ .

Задача зводиться до визначення траєкторії точки, тобто встановлення рівняння, яке описує криву по якій рухається точка. Ми повинні з закону руху виключити час. І отримаємо рівняння  $F(x, y, z) = 0$  - це і буде рівняння траєкторії.

Визначення вектора швидкості і прискорення руху матеріальної точки. Коли задано рух в координатній формі, то її розв'язують у наступному порядку:

1. Знаходять проекції швидкості на осі координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

2. Знайшовши проекції, визначаємо величину швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

3. Шукаємо напрям швидкості через направляючі косинуси, тобто через косинуси кутів, які утворюють вектор швидкості з осями координат

$$\begin{aligned}\cos(\vec{v}, \overset{\wedge}{OX}) &= \frac{v_x}{v}; \\ \cos(\vec{v}, \overset{\wedge}{OY}) &= \frac{v_y}{v}; \\ \cos(\vec{v}, \overset{\wedge}{OZ}) &= \frac{v_z}{v}.\end{aligned}$$

Якщо задача зводиться до визначення прискорення.

1. Визначаємо проекції на осі координат як перші похідні від проекції швидкості або другі похідні по координаті:

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; w_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; w_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

2. Після цього знаходимо величину прискорення:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

В деяких задачах потрібно визначити тангенціальне, нормальне прискорення і радіус кривизни, якщо рух точки заданий в координатній формі. При цьому поступають так: знайшовши величину прискорення, а також маючи вираз для швидкості шукають тангенціальне прискорення

$$w_t = \frac{dv}{dt}.$$

Визначивши тангенціальне прискорення  $w_t$  ми можемо знайти нормальне прискорення  $w_n$ :

$$\begin{aligned}w_n &= \sqrt{w^2 - w_t^2}; \\ v^2 &= v_x^2 + v_y^2.\end{aligned}$$

Продиференціюємо:

$$\begin{aligned}2vdv &= 2v_x dv_x + 2v_y dv_y \quad \left| \frac{1}{2dt} \right.; \\ v \frac{dv}{dt} &= \frac{dv_x}{dt} v_x + \frac{dv_y}{dt} v_y; \\ \frac{dv}{dt} = w_t; \quad \frac{dv_x}{dt} = w_x; \quad \frac{dv_y}{dt} = w_y; \\ w_t &= \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v}.\end{aligned}$$

Знаючи  $w_t$  і  $w_n$  можна обчислити радіус кривизни

$$\rho = \frac{v^2}{w_n}.$$

Якщо рух матеріальної точки заданий в полярній системі координат (рис. 38), а потрібно знайти  $w_t$ ,  $w_n$  і радіус кривизни, поступають наступним чином.

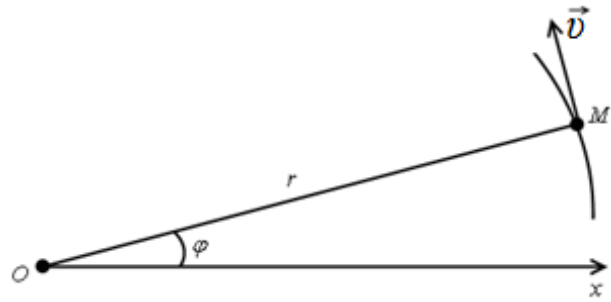


Рис. 38

Визначають величину радіальної

складової швидкості  $v_r$ , трансверсальної швидкості  $v_\varphi$  і за цими значеннями визначають швидкість  $v$ , тобто

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$$

та шукають тангенціальне прискорення

$$w_t = \frac{dv}{dt}.$$

Ні в якому разі тут не можна плутати тангенціальне  $w_t$  і нормальне  $w_n$  прискорення з радіальним  $w_r$  і трансверсальним  $w_\varphi$  прискоренням

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2}.$$

В деяких задачах при знаходженні  $W_t$  ми отримуємо для певного часу невизначеність

$$w_t = \frac{0}{0}.$$

Якщо при визначенні  $w_t$  для певного моменту часу ми отримуємо невизначеність, то потрібно дослідити рух точки.

1. Знайти рівняння траєкторії.
2. Дослідити рух точки в момент часу для якого визначається  $w_t$ .

## §60. Алгоритм розв'язування задач з динаміки

При вивченні руху матеріальної точки під дією зовнішніх сил розглядають дві задачі.

Перша задача зводиться до знаходження сил за законом руху точки.

Друга задача зводиться до знаходження окремих характеристик руху ( $v$ ,  $w$ ) точки, якщо задані сили, що діють на дану точку.

При розв'язуванні першої задачі знаходять проекції прискорень

на осі координат як другі похідні по координатах:

$$w_x = \ddot{x};$$

$$w_y = \ddot{y};$$

$$w_z = \ddot{z}.$$

Складають диференціальні рівняння руху:

$$m\ddot{x} = F_x;$$

$$m\ddot{y} = F_y;$$

$$m\ddot{z} = F_z.$$

І з цих визначень знаходять проекції сили на осі координат

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Напрямок сили визначають за направляючими косинусами

$$\cos(\vec{F}, \wedge \overrightarrow{OX}) = \frac{F_x}{F},$$

$$\cos(\vec{F}, \wedge \overrightarrow{OY}) = \frac{F_y}{F},$$

$$\cos(\vec{F}, \wedge \overrightarrow{OZ}) = \frac{F_z}{F}.$$

Розв'язування другої задачі динаміки більш складніше тому, що воно зводиться до операції інтегрування. Розв'язання цієї задачі проводиться в наступному порядку.

1. Вибирається система координат. Систему координат потрібно вибирати так і таку, щоб простими були початкові координати точки.

2. Розглянути проміжне положення точки при її русі і встановити, які сили діють на точку. При цьому на рисунку вказати напрямок дії сил. Знайти проекції всіх сил, що діють на точку на осі координат.

3. Складаємо диференціальні рівняння руху точки, інтегруємо їх і отримуємо перший інтеграл руху, тобто залежність проекції швидкості від часу. Але в це рівняння буде входити невідома константа інтегрування.

4. Визначити константи інтегрування використовуючи при цьому початкові умови. Підставляємо її у перший інтеграл руху в рівняння проекції швидкості і проводимо повторне інтегрування. Після повторного інтегрування появляється константа інтегрування, потім знову використовуємо початкові умови.

Якщо в задачі необхідно знайти швидкість точки, а розв'язок диференціального рівняння зводиться до знаходження координати як функції від часу

$$x = e^{\lambda t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Щоб знайти константи інтегрування нам необхідно ще рівняння, в які вони входять. При цьому диференціальний вираз для координат по часу і знаходять залежність проекції швидкості по часу. При цьому константи  $C_1$  і  $C_2$  будуть входити в цю залежність.

## **ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТА ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ З КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

1. Кінематика поступального руху твердого тіла.
2. Розсіювання частинок в центральном-симетричному полі. Визначення функціональної залежності прицільного параметра від кута розсіювання. Формула Резерфорда для розсіювання  $\alpha$  - частинок в полі атомного ядра. Ефективний диференціальний переріз розсіювання.
3. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки. Формулювання основної задачі динаміки. Перший та другий інтеграли руху. Роль початкових умов. Принцип причинності класичної механіки.
4. Реакції зв'язків. Постулат про ідеальні зв'язки. Елементи аналітичної статистики. Принцип можливих (віртуальних) переміщень. Умови рівноваги голономної механічної системи.
5. Основи динаміки тіл змінної. Рівняння Мещерського.
6. Узагальнені імпульси. Циклічні координати та циклічні інтеграли рівнянь Лагранжа.
7. Закони Ньютона. Зв'язок третього закону з однорідністю і ізотропністю простору.
8. Фізичний зміст функції Гамільтона. Зв'язок цієї функції з законам збереження.
9. Інерціальні системи відліку. Перетворення Галілея. Принцип відносності класичної механіки.
10. Рівняння Лагранжа другого роду. Вираз кінетичної енергії системи через її узагальнені швидкості. Інтеграл енергії рівнянь Лагранжа.
11. Класичні уявлення про простір і час. Системи відліку. Траєкторія руху. Вектор переміщення.
12. Перша задача Ціолковського.
13. Натуральний тригранник. Радіус кривизни траєкторії. Тангенціальне і нормальне прискорення точки.
14. Дужки Пуассона.

15. Класифікація вільних механічних систем.
16. Згасаючі коливання невіЛЬНОї системи. Дисипативна функція Релея. Декремент згасання.
17. Обертання тіла навколо нерухомої осі. Кінематичні рівняння Ейлера.
18. Теорема Лежен-Діріхле про умови стійкої рівноваги системи. Малі коливання системи з однією ступеню вільності. Функція Лагранжа для малих коливань системи поблизу положення стійкої рівноваги. Гармонічний осцилятор. Квазіпружня сила. Енергетичні перетворення в коливній системі.
19. Вектор швидкості матеріальної точки. Проекції швидкості матеріальної точки в декартовій системі координат. Секторна швидкість.
20. Рівняння Лагранжа другого роду. Вивід цих рівнянь з загального рівняння динаміки.
21. Теорема про рух центра мас системи матеріальних точок.
22. Вивід рівнянь Лагранжа з принципу Остроградського-Гамільтона.
23. Класифікація сил в механіці (потенціальні сили, гіроскопічні сили, дисипативні).
24. Канонічні перетворення. Канонічні рівняння Гамільтона. Гамільтоніан (функція Гамільтона).
25. Теорема про зміну моменту імпульсу незамкненої системи. Закон збереження моменту імпульсу замкненої системи, його зв'язок з третім законом Ньютона. Симетрія зовнішнього силового поля та збереження окремих складових моменту імпульсу системи.
26. Загальне рівняння динаміки. Принцип Даламбера.
27. Якісне дослідження руху частинки в центрально-симетричному полі по вигляду її одномірного ефективного потенціалу.
28. Структура рівнянь Лагранжа другого роду для різних механічних систем. Функція Лагранжа, її структура для систем з потенціальними силами та узагальненими потенціальними силами.
29. Робота сили. Силова та потенціальна енергія частинки в зовнішньому силовому полі. Загальна умова потенціальності поля. Приклади потенціальних полів. Центрально-симетричне поле.
30. Узагальнені сили. Віртуальна робота.
31. Класична механіка, як теорія механічного руху макроскопічних тіл. Основні розділи та об'єкти вивчення класичної

механіки (матеріальна точка, система матеріальних точок, абсолютно тверде тіло). Границі застосування класичної механіки.

32. Розв'язок задачі про рух частинки в центрально-симетричному полі в загальному випадку. Метод одномірного ефективного потенціалу.

33. Можливі та дійсні переміщення.

34. Теорема про зміну імпульсу незамкненої системи. Закон збереження імпульсу замкненої системи, його зв'язок з однорідністю простору.

35. Вектор прискорення матеріальної точки. Проекції прискорення в декартовій системі координат.

36. Рух зарядженої частинки в кулонівському полі сил. Задача Кеплера.

37. Теорема про зміну кінетичної і повної механічної енергії системи. Закон збереження повної механічної енергії системи та його зв'язок з однорідністю часу.

38. Невільна система матеріальних точок. Зв'язки та їх класифікація. Рівняння зв'язків. Число ступенів вільності системи.

39. Кінематика матеріальної точки. Натуральна, координатна та векторна форми рівнянь руху матеріальних точок.

40. Варіаційний принцип Остроградського-Гамільтона.

41. Момент сили відносно центра та відносно осі. Момент імпульсу матеріальної точки. Теорема про зміну моментів імпульсу частинки. Закон збереження моменту імпульсу частинки в центрально-симетричному силовому полі відносно центра сил (закон площ).

42. Можливі та дійсні переміщення.

43. Теорема про зміну імпульсу незамкненої системи. Закон збереження імпульсу замкненої системи, його зв'язок з однорідністю простору. Симетрія зовнішнього силового поля та збереження окремих складових вектора імпульсу незамкненої системи.

44. Рівняння руху частинки відносно системи відліку, яка рухається поступально і прискорено. Сили інерції. Принцип еквівалентності загальної теорії відносності.

45. Друга задача Ціолковського.

46. Узагальнені координати.

47. Одномірний рух. Якісне дослідження одномірного руху за допомогою графіків повної механічної енергії та потенціальної енергії системи. Границі одномірного руху. Період фінітного руху.

48. Момент імпульсу твердого тіла, що обертається навколо нерухомого центра.

49. Закон зміни маси. Реактивна сила, реактивне прискорення.

50. Проекції швидкості і прискорення матеріальної точки в полярній системі координат.

## **РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА З КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

### **Класична механіка**

1. Андреев В.О., Дущенко В.П., Федорченко А.М. Теоретична фізика. Класична механіка. К.: Вища школа, 1984. 224 с.

2. Бугаєнко Г.О. Курс теоретичної механіки: Підручник для студентів пед. ін-тів. Вид. 2-е, перероб. і допов. К.: Рад. шк., 1968. 367 с.

3. Гаральд Іро. Класична механіка / Пер. з нім. Гайда Р., Головач Ю. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 1999. 464 с.

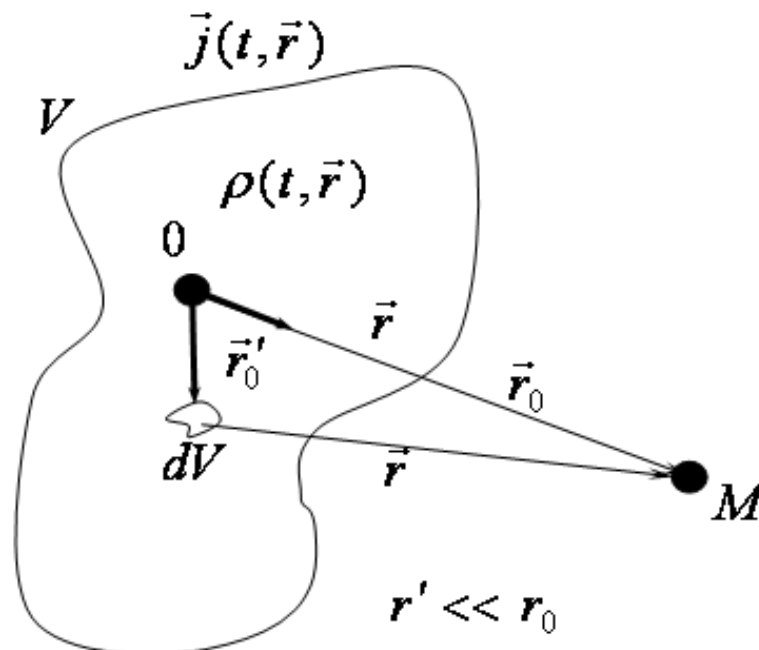
4. Класична механіка. Деякі задачі. Навчальний посібник. / Уклад. П.О. Наказной, О.В. Кравцов. Електронне мережне навчальне видання. Київ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 47 с. <https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/48359/1/cm.problems.2022.pdf>

5. Класична механіка (курс лекцій): навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей. / Уклад. М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко. Умань: ПП «Жовтий», 2015. 160 с.

6. Павловський М.А. Теоретична механіка. К.: Техніка, 2002. 511 с.

## Розділ 2.

# ЕЛЕКТРОДИНАМІКА. СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ (СТВ)



## Лекція 12. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ (СТВ). РЕЛЯТИВІСТСЬКА КІНЕМАТИКА

§61. Спеціальна теорія відносності, як розділ теоретичної фізики. Експериментальні основи СТВ.

§62. Постулати Ейнштейна як базисні принципи СТВ.

§63. Простір, час і системи відліку в СТВ. Просторово-часовий інтервал та його інваріантність.

§64. Перетворення координат Лоренца. Одержання їх на основі постулатів Ейнштейна.

§65. Кінематичні наслідки перетворення Лоренца.

§66. Перетворення швидкостей в СТВ. Відносна швидкість (закон суми швидкостей).

§67. Пояснення СТВ досліду Фізо та аберації світла.

[1. §100-§104; 3. §1.1-§1.6; 4. §54-§59; 5. §2.1-§2.4]

### §61. Спеціальна теорія відносності, як розділ теоретичної фізики. Експериментальні основи СТВ

Починаючи з 1630 року у фізиці панував принцип відносності Галілея. Ніхто і не задумувався, чому маса і час при переході з однієї інерціальної системи в іншу не змінюються (інваріантні). В СТВ маса і час не є інваріантними

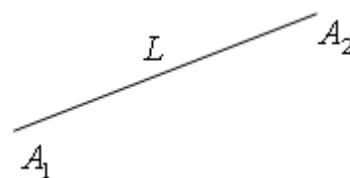


Рис. 39.

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (61.1)$$

Або для відстані (рис. 39):

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}. \quad (61.2)$$

В точці  $P$  в час  $t$  відбулась подія. Такий самий час за теорією відносності Галілея буде і в інших точках простору. СТВ не погоджується з цим.

Теорія відносності Галілея зіткнулась з непереборними труднощами при поясненні оптичних явищ: аберації світла, ефекту Доплера, негативного результату дослідів Майкельсона, дослідів Фізо

з визначення швидкості світла в рухомих середовищах.

В XIX столітті виникла потреба побудови нової теорії, яка усунула б ці труднощі. Для її побудови було взято вище згадані факти з оптики. Над створенням працювали Пуанкаре, Мах, Ейнштейн. Ейнштейн назвав її СТВ в 1905 році.

## §62. Постулати Ейнштейна, як базисні принципи СТВ

Пристаючи до нової теорії дослідники розуміли, що потрібні ряд передумов:

1) теорія повинна забезпечити рівноправність інерціальних систем відліку. Наприклад, в системі  $K$  рух рівномірний, то і в системі  $K'$  він рівномірний;

2) забезпечити принцип відносності в науці. Граничний випадок переходу класичної теорії відносності в СТВ. Тобто не відкидається надбання попередніх поколінь;

3) необхідно, щоб нова теорія могла пояснити суть і наслідки тих експериментів, які не пояснювала стара (досліди з оптики);

4) для побудови теорії необхідно було прийняти або динаміку Ньютона, або теорію електромагнітного поля, чи об'єднати їх.

Уже в XIX столітті було відомо, що гіпотеза Гюйгенса про світлоносний ефір була гальмом у розвитку фізики. Ейнштейн вважав, що в новій теорії повинно бути як найменше постулатів. Він сформулював два постулати.

*Перший постулат* (принцип відносності Ейнштейна): всі закони природи однакові у всіх інерціальних системах відліку (ІСВ). Тобто рівномірний і прямолінійний рух тіл не впливає на процеси, які в цих системах протікають.

Цей постулат є логічним продовженням принципу відносності Галілея. Він враховує молекулярні, електричні процеси. Що правда для мікро процесів, в яких рідко проявляються хвильові властивості частинок він не сприйнятий. Цей постулат передбачає рівноправність всіх інерціальних систем відліку. Простір повинен бути однорідним, як передбачається постулатом. В неоднорідному просторі перший постулат втрачає свою суть.

Якщо простір однорідний, то з математичної точки зору ми можемо здійснити перетворення паралельним перенесенням початку. Із цього постулату випливає ще такий факт, який базується на інерціальних системах відліку.

Якщо в одній із координат системи  $K$  ми зуміли виразити закон

аналітичним виразом, нехай  $F$ ,

$$F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, v, w, \dots), \quad (62.1)$$

то цей закон у системі  $K'$ , повинен бути представлений аналітичною функцією

$$F(x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}', v', w', \dots). \quad (62.2)$$

Виявилось, що такі самі функції можна представити у вигляді функцій (62.1), (62.2) для будь-яких систем, але при математичному переході від  $K$  до  $K'$  тривимірний простір і час не влаштовує. Ці загальні координати слід представляти символами чотиривимірного простору – часу.

В першому постулаті нічого не говориться про гіпотезу Гюйгенса про світловий ефір. Це відображено у другому постулаті Ейнштейна.

*Другий постулат* (принцип існування граничної швидкості): швидкість світла  $c$  в пустоті є граничною. Вона в усіх ІСВ і всіх напрямках однакова; швидкість світла не залежить ні від швидкості руху джерела ні від швидкості руху приймача:

$$c = (2,99792458 \pm 12) \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Виходячи із формулювання другого постулату - не існує реальних тіл, які могли б рухатись із швидкістю більшою  $c$ , та сигналів і імпульсів, які могли б перевищувати швидкість світла.

Як видно, другий постулат зовсім не згадує про світлоносний ефір, отже, доведення тих фізичних ефектів потрібно здійснити без гіпотези про світловий ефір.

Другий постулат підкреслює, що мова йде про ізотропний простір. З математичної точки зору - перетворення координат можна здійснити повертанням осей.

### **§ 63. Простір, час і системи відліку в СТВ. Просторово-часовий інтервал та його інваріантність**

Час  $t$  згідно вчення Ейнштейна має різні масштаби протікання в різних системах. Тобто час треба прийняти як рівноправний з просторовими координатами. Домовимось як будемо зображати системи.

Систему  $K'$  ми будемо описувати як  $X', O', Y', Z'$ . Домовимось розташовувати цю координатну систему так, щоб координатна вісь  $X', O', Y'$  ковзала по  $XOY$  (рис. 40).

На рис. 40  $v$  – відносна швидкість відносно осі  $XOY$ . В цей

момент співпадання точок з середньою точкою  $C$  посиляється короткочасний електромагнітний імпульс.

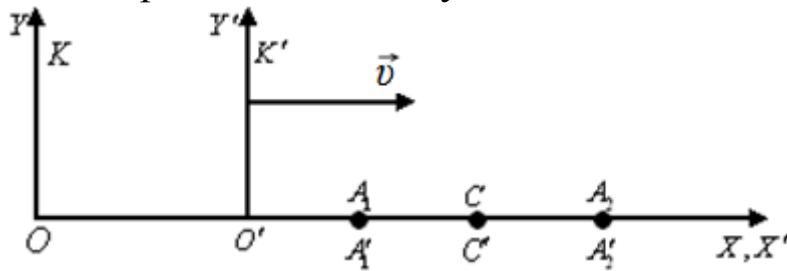


Рис. 40

1. Прихід електромагнітного імпульсу в точку  $A_1$  буде відмічати час  $t$  і буде поява імпульсу і в точці  $A_2$  і час  $t$ .

Причому  $\Delta t_1, \Delta t_2$  – однакові, тобто  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ ,

де  $\Delta t_1$  - час, який потрібний для проходження імпульсу з  $A_1$  в  $C$ ;  $\Delta t_2$  - час, який потрібний для проходження імпульсу з  $C$  в  $A_2$ .

В момент співпадання  $t = t' = 0$ , то  $t_1 = t_2$  - події  $A_1$  і  $A_2$  є одночасними. Тоді події  $1'$  і  $2'$ , тобто прихід імпульсу в  $A'_1$  і  $A'_2$  є одночасними. Події одночасні в  $K'$  виявились не одночасними в системі  $K$ .

*Висновок.* Коли події одночасні в одній системі координат, неодноразні в другій, то час  $t$  в різних системах протікає по різному.

Виходячи із розглянутого експерименту, ми повинні ввести нові поняття. Матеріальна точка – подія, яка не тільки буде відображати тіло, але й включатиме той процес, який ми досліджуємо з даною матеріальною точкою. Час  $t$  являється четвертою координатою.

В СТВ виявилось, що галілеївський відрізок не виявляється інваріантом

$$l \neq \text{invar},$$

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Виявилось, що інваріантом являється просторово-часовий інтервал  $S_{12}$  (рис. 41)

$$S_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)};$$

$$S'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - ((x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2)};$$

$$S_{12} = S'_{12} = S''_{12} = \dots = \text{invar}.$$

На рис. 41  $\xi$  – подія.

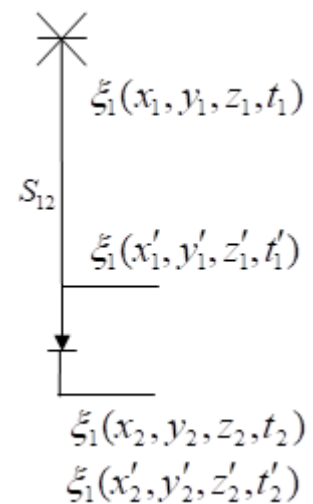


Рис. 41

## § 64. Перетворення координат Лоренца. Одержання їх на основі постулатів Ейнштейна

Просторово часовий інтервал між двома подіями є інваріантом. Він однаково виражається в ІСВ і має однакові значення.

1. Перетворення координат повинно бути виконано на основі постулатів Ейнштейна.

2. Під час складання закону часова координата є рівноправною координатою як і просторові  $x, y, z$ , отже, вона зазнає перетворень.

3. Перетворення координат повинні бути лінійними.

4. У складанні цих співвідношень в перпендикулярному напрямку залишаються без змін в одній і в другій координатній системі.

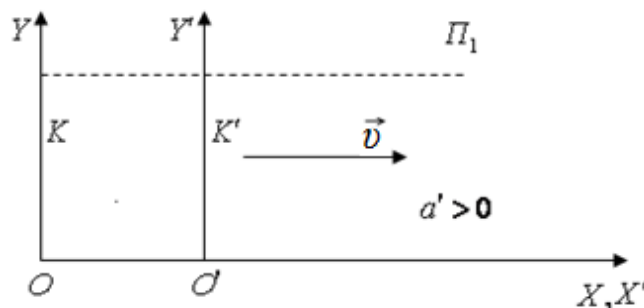


Рис. 42

Відомо, що методом  $\kappa$ (капа)-коефіцієнта можна отримати, всі основні наслідки перших принципів СТВ - постулатів Ейнштейна. Перевага цього методу в тому, що він дозволяє уникнути явного введення координатної системи. Тому перетворення Лоренца можна отримати також і методом  $\kappa$ -коефіцієнта.

Нехай в системі  $K'$  (рис. 42) проведемо площину  $y' = a = \text{const}$ , вона перпендикулярна до осі  $Y'$ . Спостерігач помітив, що її рівняння:

$$y = \kappa a' = a.$$

Спостерігач в системі  $K$ :

$$y = a.$$

Тоді для спостерігача в системі  $K'$ :

$$a = \kappa a'.$$

За спостереженнями спостерігача, що знаходиться в системі  $K'$  два сигнали будуть розділені проміжком часу в  $\kappa$  разів. Значить, відповідний сигнал піде від спостерігача в системі  $K'$  до  $K$  через цей проміжок часу. Але спостерігач у системі  $K$  прийме його через проміжок часу  $\kappa t$ , а цей проміжок часу збільшиться в  $\kappa$  разів і стане

рівним  $\kappa^2 t$ .

Відповідно з точки зору спостерігача системи  $K$  весь шлях другого сигналу до спостерігача в системі  $K'$  і назад займе час  $(\kappa^2 - 1)t$ . Звідки приходять до висновку, що

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= 1; \\ \kappa &= \pm 1; \\ \kappa &= 1.\end{aligned}$$

В напрямку паралельному осі  $Y$  ми показали, що  $a' = a$ . Відрізок перпендикулярний площині. В напрямі перпендикулярному до переміщення просторової координати не зазнають змін (при нашому виборі системи координат коли  $OX$  ковзає по  $OX'$  інші осі паралельні). Такі перетворення координат, які задовольняють цим чотирьом положенням називаються перетвореннями Лоренца:

$$\begin{aligned}x &= a(x' + vt'); \\ y &= y'; z = z'; \\ t &= \theta x' + \gamma t'.\end{aligned}\tag{64.1}$$

Момент, коли система  $K'$  геометрично співпадає з  $K$  (осі  $O'X', O'Y', O'Z'$ ) з осями  $OX, OY, OZ$  в цей момент годинник ставлять на нуль. В цей момент здійснюється випускання короткочасного світлового імпульсу. Він буде розповсюджуватися в кожному напрямку з швидкістю  $c$ .

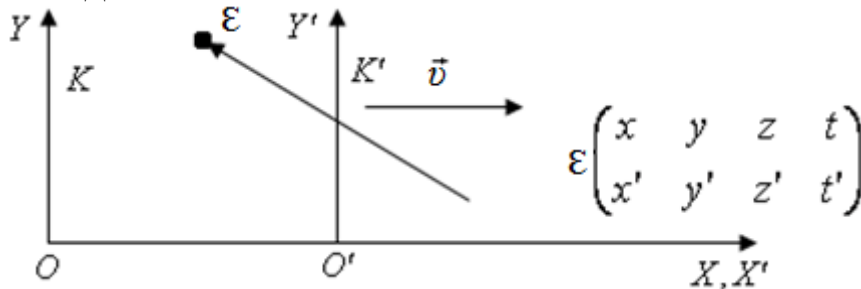


Рис. 43

1. Випуск електромагнітного імпульсу. Всі координати дорівнюють нулю в системах  $K$  і  $K'$ .

2. Сигнал прийшов в точку  $\epsilon$  (рис. 43). Фронт хвилі описується за формулою для сферичної поверхні:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.\tag{64.2}$$

Запишемо формулу (64.2) у системі  $K'$ :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c'^2 t'^2 = 0.\tag{64.3}$$

Підставимо значення координат  $x, y, z, t$  з виразу (64.1) в рівняння (64.2)

$$\begin{aligned}
&(\alpha^2 - c^2\theta^2)x'^2 + 2(\alpha^2J - c\gamma^2\theta)x't' + \\
&+ (\alpha^2J^2 - c^2\gamma^2)t'^2 + y'^2 + z'^2 = 0; \tag{64.4} \\
&\alpha^2 - c^2\theta^2 = 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&v\alpha^2 - \theta\gamma c^2 = 0; \\
&v^2\alpha^2 - c^2\gamma^2 = -c^2. \tag{64.5}
\end{aligned}$$

Перетворення з виразу (64.1) підставимо в рівняння (64.2)

$$\begin{aligned}
x &= \alpha(x' + vt'); \\
y &= y'; z = z'; \\
t &= \theta x' + \gamma t'; \\
x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 &= 0; \\
x = \alpha x' + \alpha vt' &\Rightarrow x^2 = \alpha^2 x'^2 + 2\alpha^2 x'vt' + \alpha^2 v^2 t'^2; \\
t^2 = \theta^2 x'^2 + 2\theta x'\gamma t' + \gamma^2 t'^2 &y^2 = y'^2; z^2 = z'^2.
\end{aligned}$$

Підставляємо значення у формулу (64.2):

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 x'^2 + 2\alpha^2 x'vt' + \alpha^2 v^2 t'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2(\theta^2 x'^2 + 2\theta x'\gamma t' + \gamma^2 t'^2); \\
&\alpha x'^2 + 2\alpha^2 x'vt' + \alpha^2 v^2 t'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2\theta^2 x'^2 + 2c^2\theta x'\gamma t' + c^2\gamma^2 t'^2; \\
&\alpha^2 x'^2 - c^2\theta^2 x'^2 + 2\alpha^2 x'vt' - 2c^2\theta x'\gamma t' + \alpha^2 v^2 t'^2 - c^2\gamma^2 t'^2 + y'^2 + z'^2; \\
&(\alpha^2 - c^2\theta^2)x'^2 + 2(\alpha^2 v - \theta\gamma^2 c^2)x't' + (\alpha^2 v^2 - c^2\gamma^2)t'^2 + y'^2 + z'^2 = 0; \\
&\alpha x'^2 + 2\alpha^2 x'vt' + \alpha^2 v^2 t'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2\theta^2 x'^2 + 2c^2\theta x'\gamma t' + c^2\gamma^2 t'^2; \\
&\alpha^2 x'^2 - c^2\theta^2 x'^2 + 2\alpha^2 x'vt' - 2c^2\theta x'\gamma t' + \alpha^2 v^2 t'^2 - c^2\gamma^2 t'^2 + y'^2 + z'^2; \\
&(\alpha^2 - c^2\theta^2)x'^2 + 2(\alpha^2 v - \theta\gamma^2 c^2)x't' + (\alpha^2 v^2 - c^2\gamma^2)t'^2 + y'^2 + z'^2 = 0.
\end{aligned}$$

Перетворення (64.5):

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 - c^2\theta^2 = 1; \\
&v\alpha^2 - \theta\gamma c^2 = 0; \\
v\alpha^2 - \theta\gamma c^2 = 0 &\Rightarrow v\alpha^2 = \theta\gamma c^2; \\
v^2\alpha^2 - c^2\gamma^2 &= -c^2; \\
\alpha^2 &= \frac{\theta\gamma c^2}{v}; \\
\alpha^2 - c^2\theta^2 &= 1; \\
\frac{c^2\theta\gamma}{v} - c^2\theta^2 &= 1; \\
\alpha^2 v^2 - c^2\gamma^2 &= -c^2; \\
\frac{c^2\theta\gamma}{v} v^2 - c^2\gamma^2 &= -c^2; \\
\theta\gamma v - \gamma^2 &= -1; \\
\theta &= \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma v};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c^2 \theta \gamma}{v} - c^2 \theta^2 &= 1; \\ \frac{c^2 \gamma \gamma^2 - 1}{v \gamma v} - c^2 \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{\gamma^2 v^2} &= 1; \\ \frac{c^2}{v^2} (\gamma^2 - 1) - \frac{c^2 (\gamma^2 - 1)^2}{v^2 \gamma^2} &= 1; \\ \gamma^2 - 1 - \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{\gamma^2} &= \frac{v^2}{c^2}; \\ \frac{\gamma^2 (\gamma^2 - 1) - (\gamma^2 - 1)^2}{\gamma^2} &= \frac{v^2}{c^2}; \\ \frac{\gamma^4 - \gamma^2 - \gamma^4 + 2\gamma^2 - 1}{\gamma^2} &= \frac{v^2}{c^2}; \\ \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} &= \frac{v^2}{c^2}; \\ 1 - \frac{1}{\gamma^2} &= \frac{v^2}{c^2}; \\ \frac{1}{\gamma^2} &= 1 - \frac{v^2}{c^2}; \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Графічно залежність зображена на рис. 44. З середнього рівняння (64.5), знаходимо  $\alpha^2$  і підставляємо його у вирази (64.1) і (64.3).

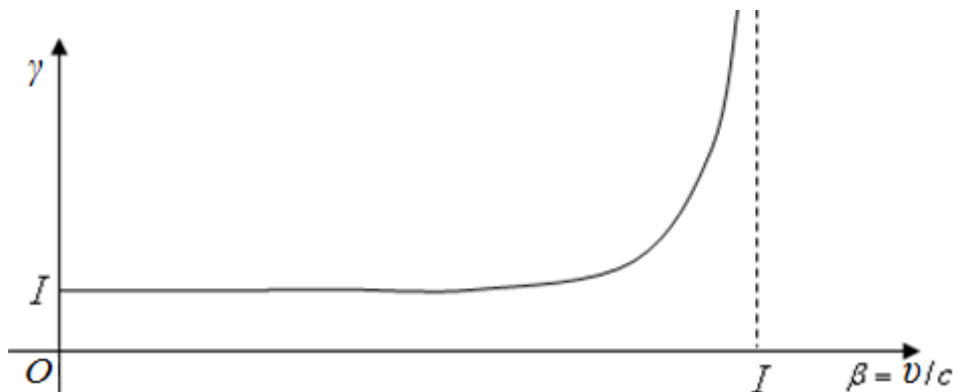


Рис. 44

Вибираємо знак ( $\gamma > 1$ ), тому, що  $(-)$  означав би, що час у системах  $K$  і  $K'$  протікав би в протилежних напрямках, а це неможливо. З урахуванням сказаного запишемо:

$$\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (64.6)$$

$$\beta = \frac{v}{c};$$

$$\alpha = \gamma; \theta = \gamma \frac{v}{c^2}. \quad (64.7)$$

Таким чином, система рівнянь, що відображає закон перетворень Лоренца (64.1) може бути переписаний інакше

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt'); \\ y &= y'; z = z'; \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right); \end{aligned} \quad (64.8)$$

Розглянемо перехід координат із системи  $K$  в систему  $K'$ , тобто  $K \rightarrow K'$ :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt); \\ y' &= y; z' = z; \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x'\right). \end{aligned} \quad (64.9)$$

Вираз (64.9) відображає закон Лоренца для переходу системи  $K \rightarrow K'$ , де  $\gamma > 1$ .

## §65. Кінематичні наслідки перетворення Лоренца

Нас цікавитимуть зміни просторових і часових інтервалів між двома подіями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\left(x_1, y_1, z_1, t_1\right); \quad \varepsilon_2 \left(x_2, y_2, z_2, t_2\right); \\ &\left(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1\right); \quad \left(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2\right); \\ &x_2 - x_1 = f(x'_1, x'_2, t'_1, t'_2). \end{aligned}$$

Але для спрощення задачі ми розташуємо ці дві події на осі  $OX$  і  $O'X'$ . Тоді координати наші спростяться

$$\varepsilon_1(x_1, t_1); y_1 = z_1 = 0.$$

Відповідно в штрихованій системі:

$$\varepsilon'(x', t').$$

А друга подія буде мати:

$$\varepsilon_2(x_2, t_2); \varepsilon_2(x'_2, t'_2).$$

Використовуючи вираз (64.8) ми отримаємо:

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) + \gamma v(t'_2 - t'_1). \quad (65.1)$$

Часовий інтервал між цими двома подіями:

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) + \frac{\gamma v}{c^2}(x'_2 - x'_1). \quad (65.2)$$

Зміна координат у системі  $K'$ :

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma v(t_2 - t_1). \quad (65.3)$$

Зміна часового інтервалу в системі  $K'$ :

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) - \frac{\gamma v}{c^2(x_2 - x_1)}. \quad (65.4)$$

Як видно, з кінематичних наслідків перетворень Лоренца просторові і часові інтервали між подіями істотно залежать від просторових і часових інтервалів між двома подіями. В системі  $K$  у рівняннях (65.3) і (65.4) відбувається даний процес при переході від  $K \rightarrow K'$ .

Однак рівняння (65.3), (65.4) точно не вказують як міняються масштаби просторових і часових систем.

В системі  $K'$  вибирають дві одномісні події з використанням дзеркала (рис. 45-46).

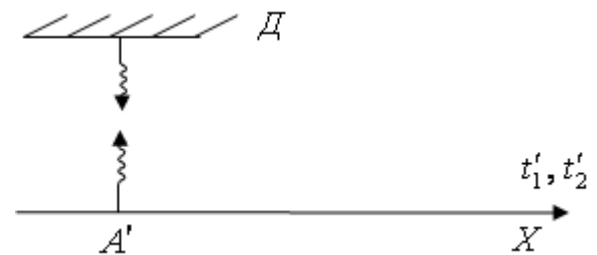


Рис. 45

1. Поширення сигналу.
2. Повернення цього сигналу назад.

Тоді часові інтервали в системах  $K$  і  $K'$  пов'язані між собою

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1);$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1.$$

Як ми домовились, час який відлічує моменти виникнення подій одночасно і тим же годинником, то такий час будемо вважати власним.

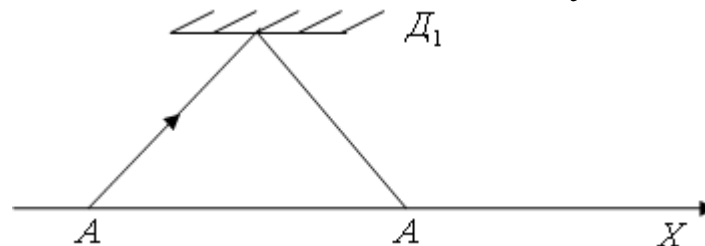


Рис. 46

Система  $K$  рухається відносно  $K'$ . Час, який буде фіксуватись різними годинниками буде невласним. Події при невласному часі будуть неодномісні

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau. \quad (65.5)$$

Це співвідношення показує, що власний часовий інтервал між двома подіями  $\Delta \tau$  завжди коротший від часових інтервалів  $\Delta t$  у невласних ІСВ, там де ці події неодномісні.



Рис. 47

Для того, щоб оцінити масштаби просторових інтервалів, використовують експеримент (рис. 47). Довжина цієї лінійки в системі  $K'$

$$l_0 = x'_2 - x'_1 \Rightarrow l'.$$

В системі  $K'$  будемо визначати власну довжину, бо лінійка перебуває в стані спокою. Тому в системі  $K$  (рис. 48)

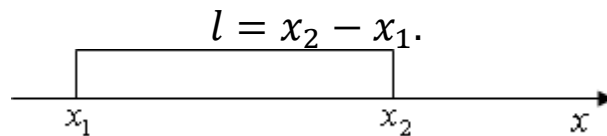


Рис. 48

В системі  $K$  вона буде відмінною від  $K'$ , тому що в системі  $K$  вона рухається відносно  $K'$ .

На основі виразу (65.3) запишемо:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1); t_2 - t_1 = 0, l_0 = \gamma l. \quad (65.6)$$

Як видно із цього співвідношення, ми можемо представити  $l = \frac{l_0}{\gamma}$ , отже, відбуваються укорочення лінійних розмірів тіл, які рухаються.

## §66. Перетворення швидкостей в СТВ. Відносна швидкість (закон суми швидкостей)

Запишемо вираз:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

В проекціях на осі координат:

$$u_x = \frac{dx}{dt}; u_y = \frac{dy}{dt}; u_z = \frac{dz}{dt},$$

де кожна із координат є функцією часу. Це є рівняння руху в

параметричній формі.

Для того щоб знайти проекції на координатній осі, нам треба виключити  $x, t$  через штриховані координати

$$u_x = \frac{d(\gamma(x' + vt'))}{d(\gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'))} = \frac{\gamma d(x' + vt')}{\gamma d(t' + \frac{v}{c^2}x')} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}$$

Поділимо чисельник і знаменник на  $dt'$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}; \quad u_y = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx')} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)};$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)};$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)}, \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)}. \quad (66.1)$$

Ми одержали закон перетворення швидкостей в СТВ при переході  $K' \rightarrow K$  (рис. 49).

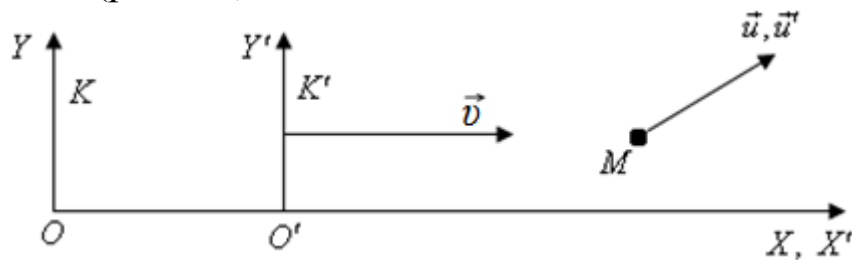


Рис. 49

Формули перетворення швидкостей (закон додавання швидкостей) в СТВ (66.1) різко відмінні від формул перетворення швидкостей в класичній механіці (принцип Галілея).

Якщо швидкості  $v, u \ll c$ , то знаменник в цих формулах перетворюється в 1, і цей закон перетворюється в галілеївський закон швидкостей ( $c \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 1$ ).

Розглянемо поняття відносної швидкості двох частинок:

1. Класичне представлення відносної швидкості.

Задано дві частинки, швидкості яких за допомогою лабораторної установки визначено  $u_1, u_2$ .

В класичній фізиці відносну швидкість визначали таким способом. Одну із частинок приводили в стан відносного спокою (наприклад, частинка  $M_1$ ), то швидкість другої частинки  $M_2$  (рис. 50)

відносно  $M_1$ , що перебуває в стані відносного спокою назвали відносною швидкістю другої частинки відносно першої частинки ( $\vec{u}_{21}$ ).

Приведення першої частинки в стан спокою в класичній фізиці здійснюють від'ємного додаткового руху, швидкість, якого була рівною  $-\vec{u}_1$ . Але для того щоб не змінився стан системи цих частинок, то і другій частинці треба надати швидкості  $-\vec{u}_1$ . Отже, частинки будуть перебувати в складному русі, крім своїх швидкостей нам потрібно прикласти швидкість  $-\vec{u}_1$ .

Відносна швидкість – це швидкість частинки  $u_2$ , якщо швидкість частинки  $u_1$  перебуває в стані відносного спокою. Відносна швидкість  $u_{21}$  з паралелограма рівна:

$$\vec{u}_{21} = \vec{u}_2 + (-\vec{u}_1); \quad (66.2)$$

$$\vec{u}_{21} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1. \quad (66.3)$$

Класична фізика, таким чином вказує, що вектор відносної швидкості другої частинки відносно першої частинки  $\vec{u}_{21}$  рівний векторній різниці швидкості другої частинки  $\vec{u}_2$  і першої частинки  $\vec{u}_1$ .

Для прикладу розглянемо задачу.

*Задача.* Дві частинки рухаються назустріч одна одній з швидкостями  $u_1 = 0,50 c$ ,  $u_2 = 0,75 c$ . Знайти їх відносну швидкість (рис. 51).

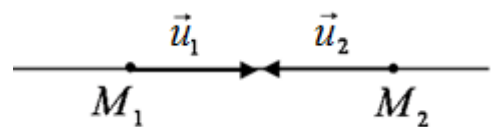


Рис. 51

Так як ці частинки рухаються по одній прямій, то ми візьмемо її за вісь  $OX, O'X'$ .

У випадку задачі

$$\vec{u}_{21} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1.$$

В проекції на вісь  $OX$  маємо:

$$u_{21x} = \vec{u}_{2x} - \vec{u}_{1x}; \quad u_{21} = -u_2 - u_1 = -(u_1 + u_2);$$

$$u_{21} = -(0,5c + 0,75c) = -1,25c.$$

Такий результат класичної механіки не сприятливий для СТВ. Згідно СТВ відносна швидкість тіл неможлива бути ніколи більшою  $c$ .

2. Як і в класичній фізиці в теорії відносності розглядається

поняття відносної швидкості. В даному випадку ми також приведемо одну із частинок у стан спокою, але у власній координатній системі. Інакше кажучи, одну із ІСВ (наприклад,  $K'$ ) жорстко зв'яжемо з однією з частинок (наприклад, з  $M_1$ ). Тоді  $M_1$  перебуває у стані відносного спокою у вибраній системі  $K'$ , то відносною швидкістю другої частинки відносно першої буде її швидкість в системі  $K'$   $\vec{u}'_2$ .

При розв'язанні цієї задачі в СТВ нам треба скористатись законом перетворення швидкостей (66.1) з урахуванням перетворення Лоренца ( $K \rightarrow K'$ ):

$$u'_{2x} = \frac{u_{2x} - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_{2x}}; \quad (66.4)$$

$$u'_{2y} = \frac{u_{2y}}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_{2x}\right)}; \quad (66.5)$$

$$u'_{2z} = \frac{u_{2z}}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_{2x}\right)}. \quad (66.6)$$

*Висновок.* Відносна швидкість другої частинки відносно першої в СТВ є її швидкість  $u'_2$  в тій системі  $K'$ , яка жорстко зв'язана з першою частинкою  $M_1$  (рис. 52).

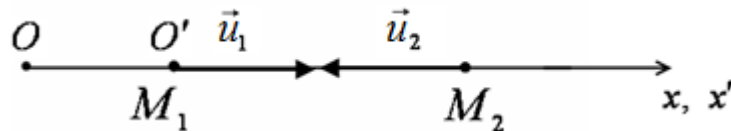


Рис. 52

Розв'язання попередньої задачі проведемо на основі отриманих останніх результатів:

1. Шукаємо  $\vec{u}'_{21}$ :

$$u_{21x} = u_{21} = u'_{2x}.$$

Знаходимо швидкість другої частинки в системі  $K'$

$$u'_{2x} = \frac{u_{2x} - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_{2x}}; \quad u_{2x} = -u_2.$$

Так як ми пов'язали систему  $K'$  з нерухомою частинкою, то  $v = u_1$ .

$$u'_{2x} = \frac{-u_2 - u_1}{1 - \frac{u_1}{c^2} (-u_2)}; \quad \rightarrow \quad u'_{2x} = \frac{-(u_2 + u_1)}{1 + \frac{u_1}{c^2} u_2};$$

$$u'_{2x} = \frac{-1,25c}{1,375} = -0,91c.$$

Знак (-) показує, що частинка рухається вліво, тобто в протилежному напрямку осі координат.

2. Відносна швидкість першої частинки відносно другої. Система  $K'$  в'яжеться з частинкою  $M_2$  жорстко

$$u_{12x} = u_{12} = u'_{1x}; \quad v = -u_2;$$

$$u'_{1x} = \frac{u_{1x} - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_{1x}}; \quad u'_{12} = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_2}{c^2} u_1}; \quad u'_{12} = 0,91c.$$

Відносна швидкість першої частинки відносно другої рівна, але протилежна за напрямом.

Одержані закономірності дали можливість пояснити такі два явища, які класична фізика була неспроможна пояснити.

1. Це аберація світла.

2. Дослід Фізо з визначення швидкості світла в рухомому середовищі.

### §67. Пояснення СТВ досліду Фізо та аберації світла

Легко переконатися в тому, що результат досліду Фізо пояснюється релятивістським законом додавання швидкостей. Згідно формули з §66 швидкості  $u_x$  і  $u'_x$  деякого тіла в системах  $K$  і  $K'$  зв'язані співвідношенням

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad (67.1)$$

де  $v$  - швидкість системи  $K'$  відносно системи  $K$ .

Пов'яжемо з приладом Фізо систему відліку  $K$ , а з рухомою водою – систему  $K'$ . Тоді роль  $v$  буде відігравати швидкість течії води  $v_B$ , роль  $u'_x$  - швидкість світла відносно води, дорівнює  $\frac{c}{n}$ , і нарешті, роль  $u_x$  - швидкість світла відносно приладу  $v_{пр}$ . Підстановка цих значень у формулу (67.1) дає

$$v_{пр} = \frac{\frac{c}{n} + v_B}{1 + \frac{v_B \left(\frac{c}{n}\right)}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v_B}{1 + \frac{v_B}{cn}}$$

Швидкість течії води  $v_B$  набагато менша  $c$ . При цьому отриманий вираз можна спростити наступним чином:

$$v_{пр} = \frac{\frac{c}{n} + v_B}{1 + \frac{v_B}{cn}} \approx \left(\frac{c}{n} + v_B\right) \left(1 - \frac{v_B}{cn}\right) \approx \frac{c}{n} + v_B \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (67.2)$$

(ми знехтували членом  $\frac{v_B^2}{cn}$ ).

Згідно класичним уявленням швидкість світла відносно приладу  $v_{\text{пр}}$  рівна сумі швидкості світла відносно ефіру, тобто  $\frac{c}{n}$ , і швидкості ефіру відносно приладу, тобто  $\alpha v_B$ :

$$v_{\text{пр}} = \frac{c}{n} + \alpha v_B.$$

Порівняння з формулою (67.2) дає для коефіцієнта захоплення  $\alpha$  значення, отримане Фізо (формула  $\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}$ ).

Необхідно мати на увазі, що однакова у всіх системах відліку лише швидкість світла у вакуумі. Швидкість світла в речовині різна в різних системах відліку. Значення  $\frac{c}{n}$  вона має в системі відліку, пов'язаною з середовищем, в якому відбувається поширення світла.

Аберацію світла розглянемо на прикладі задачі.

*Задача.* В деякий момент часу напрям променя від зірки складає кут  $\theta$  з орбітальною швидкістю Землі. Знайти зміну  $\delta$  напрямку від Землі до зірки за півроку (рис. 53).

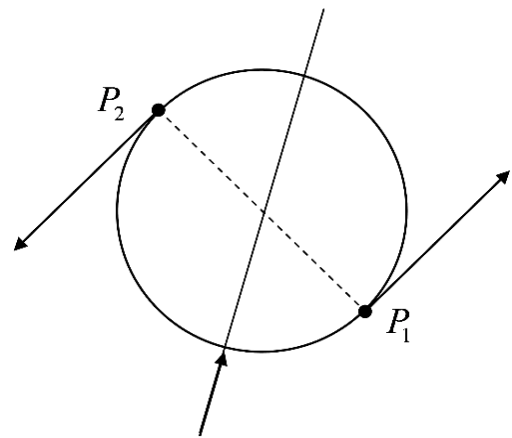


Рис. 53

Пов'яжемо з нерухомою системою  $K$  зірку, а рухому систему  $K'$  із Землею. Швидкість по орбіті

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v;$$

$$\delta = \theta'_2 - \theta'_1.$$

Нехай в точці  $P_1$  Земля рухається з швидкістю  $\vec{v}_1$  вправо, а в точці  $P_2$  - вліво з швидкістю  $\vec{v}_2$  (рис. 54).

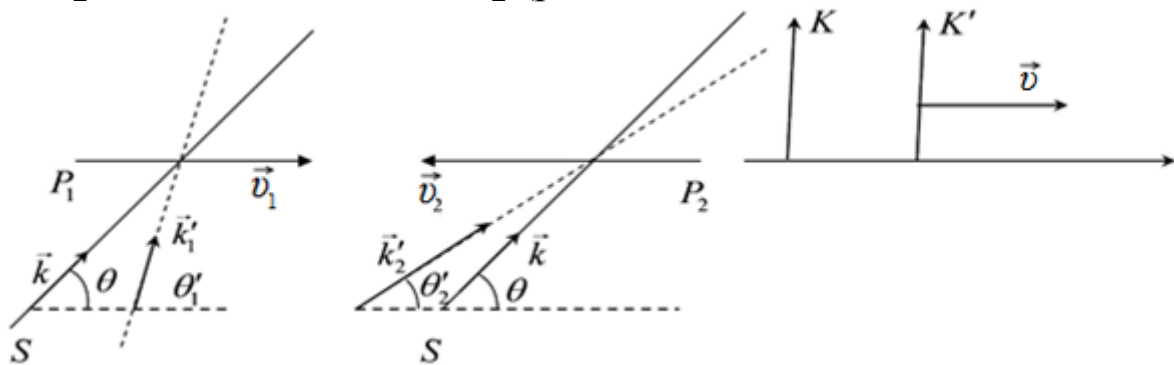


Рис. 54

До задачі використаємо вже відомі формули

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}.$$

Задачу будемо розв'язувати за формулою:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta}}.$$

Розпишемо даний вираз  $\cos \delta = \cos(\theta'_2 - \theta'_1)$  через тригонометричні формули і знайдемо  $\delta$ . Маємо

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1 - (\cos \theta_0 - \beta)}{1 - \beta \cos \theta_0}\right) \left(\frac{\cos \theta_0 + \beta}{1 + \beta \cos \theta_0}\right) - \left(\frac{\sin \theta}{\gamma - (1 - \beta \cos \theta)}\right) \left(\frac{\sin \theta}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)}\right)}{1 + \left(\frac{\cos \theta_1 - \beta}{1 - \beta \cos \theta_1}\right) \left(\frac{\cos \theta_2 + \beta}{1 + \beta \cos \theta_2}\right) + \left(\frac{\sin \theta_1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta_1)}\right) \left(\frac{\sin \theta_2}{\gamma(1 + \beta \cos \theta_2)}\right)}.$$

Так як  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ , то

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} &= \sqrt{\frac{\gamma^2(1 - \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta - \gamma^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \gamma^2}{\gamma^2(1 + \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta - \gamma^2 \beta^2 \cos^2 \theta - \beta^2 \gamma^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\gamma^2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta - \gamma^2 \beta^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \gamma^2}{\gamma^2(1 + \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta - \gamma^2 \beta^2(1 + \cos^2 \theta)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 \theta (\gamma^2 - 1) + \beta^2 \gamma^2(1 - \cos^2 \theta)}{(1 + \cos^2 \theta) \gamma^2(1 - \beta^2) + \sin^2 \theta}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 \theta (\gamma^2 - 1) + \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 \theta (\gamma^2 - 1 + \beta^2 \gamma^2)}{2}} = \sin \theta \sqrt{\beta^2 \gamma^2 \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2 \gamma^2}\right)} = \\ &= \beta \gamma \sin^2 \theta \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2 + \gamma^2} + 1} = \beta \gamma \sin \theta \sqrt{\frac{\frac{c^2}{\theta^2} - 1 - \frac{v^2}{c^2} + 1}{\frac{v^2}{c^2}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta\gamma \sin \theta \sqrt{\frac{1 - 1 - \frac{v^2}{c^2} + 1}{\frac{v^2}{c^2}}} = \beta\gamma \sin \theta \sqrt{\frac{\frac{v^2}{c^2} + 1}{\frac{v^2}{c^2}}} = \beta\gamma \sin \theta \sqrt{\frac{1 + 1}{2}} = \\
&= \beta\gamma \sin \theta \sqrt{\frac{1 + 1}{2}} = \beta\gamma \sin \theta \sqrt{1} = \beta\gamma \sin \theta ; \\
\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} &= \beta\gamma \sin \theta ; \rightarrow \frac{\delta}{2} = \operatorname{arctg}(\beta\gamma \sin \theta) ; \rightarrow \delta = 2\operatorname{arctg}(\beta\gamma \sin \theta).
\end{aligned}$$

### **Лекція 13. ПРОСТІР МІНКОВСЬКОГО. ЧОТИРИВИМІРНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СТВ В ПРОСТІР МІНКОВСЬКОГО**

§68. Чотиривимірний простір Мінковського. Геометрична інтерпретація простору Мінковського.

§69. Чотиривимірні вектори і тензори.

§70. Чотиривимірні вектори швидкості і прискорення.

[1. §106; 3. §2.1-§2.4; 4. §60-§64; 5. §2.5-§2.6]

#### **§68. Чотиривимірний простір Мінковського. Геометрична інтерпретація простору Мінковського**

Щоб перейти в чотиривимірний простір необхідно мати чотири координати  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , де  $x_1$  – в символіці тривимірного  $x$ , тобто

$$\begin{aligned}
&x_1, x_2, x_3, x_4; \\
&x, y, z, ict.
\end{aligned}$$

Але не можна було визначити четверту координату. І. Мінковський прийшов до висновку, що четверта координата має бути уявною і вона може бути перпендикулярною до всіх решти трьох. Таким чином, четверта вісь буде відображати точні просторові процеси.

Віддаль точки від початку координат в просторі І. Мінковського:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -S_{12}^2.$$

Ми прийшли до висновку: що сума квадратів координат подій є

інваріантом щодо перетворень Лоренца.

Тут підкреслюється подібність геометрії Евкліда і Мінковського. Мінковський говорив, що треба повертати дві осі: вісь абсцис і вісь часу  $t$ .

Наша задача полягає, що поворотом абсциси  $x$  і ординати  $y$  ми можемо одержати перетворення Лоренца. З цією метою ми будемо розглядати лише дві координатні осі (рис. 55).

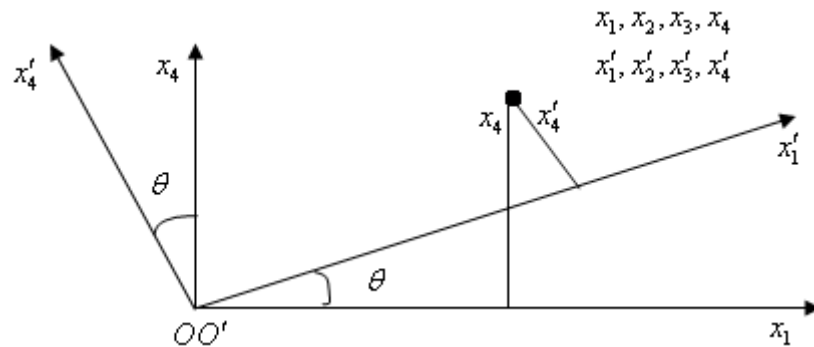


Рис. 55

Повернемо ці дві осі на деякий кут  $\theta$ . У нас отрималась штрихова координатна система. При повороті координатних осей, перетворення відбувається з використанням матриці:

$$(\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix};$$

$$(\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (68.1)$$

де  $\alpha_{11}$  - перша координата нова, перша - стара координата і так далі;  $i, k = 1, 2, 3, 4$ .

Таким чином

$$\alpha_{11} = \cos \theta;$$

$$\alpha_{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta.$$

Матрицею перетворення в чотиривимірному просторі буде вираз (68.1). Для знаходження  $\theta$  в початок штрихованої системи поміщають тіло, скріплюючи його з жорсткою системою. Через час  $t$  координата  $x_1'$  весь час для цього тіла рівна нулю

$$\begin{cases} x'_1 = 0; \\ x_1 = vt; \\ x_4 = ict. \end{cases} \quad (68.2)$$

На основі матриці (68.1) можемо записати вираз (68.2). На основі виразу (68.2), отримаємо:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_4 \sin \theta; \\ x'_2 &= x_2; \quad x'_3 = x_3; \\ x'_4 &= -x_1 \sin \theta + x_4 \cos \theta. \end{aligned}$$

Підставляючи перше рівняння в значення  $x'_1, x_1, x_4$  згідно виразу (68.2) і скоротивши відповідно, ми отримаємо:

$$\operatorname{tg} \theta = i \frac{v}{c}. \quad (68.3)$$

Тобто

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= i\beta; \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}; \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma; \\ \sin \theta &= \operatorname{tg} \theta \cos \theta = i\gamma\beta. \end{aligned} \quad (68.4)$$

Одержимо матрицю цілком зручну для наших розрахунків. Матриця перетворення Лоренца при переході  $K \rightarrow K'$ .

$$(\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (68.5)$$

де  $i, k = 1, 2, 3, 4$ .

Матриця перетворення Лоренца при переході  $K' \rightarrow K$ :

$$(\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (68.6)$$

де  $i, k = 1, 2, 3, 4$ .

Чи задовольняє матриця (68.6) умові, яка була виведена для тривимірного простору, а саме:

$$\alpha_{il} \alpha_{im} = \delta_{en} = \begin{cases} 1 \text{ для } l = m \\ 0 \text{ для } l \neq m \end{cases} \quad (68.7)$$

де сума по  $i$ ;  $\delta_{en}$ - символ Кронекера;  $i, k = 1, 2, 3, 4$ .

Властивість матриці Лоренца (68.6) подібна до властивості матриці тримірного простору, що відображено у співвідношенні (68.7). Тому рівняння перетворення координат на основі матриці Лоренца (68.6) будуть виглядати таким чином:

$$\begin{aligned}x_1 &= \gamma(x'_1 - i\beta x'_4); \\x_2 &= x'_2; x_3 = x'_3; \\x_4 &= \gamma(x'_4 + i\beta x'_1); \\x &= \gamma(x' - i\beta ict').\end{aligned}\tag{68.8}$$

Отже,  $x = \gamma(x' + vt')$ , а це співпадає з виразом (64.8):

$$\begin{aligned}y &= y'; z = z'; \\ict &= \gamma(ict' + i\beta x'); \\t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right).\end{aligned}$$

Ми перевірили, що вирази (68.8) є ті самі перетворення як вирази (64.8), але представлені через чотиривимірний простір – і головне, що вони одержані різним шляхом – шляхом повороту координатних осей. Цим ще раз ми доводимо, що геометрію Мінковського з координатами  $x_1, x_2, x_3, x_4$  можна далі сміливо використовувати для інших фізичних досліджень. В зв'язку з цим треба розглядати чотиривимірні вектори.

## §69. Чотиривимірні вектори і тензори

Чотиривимірний радіус-вектор:

$$\begin{aligned}\vec{R}(x_1, x_2, x_3, x_4); \\ \vec{V}(u_1, u_2, u_3, u_4).\end{aligned}$$

Для багатьох фізичних величин так як в трьохвимірному, так і в чотиривимірному просторі, ми будемо співставляти відповідні чотиривимірні вектори. Наприклад,  $\vec{R}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $\vec{V}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ . Тоді структура вектора чотиривимірного простору має вигляд  $\vec{A}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ .

Чотиривимірні вектори ми будемо підбирати такими, щоб вони зазнавали таких перетворень при переході з однієї системи до другої на основі матриці Лоренца (68.6).

Властивості чотиривимірних векторів, перетворення яких здійснюється за матрицею Лоренца. Всі чотиривимірні вектори характеризуються такими властивостями:

1. Скалярний добуток довільних чотиривимірних векторів  $\vec{A}$  та  $\vec{B}$  є інваріантом щодо перетворень Лоренца.

2. Квадрат довільного чотиривимірного вектора є інваріант щодо перетворень Лоренца. Ця властивість випливає з властивості 1, якщо  $\vec{B} = \vec{A}$

$$\vec{A}\vec{A} = \text{invar.}$$

3. Кожен чотиривимірний вектор можна представити у вигляді просторової і часової компоненти. Часовий компонент обов'язково включає:

$$i = \sqrt{-1}$$

Наприклад:  $\vec{R}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vec{R}(x, y, z, ict) = \vec{R}(\vec{r}, ict)$ ;

$$\vec{V}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \vec{V}(\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, i\gamma c) = \vec{V}(\gamma \vec{v}, i\gamma c).$$

4. Похідна по координаті від компонента чотиривимірного вектора перетворюється як компонент тензора. Заданий вектор:

$$\vec{A}(A_1, A_2, A_3, A_4).$$

Перші три координати – просторові, а четверта – часова, завжди уявна.

Коли  $\vec{A}'$  знаходиться в  $K'$ , то вони матимуть свої значення

$$\vec{A}'(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4).$$

Коли ж в одній системі  $K'$  задаються, а в другій не задаються, то його можна розрахувати. Наприклад:  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$  треба розрахувати в  $K$ .

Скористаємось перетвореннями: матрицею Лоренца (68.6), формулами перетворень Лоренца (68.8).

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma(A'_1, -i\beta\gamma, A'_4); \\ A_2 &= A'_2; A_3 = A'_3; \\ A_4 &= \gamma(A'_4, i\beta\gamma, A'_1). \end{aligned} \quad (69.1)$$

Формули (69.1) є формулами Лоренцового перетворення координат довільного чотиривимірного вектора.

Якщо якась величина вимагає більшого числа координат для її значення, то її задають тензором. Наприклад:

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix},$$

де  $i, k = 1, 2, 3, 4$ .

Та ж сама величина, яка вимагає для описання 16 компонентів в системі  $K'$  буде представлена тензором

$$(T'_{ik}) = \begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} & T'_{14} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} & T'_{24} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} & T'_{34} \\ T'_{41} & T'_{42} & T'_{43} & T'_{44} \end{pmatrix},$$

де  $i, k = 1, 2, 3, 4$ .

Величини компонентів не однакові. Таке перетворення  $(T'_{ik})$  в  $T_{ik}$  можливе при застосуванні матриці Лоренца. Наприклад, треба знайти  $T_{32}$ . Необхідно буде використати всі 16 компонентів  $(T'_{ik})$ :

$$T_{ik} = T_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} T'_{lm},$$

де  $i, k, l, m = 1, 2, 3, 4$ .

Сума по  $l, m$ :

$$\begin{aligned} T_{32} &= \alpha_{3l} \alpha_{2m} T'_{lm} = \\ &= \alpha_{31} \alpha_{2m} T'_{1m} + \alpha_{32} \alpha'_{2m} T'_{2m} + \alpha_{33} \alpha_{2m} T'_{3m} + \alpha_{34} \alpha_{2m} T'_{4m}. \end{aligned}$$

Проте цих доданків значно зменшиться, бо матриця Лоренца має багато нулів. Згідно 4-ої властивості чотиривимірних векторів, похідна від компоненти тензора по координаті перетворюється таким співвідношенням:

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \alpha_{kl} \alpha_{im} \frac{\partial A'_l}{\partial x'_m},$$

де  $k, i, l, m = 1, 2, 3, 4$ .

Отже, операція диференціювання компоненти вектора по координаті перетворюється подібно до перетворення тензора.

## §70. Чотиривимірні вектори швидкості і прискорення

В цьому параграфі і в наступних третьої теми, ми будемо розглядати випадки прямолінійного руху і прискорений рух. Тому як правило систему  $K'$  будемо зв'язувати з досліджуваним тілом.

Ми будемо систему  $K'$  жорстко зв'язувати з досліджуваним тілом, а вісь  $O'X'$  спрямувати вздовж руху тіла (рис. 56).

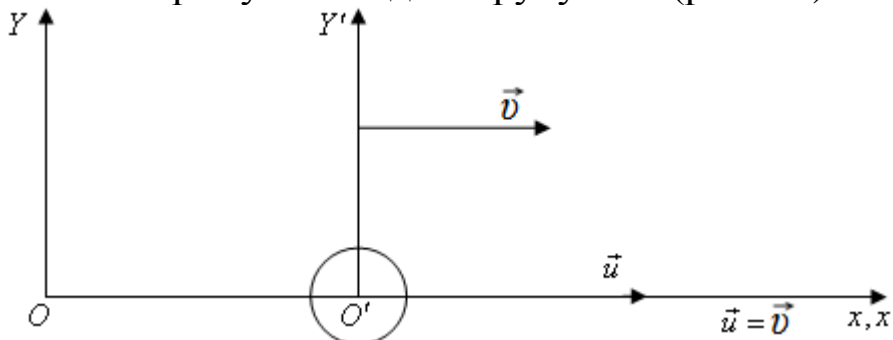


Рис. 56

Однак, коли рух тіла буде змінним (прискореним, сповільненим) деякий короткий час

$$dt(dt' - bK'),$$

то швидкість руху тіла буде змінюватись мало (від  $v$  до  $dv$ ), яку можна вважати такою, щоб рух вважати прямолінійним і рівномірним.

В другий момент часу  $dt$  вибираємо систему  $K''$ . Загалом в кожному мить часу з тілом буде зв'язана нова штрихова система, це приводить до того, що  $\gamma = \text{var}$ , бо  $v = v(t)$ , стає змінною

$$dt = \gamma d\tau;$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(t); \quad d\tau = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2};$$

$$\tau - \tau_0 = \int_{t_0}^t dt \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}.$$

Якщо виникає дві події  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  через час  $dt$  на тілі  $M$ , то вони будуть одномісними, вони характеризуються

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2;$$

$$d\tau, \tau, \tau + d\tau;$$

$$S_{12}^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

В системі  $K'$  ці дві події визначаються співвідношеннями:

$$S'_{12} = S_{12}.$$

Причому

$$S'_{12} = c^2 d\tau^2 + 0.$$

З останнього виходить, що

$$d\tau = \frac{S_{12}}{c}. \quad (70.1)$$

Вираз (70.1) показує, що власний час є інваріантом щодо перетворень Лоренца

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}. \quad (70.2)$$

Коли ми знайшли власний час і як його розрахувати, то тепер ми можемо знайти вектор швидкості:

$$\vec{V} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \end{pmatrix}.$$

Цей вектор будується на основі чотиривимірного радіус-вектора:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{d\tau} = \vec{V} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{d\tau} & \frac{dx_2}{d\tau} & \frac{dx_3}{d\tau} & \frac{dx_4}{d\tau} \\ \frac{dx'_1}{d\tau} & \frac{dx'_2}{d\tau} & \frac{dx'_3}{d\tau} & \frac{dx'_4}{d\tau} \end{pmatrix}.$$

Інакше кажучи:

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau},$$

де  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Коли перейти до символіки тривимірного простору:

$$u_i = \gamma \frac{dx_i}{dt},$$

де  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$$u_1 = \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma v_x; \quad u_2 = \gamma \frac{dy}{dt} = \gamma v_y; \quad u_3 = \frac{dz}{dt} = \gamma v_z; \quad u_4 = \gamma \frac{d(ict)}{dt} = i\gamma c.$$

Для просторових компонентів чотиривимірного вектора швидкості:

$$u_\alpha = \gamma v_\alpha; \quad u_y = i\gamma c\alpha = 1, 2, 3, 4; \quad (70.3)$$

$$\vec{V}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \vec{V}(\gamma\vec{v}, i\gamma c). \quad (70.4)$$

Для перевірки скористаємось властивостями чотиривимірного вектора:

$$\begin{aligned} \vec{A}\vec{B} &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 = \text{invar}; \\ (\vec{A})^2 &= A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 = \text{invar}; \\ \vec{V}^2 &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \gamma^2 v_x^2 + \gamma^2 v_y^2 + \gamma^2 v_z^2 - \gamma^2 c^2 = \\ &= \gamma^2 (V^2 - c^2) = -c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \gamma^2 = -c^2. \end{aligned}$$

Отже, ми показали, що підібраний таким самим способом вектор дійсно належить до чотиривимірного. Він буде використовуватись в усіх наступних перетвореннях.

Розглянемо прискорення як чотиривимірний вектор:

$$\vec{W} = (w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{d\vec{V}}{d\tau},$$

тоді

$$w_\alpha = \frac{du_\alpha}{d\tau},$$

де  $\tau$  - відноситься до власної системи координат, а  $t$  - до будь-яких інших;  $\alpha = 1, 2, 3$ .

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma};$$

$$w_\alpha = \frac{du_\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(u_\alpha) = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma u_\alpha),$$

де  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Тут  $\gamma$  є величина, яка істотно залежить від часу:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}} = \gamma(t);$$

$$w_\alpha = \gamma(\dot{\gamma}v_\alpha + \gamma\dot{v}_\alpha); \quad \dot{\gamma} = \frac{d}{dt}(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}\beta\dot{\beta} = \gamma^3 \frac{v\dot{v}}{c^2};$$

$$w_\alpha = \gamma^4 \frac{v\dot{v}}{c^2} v_\alpha + \gamma^2 \dot{v}_\alpha, \quad (70.5)$$

де  $\gamma$  - змінна, це функція від часу  $t$ ;  $v$  - повна швидкість;  $\dot{v}$  - від похідної повної швидкості.

$$w_\gamma = \gamma \frac{d}{dt}(i\gamma c) = i\gamma^4 \frac{v\dot{v}}{c}. \quad (70.6)$$

Ми отримали формулу прискорення матеріального тіла у випадку коли власний час фіксується годинником, що стоїть на цьому тілі. Щоб довести, що одержаний вектор з координатами  $W$  виразів (70.5) і (70.6) є тим, який нам потрібний чотиривимірний вектор, ми скористаємось першою властивістю чотирьох векторів.

Знайдемо скалярний добуток, то  $W$  є потрібний нам вектор.

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = -c^2 \left| \frac{d}{d\tau} \right|;$$

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 + u_4 w_4 = 0;$$

$$w_i = \frac{du_i}{d\tau},$$

де  $i = 1, 2, 3, 4$ ;

$$\vec{V}\vec{W} = 0.$$

Таким чином, ми показали, що добуток чотиривимірного вектора  $\vec{V}$  на другий чотиривимірний вектор  $\vec{W}$  дорівнює нулю. Ці два вектори є ортогональними, бо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

## Лекція 14. ЕЛЕМЕНТИ ДИНАМІКИ СТВ

§71. Імпульс і маса тіла в СТВ. Чотиривимірний вектор

імпульсу.

§72. Вираз сили в чотиривимірному просторі. Перетворення координат чотиривимірного вектора сили.

§73. Другий закон Ньютона в СТВ. Релятивістське рівняння руху частинки.

§74. Релятивістський вираз для енергії. Взаємозв'язок між масою та енергією тіла. Чотиривимірний вектор енергії імпульсу.

§75. Енергія зв'язку системи. Дефект мас та його експериментальне підтвердження.

§76. Закони збереження релятивістської механіки.

[1. §107-§110; 3. §3.1-§3.5; 4. §66-§68; 5. §3.1-§3.6]

## §71. Імпульс і маса тіла в СТВ. Чотиривимірний вектор імпульсу

СТВ сприйняла від класичної механіки форму запису імпульсу матеріального об'єкту, бо ця величина дуже адекватно відображає фізичні процеси.

Вираз  $\vec{p} = m\vec{v}$  включає масу і швидкість тіла. Приймаючи формулу запису імпульсу  $\vec{p} = m\vec{v}$ , СТВ враховує відомі експерименти Томсона в 1902 році над пучками прискорених електронів. Томсон прийшов до висновку, в цій формулі маса не залишається інваріантом при перетворенні координат. Маса є тут величина як функція від  $v$

$$m = m(v).$$

де  $m(0) = m_0$  - ми будемо називати нульовою масою. Це та маса, яку має тіло, коли воно перебуває в стані відносного спокою ( $m_0$ - це власна маса тіла).

Тому у СТВ імпульс буде:

$$\vec{p} = m(v)\vec{v}.$$

Імпульс є релятивістським імпульсом, який відмінний від імпульсу в класичній механіці.

Паулі показав, що маса тіла із зміною зростає за законом:

$$m = \gamma m_0; \quad (71.1)$$
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Якщо швидкість  $v \rightarrow c$ , то маса  $m \rightarrow \infty$ . Вираз релятивістського імпульсу буде дорівнювати:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}; \quad \gamma = \gamma(t) \quad (71.2)$$

при  $v = v(t)$ .

Цей вираз в тривимірному просторі представляє релятивістський вираз імпульсу. Чотиривимірний вектор імпульсу позначимо  $\vec{\mathcal{P}}$ :

$$\vec{\mathcal{P}}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4).$$

Перші три є просторовими  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ , і вони відповідають виразу (71.2)

$$\mathcal{P}_\alpha = \gamma m_0 v_\alpha,$$

де  $\alpha = 1, 2, 3$ ;

$$\mathcal{P}_4 = i\gamma m_0 c;$$

$$\vec{\mathcal{P}}^2 = \mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2 + \mathcal{P}_3^2 + \mathcal{P}_4^2 = -m_0^2 c^2.$$

Таким чином, квадрат цього чотиривимірного імпульсу дорівнює  $-m_0^2 c^2$ .

Чотиривимірний вектор імпульсу

$$\vec{\mathcal{P}}(\gamma m_0 \vec{v}, i\gamma m_0 c) \quad (71.3)$$

одержаний, є нам потрібний, бо він зазнає перетворень з застосуванням матриці Лоренца.

Який вид матимуть вирази координат при переході із однієї системи і іншу, тобто  $K' \rightarrow K$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \gamma(\mathcal{P}'_1 - i\beta\mathcal{P}'_4); \\ \mathcal{P}_2 &= \mathcal{P}'_2; \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}'_3; \\ \mathcal{P}_4 &= \gamma(\mathcal{P}'_4 + i\beta\mathcal{P}'_1). \end{aligned} \quad (71.4)$$

## §72. Вираз сили в чотиривимірному просторі. Перетворення координат чотиривимірного вектора сили

За аналогією з класичною механікою, де величину сили визначають як

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

у СТВ також вводять поняття сили - чотиривимірний вектор сили:

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{d\tau}.$$

Вектор імпульсу  $\vec{\mathcal{P}}$  характеризуються чотирма координатами

$$\vec{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} m_0 u_1 & m_0 u_2 & m_0 u_3 & m_0 u_4 \\ \gamma m_0 v_x & \gamma m_0 v_y & \gamma m_0 v_z & i\gamma m_0 c^4 \end{pmatrix},$$

то сила  $\vec{\mathcal{F}}$  повинна мати також чотири координати:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4).$$

На основі формули (70.2) ми можемо представити:

$$\mathcal{F}_\alpha = \frac{d\mathcal{P}_\alpha}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m_0 u_\alpha),$$

де  $\alpha = 1,2,3$ ;

$$\mathcal{F}_\alpha = \gamma \frac{d}{dt}(m_0 u_\alpha).$$

Формула, яку ми одержали включає фактично просторові координати, бо  $\alpha$  набуває тільки просторові координати (1, 2, 3)

$$F_\alpha = \frac{\mathcal{F}_\alpha}{\gamma};$$

$$F_\alpha = \frac{d}{dt}(m_0 u_\alpha). \quad (72.1)$$

Сила Ньютона  $F_\alpha$  одержується з компонентів чотиривимірного вектора  $\mathcal{F}_\alpha$  діленням на  $\gamma$

$$F_\alpha = \frac{d}{d\tau}(\gamma m_0 v_\alpha),$$

де  $\alpha = 1,2,3$ ;

$$\mathcal{F}_r = \frac{d}{d\tau}(i\gamma m_0 c).$$

Перетворення цих компонентів при переході від однієї системи до іншої здійснюється на основі матриці Лоренца за допомогою вище розглянутих методів.

### §73. Другий закон ньютона в СТВ. Релятивістське рівняння руху частинки

Формула (72.1) закон Ньютона в релятивістській формі  $u_\alpha = 1,2,3$  є одна із просторових координат чотиривимірного вектора швидкості, який ми розглянули в §72. Там було показано, що

$$u_\alpha = \gamma v_\alpha,$$

де  $v_\alpha$  - швидкість руху тіла і координатної системи, яка з ним пов'язана.

Тому використовуючи це співвідношення §72 можна записати в такому вигляді:

$$F_\alpha = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma v_\alpha), \quad (73.1)$$

де  $\alpha = 1,2,3$ .

Вона виражає собою закон динаміки Ньютона в СТВ у повній його формі в тривимірному просторі.

Як бачимо під оператором похідної стоїть  $\gamma$  і  $v_\alpha$  є як функції від часу. Або

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}). \quad (73.2)$$

Вираз (73.2) - закон динаміки представлений у векторній формі. Розкриваємо дужки:

$$\vec{F} = m_0\dot{\gamma}\vec{v} + m_0\gamma\dot{\vec{v}}. \quad (73.3)$$

Це приводить до висновків:

1) що математично цей закон виражається складніше, ніж в динаміці Ньютона;

2) тут сила Ньютона  $\vec{F}$  відмінна від сили  $F$  класичного закону динаміки.

В класичній механіці вірно стверджувалось, що прискорення руху тіла завжди співпадає з напрямком діючої сили. А рівняння (73.3) в релятивістській формі заперечує цей факт. Тут сила  $\vec{F}$  представлена як:

$$\vec{F} = a_1\vec{v} + a_2\dot{\vec{v}}.$$

Тобто формула вказує, що сила, як векторна дія одержується, як сума колінеарних векторів. Нехай до матеріальної точки  $M$  прикладена сила. Прискорення і сила не співпадає за напрямком. Але існує два випадки, коли прискорення, яке викликане силою  $\vec{F}$  і сила  $\vec{F}$  співпадає за напрямком.

Перший випадок дії сили це такий, коли рух викликаний цією силою характеризується колінеарністю векторів  $\vec{F}$  і  $\vec{v}$  ( $\vec{F} \parallel \vec{v}$ ), (вони залишаються весь час паралельними). В цьому випадку рівняння (73.3) можна представити через модулі векторів:  $\vec{v}$  через  $v$ ,  $\dot{\vec{v}}$  через  $\dot{v}$ , а  $\vec{F}$  через  $F$  (рис. 57).

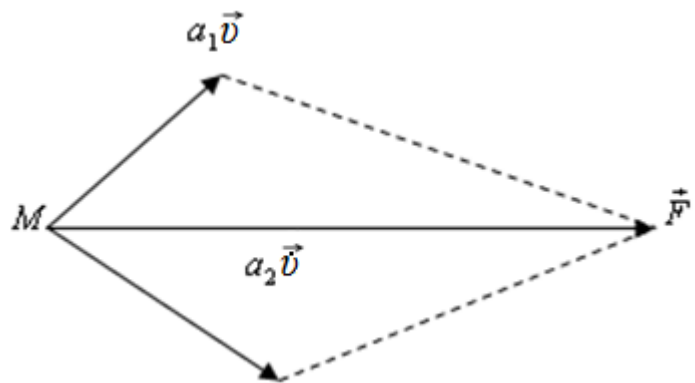


Рис. 57

Коли підставити значення  $\dot{\gamma}$  і зробити спрощення, то вираз (73.3) буде записаний:

$$\begin{aligned} m_0\gamma^3\dot{v}_0 &= F; \\ m_0\gamma^3\frac{dv}{dt} &= F. \end{aligned} \quad (73.4)$$

Другий вираз – це такий, коли сам рух весь час здійснюється при умові, що діюча сила і прискорення залишаються перпендикулярними:

$$F' \perp \vec{v}.$$

Можна показати, що в цьому випадку в рівнянні (73.3) випаде перший доданок. Згодом буде показано, що

$$d(m_0\gamma c^2) = \vec{F}\vec{v}dt.$$

На основі відомої формули ми приходимо до висновку, що права сторона перетворюється в нуль (коли  $F \perp v$ ,  $m_0\gamma c^2 = \text{const}$ ). Отже, перший доданок випаде:

$$\vec{F} = m_0\gamma\vec{v}$$

або

$$\vec{F} = m_0\gamma \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Другий закон Ньютона в релятивістській формі, представлений виразами (73.2) і (73.3) можна використати для складання диференціальних рівнянь на основі яких можна визначити швидкість як координати від часу і координати  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , як функції часу. Інакше кажучи, можна побудувати диференціальне рівняння руху в тому випадку, якщо задається значення  $F$ , як функції від координат. Це рівняння зручно представити так:

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma v) = F(\vec{r}, t). \quad (73.5)$$

Вираз (73.5) є рівняння руху матеріального об'єкту, в ньому задано силу як функцію від часу, його розв'язок дає знайти рівняння руху. Можна знайти й швидкості і прискорення.

## §74. Релятивістський вираз для енергії. Взаємозв'язок між масою та енергією тіла. Чотиривимірний вектор енергії, імпульсу

Енергія будь-якого матеріального тіла в класичній механіці оцінювалась двома видами, як потенціальної так і кінетичної енергії.

В СТВ, у релятивістській динаміці ці енергії також беруться до уваги. Але кінетична енергія буде по іншому виражатись і з'явиться повна енергія. Це можна зробити на основі четвертої компоненти  $\mathcal{F}_4$  (чотиривимірний компонент сили)

$$\mathcal{F}_4 = \frac{d\mathcal{P}_4}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(im_0\gamma c).$$

Але виявляється, що четверту компоненту  $\mathcal{F}_4$  можна представити, ще в іншій формі, виходячи із ортогональності чотиривимірного вектора швидкості та прискорення. З §73

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 + u_4 w_4 = 0 \mid m_0.$$

Досить помножити почленно це рівняння, то

$$u_1 \mathcal{F}_1 + u_2 \mathcal{F}_2 + u_3 \mathcal{F}_3 + u_4 \mathcal{F}_4 = 0.$$

Три перші доданки відносяться до просторових:

$$\gamma v_x \gamma F_x + \gamma v_y \gamma F_y + \gamma v_z \gamma F_z + u_4 \mathcal{F}_4 = 0;$$

$$u_4 \mathcal{F}_4 \rightarrow i \gamma c;$$

$$\gamma^2 \vec{F} \vec{v} + i \gamma c \mathcal{F}_4 = 0;$$

$$\mathcal{F}_4 = \frac{i \gamma}{c} \vec{F} \vec{v}.$$

Співставляючи перший вираз і останній, ми отримаємо:

$$d(m_0 \gamma^2) = \vec{F} \vec{v} dt. \quad (74.1)$$

З правої сторони – елементарна робота, яка виконується силою  $\vec{F}$  за час  $dt$ . Вираз  $m_0 \gamma c^2$  є вид якоїсь енергії:

$$\varepsilon = m_0 \gamma c^2.$$

Проінтегруємо по швидкості від 0 до  $v$

$$\int_0^v d(m_0 \gamma c^2) = \int_0^v \vec{F} \vec{v} dt,$$

$$\vec{F} \vec{v} \rightarrow T,$$

$$m_0 \gamma c^2 - m_0 c^2 = T. \quad (74.2)$$

Тіло, яке перебувало в спокої мало енергію  $m_0 c^2$ . З цих співвідношень випливає, що існує енергія тіла, яка оцінюється формулою (74.3) і яку назвали в СТВ повна енергія тіла:

$$\varepsilon = m_0 \gamma c^2, \quad (74.3)$$

де  $m_0 \gamma \rightarrow m$  - це релятивістська маса.

Повна енергія обов'язково включає кінетичну енергію системи і чим більша швидкість тим більша кінетична енергія. Кінетична енергія є різницею енергії тіла коли воно перебуває в русі і коли в стані спокою:

$$m c^2 - m_0 c^2 = T;$$

$$m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left( \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) =$$

Розкладемо в ряд вираз в дужках:

$$= m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots - 1 \right) =$$

Розглянемо класичний випадок, коли  $v \ll c$ :

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Отримали вираз кінетичної енергії в класичній механіці. Це свідчить, що принцип відносності в цій науці зберігається. Джерелом енергії тіл є внутрішня (енергія молекулярних і атомних взаємодій, кінетична енергія молекул і атомів, енергія взаємодій електронів і ядер, енергія ядерних взаємодій), а також кінетична енергія тіла як системи. Ядерні взаємодії характеризуються сильними взаємодіями.

Ми користуємось виразом для повної енергії тіла (74.3). Можна по іншому представити чотири координати чотиривимірного вектора імпульсу:

$$\mathcal{P}(m_0 \gamma v, i m_0 \gamma c) = \vec{\mathcal{P}} \left( m_0 \gamma v, i \frac{\varepsilon}{c} \right). \quad (74.4)$$

Вираз (74.4) чотиривимірного вектора імпульсу чотири координати, якого представлено через повну енергію  $\varepsilon$ , одержав назву – чотиривимірного вектора імпульсу.

У випадку коли нам доведеться виконувати задачі на перетворення енергії тіла при переході від однієї до другої системи, ми повинні здійснювати перетворення чотиривимірного вектора імпульсу в СТВ:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4 &= \gamma(\mathcal{P}'_4 - i\beta\mathcal{P}'_1); \\ \mathcal{P}_4 &= i \frac{\varepsilon}{c}; \\ i \frac{\varepsilon}{c} &= \gamma \left( \frac{i}{c} \varepsilon' - i\beta m \gamma' v_x \right). \end{aligned}$$

## §75. Енергія зв'язку системи. Дефект мас та його експериментальне підтвердження

СТВ дала можливість показати, що кожна фізична система, яка складається з відповідних компонентів маси яких  $m_1, m_2, \dots$  завжди буде мати масу, яка нерівна сумі цих компонентів.

$$m \neq m_1 + m_2 + m_3 + \dots$$

СТВ показує, що маса системи завжди менша від суми мас компонент

$$m < \sum_i m_i.$$

Наприклад, в атомне ядро входять протони і нейтрони. Між ними виникають великі сили взаємодії притягання, тому маса ядра менша суми мас його складових:

$$(Zm_p + Nm_n) - m_\nu = \Delta m > 0.$$

Це дефект маси системи. Розв'язок задачі впливає із законів збереження: повна енергія системи  $\varepsilon$  дорівнює сумі енергій компонентів, що входять до цієї системи  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  і енергії взаємодії між цими компонентами:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + W_{ik}.$$

Для розгляду цієї задачі виберемо найпростішу систему, яка складається з двох компонентів:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + W_{12}.$$

Користуючись виразом повної енергії (74.3) останнє рівняння можна представити так:

$$mc^2 = m_1c^2 + m_2c^2 + W_{12}.$$

Щоб визначити масу системи досить поділити на  $c^2$

$$m = m_1 + m_2 + \frac{W_{12}}{c^2}.$$

Для стійких систем потрібно, щоб сили взаємодії притягання між компонентами цієї системи переважали ніж сили відштовхування. Так в ядрі існують ядерні сили притягання і сили відштовхування між протонами. Ядерні сили притягання переважають сили відштовхування і тому ядра вважаються стійкими. Для таких систем в яких переважають сили притягання, для них енергія приписується з від'ємним знаком

$$W_{12} < 0.$$

Дали спеціальну назву ( $-W_{12} = \varepsilon_{зв}$ ) і назвали її енергією зв'язку.

Таким чином, в нашому останньому співвідношенні перенесемо  $m$  в праву сторону,  $W_{12}$  в ліву сторону, отримаємо:

$$-\frac{W_{12}}{c^2} = m_1 + m_2 - m.$$

Для стабільних систем замінимо на  $\varepsilon_{зв}$

$$\frac{\varepsilon_{зв}}{c^2} = m_1 + m_2 - m = \Delta m.$$

Таким чином, дефект мас

$$\Delta m = \frac{\varepsilon_{зв}}{c^2};$$

$$\varepsilon_{зв} = \Delta mc^2.$$

Наприклад, дефект мас в ядрах для ізотопу  ${}_2\text{He}^4$ :

$$\Delta m = 2m_p + 2m_n - m_{\text{He}^4} = 0,03 \text{ а.о.м.},$$

де 1 а.о.м. =  $1,66 \cdot 10^{-27}$  кг; 1 еВ =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Тоді енергія зв'язку в ядрі для ізотопу  ${}^4_2\text{He}$ :

$$\varepsilon_{\text{зв}} = 28,3 \text{ MeV.}$$

У СТВ після відкриття закону  $\varepsilon = mc^2$  показали, що в кожній стійкій системі повинен існувати дефект мас, який виникає з енергії взаємодії.

### §76. Закони збереження релятивістської механіки

Закони збереження імпульсу і закони збереження енергії приблизно формуються так, як і в класичній механіці. Релятивістський імпульс:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v},$$

а закон Ньютона в релятивістській формі:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Якщо зовнішня сила відсутня і розглядається тіло в ізолюваному стані, ми можемо прийняти в нашому співвідношенні  $\vec{F} = 0$ , то  $\vec{p} = \text{const}$ .

В релятивістському випадку вектор залишається сталим і за модулем і за напрямком. Це аналогічно формулам для систем, компоненти яких не взаємодіють

$$d(m_0 \gamma c^2) = \vec{F} \vec{v} dt.$$

Для виведення формули енергії скористаємося співвідношенням (74.1)

$$m_0 \gamma c^2 = \varepsilon.$$

Якщо  $F = 0$ , то  $\varepsilon = \text{const}$ . Нехай матеріальний об'єкт знаходиться в потенціальному сильному полі. Для цього ми також скористаємось співвідношенням (74.1):

$$d\varepsilon = \vec{F} \vec{v} dt; \vec{F} \vec{v} dt \rightarrow -du;$$

$$d(\varepsilon + u) = 0; \varepsilon + u = \text{const},$$

де  $\varepsilon$  - повна енергія, яка включає в себе кінетичну енергію.

Виявилось, що система підпорядкована ще одній системі: закону збереження енергії та імпульсу. Цей закон впливає із чотиривимірного вектора імпульсу, який можна представити:

$$\mathcal{P} \left( m_0 \gamma \vec{v}, \frac{i}{c} \varepsilon \right).$$

З §71 відомо:

$$\mathcal{P}^2 = -m_0^2 c^2.$$

Піднесемо вираз (74.4) до квадрату і прирівняємо з другою

формулою:

$$m_0\gamma^2 v^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = -m_0^2 c^2;$$
$$p^2 = m_0\gamma^2 v^2,$$

де  $p^2$ - релятивістський імпульс;

$$\varepsilon^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^2. \quad (76.1)$$

Якщо якийсь об'єкт в своєму русі міняє енергію, то одночасно міняється імпульс, але міняється так, що є інваріантом і залишається незмінним у всіх ІСВ.

Вираз (76.1) – закон збереження енергії та імпульсу для ізольованої системи. Формула (76.1) широко застосовується в ядерній фізиці.

## **Лекція 15. КЛАСИЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА**

§77. Предмет і методи класичної електродинаміки. Електромагнітна взаємодія та її характеристики.

§78. Експериментальні основи електродинаміки: закон Кулона; закон Біо-Савара-Лапласа; електромагнітна індукція; закон Фарадея; закон збереження електричного заряду; гіпотеза Максвелла про струм зміщення.

[2. §1; 4. §1.1-§1.6]

### **§77. Предмет і методи класичної електродинаміки. Електромагнітна взаємодія та її характеристики**

Електродинаміка почала свій розвиток на початку ХІХ століття, коли були проведені класичні експерименти Ерстеда, Ома, Фарадея і ряд інших досліджень.

Для узагальнення названих дослідів і для аналізу тих досліджень та законів, які зазначені в §62, була електромагнітна теорія поля Максвелла, побудована на тогочасних досягненнях математичних наук. Вона була сильно математизована і віднесена до курсу теоретичної фізики.

Вивчення властивостей і характеру структури електромагнітного поля, вивчення джерел цього поля, дослідження взаємодії між цим полем і електричним зарядом, що перебуває у відносному спокої, або русі – вивчає електродинаміка.

Закони електронної теорії були виведені для магнітних полів і пізніше електронна теорія була узгоджена з теорією Максвелла.

Отже, класична електродинаміка базується на основі двох методів (або підходів), що доповнюють один одного:

1. Феноменологічна (макроскопічна) теорія Максвелла.
2. Структурна (мікроскопічна) теорія Лоренца.

Ці дві теорії доповнюють одна одну і служать як одне ціле в електродинаміці.

Сучасна наука показала, що існують фундаментальні взаємодії - електромагнітна, гравітаційна, сильна і слабка. Всі ці чотири взаємодії називаються фундаментальними.

Електромагнітна взаємодія проявляється повсюдно у Всесвіті, бо всі тіла мають електричні заряди. Особливо яскраво електромагнітна взаємодія проявляється в електромагнітних полях де магнітна складова і електрична складова досить швидко можуть мінятися. Радіус дії електромагнітної взаємодії практично протягується до нескінченності. Електромагнітна взаємодія характеризується безрозмірним параметром:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \approx 7,3 \cdot 10^{-3}.$$

Сильна взаємодія характеризується параметром, який дорівнює 14 одиниць, гравітаційна  $\approx 10^{-36}$ , слабка  $\approx 10^{-12}$ .

**§78. Експериментальні основи електродинаміки: закон Кулона; закон збереження електричного заряду; закон Біо-Савара-Лапласа; електромагнітна індукція; закон Фарадея; гіпотеза Максвелла про струм зміщення**

Всі тіла в природі електризуються, тобто набувають електричного заряду. Електричний заряд є невід'ємною властивістю деяких елементарних частинок.

Величина заряду, що вимірюється в різних інерціальних системах відліку, залишається однаковою. Відповідно електричний заряд є релятивістським інваріантом. Звідси випливає, що величина заряду не залежить від того, рухається цей заряд або знаходиться в стані спокою.

Закон, якому підлягає сила взаємодії точкових зарядів, був встановлений експериментально в 1785 р. Кулоном. В результаті своїх дослідів Кулон прийшов до висновку, що сила взаємодії двох

нерухомих точкових зарядів пропорційна величині кожного заряду і обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Напрямок сили співпадає із прямою, що з'єднує заряди.

Припустимо, що сила  $\vec{F}$ , яка діє на заряд  $q_1$  (рис. 58), утворює з напрямком від  $q_1$  до  $q_2$  кут  $\alpha$ , відмінний від 0 до  $\pi$ . Але в силу осьової симетрії немає ніяких основ виділяти силу  $\vec{F}$  із множини сил інших напрямків, що утворюють з віссю  $q_1 - q_2$  такий же кут  $\alpha$  (напрямок цих сил утворює конус з кутом у вершині  $2\alpha$ ).

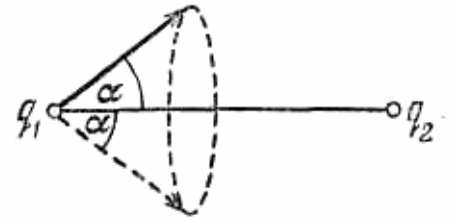


Рис. 58

Закон Кулона може бути виражений формулою

$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_{12}, \quad (78.1)$$

де  $k$  - коефіцієнт пропорційності, який вважається позитивним,  $q_1$ ,  $q_2$  - величини взаємодіючих зарядів,  $r$  - відстань між зарядами,  $\vec{e}_{12}$  - одиничний вектор, що має напрям від заряду  $q_1$  до заряду  $q_2$ ,  $\vec{F}_{12}$  - сила, що діє

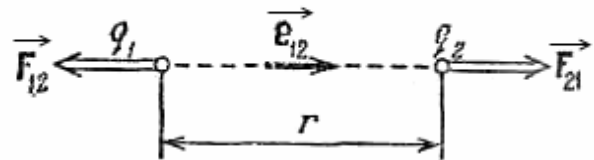


Рис. 59

на заряд  $q_1$  (рис. 59) (рисунок відповідає випадку однойменних зарядів). Сила  $\vec{F}_{21}$  відрізняється від  $\vec{F}_{12}$  знаком:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_{12}. \quad (78.2)$$

Однаковий для обох зарядів модуль сили взаємодії можна представити у вигляді

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \quad (78.3)$$

Дослід показує, що сила взаємодії двох даних зарядів не змінюється, якщо поблизу них помістити ще будь-які заряди. Нехай є заряд  $q_\alpha$  і, крім того,  $N$  зарядів  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . Із сказаного вище випливає, що результуюча сила  $\vec{F}$ , з якою діють на  $q_\alpha$  всі  $N$  зарядів  $q_i$ , визначаються формулою

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\alpha i}, \quad (78.4)$$

де  $\vec{F}_{\alpha i}$  - сила, з якою діє на  $q_\alpha$  заряд  $q_i$  у відсутності залишкових  $N - 1$

зарядів.

Факт, що виражається формулою (78.4), дозволяє, знаючи закон взаємодії між точковими зарядами, обрахувати силу взаємодії між зарядами, зорієнтованими на тілах кінцевих розмірів. Для цього необхідно розбити кожний із зарядів на дуже малі заряди  $dq$ , щоб їх можна було вважати точковими, обрахувати за формулою (78.1) силу взаємодії між зарядами  $dq$  взятими попарно, а потім зробити векторне додавання цих сил. Математично ця операція повністю співпадає з розрахунками сили гравітаційного притягання між тілами кінцевих розмірів.

Електричні заряди можуть зникати і виникати знову. Однак завжди виникають або зникають два елементарних заряди протилежних знаків. Наприклад, електрон і позитрон (позитивний електрон) при зустрічі анігілюють, тобто перетворюються в нейтральні гама-фотони. При цьому зникають заряди  $-e$  і  $+e$ . В ході процесу, що називається народженням пари, гама-фотон, попадаючи в поле атомного ядра, перетворюється в пару частинок – електрон і позитрон, При цьому виникають заряди  $-e$  і  $+e$ .

Таким чином, сумарний заряд електрично ізольованої системи не може змінюватися. Це твердження носить назву закону збереження електричного заряду.

Відмітимо, що закон збереження електричного заряду тісно зв'язаний з релятивістською інваріантністю заряду. Дійсно, якщо б величина заряду залежала від його швидкості, то приводячи в рух заряди одного якогось знаку, ми змінили б сумарний заряд ізольованої системи.

Розглянемо закон Біо-Савара-Лапласа. Біо і Савар провели в 1820 р. дослідження магнітних полів, що проходять по тонких провідниках різної форми. Лаплас проаналізував експериментальні дані, отримані Біо і Саваром, і знайшов, що магнітне поле будь-якого струму може бути обраховано як векторна сума (суперпозиція) полів, створених окремими елементами ділянками струмів. Для магнітної індукції поля, створеного елементом струму довжини  $dl$ , Лаплас отримав формулу

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, r]}{r^3}. \quad (78.5)$$

В зв'язку з цим співвідношення (78.5) носить назву закону Біо-Савара-Лапласа.

Із рис. 60 видно, що вектор  $d\vec{B}$  направлений перпендикулярно до площини, яка проходить через  $d\vec{l}$  і точку, в якій обчислюється поле, причому так, що обертання навколо  $d\vec{l}$  в напрямку  $d\vec{B}$  пов'язано з  $d\vec{l}$  правилом правого гвинта. Модуль  $d\vec{B}$  визначається виразом

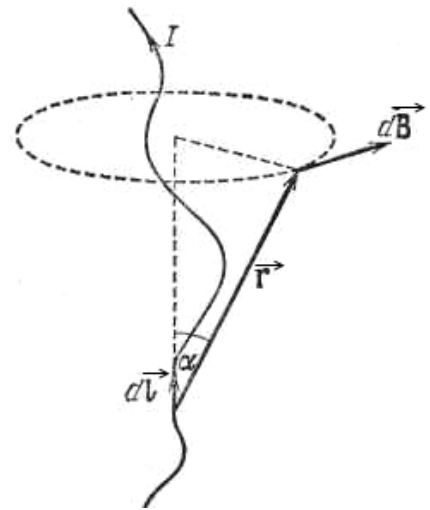


Рис. 60

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}, \quad (78.6)$$

де  $\alpha$  - кут між векторами  $d\vec{l}$  і  $r$ .

Розглянемо явище електромагнітної індукції. Відомо, що електричні струми створюють навколо себе магнітне поле. Існує і зворотнє явище: магнітне поле викликає появу електричних струмів. Це явище було відкрито М. Фарадеєм в 1831 році і отримало назву *електромагнітної індукції*.

Явище електромагнітної індукції свідчить про те, що при зміні магнітного потоку в контурі виникає електрорушійна сила індукції  $\varepsilon_i$ . Величина  $\varepsilon_i$  не залежить від способу, яким здійснюється зміна магнітного потоку  $\Phi$ , і визначається лише швидкістю зміни  $\Phi$ , тобто значенням  $\frac{d\Phi}{dt}$ . При зміні знаку  $\frac{d\Phi}{dt}$  напрямок  $\varepsilon_i$  також змінюється.

Розглянемо наступний приклад. На рис. 61 зображений контур 1, силу струму в якому  $I_1$  можна змінити з допомогою реостата. Цей струм створює магнітне поле, що пронизує контур 2. Якщо збільшити струм  $I_1$ , потік магнітної індукції  $\Phi$  через контур 2 буде зростати. Це приведе до появи в контурі 2 індукційного струму  $I_2$ , який реєструється гальванометром. Зменшення струму  $I_1$  зумовить

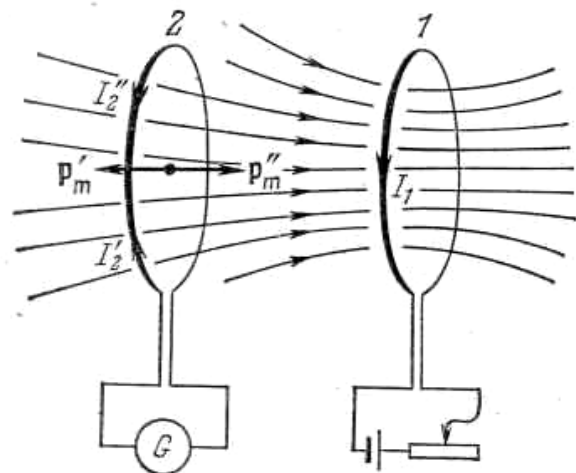


Рис. 61

зменшення магнітного потоку через другий контур, що призведе до появи в ньому індукційного струму іншого напрямку, ніж в першому випадку. Індукційний струм  $I_2$  можна створювати також, наближаючи контур 2 до контуру 1, або віддаляючи другий контур від першого. В обох випадках напрями струму, що виникають, протилежні. На завершення, електромагнітну індукцію можна викликати, не переміщуючи контур 2 поступально, а повертаючи його так, щоб змінювався кут між нормаллю до контуру і напрямом поля.

Розглянемо гіпотезу Максвелла про струм зміщення. Аналізуючи різні електромагнітні процеси, Максвелл прийшов до висновку, що повинно існувати і зворотне явище: всяка зміна електричного поля викликає появу вихрового магнітного поля. Це твердження виражає важливу властивість електромагнітного поля (друге основне положення теорії Максвелла).

Так як магнітне поле є основний, обов'язковий признак будь-якого струму, то Максвелл назвав змінне магнітне поле струмом зміщення, на відміну від струму провідності, зумовленого рухом заряджених частинок (електронів і іонів).

Поняття струму зміщення можна пояснити за допомогою досліду, зображеного на рис. 62. Складемо контур, що містить металевий провідник, конденсатор, батарею і вимикач. Для міркування про струм в контурі ввімкнемо в нього невелику лампочку розжарення, яка грає роль демонстраційного амперметра. Ми маємо тут розімкнутий контур, який розмикається конденсатором. Як ми знаємо, через такий розімкнутий контур постійний струм не проходить і при довгому ввімкненні батареї лампочка не знаходить ніякого розжарення.

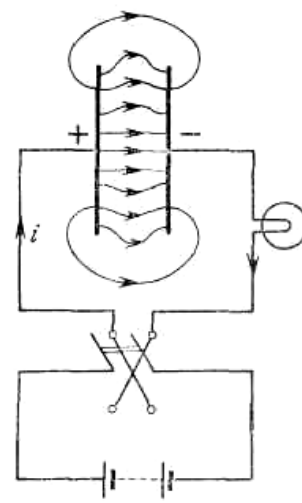


Рис. 62

Ми бачимо, що, на відміну від постійного струму, змінюючі або змінні струми можуть існувати і в розімкнутих контурах.

Згідно Максвеллу електричне поле в конденсаторі в будь-який момент часу створює таке магнітне поле, як якби між обкладками існував би струм провідності з силою, що дорівнює силі струму в металевих провідниках. Або, іншими словами, магнітне поле нашого розімкнутого контуру є таким же, як якщо б контур був замкнутим.

Це дозволить знайти кількісний зв'язок між змінним електричним полем і викликаним ним магнітним полем. Поле

конденсатора, що змінюється викликає таке ж магнітне поле, як струм, що має силу  $\frac{sdD}{dt}$  або густину

$$\vec{J}_c = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (78.7)$$

Ця величина отримала назву густини струму зміщення.

Користуючись цим поняттям, можна виразити друге положення теорії Максвелла в наступній кількісній формі: змінне в часі електричне поле викликає таке ж магнітне поле, як і струм провідності з густиною  $\vec{J}_c$ , що визначається формулою (78.7).

В загальному випадку електричне поле може бути неоднорідним і може залежати не тільки від часу, але і від координат. В цьому випадку вираз для густини струму зміщення буде

$$\vec{J}_c = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (78.8)$$

де знак частинної похідної вказує на то, що магнітне поле залежить від швидкодії зміни індукції в часі в кожній точці поля.

Якщо в якому-небудь провіднику існує змінний струм, то всередині провідника існує змінне електричне поле. При цьому всередині провідника є і струм провідності, і струм зміщення й магнітне поле провідника, що визначається їх сумою, тобто повним струмом. Густина повного струму

$$\vec{J}_{\text{пов}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (78.9)$$

Таким чином, в загальному випадку струмів, що змінюються магнітне поле визначається не струмом провідності, а повним струмом.

## **Лекція 16. ЕЛЕКТРИЧНИЙ ЗАРЯД ТА ЕЛЕКТРО-МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ**

§79. Електричний заряд та його властивості. Густина заряду та густина струму. Закон збереження електричних зарядів.

§80. Електричне та магнітне поля у вакуумі. Напруженість електричного та індукція магнітного полів. Дія електричного та магнітного полів на заряди та струми (сила Лоренца та сила Ампера).

§81. Змінне електромагнітне поле. Вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  як змінні стани

електромагнітного поля. Принцип суперпозиції електромагнітних полів.

[1. §1, §4, §9, §36, §43, §50; 2. §2-§17; 4. §1.8-§1.13]

## §79. Електричний заряд та його властивості. Густина заряду та густина струму. Закон збереження електричних зарядів

Для елементарних частинок характерна маса. Електричний заряд, як властивість частинки є певною характеристикою частинки. Найменший електричний заряд який переноситься частинками дорівнює  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

За сучасною гіпотезою протон складається з двох *u*-кварків і одного *d*-кварків: *u*-кварки переносять  $+\frac{2}{3}$  заряду електрона, а *d*-кварки  $-\frac{1}{3}$  заряду електрона. Електричний заряд (елементарна частинка) має властивість формувати електричне поле і взаємодіяти з елементарними частинками.

Властивості елементарних частинок:

- маса  $m$ ;
- спіновий момент  $s$ ;
- час життя  $\tau$ ;
- електричний заряд  $q$ ;

Повний електричний заряд в електродинаміці позначається  $q, Q$ . Одиниця заряду називається кулон (Кл).

В електродинаміці у теоретичних перетвореннях не заряд є основним параметром зарядженого тіла, а об'ємна густина заряду (рис. 63)

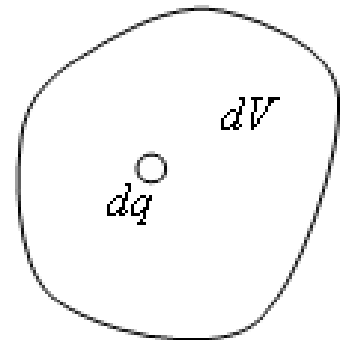


Рис. 63

$$\rho(r) = \frac{dq}{dV}$$

і густина струму

$$j = \frac{dl}{dS}$$

Електричні заряди не зникають безслідно. Існує закон збереження зарядів. Цей закон формулюється так: *алгебраїчна сума електричних зарядів замкнутої системи залишається незмінною при всіх перетвореннях у системі*

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma.$$

Якщо в силу фізичних причин сума зарядів зменшується, то це

пояснюється виходом заряду за межі системи.

Процес перетворення заряду пояснюється:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Розходження вектора густини  $\vec{j}$  в одиничному об'ємі рівна зміні густині заряду в цьому об'ємі за одиницю часу.

## **§80. Електричне та магнітне поля у вакуумі. Напруженість електричного та індукція магнітного полів. Дія електричного та магнітного полів на заряди та струми (сила Лоренца та сила Ампера)**

Для оцінки електричного поля вводиться вектор  $\vec{E}(\vec{r})$  - векторна функція електричного поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$

$$\vec{E} = \frac{d\vec{F}}{dq}.$$

Другою величиною, яка служить для оцінки електричного поля є потенціал  $\varphi(\vec{r})$ . В практиці ми знаходимо  $\varphi(r)$ . Якщо електричний заряд перебуває в стані руху з'являється магнітне поле. Вводиться індукція магнітного поля  $\vec{B}$

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v} \vec{E}].$$

Крім цієї ще є одна функція для оцінки магнітного поля, векторний потенціал  $\vec{A}$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Співвідношення між  $E$  і  $\varphi$ :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

За допомогою наведених функцій для  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  ми можемо легко оцінювати, з якою силою діє електричне та магнітне поле на заряд (рис. 64):

$$\begin{aligned} \vec{F}_\Lambda &= q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]; \\ \varphi(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}), \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \\ A(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r}), \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}. \end{aligned}$$

З останнього співвідношення Лоренца слідує, що векторна функція  $\vec{E}$  (напруженість) і векторна функція магнітного поля  $\vec{B}$  (магнітна індукція) є важливими характеристиками. Ці дві функції ми можемо вимірювати приладами як в постійному так і в змінному

ПОЛЯХ:

$$\vec{E} = \frac{d\vec{F}}{q};$$

$$B = \frac{Idl \sin \theta}{dF};$$

$$dF = [Id\vec{l}\vec{B}].$$

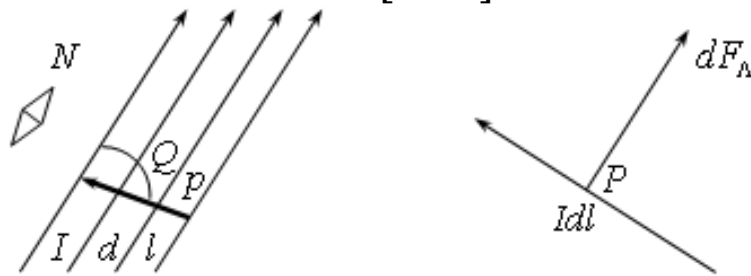


Рис. 64

Коли струм об'ємний (рис. 65), то  $\vec{j}dV$  – елемент об'ємного струму.

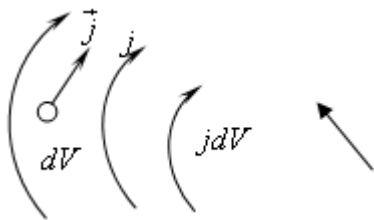


Рис. 65



Рис. 66

Лінійний струм можна оцінювати за величиною  $Idl$  (рис. 66).

Елемент  $\vec{j}dV$  - називається *елементом об'ємного струму*. Закон Ампера можна представити, ще й так:

$$dF = [Idl\vec{B}] = [\vec{j}\vec{B}]dV.$$

Нехай в цьому об'ємі буде магнітне і електричне поле (рис. 67). Електричне поле буде діяти на заряди, а магнітне на струм. Виділимо елементарний об'єм  $dV$  в цьому об'ємі  $V$ .

Складова електричного поля

$$dq = \rho dV.$$

А сила буде:

$$dF = \rho\vec{E}dV + [\vec{j}\vec{B}]dV,$$

де  $\rho\vec{E}dV$  - складова електричного поля.

Це з такою силою діють на заряд і струм об'єму  $dV$  електричне і магнітні поля.

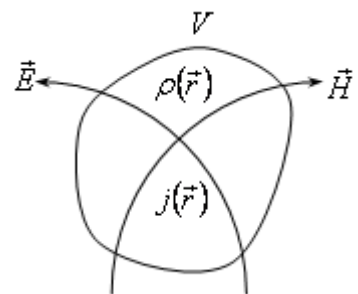


Рис. 67

Знайдемо силу з якою магнітне і електричне поле представлені векторно  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , діють на заряди і струми зосереджені у всьому об'ємі  $V$ :

$$F = \int_V (\rho \vec{E} + [\vec{j} \vec{B}]) dV.$$

### §81. Змінне електромагнітне поле. Вектори $\vec{E}$ , $\vec{B}$ , як змінні стани електромагнітного поля. Принцип суперпозиції електромагнітних полів

В природі та техніці переважно більше випадків розглядаються не постійні електричні та магнітні поля, а змінні електричні та магнітні поля (радіотехніка, телебачення). В змінних полях основними векторними функціями є (рис. 68):

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &\rightarrow \vec{D}; \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &\rightarrow \vec{H}. \end{aligned}$$

Для обчислення складових  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  вводять так звані електродинамічні потенціали  $\varphi$  і  $\vec{A}$ , де  $\varphi$  – скалярний потенціал;  $\vec{A}$  – векторний потенціал.

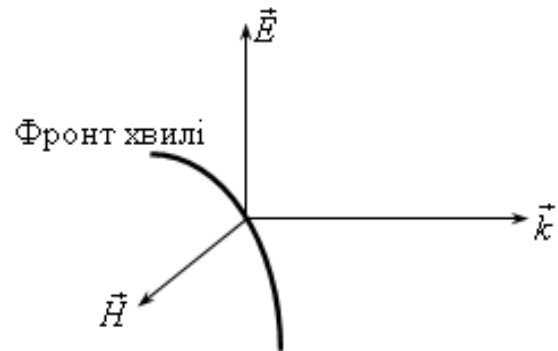


Рис. 68

Величини  $\varphi$ ,  $\vec{A}$  втрачають фізичний зміст в змінних полях, які є перехідними функціями чисто математичного порядку.

Знайшовши їх можна розрахувати:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad (81.1)$$

$$\begin{aligned} \left( \text{grad}\varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right); \\ \vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \end{aligned} \quad (81.2)$$

Змінні електричне і магнітне поля частіше одержуються монохроматичними змінними полями, які міняються з фіксованою частотою  $\omega$

$$\omega = 2\pi f.$$

Монохроматичними полями називають такі поля, які змінюються за гармонічними законами з фіксованою частотою  $\omega$ . Тобто

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k\vec{r})}, \quad (81.3)$$

де  $\vec{k}$  - хвильовий вектор.

Хвильовий вектор розраховують:

$$\vec{k} = \frac{2\pi\vec{n}}{\lambda}, \quad (81.4)$$

де  $\vec{n}$  - орт нормалі до фронту хвилі.

За аналогією

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - k\vec{r})}. \quad (81.5)$$

Ці рівняння (81.3-81.5) одержуються внаслідок розв'язування польового рівняння Даламбера.

У 1863 році дослідження Максвелла, а в 1888 році Герца показали, що заряди мають властивість розтікатися у вакуумі зі швидкістю:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Розкриємо зміст принципу суперпозиції фізичних полів. Якщо задано ряд фізичних полів, які оцінюються, якоюсь функцією  $U_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (скалярні чи векторні), то на їх основі ми можемо реалізувати нове поле цієї природи, яке буде описуватись функцією  $U$ , що є лінійною комбінацією всіх функцій  $U_i$ :

$$U = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_n U_n = \sum_{i=1}^n C_i U_i,$$

де  $C_i$  - є сталі коефіцієнти.

Коефіцієнти  $C_i$  для електромагнітних полів рівні одиниці.

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n; \\ \vec{E} &= E_1 + E_2 + \dots + E_n. \end{aligned}$$

## Лекція 17. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕКТРО-МАГНІТНОГО ПОЛЯ У ВАКУУМІ

§82. Система основних рівнянь Максвелла для електромагнітного поля у вакуумі в диференціальній формі. Фізичний зміст кожного рівняння Максвелла.

§83. Електродинамічний потенціал електромагнітного поля та його математичний вираз. Колібровочна інваріантність та умова Лоренца.

§84. Загальне поняття про енергію, густину енергії, густину потоку енергії і густину енергії електромагнітного поля. Закон збереження енергії в електромагнітному полі.

§85. Поняття про імпульс електромагнітного поля. Тиск світла.

[1. §74, §78, §9, §10, §58, §80, §82, §88; 2. §2-§17; 4. §2.4, §2.5; 6. §21-§26]

## §82. Система основних рівнянь Максвелла для електромагнітного поля у вакуумі в диференціальній формі. Фізичний зміст кожного рівняння Максвелла

Основою класичної електродинаміки є розроблені рівняння Максвелла. Це диференціальні рівняння досить лаконічно написані частинних похідних по координатах і по часу. Вони дають зв'язок між спектральними векторними функціями  $\vec{E}, \vec{D}$  і  $\vec{H}, \vec{B}$  найбільш в загальному виді. Крім чотирьох основних є ще ряд другорядних рівнянь:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}; \quad (82.1)$$

$$\dot{\vec{D}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad (82.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}; \quad (82.3)$$

$$\dot{\vec{B}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (82.4)$$

Фізична суть кожного з цих рівнянь (82.1) – це диференціальне рівняння першого порядку частинних похідних просторових і часових координат.

Будь який струм провідності, представлений в рівнянні через  $\vec{j}$  і будь який струм зміщення  $\dot{\vec{D}}$ , завжди нерозривно пов'язані з вихровим магнітним полем  $\vec{H}$ . Вихровий характер засвічує оператор  $\operatorname{rot}$  (рис. 69).

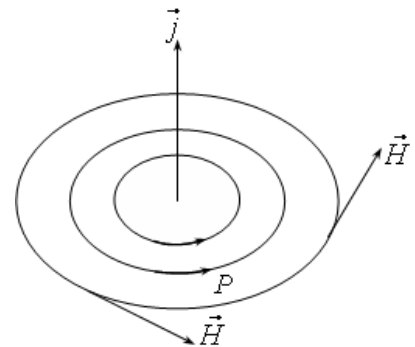


Рис. 69

Рівняння (82.1) констатує той факт, що струми провідності та зміщення нерозривно пов'язані з електромагнітним полем.

Друге рівняння (82.2) свідчить, що вектор  $\vec{D}$  може розтікатись тільки тоді, коли існують електричні заряди.

Рівняння (82.3) показує, що всякі зміни магнітного поля  $\vec{B}$  обов'язково викличуть нове електричне поле вихрового характеру (рис. 70).

Рівняння (82.3) є диференціальним виразом закону електромагнітної індукції Фарадея

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

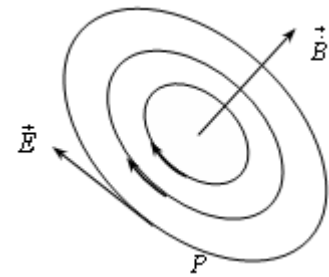
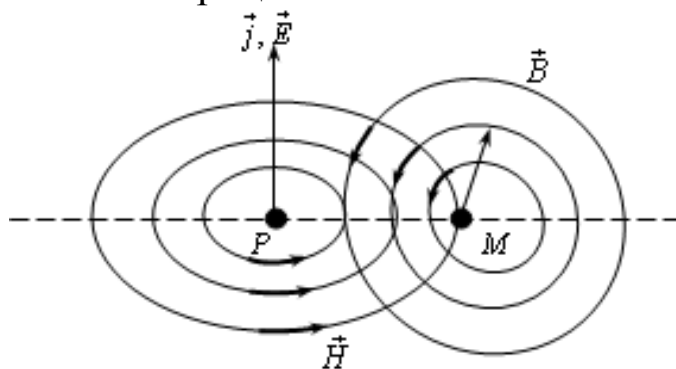


Рис. 70

Рівняння (82.1-82.3) відображають процеси електромагнітного поля і приховують в собі закони збереження енергії в електромагнітних процесах.



$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

Рис. 71

В точці  $M$  виникає стороннє електричне поле (рис. 71). Вторинне поле діє протилежно первинному електричному полю. Один процес підкоряється правоїгнотвій зв'язці, первинне, а лівій зв'язці - вторинне.

1. Рівняння (82.1-82.3) нам дають судити про наявність закону збереження енергії (закон Ленца).

2. Ця природа явищ, появи електричних та магнітних полів призводить до розтікання електромагнітного поля – електромагнітне поле не локалізується в одній точці чи в якомусь певному об'ємі, електромагнітне поле має властивість розтікатись. Електромагнітне поле швидко розтікається і це приводить до поширення поля у вакуумі з швидкістю:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Рівняння (82.4) має дуже простий фізичний зміст. Магнітне поле на відміну від електричного немає своїх зарядів ( $\text{div} \vec{B} = 0$ ). Це

значить, що магнітне поле завжди вихрове.

Рівняння Максвелла, як видно із співвідношень (82.1 - 82.4) – це диференціальні рівняння першого порядку частинних похідних по координатах і часу, як правило дають інтеграли. Розв'язки в комплексній формі:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

Для того, щоб розв'язок був однозначний, для цих інтегралів необхідно визначити граничні умови.

### §83. Електродинамічний потенціал електромагнітного поля та його математичний вираз. Колібровочна інваріантність та умова Лоренца

Для того, щоб знайти функції  $\vec{E}, \vec{B}$  можна використати рівняння (82.1), (82.3). Їх треба записати в проекціях на координатні осі, для цього необхідно розв'язати 6 рівнянь. Для спрощення розв'язку були введені електродинамічні потенціали:

$$\varphi(\vec{r}, t); \vec{A}(\vec{r}, t).$$

В постійних полях:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r};$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} dV}{r}.$$

Функції однакові, лише константи різні. Відомо, що

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi,$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

Запис для змінних полів залишається таким же. Функції  $\varphi$  і  $\vec{A}$  знаходиться при розв'язуванні диференціальних рівнянь Даламбера. Виведемо рівняння Даламбера на основі рівнянь Максвелла (82.1), (82.2). Тобто

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Домножимо вираз на  $\mu_0\mu$  (ліву і праву частину). Це з тим, щоб  $\text{rot}$  отримати не від  $H$ , а від  $B$ .

Вираз

$$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E}$$

є рівнянням для середовища, а не для вакууму.

Прийmemo  $\mu = \text{const}$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ , отримаємо:

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\mu\vec{j} + \mu_0\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

В останньому параграфі попередньої теми для змінних полів:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t};$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

Деякі пояснення символічних виразів:

$$\text{div}\vec{a} = \nabla a;$$

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\text{gradu} = \nabla u;$$

$$\text{rot}\vec{a} = [\nabla a].$$

Підставимо ці значення в рівняння:

$$\text{rotrot}\vec{A} = \left[ \nabla \left[ \begin{array}{c} \nabla\vec{A} \\ \uparrow \uparrow \\ 1 \ 2 \end{array} \right] \right] = \nabla(\nabla A) - \nabla^2\vec{A},$$

де  $\nabla^2$  - оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \nabla\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Таким чином,

$$\text{rot}\vec{B} = \nabla(\nabla\vec{A}) - \nabla^2(A) = \text{grad div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A}.$$

Підставивши у вихідне рівняння (82.1) значення  $\text{rot}\vec{B}$  і  $\vec{E}$  і звівши подібні, отримаємо:

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0\mu\vec{j} + \text{grad}\varphi \left( \text{div}\vec{A} + \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right).$$

Умова Лоренца

$$\text{div}\vec{A} + \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (83.1)$$

Вона забезпечує відбір таких функцій, які б її задовольнили

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mu\vec{j}. \quad (83.2)$$

Вираз (83.2) рівняння Даламбера для електродинамічного потенціалу  $\vec{A}$ .

$$\text{div}\vec{D} = \rho;$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Замість  $\vec{E}$  підставимо його значення -  $\operatorname{grad} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  і виключимо  $\operatorname{div} \vec{A}$  на основі умови Лоренца (83.1)

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A}.$$

В результаті зведення подібних, отримаємо:

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\beta}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (83.3)$$

Проаналізуємо дані рівняння Даламбера. Обидва рівняння Даламбера виведені із рівнянь Максвелла. Вони одержані через електродинамічні потенціали, через скалярний  $\varphi$  і векторний  $\vec{A}$ . Тому число диференціальних рівнянь буде зведено до чотирьох рівнянь при розв'язуванні у проекціях. Коли знайдемо  $\varphi$  і  $\vec{A}$  як функцію координат і часу, то далі

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad (83.4)$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (83.5)$$

Рівняння (83.2) і (83.3) розв'язуються однозначно з використанням умови Лоренца (83.1). Ці рівняння з математичної точки зору є рівнянням другого порядку, бо тут використовуються частинні похідні другого порядку по координатам і часу. Якщо розглядати електростатичне чи магнітостатичне поля, то рівняння (83.2) переходить:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \mu \vec{j}. \quad (83.6)$$

А рівняння (83.3) переписеться так:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (83.7)$$

Рівняння (83.6) і (83.7) носять назву Пуассона для електростатичних і магнітостатичних полів. Тоді

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t};$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Підберемо нове поле, для якого:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} u;$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial u}{\partial t};$$

$$\vec{E}' = -\text{grad}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t};$$

$$\vec{B}' = \text{rot}\vec{A}'.$$

Такий підбір функцій, який приводить до рівності  $\varphi' = \varphi$ ,  $E' = E$  називаються колібровочним інваріантом.

### §84. Загальне поняття про енергію, густину енергії і густину потоку енергії електромагнітного поля. Закон збереження енергії в електромагнітному полі

Відомо, що існує певний запас енергії, можна було вивести на основі законів термодинамічних рівнянь для енергії електростатичних і магнітостатичних полів.

Для електростатичних:

$$\omega_e = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2.$$

Для магнітостатичних:

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2;$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV.$$

Об'ємна густина електромагнітного поля:

$$\omega_{e\mu} = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}). \quad (84.1)$$

Вважаючи, що магнітна і електрична складова енергій однакова. Формула (84.1) є п'ятим рівнянням Максвелла. Цей постулат виявився точним і ще не зазнав ніяких протиріч. Можна записати:

$$\omega_{e\mu} = \frac{dW}{dV},$$

де  $\omega_{e\mu}$  - об'ємна густина електромагнітного поля.

Максвелл вводить постулат, що об'ємна густина електромагнітного поля:

$$\omega_{e\mu} = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}).$$

Вимірюємо приладом  $\vec{E}$  й розраховуємо  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon E$ , а також вимірявши приладом  $\vec{H}$  та розраховуємо  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ . За цими величинами визначаємо густину та за нею знаходимо енергію:

$$dW = \omega_{e\mu} dV;$$

$$W = \int_V \omega_{e\mu} dV;$$

$$\omega_{e\mu} = \omega_{e\mu}(\vec{r}).$$

Далі теоретичні дослідження самого Максвелла, а також Герца, Попова показали, що енергія електромагнітного поля, яка буде збуджена в певному об'ємі не зберігається, а з часом зменшується.

Можна показати, якщо в деякому об'ємі зберігається  $W$ , то її зміна за одиницю часу  $\frac{dW}{dt}$ , буде визначатись:

$$\frac{dW}{dt} = P - Q - \oint [\vec{E}\vec{H}] dS. \quad (84.2)$$

Цей вираз, що знаходиться в квадратних дужках визначає потужність, яка приходить на потік за одиницю часу:

$$\vec{U}_p = [\vec{E}\vec{H}] - \text{вектор Умова-Пойтінга.}$$

Цей вектор є густиною потоку енергії, яка витікає з цього об'єму. Формула (84.2) – вираз, який відображає закон збереження енергії в електромагнітних процесах.

## §85. Поняття про імпульс електромагнітного поля.

### Тиск світла

Виберемо деякий об'єм  $V$  в якому знаходиться певне середовище (рис. 72). Це середовище опромінюється електромагнітними хвилями. Ця хвиля чинить тиск. Електромагнітна хвиля в будь якій точці характеризується трьома векторами (рис. 72).

Сила, яка буде проявлятися при поглинанні електромагнітного поля буде напрямлена в ту сторону в яку розповсюджується електромагнітне поле

$$d\vec{F} = [Id\vec{l}\vec{B}].$$

На заряди  $dV$  вибрані буде діяти сила розповсюджена в  $V$  з густиною  $\rho, j$ :

$$d\vec{F} = \rho\vec{E}dV + [\vec{j}B]dV;$$

$$F = \int_V (\rho \vec{E} + [\vec{j} \vec{B}]) dV,$$

де  $F$  - це та сила, яка діє на середовище з електромагнітним полем і яким вона поглинається.

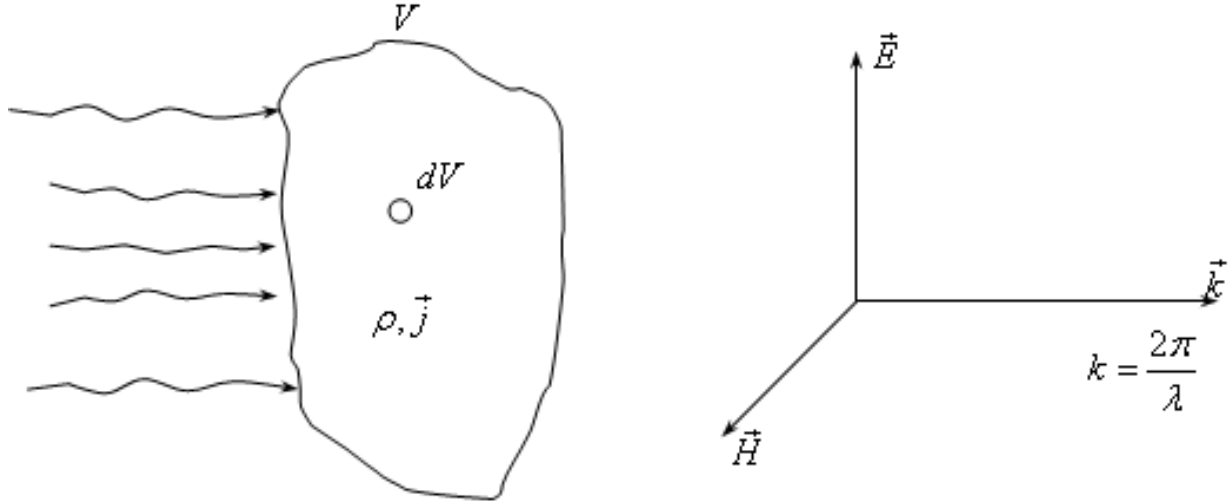


Рис. 72

Ми можемо показати, що закон збереження кількості руху із випадку взаємодії випромінювання з середовищем записується так:

$$\frac{d}{dt} \left( p_{\text{мех}} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_V [\vec{E} \vec{H}] dV \right) = 0;$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Другий доданок в дужках є імпульс, який переноситься електромагнітним полем в об'єм  $V$ :

$$p_{\text{мех}} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_V [\vec{E} \vec{H}] dV.$$

Позначимо густину електромагнітного імпульсу  $\vec{g}$  (об'ємна густина):

$$\vec{g} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}] = \frac{U_p}{c^2}.$$

Яка зміна імпульсу відбувається в електромагнітному полі за деякий час  $dt$ ? Весь імпульс який входить в об'єм циліндра з твірною  $cdt$  (рис. 73):

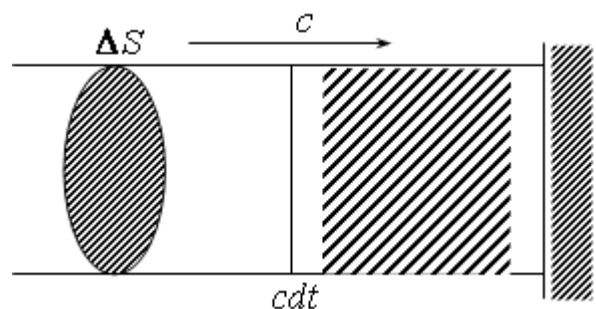


Рис. 73

$$g c dt \Delta S = F dt;$$

$$p = g c.$$

Якщо замість  $g$  підставимо  $\frac{\bar{U}_p}{c^2}$ , то

$$p = \frac{U_p}{c} = \omega_{em},$$

де  $U_p$ - сонячна стала.

Отже, тиск чисельно дорівнює об'ємній густині енергії даного електромагнітного поля. Розрахунки показують, що

$$U_p = 1,36 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}.$$

Підставивши  $U_p$  у формулу для  $p$ , отримаємо:

$$p_s = 4,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Лебедев відтворив це число експериментально.

## Лекція 18. ОСНОВИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

§86. Чотиривимірні вектори густини струму і потенціалу. Перетворення цих компонентів чотирьох векторів при зміні ІСВ. Відносність поняття заряду і струму.

§87. Закон збереження зарядів у СТВ в координатній формі. Умова Лоренца в коваріантній формі.

§88. Тензори електромагнітного поля.

§89. Перетворення електричних і магнітних полів при зміні ІСВ.

§90. Коваріантна форма рівнянь Максвелла у вакуумі.

§91. Чотиривимірний вектор. Пояснення аберації світла.

§92. Ефект Доплера в оптиці та його пояснення в СТВ.

[1. §111-§114; 4. §6.1-§6.10]

**§86. Чотиривимірні вектори густини струму і потенціалу. Перетворення цих компонентів чотирьох векторів при зміні ІСВ. Відносність понять заряду і струму**

Ейнштейн при формуванні теорії відносності за проект визнав електродинаміку Максвелла. Був побудований чотиривимірний вектор густини струму.

$$\vec{S} \begin{pmatrix} S_1, S_2, S_3, S_4 \\ j_x, j_y, j_z, ic\rho \end{pmatrix},$$

де  $\rho$  - об'ємна густина заряду, який переміщується з цим струмом.

Тривимірний вектор густини струму:

$$\vec{j}(\vec{j}_x, \vec{j}_y, \vec{j}_z).$$

Запишемо через координати з застосуванням матриці Лоренца

$$\begin{aligned} S_1 &= \gamma(S'_1 - i\rho S'_4), \\ S_2 &= S'_2; \quad S_3 = S'_3, \\ S_4 &= \gamma(S'_4 + i\beta S'_1). \end{aligned}$$

Нехай в системі  $K'$  заряд перебуває в стані відносного спокою:

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho_0; \\ S_1 &= S_2 = S_3 = 0. \end{aligned}$$

В системі  $K'$  струму і магнітного поля немає

$$\begin{aligned} S_1 &= \gamma(-i\beta ic\rho_0) = S_1 = v\gamma\rho_0, \\ j_x &= \gamma v\rho_0. \end{aligned}$$

В системі  $K$  магнітне поле існує. Дослідимо вираз для четвертої координати:

$$ic\rho = \gamma(ic\rho_0 + 0).$$

Скоротивши почленно це рівняння на  $ic$ , отримаємо:

$$\rho = \gamma\rho_0.$$

У будь-якій невластній системі відліку об'ємна густина більша ніж у власній

$$q_0 = \rho_0 V_0 = \frac{\rho}{\gamma} \cdot \gamma V = \rho V.$$

Отже, заряд  $q_0$  є інваріантом, щодо перетворень Лоренца:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} &\begin{pmatrix} \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 \\ A_x, A_y, A_z, \frac{i}{c}\varphi \end{pmatrix}; \\ \Phi_1 &= \gamma(\Phi'_1 - i\beta\Phi'_4); \\ \Phi_2 &= \Phi'_2; \quad \Phi_3 = \Phi'_3; \\ \Phi_4 &= \gamma(\Phi'_4 - i\beta\Phi'_1). \end{aligned}$$

## §87. Закон збереження зарядів у СТВ в коваріантній формі. Умова Лоренца в коваріантній формі

Щоб довести закон збереження зарядів, треба провести таку операцію, як  $\text{div}\vec{S}$ :

$$\vec{S} \begin{pmatrix} S_1, S_2, S_3, S_4 \\ j_x, j_y, j_z, ic\rho \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{div}\vec{S} = \nabla\vec{S},$$

де  $\nabla\vec{S}$  - чотиривимірний оператор набла, що множиться на  $S(\nabla\vec{a})$ .  
Тобто

$$\operatorname{div}\vec{S} = \nabla\vec{S} = \frac{\partial S_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S_3}{\partial x_3} + \frac{\partial S_4}{\partial x_4};$$

$$\nabla\vec{S} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial(ic\rho)}{\partial(ict)} = \nabla j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0;$$

$$\nabla\vec{j} = \operatorname{div}\vec{j};$$

$$\nabla\vec{S} = 0.$$

Це так математично виражається закон збереження електричних зарядів (див. §68).

$$\vec{\Phi} \begin{pmatrix} \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 \\ A_x, A_y, A_z, \frac{i}{c}\varphi \end{pmatrix},$$

$$\nabla\vec{S} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_4},$$

$$\underbrace{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3}}_{\nabla\vec{A}},$$

$$\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_4} \rightarrow \frac{i}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$\nabla\Phi = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

де  $\operatorname{div}\vec{A}$  - тривимірний простір.

Ми одержали умову Лоренца, що відповідає формулі (83.5). Можна показати, що якщо ми введемо чотиривимірний оператор Лапласа  $\nabla^2$ , то вираз  $\nabla^2\vec{\Phi}$ , дасть нам рівняння Даламбера в чотиривимірному просторі.

## §88. Тензори електромагнітного поля

Тензори більш раціонально забезпечують математичні перетворення магнітних полів при переході від систем відліку, вони нам забезпечують дуже просто виразити рівняння Максвелла в коваріантній формі:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t};$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Дослідимо чому дорівнює:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}.$$

Тепер

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix};$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}.$$

Ми будемо будувати тензор на основі різниці виразів:

$$F_{ik} = c \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right),$$

де  $i, k = 1, 2, 3, 4$ .

Попереднє рівняння можна представити таким чином:

$$T_1(c\vec{B} - i\vec{E}) = (F_{ik}),$$

де  $T_1$  – тензор, що залежить від відповідних величин.

Виведемо деякі компоненти тензора, наприклад:

$$F_{11} = c \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right) = 0.$$

Зробимо символічний запис чотиривимірного тензора електромагнітного поля ( $F_{ik}$ ):

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо співвідношення:

$$F_{12} = c \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right) = c \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = cB_z;$$

$$F_{14} = c \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right) = c \left( \frac{i \partial \varphi}{c \partial x} - \frac{\partial A_x}{ic \partial t} \right) = -i \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = -iE_x;$$

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix}.$$

Цей тензор електромагнітного поля є так званий

антисиметричний тензор, бо в нього  $F_{ik} = -F_{ik}$ .

Так як  $T_1^*$ - дуальний тензор (тензор двійник), то він буде представлений:

$$(F_{ik}^*) = T_1^*(-i\vec{E}, c\vec{B});$$

$$(F_{ik}^*) = \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & cB_x \\ iE_x & 0 & -iE_x & cB_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки  $T_2(\vec{H} - ic\vec{D})$  - другий тензор, а  $f_{ik}$  - позначення компонентів тензора  $T_2$ , то

$$f_{ik} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} F_{ik},$$

$$f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}.$$

## §89. Перетворення електричних і магнітних полів при зміні ІСВ

Як виразити  $B_x$  в системі  $K$ , коли вони задані в системі  $K'$ - ставиться задача. Загальна задача, як виразити векторні функції електромагнітного поля в системі  $K$ , якщо вони задані в системі  $K'$ . Отже, треба знайти формули перетворення електромагнітних полів. Наприклад, треба знайти  $B_z$ , тоді компонента тензора буде  $F_{12}$ :

$$F_{12} = \alpha_{1l}\alpha_{2m}F'_{lm},$$

де  $l, m = 1, 2, 3, 4$ .

Такий закон перетворення компонентів тензора. Отже, запишемо вираз:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \alpha_{1l}\alpha_{2m}F'_{lm} = \alpha_{11}\alpha_{2m}F'_{1m} + \alpha_{14}\alpha_{2m}F'_{4m} = \\ &= \alpha_{11}\alpha_{22}F'_{12} + \alpha_{14}\alpha_{12}F'_{42} = \\ &= \gamma cB'_z - i\gamma i_\beta E'_y = c\gamma \left( B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right), \end{aligned}$$

де  $\alpha$  - береться з перетворень Лоренца.

Замість  $F_{12}$  запишемо  $cB_z$ :

$$cB_z = c\gamma \left( B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right);$$

$$B_z = \gamma \left( B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right).$$

Подібним способом відшуковуючи компонент тензора  $T_1$ , ми виведемо формули перетворення електричного та магнітного полів при переході від  $K'$  до  $K$ .

На основі аналогічних перетворень отримали формули перетворення для електромагнітних полів:

$$E_x = E'_x;$$

$$E_y = \gamma(E'_y + vB'_z);$$

$$E_z = \gamma(E'_z + vB'_y);$$

$$B_x = B'_x;$$

$$B_y = \gamma \left( B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z \right);$$

$$B_z = \gamma \left( B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right).$$

Як бачимо, формулу перетворення електричного вектора  $\vec{E}$  в його проєкціях включають в себе як вектор  $\vec{E}$  так  $\vec{B}$  їх в координатах проєкції в штрихованій системі координат. Цілком аналогічні перетворення магнітної складової вектора магнітної індукції  $\vec{B}$ . Характерно, що проєкції відповідних векторів  $\vec{E}, \vec{B}; B'_x, E'_x$  на осі  $OX$  і  $OX'$  однакові, внаслідок залишаються незмінними, а зазнають перетворення в напрямку перпендикулярному ( $OY, OZ; O'Y', O'Z'$ ):

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}; \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{v}\vec{B}']);$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}; \quad \vec{B}_{\perp} = \gamma \left( \vec{B}'_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\vec{v}\vec{E}'] \right).$$

З наведених формул перетворення випливає, що якщо в системі  $K'$  магнітне поле відсутнє, а тільки наявне електричне поле, тобто  $\vec{B}' = 0, \vec{E}' \neq 0$ , то з цих формул видно, що в системі крім електричного буде існувати ще й магнітне.

Стаціонарне електричне і магнітне поля є частинним проявом електромагнітного поля.

На основі тензорів електромагнітного поля, які ми одержали, можна вивести два інваріанти електромагнітного поля.

Так як  $I_1$ -інваріант електромагнітного поля, то він отримується, якщо взяти суму  $F_{ik}F_{ik}$ , де  $i = 1, 2, 3, 4$ :

$$F_{ik}F_{ik} = 2(c^2 B^2 - E^2) = 2(c^2 B^{12} - E^{12});$$

$$I_1 = c^2 B^2 - E^2 = \text{invar};$$

$$F_{ik}^* F_{ik}^* = -4ic \vec{B} \vec{E};$$

$$I_2 = \vec{B} \vec{E}.$$

### §90. Коваріантна форма рівнянь Максвелла у вакуумі

Виявилось, що за допомогою тензорів електромагнітного поля легко дуже записати рівняння Максвелла (82.1, 82.2, 82.3, 82.4). Як виявилось ці чотири рівняння можна представити двома рівняннями в коваріантній формі:

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = S_i; \quad (90.1)$$

$$\frac{\partial f_{ik}^*}{\partial x_k} = 0, \quad (90.2)$$

де  $i, k = 1, 2, 3, 4$  (сума береться по  $k$ ):

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = S_1.$$

Запишемо згідно тензора  $T_2, (f_{ik})$ :

$$0 + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial D_x}{\partial t} = j_x \quad | \quad \frac{\partial(-icA_x)}{\partial(ict)};$$

$$(\text{rot} \vec{H})_x = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t},$$

$$\text{де } \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = (\text{rot} \vec{H})_x.$$

Якщо аналогічно розкрити другий рядок:

$$\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} = S_2;$$

$$(\text{rot} \vec{H})_y = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t};$$

$$(\text{rot} \vec{H})_z = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}.$$

Це і буде рівняння, сформульоване із рядків тензора  $T_2$  у формулах (90.1), (90.2):

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

$$\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{44}}{\partial x_4} = S_4.$$

Згідно тензора  $T_2 (f_{ik})$ :

$$\frac{\partial(icD_x)}{\partial x} + \frac{\partial(icD_y)}{\partial y} + \frac{\partial(icD_z)}{\partial z} = ic\rho.$$

Скоротивши на  $ic$  ліву і праву частину, ми отримаємо не що інше:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{D} &= \rho; \\ \frac{\partial F_{11}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}^*}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}^*}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}^*}{\partial x_4} &= 0; \\ 0 + \frac{(-iE_z)}{\partial y} + \frac{\partial(iE_y)}{\partial z} + \frac{\partial(cB_x)}{\partial(ict)} &= 0; \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial(ict)}; \\ (\operatorname{rot}\vec{E})_x &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}. \end{aligned}$$

Ми переконались, що рівняння (90.1 і 90.2) дійсно є рівняннями електромагнітного поля Максвелла (82.1 - 82.4).

## §91. Чотиривимірний вектор. Пояснення аберації світла

Вектор  $\vec{k}$  можна розрахувати за формулою

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}.$$

Для тривимірного простору вектор  $\vec{k}$  можна представити (рис. 74):

$$k_x = \frac{\omega}{c} \cos(\vec{n}, \vec{i});$$

$$k_y = \frac{\omega}{c} \cos(\vec{n}, \vec{j});$$

$$k_z = \frac{\omega}{c} \cos(\vec{n}, \vec{k}_\Delta).$$

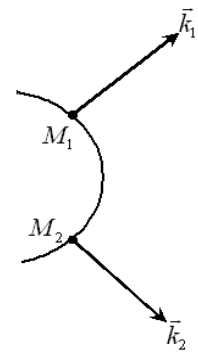


Рис. 74

Чотиривимірний вектор:

$$\vec{K} \left( k_1, k_2, k_3, k_4 \right) = \left( k_x, k_y, k_z, i \frac{\omega}{c} \right).$$

Знайдемо скалярний добуток  $\vec{K}\vec{R}$ :

$$\vec{K}\vec{R} = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \vec{k}\vec{r} - \omega t = -(\omega t - \vec{k}\vec{r}),$$

де  $\vec{R}$  - радіус вектор.

Тоді

$$\left( k_4 x_4 = i \frac{\omega}{c} \cdot ict, i^2 = -1 \right);$$

$$\omega t - \vec{k}\vec{r} = \omega' t' - k' \vec{r}'^{\text{invar}}.$$

Отже, фаза хвилі електромагнітного поля є інваріантом відносно перетворень Лоренца.

*Задача.* Нехай промінь світла розповсюджується від якогось джерела в системі  $K$  (рис. 75).

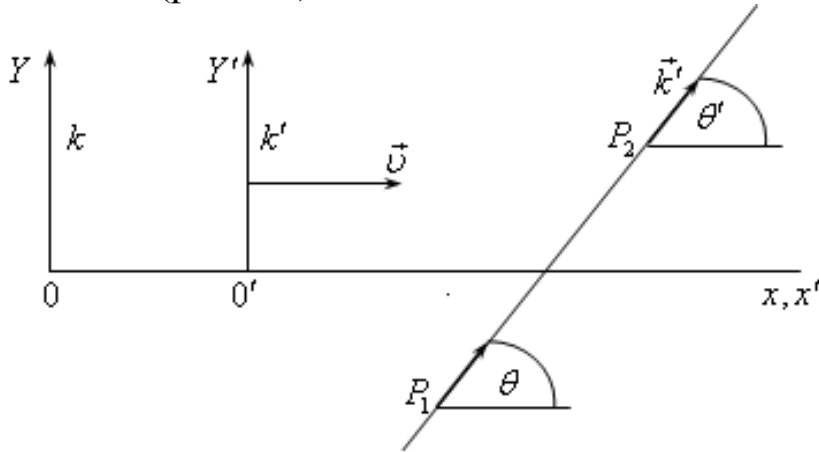


Рис. 75

На основі співвідношення Лоренца:

$$K_1 = \gamma(K'_1 - i_\beta K'_4);$$

$$K_2 = K'_2; \quad K_3 = K'_3;$$

$$K_4 = \gamma(K'_4 - i_\beta K'_1).$$

Як видно з третього рівняння ( $K_3 = K'_3$ ),  $k_z = k'_z$ . Проекція  $k_z = 0$ , то й  $k'_z = 0$ , бо згідно третього рівняння вони рівні:

$$k_z = k'_z = 0.$$

Це значить, що промінь буде розповсюджуватись в площині  $OXY$  і не буде відхилятися від площини  $O'X'Y'$ .

Чотиривимірний вектор подано через тривимірний вектор:

$$i \frac{\omega}{c} = \gamma \left( i \frac{\omega'}{c} + i_\beta \frac{\omega'}{c} \cos \theta' \right);$$

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta'). \quad (91.1)$$

Нам треба із рівняння (91.1) забрати  $\cos \theta'$ , для цього скористаємося першим рівнянням:

$$K_1 = \gamma(K'_1 - i_\beta K'_4);$$

$$\vec{K} \begin{pmatrix} k_1, k_2, k_3, k_4 \\ k_x, k_y, k_z, i \frac{\omega}{c} \end{pmatrix};$$

$$\frac{\omega}{c} \cos \theta = \gamma \left( \frac{\omega'}{c} \cos \theta' - i\beta i \frac{\omega'}{c} \right);$$

$$\omega \cos \theta = \gamma \omega' (\cos \theta' + \beta).$$

Підставимо з рівняння (91.1). Тоді

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}. \quad (91.2)$$

Як би довелося зробити зворотній перехід з  $K \rightarrow K'$ , то отримали:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (91.3)$$

З рівняння (91.2) випливає ( $K_2 = K'_2$ ), що

$$\frac{\omega}{c} \sin \theta = \frac{\omega'}{c} \sin \theta'.$$

Скоротивши на  $c$  і замінивши в цьому рівнянні  $\frac{\omega'}{\omega}$  із рівняння (91.1), одержимо вираз:

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)}. \quad (91.4)$$

Для зворотного процесу:

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)}. \quad (91.5)$$

Коли ми в рівняння (91.1) підставимо  $\cos \theta'$  із рівняння (91.3), а також замінимо  $\gamma$  через вираз  $\gamma = \frac{1}{1 - \beta^2}$ , то одержимо:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta'}, \quad (91.6)$$

де  $\beta = \frac{v}{c}$ .

З експерименту ми визначимо  $\theta$ , кут під яким поступає сигнал. На основі виведених формул, наприклад, формул (91.2; 91.4) для системи  $K$ , або для системи  $K'$ , ми можемо пояснити явище аберації світла. Будемо супроводжувати це фактом взятим із астрономії. Промені будуть поступати від небесних світил.

Нехай промінь поступає із системи  $K$  в систему  $K'$ . В системі  $K$  кут, який формує цей промінь з віссю  $OX$  буде  $\theta$ , а спостерігач зафіксує кут  $\theta'$ . Тоді можна записати, що  $\delta = \theta' - \theta$  - кут аберації. Тобто  $\delta$  - це той кут на який зміщується промінь, переходячи із системи  $K$  в систему  $K'$  (рис. 76).

Чим швидше рухається спостерігач, тим більший кут аберації. Звідки

$$\theta' - \delta = \theta.$$

Використавши рівняння (91.3), або (91.5) за величиною  $\theta$ , можна знайти  $\delta$

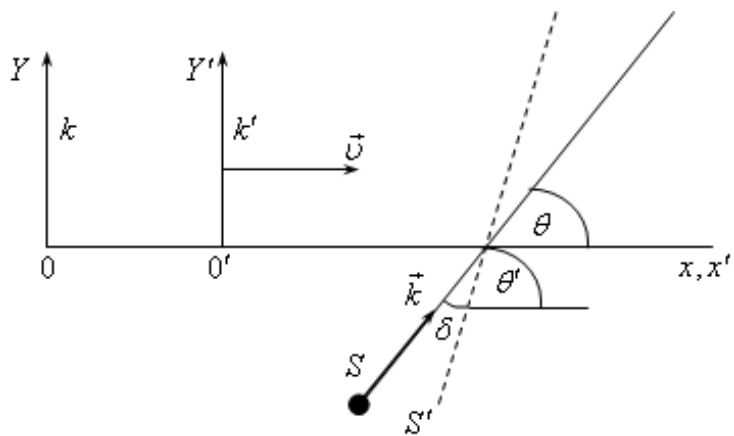


Рис. 76

$$\sin(\theta + \delta) = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

Розклавши  $\sin$  за законами тригонометрії ми одержимо таку формулу:

$$\cos \delta + \operatorname{ctg} \theta \sin \delta = \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)};$$

$$f(\delta) = \cos \delta + \operatorname{ctg} \theta \sin \delta - \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)},$$

де  $\beta = 0,5$ ;  $\gamma = 1,1547$ ;  $\theta = 30^\circ$ ;  $\delta = 19,792^\circ$ .

## §92. Ефект Доплера в оптиці та його пояснення в СТВ

Рівняння (91.6) це є те основне рівняння, яке пояснює ефект Доплера в оптиці.

Так як  $\omega'$  - це частота світлового чи електромагнітного сигналу, який подається із системи  $K'$  джерелом, яке так перебуває в стані відносного спокою, то

$$\omega' = \omega_0.$$

Це є власна частота коливання електромагнітного поля.

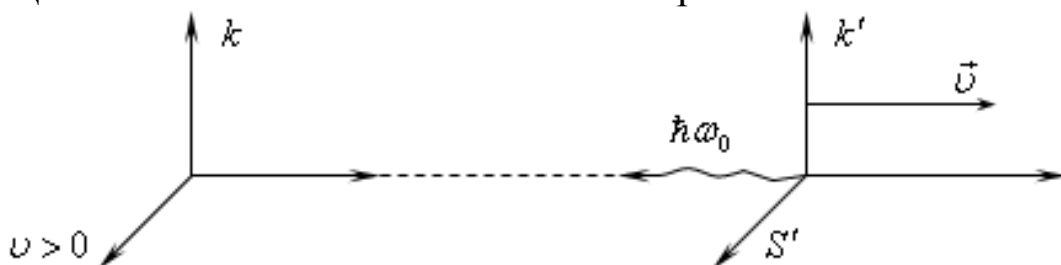


Рис. 77

1. Системи віддаляються одна від одної (рис. 77). Нехай фотон  $\hbar\omega_0$  розповсюджуються до системи  $K$ . Промінь буде поширюватись

під кутом  $180^\circ$  ( $\pi$ ). Отже,

$$\theta = \pi,$$
$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}},$$

Якщо  $v > 0$ , то тоді  $\omega < \omega_0$ , буде червоне зміщення.

2. Системи зближаються і  $v < 0$ , то  $\omega > \omega_0$  буде фіолетове зміщення.

Результат одержаний теоретично співпадає з експериментальним. Це так званий *поздовжній ефект Доплера*.

Коли переміщення розглянули в напрямку перпендикулярному до спостерігача, то із формули (91.6) видно, що  $\cos \theta = 0$  і знаменник відпадає, а значить частота збільшується. Такий ефект Доплера назвали *поперечним*.

## . ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

§93. Рівняння електростатики у вакуумі. Електростатичний потенціал. Рівняння Пуассона.

§94. Загальний розв'язок рівняння Пуассона.

§95. Електростатичне поле у дипольному наближенні. Дипольний момент і його властивості.

§96 Потенціал у системі зарядів на великих віддальх.

§97. Енергія системи нерухомих зарядів. Об'ємна густина енергії електростатичного поля.

§98. Система нерухомих зарядів у зовнішньому електричному полі. Сила, момент сили, що діють з боку поля на електричні заряди.

[1. §6, §8, §10, §11, §13-§15; 4. §4.1-§4.5; 6. §16]

### **§93. Рівняння електростатики у вакуумі. Електростатичний потенціал. Рівняння Пуассона**

Основними рівняннями, що описують електромагнітне поле є рівняння Максвелла (82.1 - 82.4). Застосувавши рівняння (82.2) і (82.3) на їх основі одержимо основне рівняння електростатичного поля

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (93.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{B}. \quad (93.2)$$

Основне рівняння електричного поля є рівняння  $\text{rot}\vec{E} = 0$  і друге  $\text{div}\vec{D} = \rho$ . Дослідимо потік

$$\int_S \text{rot}\vec{E} d\vec{S}$$

через довільну поверхню  $S$  (рис. 78).

Використовуючи теорему Стокса:

$$\int_S \text{rot}\vec{E} d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

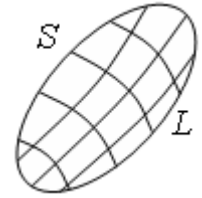


Рис. 78

Будь-яке фізичне поле, якщо воно потенціальне, то між його векторною і скалярною функцією будуть зв'язки через градієнт:

$$\vec{a} = \text{grad}u; \quad (93.1)$$

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = 0. \quad (93.2)$$

Звідси електростатичне поле є потенціальне, то для нього маємо формулу:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Отже,  $\varphi$  - енергетична характеристика поля і вимірюється приладами, тобто потенціал електростатичного поля має фізичний зміст. Для знаходження  $\varphi$  і  $\vec{E}$  найкраще скористатись рівнянням Пуассона, яке випливає із рівняння  $\text{div}\vec{D} = \rho$ .

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}; \quad \vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Підставимо останній вираз замість  $\vec{E}$  і отримаємо:

$$\text{div grad}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon};$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}; \quad (93.3)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Рівняння (93.3) – це диференціальне рівняння другого порядку частинних похідних по координатам.

## §94. Загальний розв'язок рівняння Пуассона

Загальний розв'язок рівняння Пуассона можна здійснити

застосувавши друге рівняння Гріна

$$\int_V (\eta \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \eta) dV = \oint_S \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) dS.$$

Введемо позначення:

$$\int_V (\eta \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \eta) dV = I_{\text{л}};$$

$$\oint_S \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) dS = I_{\text{п}}.$$

В формулі Гріна використані дві довільні функції  $\eta$  і  $\psi$  - це скалярні функції просторових координат  $x, y, z$ :

$$\eta \text{grad} \psi = \vec{a};$$

$$\psi \text{grad} \eta = \vec{a}.$$

Як перша так і друга формула походять від математичної теореми Остроградського-Гауса.

Виберемо точку  $M$  (рис. 79) в якій потенціал треба відшукати на основі рівняння (91.1). Наше завдання полягає в підборі функцій  $\eta$  і  $\psi$ :

$$\eta = \psi; \quad \psi = \frac{1}{r}.$$

Тоді спроститься лівий інтеграл формули Гріна

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right) = 0,$$

$$-\psi \nabla^2 \eta = -\frac{1}{r} \nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon r}.$$

Згідно з формули (91.1) можна підставити як  $-\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon r}$ . Тоді лівий інтеграл:

$$I_{\text{л}} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon r} dV; \quad I_{\text{п}} = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS.$$

Правий інтеграл – це чисто біжучий інтеграл.

При такій побудові сфери, поверхня  $S_a$ , правий інтеграл залишається:

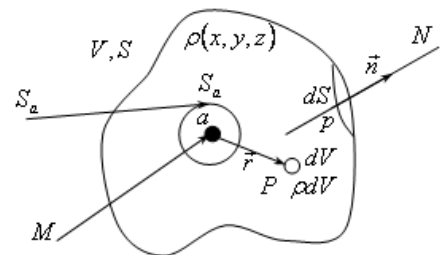


Рис. 79

$$I_{\Pi} = \oint_{S+S_a} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS,$$

де  $S_a$ - сфера;  $\vec{n}$  - орт вектор - нормаль, яка ставиться в біжучій точці  $P$  і спрямована назовні.

$$I_{\Pi} = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \oint_{S_a} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS.$$

Введемо позначення:

$$\oint_S \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = I_1;$$

$$\oint_{S_a} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = I_2.$$

В зв'язку з тим, що  $n$  має ті самі масштаби як  $r$ , але спрямований в протилежному напрямку, то можна замінити операцію диференціювання на  $(-r)$ :

$$I_2 = \oint_{S_a} \left( -\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) dS = \oint_{S_a} \varphi \frac{1}{r^2} dS + \oint_{S_a} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

де  $r$  - радіус цих точок, які знаходяться на поверхні  $S_a$ .

Усереднимо потенціали, винесемо з під знаку інтегралу:

$$I_2 = \frac{1}{a^2} \bar{\varphi} 4\pi a^2 + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} 4\pi a^2.$$

Знайдемо границю  $\varphi$ , тоді  $\varphi \rightarrow \varphi_M$ :

$$\lim_{a \rightarrow 0} I_2 = 4\pi.$$

При відшуканні границі другий доданок дорівнює нулю. Коли підставити  $I_2$  в  $I_{\Pi}$  і розв'язати одержаний вираз відносно  $\varphi$ , то отримаємо розв'язок рівняння Пуассона (93.1):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r} - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (94.1)$$

Ми одержали розв'язок диференціального рівняння (93.1) Пуассона для потенціалу  $\varphi$  електричного поля, сукупності зарядів, які

зосереджені в об'ємі  $V$ . Як видно шуканий потенціал  $\varphi$  складається з двох доданків. Перший доданок це вираз, який виражає складову потенціалу з закону Кулона із застосуванням принципу суперпозиції. Другий доданок стосується якихось поверхневих електричних процесів. Досліди показали, що він показує потенціал поверхні  $S$ , який формулюється зовнішніми полями. При їх відсутності інтеграл перетворюється в нуль.

### §95. Електростатистичне поле у дипольному наближенні. Дипольний момент і його властивості

Розглянемо поле в сукупності точкових зарядів. Для кожного такого заряду можна застосувати формулу, яка випливає із закону Кулона. Задача полягає в тому, щоб знайти потенціал в точці  $M$  (рис. 80).

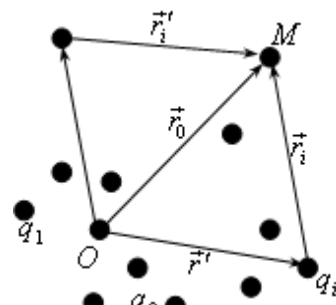


Рис. 80

Запишемо відповідні вирази:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i};$$

$$\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_0} = -\vec{r}_i' \text{grad} \frac{1}{r_0};$$

$$\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_0} = -r_i \text{grad} \left( \frac{1}{r_0} \right); \quad \varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} - q_i \vec{r}_i' \text{grad} \left( \frac{1}{r_0} \right).$$

Ми знайдемо таким чином поле 1, 2, ...,  $i$ -го заряду і застосуємо принцип суперпозиції:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sum_i q_i}{r_0} - \text{grad} \left( \frac{1}{r_0} \right) \sum_i q_i r_i' \right).$$

В фізиці прийнято  $\sum_i q_i r_i' = \vec{p}$  називати дипольним електричним моментом даної системи. Тоді можна представити суму, яка стоїть в останньому рівнянні ( $\varphi = \dots$  через  $p$ ), а

$$\text{grad} \left( \frac{1}{r_0} \right) = -\frac{1}{r_0^2} \frac{\vec{r}_0}{r_0} = -\frac{\vec{r}_0'}{r_0^3}.$$

Отже, формула для потенціалу  $\varphi$  буде складатися із двох доданків:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i}{r_0} + \frac{\vec{p} \vec{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}.$$

Другий доданок це потенціал поля електричного диполя  $\vec{p}$  даної

системи. Перший доданок – потенціал для звичайних зарядів.

У випадку, коли система зарядів  $q_1, q_2, \dots, q_i$  виявляється електрично нейтральною, це буде означати, що

$$\sum_i q_i = 0.$$

Тоді

$$\varphi = \frac{\vec{p}\vec{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}. \quad (95.1)$$

Як видно, потенціал електричного диполя  $\vec{p}$  міняється за законом обернених квадратів, тобто за законом гіперболи другого порядку (в знаменнику  $r_0^3$ ). Найпростішим електричним диполем є сукупність двох зарядів, однакових за величиною і різних за знаком (рис. 81):

$$\vec{p} = q_1\vec{r}_0 + q_2\vec{r}_2 = -q\vec{r}_1 + q\vec{r}_2 = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = q\vec{r}'.$$

Нам відомо вираз (95.1) для потенціалу, а значить ми можемо знати напруженість електричного поля диполя, користуючись відомою формулою:

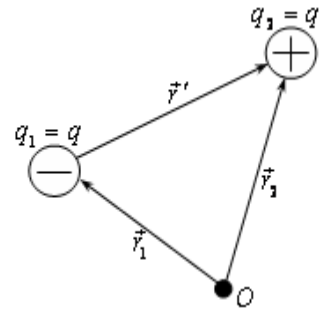


Рис. 81

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi; \rightarrow \vec{E} = -\text{grad}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \vec{p}\vec{r}_0\right);$$

$$\nabla(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\text{rot}\vec{b} + \vec{b}\text{rot}\vec{a} + (\vec{a}\nabla\vec{b} + \vec{b}\nabla\vec{a}).$$

Підставимо замість  $a$  першу функцію, замість  $b$  другу функцію

$$E = -\vec{p}\vec{r}_0\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}\nabla(\vec{p}\vec{r}_0),$$

$$\nabla\frac{1}{r_0^3} = -\frac{3}{r_0^4}\vec{r}_0,$$

$$\nabla(\vec{p}\vec{r}_0) = \vec{p}\underset{\underset{0}{\parallel}}{\text{rot}}\vec{r}_0 + \vec{r}_0\underset{\underset{0}{\parallel}}{\text{rot}}\vec{p} + (\vec{p}\nabla)\vec{r}_0 + \left(\underset{\underset{0}{\parallel}}{\vec{r}_0\nabla}\right)\vec{p}.$$

Оператор  $(\vec{p}\nabla)$  має такий вигляд:

$$\vec{p}\nabla = (\vec{i}p_x + \vec{j}p_y + \vec{k}p_z)\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Цей оператор повинен діяти на  $\vec{r}_0$ , в дужках ми розкриємо  $\vec{r}_0$

$$(\vec{p}\nabla)(\vec{i}x - \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i}p_x + \vec{j}p_y + \vec{k}p_z = \vec{p}.$$

Тепер ми можемо показати, чому буде дорівнювати напруженість електричного поля диполя:

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{r}_0)\vec{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^5} - \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}. \quad (95.2)$$

Якщо електричний диполь розмістити в зовнішнє електричне поле, то крім загальної сили (рис. 82), яка буде діяти на ці заряди, що приведе до переміщення, появиться і обертовий магнітний момент (рис. 83).

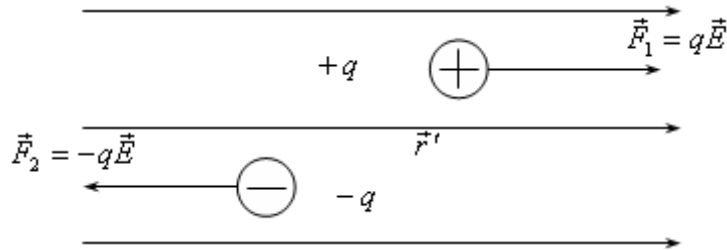


Рис. 82

Якщо

$$\vec{M}_1 = [\vec{r}_1 \vec{F}_1] \text{ та } \vec{M}_2 = [\vec{r}_2 \vec{F}_2].$$

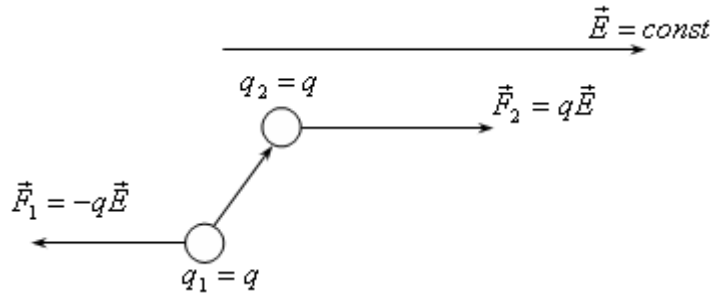


Рис. 83

Замість  $\vec{F}_1$  підставимо  $\vec{F}_1 = -q\vec{E}$ , а  $\vec{F}_2 = -q\vec{E}$ . Маємо

$$\vec{M}' = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{p}\vec{E}]. \quad (95.3)$$

Отже, механічний момент, який появляється при розташуванні електричного диполя в механічному полі буде максимальним, коли ці два вектори будуть перпендикулярними: електричний диполь  $\vec{p}$  і вектор напруженості  $\vec{E}$ , тобто  $\vec{p} \perp \vec{E}$ . Можна записати, що

$$\vec{p}\vec{E} = \sin(\vec{p}\vec{E}).$$

Енергія електричного диполя:

$$W = -\vec{p}\vec{E}. \quad (95.4)$$

## §96. Потенціал в системі зарядів на великих віддалях

Ставиться задача розшукати потенціал в точках  $M$ , які лежать на деяких віддалях. Умову, яку ми використали:  $\frac{r'}{r_0} \ll 1$ .

Запишемо формулу за якою можна знайти величину заряду:

$$dq = \rho dV.$$

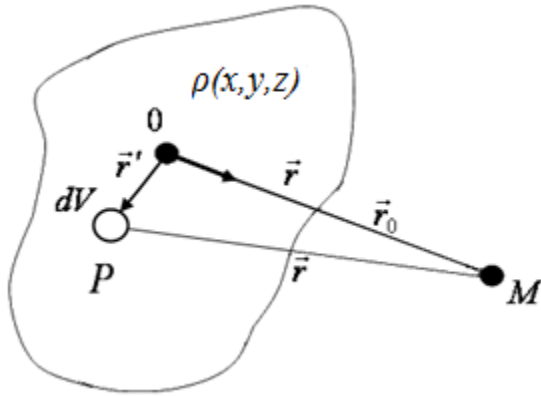


Рис. 84

Виберемо елементарний об'єм  $dV$  і в кожному цьому об'ємі буде якийсь заряд  $q = \rho dV$ . На рис. 84 відображено:  $P$  - біжуча точка, навколо вибирається об'єм  $dV$ ;  $\vec{r}_0$  - радіус-вектор, який виражає польову систему;  $\vec{r}'$  - радіус-вектор, який виражає локальну систему.

Тоді

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}. \quad (96.1)$$

Потенціал знаходиться з виразу (94.1) де враховано тільки перший доданок. Таким чином, усуваємо дію зовнішніх полів:

$$r = \sqrt{(\vec{r}_0 - \vec{r}')^2} = \sqrt{r_0^2 - 2\vec{r}_0\vec{r}' + r'^2},$$

за умовою  $\frac{r'}{r_0} \ll 1$ , яку ми використали, останній корінь можна спростити

$$r = r_0 \sqrt{1 - \frac{2\vec{r}_0\vec{r}'}{r_0^2} + \left(\frac{r'}{r_0}\right)^2} \approx r_0 \sqrt{1 - \frac{2\vec{r}_0\vec{r}'}{r_0^2}}.$$

Проведемо орт вектор  $\vec{n}$  польової системи координат

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_0}{r_0}; \quad r = r_0 \left(1 - \frac{2\vec{n}\vec{r}'}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{2\vec{n}\vec{r}'}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Застосуємо ряд Маклорена:

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\left(1 - \frac{2\vec{n}\vec{r}'}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{r_0} + \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{n}\vec{r}'}{r_0}\right)^2 + \dots$$

Тоді вираз (96.1) матиме такий вигляд:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_V \rho \left( 1 + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{r_0} + \frac{3}{2} \left( \frac{\vec{n}\vec{r}'}{r_0} \right)^2 + \dots \right) dV.$$

Потенціал поля сукупності зарядів в точках, які знаходяться достатньо на великій відстані складається з цілого ряду доданків  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$ . Ці доданки, як видно із останнього співвідношення можна виразити математично.



Рис. 85

На рис. 85 приведені потенціали  $\varphi_2$  та  $\varphi_3$ , де відповідно  $\varphi_2$  - потенціал квадрупольного моменту, а  $\varphi_3$  - потенціал октупольного моменту.

Сукупності мультипольних моментів проявляються в ядрах атомів. Було показано, що ядро може перебувати в сферичній формі через якусь мить може перебувати у вигляді дипольного моменту. Коли ядра випромінюють зайву енергію, вони викидають  $\gamma$ -кванти.

### §97. Енергія системи нерухомих зарядів. Об'ємна густина енергії електростатичного поля

З загального курсу для точкових зарядів відомо, що енергія

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i,$$

де  $\varphi_i$  - це потенціал в  $i$ -й точці.

Користуючись цією формулою, можна записати формулу енергії суцільних зарядів.

На основі цієї формули оцінюємо енергію даної сукупності зарядів в об'ємі  $V$  з об'ємною густиною  $\rho$ , і на поверхні  $S$  з поверхневою густиною  $\delta$ . Об'єм  $V$  ділимо на елементарні об'єми, які

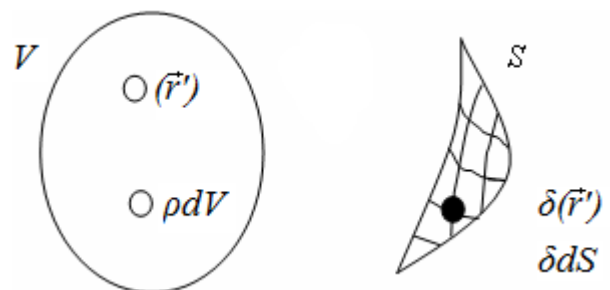


Рис. 86

стягуються до точки, тут елементарний заряд  $\rho dV$  (рис. 86)

$$W = \frac{1}{2} \oint_S \delta\varphi dS + \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV. \quad (97.1)$$

$\begin{array}{ccc} S & & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_1 & & I_2 \end{array}$

Ця формула для визначення енергії взаємодії зарядів, зосереджених на поверхні  $S$  і деякому об'ємі  $V$  (рис. 87).

Для того щоб взяти інтеграли у виразі (97.1) нам треба знати за яким законом розподілені ці заряди на поверхні  $\delta(\vec{r}')$  і в об'ємі  $\rho(\vec{r}')$ .

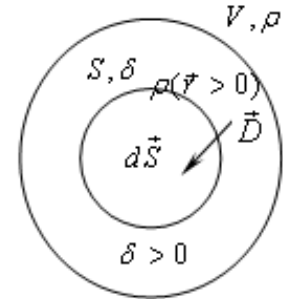


Рис. 87

Розглянемо конкретну систему зарядів. Один з зарядів зосереджений на поверхні провідника, а другий в об'ємі  $V$ , який з одного боку обмежений поверхнею  $S$  ззовні і з середини поверхнею  $S'$ . Тому формула (97.1) абсолютно відображає оцінку енергії для даної системи. Позначимо перший інтеграл рівняння (97.1)  $I_1$ , а другий інтеграл  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_S \delta\varphi dS \quad \text{та} \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV.$$

Дослідимо другий інтеграл. Скориставшись рішенням  $\text{div}\vec{D} = \rho$ , маємо:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_V \varphi \text{div}\vec{D} dV.$$

Вираз під інтегралом  $\varphi \text{div}\vec{D}$  входить у формулу тотожного перетворення:

$$\text{div}(\varphi\vec{D}) = \vec{D}\text{grad}\varphi + \varphi\text{div}\vec{D};$$

$$\varphi \text{div}\vec{D} = \text{div}(\varphi \vec{D}) - \vec{D}\text{grad}\varphi = \text{div}(\varphi \vec{D} + \vec{E}\vec{D}).$$

Тоді після цих перетворень:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\varphi \vec{D}) dV + \frac{1}{2} \int_V \vec{E}\vec{D} dV.$$

$\downarrow$   
 $I_2$

Проведемо дослідження  $I_2'$ . Інтеграл  $I_2'$  можна на основі математичної теоретичної теореми Остроградського-Гауса перевести з

об'ємного на поверхневий. Замість  $\text{div}(\varphi \vec{D})$  запишемо потік цього вектора через поверхню, яка охоплює цей об'єм

$$I'_2 = \frac{1}{2} \oint_{S+S'} \varphi \vec{D} d\vec{S} = \underbrace{\oint}_{0 \rightarrow \text{так як } S \rightarrow \infty} \varphi \vec{D} d\vec{S} + \frac{1}{2} \oint_{S'} \varphi \vec{D} d\vec{S}.$$

Коли  $\vec{D}$  помножимо на  $d\vec{S}$  скалярно:

$$\vec{D}\vec{S} = DdS \cos(\vec{D}, d\vec{S}); \cos(\vec{D}, d\vec{S}) = \cos(180^\circ) = -1;$$

$$I'_2 = -\frac{1}{2} \int_S \varphi D dS.$$

Відомо, що  $\vec{D}$  біля поверхні провідників дорівнює  $\delta$  ( $D = \delta$ ). Вектор  $\vec{D}$  перпендикулярний до поверхні.  $D$  замінимо на  $\delta$

$$I'_2 = -\frac{1}{2} \int_{S'} \varphi \delta dS \quad \text{та} \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_V \vec{E}\vec{D} dV - \frac{1}{2} \oint_{S'} \varphi \delta dS.$$

В цій конкретній задачі в інтегралі (97.1) інтегрування потрібно здійснювати по  $S'$ . Таким чином, вираз для енергії внаслідок рівності двох інших інтегралів, одержимо:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{E}\vec{D} dV. \quad (97.2)$$

Вираз (97.2) виражає енергію електричного поля, яка зосереджена в деякому об'ємі  $V$  через польові функції. Формула (97.2) вказує, що доцільно користуватися об'ємною густиною енергії

$$\omega_e = \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} E^2.$$

Тоді формула (97.2)

$$W = \int_V \omega_e dV = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \int_V E^2 dV.$$

Розрахунок енергії електростатичного поля заряду здійснюється двома способами.

*Перший спосіб.* Для оцінки енергії цим способом застосовують формулу об'ємної густини енергії електростатичного поля

$$\omega_e = \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} E^2. \quad (97.3)$$

Для оцінки енергії в деякому об'ємі  $V$  проводимо інтегрування величини зв'язаної з об'ємною густиною

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \int_V E^2 dV. \quad (97.4)$$

Щоб розрахувати енергію в об'ємі  $V$  потрібно знати векторні функції  $\vec{E}$  та  $\vec{D}$  як функції координат.

*Другий спосіб.* Розрахунок енергії  $W$  ведеться за формулою:

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi \delta dS + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (97.5)$$

Ця формула враховує можливість зарядів, які розподілені по всьому об'єму і по поверхні. У першому способі розрахунку необов'язково знати, які і де ці заряди знаходяться, достатньо знати лише  $\vec{E}$  та  $\vec{D}$ . У другому способі треба знати  $\rho(\vec{r})$  та  $\varphi(\vec{r})$  як функції від координат.

## **§98. Система нерухомих зарядів у зовнішньому електричному полі. Сила, момент сили, що діють з боку поля на електричні заряди.**

На елементарні заряди будь-якого тіла в електростатичному полі діють сили. Ці сили зумовлюють, наприклад, поляризацію діелектриків і електризацію поверхонь провідників (явище індукції). Сукупність прикладених до тіла елементарних сил взагалі не еквівалентна нулю; рівновага тіл спричинюється дією не тільки сил поля, а й інших сил: реакцій опор, сили тяжіння, пружних сил тощо.

Розглянемо деякі механічні сили, що діють в електричному полі.

1. Сила, що діє на точковий заряд, який поміщений в електричне поле  $\vec{E}$ , дорівнює

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (98.1)$$

2. Сила, що діє на неперервно розподілений заряд. Якщо заряд розподілений по об'єму  $V$  з об'ємною густиною  $\rho$ , то в електричному полі  $\vec{E}$  на нього діє сила

$$\vec{F} = \int \rho \vec{E} dV. \quad (98.2)$$

3. Сила, що діє на диполь. Сила, що діє на диполь, є сумою сил, які діють на заряди диполя (рис. 88):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q(\vec{E}_2 - \vec{E}_1), \quad (98.3)$$

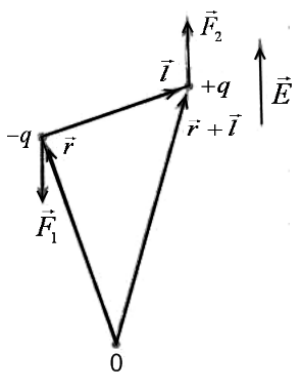


Рис. 88

де  $\vec{E}_2, \vec{E}_1$  - напруженості електричного поля в точці знаходження позитивного і негативного зарядів диполя.

Передбачаючи, що відстань  $l$  між зарядами мала в порівнянні з відстанями, на яких зовнішнє електричне поле змінюється значно, можна напруженість поля  $\vec{E}_2$  розкласти в ряд Тейлора і обмежитися першим членом:

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &\equiv \vec{E}(r + l) = \\ &= \vec{E}(r) + l_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} + \dots = \vec{E}_1 + (l \cdot \nabla) \vec{E} + \dots, \end{aligned} \quad (98.4)$$

де  $(l \cdot \nabla) \vec{E} = \left( l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E} = l_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z},$

а

$$\vec{E}_1 = \vec{E}(\vec{r}).$$

Беручи до уваги формулу (98.3), (98.4) і враховуючи, що  $\vec{p} = ql$ , знаходимо вираз для сили, що діє на диполь:

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}. \quad (98.5)$$

4. Момент сил, що діє на диполь. На диполь діє пара сил (рис. 88), момент якої відносно центра диполя дорівнює

$$\vec{M} = l \cdot q \vec{E} = \vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (98.6)$$

5. Сили, що діють на провідники. Біля поверхні провідника поле із зовнішньої сторони провідників дорівнює

$$\vec{E} = \frac{\sigma \vec{n}}{\varepsilon}, \quad (98.7)$$

де  $\vec{n}$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні провідника,  $\sigma$  - густина поверхневих зарядів.

Для обрахунку повної сили, що діє на провідник в електростатичному полі, необхідно проінтегрувати густину сили по всій поверхні  $S$  провідника (рис. 89):

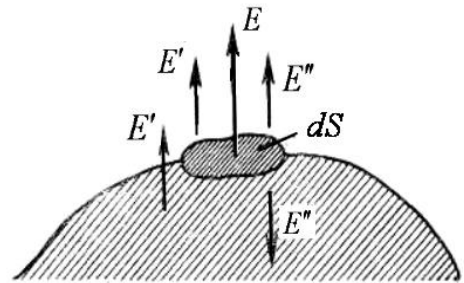


Рис. 89

$$\vec{F} = \int_S f_n d\vec{S} = \frac{\varepsilon}{2} \int_S E^2 d\vec{S} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_S \sigma^2 d\vec{S}, \quad (98.8)$$

де  $d\vec{S} = \vec{n}dS$  - елемент поверхні провідника, направлений по зовнішній нормалі.

6. Об'ємні сили, що діють на діелектрики. Оскільки дипольний момент елемента об'єму  $dV$  поляризованого діелектрика, знаходиться в електричному полі  $\vec{E}$ , дорівнює  $d\vec{p} = \vec{P}dV$ , на цей елемент об'єму згідно формулі (98.5) діє сила

$$d\vec{F} = (d\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}dV. \quad (98.9)$$

7. Об'ємні сили з врахуванням стиснення. Діючі сили залежать від характеру деформації.

8. Поверхневі сили, що діють на діелектрик. Вони викликають деформації середовища, в результаті яких виникають пружні сили, що повністю, зрівноважують об'ємні.

## Лекція 20. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ У РЕЧОВИНАХ

§99. Густина електричного струму і провідність речовин. Диференціальна форма закону Ома і Джоуля-Ленца.

§100. Закон збереження електричних зарядів. Рівняння неперервності електричного струму.

§101. Сторонні електрорушійні сили (ЕРС). Закон Ома і закон Джоуля-Ленца при наявності сторонніх ЕРС

[1. §36-§41; 4. §3.2]

### **§99. Густина електричного струму і провідність речовин. Диференціальна форма закону Ома і Джоуля-Ленца**

Струм визначається величиною заряду, який переноситься через поперечний переріз провідної речовини за одиницю часу

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

В теоретичній фізиці ми маємо справу з диференціальними величинами. І нам треба характеризувати величину в кожній точці, а щоб характеризувати цю величину в кожній точці вводять, ще таку величину як густина струму  $\vec{j}$ . Густина струму  $\vec{j}$  є векторна величина та визначається:

$$\vec{j} = en\vec{v},$$

де  $e$  - електричний заряд;  $n$  - концентрація;  $\vec{v}$  - швидкість.

Якщо електричний заряд  $e > 0$ , то  $\vec{j} \uparrow \uparrow \vec{v}$ , а якщо електричний заряд  $e < 0$ , то  $\vec{j} \uparrow \downarrow \vec{v}$ .

Щоб знайти  $I$  треба цю поверхню поділити на площинки  $dS$ :

$$dI = \vec{j} d\vec{S};$$

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Якщо  $en = \rho$  - це об'ємна густина заряду, то  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ . Об'ємна густина заряду дає нам можливість ввести нове поняття електричного струму (рис. 90):

$$Id\vec{l} = \vec{j} dV.$$

Це означає, що замість лінійного елемента струму (рис. 91) ми можемо вводити об'ємний елемент струму (рис. 92):

$$\left[ d\vec{S} [\vec{j} d\vec{l}] \right] = \underset{\parallel dV}{\vec{j}} (dS dl) - \underset{\parallel dl}{dl} (\vec{j} d\vec{S}) = \vec{j} dV - d_1 d\vec{l}.$$

Для багатьох практичних задач лівий добуток перетворюється в нуль. Ми можемо зробити перехід від лінійної величини до об'ємної, або навпаки. Введення вектора густини електричного струму дає можливість записати закони: закон Ома та закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі. Запишемо рівняння закону Ома:

$$I = \frac{-d\varphi}{dR},$$

де  $d\varphi$  - це потенціал і є величина від'ємна;  $dR$  - це опір цього провідника (рис. 93), який лежить у межах цього поперечного перерізу.

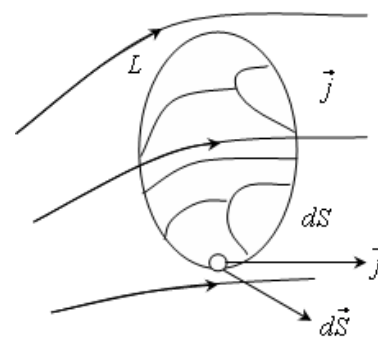


Рис. 90

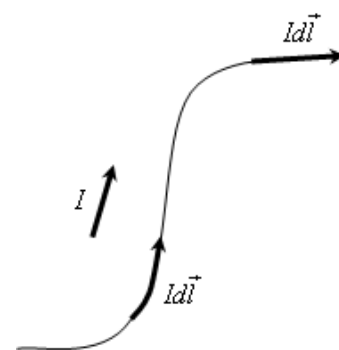


Рис. 91

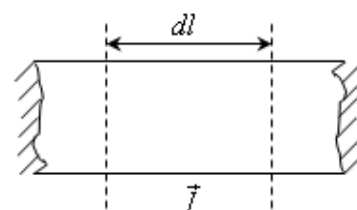


Рис. 92

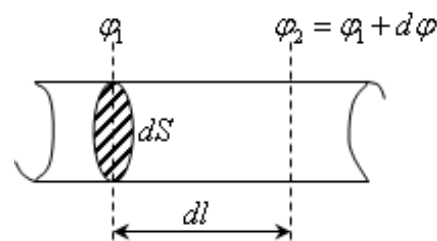


Рис. 93

$$dR = \frac{I dl}{\delta S}; I = \delta ES; E = -\frac{d\varphi}{dl};$$

$$\vec{j} = \delta \vec{E}, \tag{99.1}$$

де  $\delta$  - питома електропровідність середовища.

Ми отримали закон Ома в диференціальній формі. Питома електропровідність середовища пов'язана із питомим опором

співвідношенням:

$$\delta = \frac{1}{\rho_c},$$

де  $\rho_c$  - питомий опір.

Запишемо деякі вирази:

$$\vec{j} = en\vec{v}; \quad \vec{j} = \delta\vec{E}; \quad \vec{v} = \mu_e\vec{E},$$

де  $\mu_e$  - рухливість зарядів  $e$ .

*Рухливість* – це фізична величина, рівна швидкості руху зарядів при  $E = 1$ . Звідси

$$\delta = en\mu_e.$$

Розглянемо закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі. Для формування закон Джоуля-Ленца треба ввести нову величину, що називається питомою теплотою потужності.

Виберемо провідник. *Питомою тепловою потужністю* будемо називати ту кількість теплової енергії, яка виділяється за одиницю часу в одиничному об'ємі провідника (речовини).

Запишемо вирази:

$$dR = \frac{1}{\delta} \frac{dl}{dS}; \quad Q_0 = \frac{dI^2 dR dt}{dt dV}; \quad dI = j dS; \quad dV = dS dl.$$

Коли звести ці вирази в одну формулу, то після скорочень отримаємо:

$$Q_0 = \frac{j^2}{\delta}. \quad (99.2)$$

Це закон *Джоуля-Ленца в диференціальній формі*. Він відноситься для кожної точки і теж виражається за одиницю часу. Якщо із виразу (99.1) підставити значення  $j$ , то закон Джоуля-Ленца буде представлений так:

$$Q = \delta E^2 = \vec{j}\vec{E}; \quad (99.3)$$

## **§100. Закон збереження електричних зарядів. Рівняння неперервності електричного струму**

В кожній ізольованій фізичній системі алгебраїчна сума зарядів залишається незмінною при всіх перетвореннях, які відбуваються в системі. Це було відкрито в працях багатьох вчених.

Розберемо з цією метою таку задачу. В деякому об'ємі  $V$  знаходиться позитивний заряд  $q$ , об'ємна густина, якого є функція координат (рис. 94). Прийmemo для конкретності  $\rho(r) > 0$ . Як показав експеримент, заряд у виділеному об'ємі не зберігається, найчастіше

він зменшується. Ми можемо оцінити на яку величину  $-\frac{\partial q}{\partial t}$  зменшується цей заряд.

Мабуть цей заряд зменшується за рахунок того, що частина його витікає через поверхню  $S$ . А це не що інше як струм через цю поверхню

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \oint_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Мінус тому, що коли провести  $dS$  і величину  $\vec{j}$ , то їх скалярний добуток і є та величина, що стоїть під знаком інтеграла.

Ліву частину переписемо так. При цьому скористаємося теоремою Остроградського-Гауса

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV; \rightarrow \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV;$$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (100.1)$$

Вираз (100.1) є рівняння *неперервності електричного струму*. Тут закон збереження показує перший вираз: скільки заряду перенесено за одиницю часу з об'єму стільки ж зарядів перенесено через поверхню  $S$  у вигляді струму. Цей закон перевірений у всіх експериментальних дослідженнях і відображає нам перший закон Кірхгофа.

Важливим для практики є вираз струмів в електричних колах, коли  $\rho$  - об'ємна густина зарядів в кожній точці провідного кола залишається фіксованою, вона може від точки до точки мінятися.

Такий струм, який збігом часу не міняється називають *стаціонарним струмом* (рис. 95). Скільки зарядів за одиницю часу винесено, стільки їх буде принесено.

Розглянемо випадок, коли

$$\rho = \text{const}, \text{ тоді } \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Остання рівність рівна нулю свідчить, що лінії вектора  $\vec{j}$  мусять бути замкнуті. Нам при дослідженні струмів доведеться виділяти

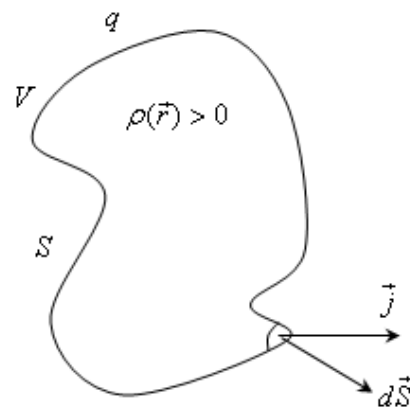


Рис. 94

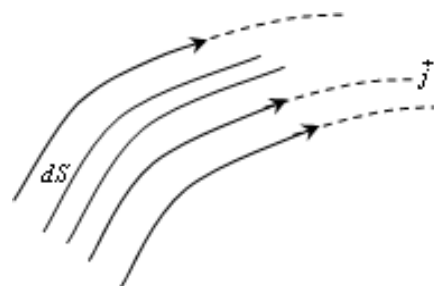


Рис. 95

трубки. Вони будуть замкнуті в стаціонарних полях і напрямленні вздовж ліній струму

$$dI = \vec{j}d\vec{S} = \text{const.}$$

Коли  $\rho$  - густина об'ємного заряду є величина стала, то електричне поле стаціонарного струму є подібним до електростатичного. А електростатичне поле характеризується потенціальним характером. Тому в такому полі буде мати вираз, який і буде властивий для фізичних полів

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Для стаціонарних струмів буде властива ця формула:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Цей останній факт нас заставляє задуматись.

### **§101. Сторонні електрорушійні сили (ЕРС). Закон Ома і закон Джоуля-Ленца при наявності сторонніх ЕРС**

Запишемо рівняння скориставшись для поля через інтеграл  $\vec{E}d\vec{l}$  у вигляді:

$$\oint_L \vec{j}d\vec{l} = \oint_L \vec{e}d\vec{l} = \delta \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Виберемо  $L$  вздовж лінії  $\vec{j}$ , але  $\vec{j} \parallel dl$ , то  $\cos = 1$ . Тоді

$$\oint_{Lj} \vec{j}dl = \oint_{Li} idl = 0.$$

Отже, в електростатичному кулонівському полі створити стаціонарний струм неможливо. Для цього потрібно якісь допоміжні засоби. Можна створити струм в колі такими джерелами, які належать до не електричних джерел (хімічні процеси, механічну енергію в генераторах). Інакше кажучи, потрібне стороннє джерело, яке отримало назву джерела електрорушійної сили (ЕРС)

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \varepsilon.$$

Поле буде складатися з двох доданків: з кулонівського і стороннього  $\vec{E} + \vec{E}_c$ ,

де  $E_c$ - напруженість поля, що викликається ЕРС стороннього джерела. Формула закону Ома (99.1) буде представлена в такому вигляді:

$$\vec{j} = \delta(\vec{E} + \vec{E}_c). \quad (101.1)$$

Закон Джоуля-Ленца:

$$Q_0 = \int \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}_c). \quad (101.2)$$

де  $Q_0$  береться для одиничного об'єму.

Можна показати, що закон Джоуля-Ленца для всього об'єму визначається одним доданком  $\vec{E}_c$ . Запишемо:

$$Q_{OV} = \int_V \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}_c)dV ;$$

де  $\int_V j\vec{E}dV = 0$  та  $E = -\text{grad } \varphi$ , тоді  $\int_V j\text{grad } \varphi dV = 0$ .

Отже, отримаємо:

$$Q_{OV} = \int_V \vec{j}\vec{E}_c dV ;$$

де  $Q_{OV}$ - береться по всьому об'ємі.

## Лекція 21. СТАЦІОНАРНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ

§102. Магнітне поле струму. Рівняння Максвелла магнітостатичного поля. Закон Біо-Савара-Лапласа.

§103. Векторний потенціал магнітного поля. Рівняння Пуассона для векторного потенціалу. Граничні умови.

§104. Електромагнітне поле заряду, що перебуває в рівномірному русі.

§105. Векторний потенціал системи струмів на великих віддалях. Стаціонарне магнітне поле у дипольному наближенні.

§106. Магнітний момент та його властивості. Магнітний момент витка з струмом.

[1. §43-§47; 2. §24-§26; 6. §17]

**§102 Магнітне поле струму. Рівняння Максвелла для магнітостатичного поля. Закон Біо-Савара-Лапласа**

Для того, щоб сформувати стаціонарне магнітне поле потрібно одержати стаціонарний струм. Тільки при цій умові появиться магнітостатичне поле. У всіх інших випадках магнітне поле буде змінюватись синхронно. Якщо магнітне поле зростає, струм зростає, якщо зменшується, струм теж зменшується. Тоді навколо самого провідника і в провіднику виникає електричне поле. На рис. 96 вказано, як позначається напрям струму в провіднику.

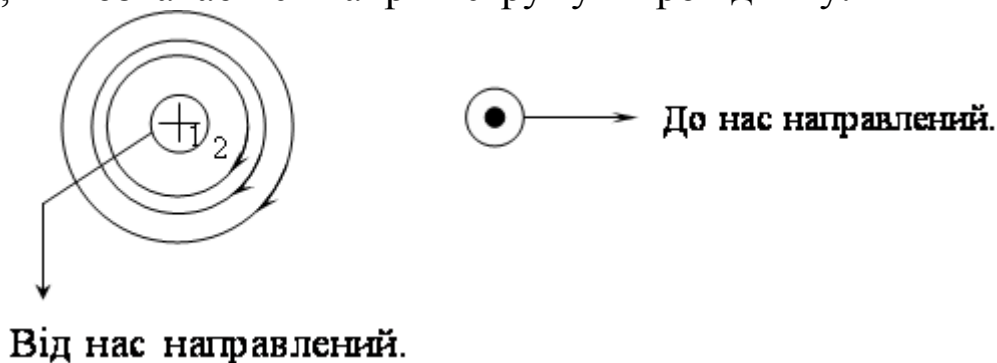


Рис. 96

Для оцінки електромагнітного поля вводиться вектор  $\vec{B}$  (магнітна індукція).

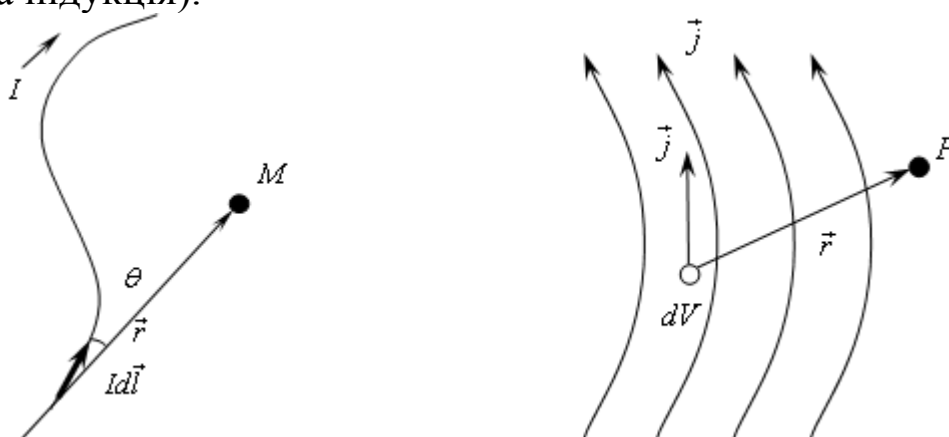


Рис. 97

В точку  $M$  проведемо радіус  $\vec{r}$  (рис. 97). Виділимо лінійний елемент струму  $Id\vec{l}$ . Елемент  $Idl$  формує деяке поле і його індукцію в точці  $M$ . Тобто

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l}\vec{r}]}{r^3}. \quad (102.1)$$

Вираз (102.1) закон Біо-Савара-Лапласа для лінійного струму.

Виберемо елементарний об'єм  $dV$  і проведемо вектор  $\vec{j}$  і вектор  $\vec{r}$  до  $P$ , маємо

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3} dV. \quad (102.2)$$

Надамо виразам (102.1) та (102.2) децю іншої форми запису, а саме:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[Id\vec{l}\vec{r}]}{r^3}; \quad (102.3)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}\vec{r}]dV}{r^3}. \quad (102.4)$$

Дуже важливе значення має формула (102.4) для об'ємних струмів.

### §103. Векторний потенціал магнітного поля. Рівняння Пуассона для векторного потенціалу. Граничні умови

Формулу (102.4) можна використати для значення  $\vec{B}$  розв'язуючи диференціальне рівняння. Але це не дуже складно. Тому ввели нову проміжну величину  $\vec{A}$ . Її можна знайти розв'язуючи рівняння:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (103.1)$$

В рівнянні (102.4)

$$\left[ \vec{j} \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \left[ \vec{j} \left( -\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right) \right] = \left[ \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \vec{j} \right];$$

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) = \left[ \nabla \left( \frac{1}{r} \vec{j} \right) \right] = \left[ \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \vec{j} \right] + \frac{1}{r} \left( \begin{array}{c} \nabla \vec{j} \\ \parallel \\ 0 \end{array} \right).$$

Тоді після наших перетворень формула (102.4) набуде вигляду:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot} \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) dV; \rightarrow \vec{B} = \text{rot} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV \right).$$

Вираз в круглих дужках є векторний потенціал і його позначають  $\vec{A}$ .

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}dV}{r}. \quad (103.2)$$

Ця формула подібна до скалярного потенціалу:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r};$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Згідно (103.1) діючи на  $\vec{A}$  оператором  $\text{rot}$  одержуємо величину  $\vec{B}$ . До цієї формули ми звертались при розв'язуванні рівняння Пуассона. Рівняння Пуассона для векторного потенціалу ми отримали з рівняння Даламбера. Рівняння Пуассона для магнітостатичного поля ми отримали з рівняння Даламбера (103.2)

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Тому для вакууму

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (103.3)$$

Але для рівняння Даламбера існує умова Лоренца (103.1)

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (103.4)$$

## §104. Електромагнітне поле заряду, що перебуває в рівномірному русі

Дослідити електромагнітне поле заряду, що перебуває у рівномірному русі.

Дану задачу досить раціонально розв'язати скориставшись СТВ. При чому рухому систему  $K'$  будемо жорстко в'язати із частинкою – електричним зарядом. Швидкість руху цієї системи стане рівною швидкості руху частинки  $u$ . При такому виборі в системі  $K'$  магнітне поле існувати не буде, існувати буде лише електричне поле (через те, що рухомий заряд буде перебувати у стані відносного спокою в магнітному полі).

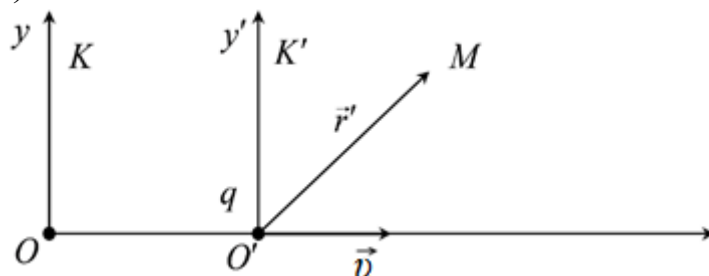


Рис. 98

В точці  $M$  (польовій) досліджуємо поле (рис. 98). Координатні осі ми спрямуємо так, щоб вони співпадали з швидкістю частинки.

СТВ використано з тією метою, що один із чотиривимірних

векторів входять ці обидва потенціали  $\varphi$  і  $\vec{A}$  - чотиривимірний вектор потенціалу  $\vec{\Phi}$ . Перетворення координат цього вектора при переході з системи  $K'$  в систему  $K$  забезпечить можливість знайти електромагнітний потенціал

$$\vec{\Phi} \begin{pmatrix} \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 \\ A_x, A_y, A_z, \frac{i}{c}\varphi \end{pmatrix}.$$

Під час переходу з  $K' \rightarrow K$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \gamma(\Phi'_1 - i\beta\Phi'_4); & A_x &= \gamma\left(A'_x - i\beta\frac{i}{c}\varphi'\right); \\ \Phi_2 &= \Phi'_2; & \Phi_3 &= \Phi'_3; & A_y &= A'_y; & A_z &= A'_z; \\ \Phi_4 &= \gamma(\Phi'_4 - i\beta\Phi'_1); & \frac{i}{c}\varphi &= \gamma\left(\frac{i}{c}\varphi' + i\beta A'_x\right). \end{aligned}$$

В зв'язку з відсутністю магнітного поля в системі, то  $A_x = 0$ ,  $A_y = 0$ ,  $A_z = 0$ . Скористаємось рівнянням

$$\frac{i}{c}\varphi = \gamma\left(\frac{i}{c}\varphi' + i\beta A'_x\right), \rightarrow \frac{i}{c}\varphi = \gamma\left(\frac{i}{c}\varphi' + 0\right), \rightarrow \varphi = \gamma\varphi'.$$

З останнього рівняння видно, що потенціал поля в точці  $M$  системи  $K$  зв'язаний лінійно з потенціалом в системі  $K'$  через коефіцієнт  $\gamma$ . Величина  $\varphi'$  - нам відома, вона рівна:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'}.$$

Користуючись перетвореннями Лоренца ми можемо виразити  $r'$

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}, \\ \varphi &= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Для знаходження  $\vec{A}$  скористаємось рівнянням

$$\begin{aligned} A_x &= \gamma\left(A'_x - i\beta\frac{i}{c}\varphi'\right), \rightarrow A_x = \gamma\left(0 - i\beta\frac{i}{c}\varphi'\right), \\ A_x &= \frac{\gamma\beta}{c}\varphi' = \frac{\gamma v}{c^2}\varphi', \rightarrow A_x = A. \end{aligned}$$

Всі проекції рівні нулю, тому і  $A_x = A$ . Тоді

$$\begin{aligned} A_x &= A = \frac{v}{c^2}\varphi, \\ \vec{A} &= \frac{1}{c^2}\varphi\vec{v}. \end{aligned}$$

Хоча в системі  $K'$  магнітного поля не існує, а лише електричне, але в системі  $K$  існує як магнітне так і електричне поля. Тоді можна

знайти і вектор магнітної індукції  $\vec{B}$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \text{rot}(\varphi\vec{v}) = [\text{grad}\varphi\vec{v}] + \varphi\text{rot}\vec{v}.$$

Оскільки згідно умови  $\vec{v}$  є величиною сталою, то  $\varphi\text{rot}\vec{v} = 0$ . Тоді можна записати:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\text{grad}\varphi\vec{v}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v}\vec{E}];$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{v}\vec{E}].$$

### §105. Векторний потенціал системи струмів на великих віддальх. Стационарне магнітне поле у дипольному наближенні

Задача подібна до тієї задачі, яку ми ставили в §96. Виберемо початок координат. Поділимо об'єм  $V$  на елементарні, в кожному з яких елемент струму складає величину  $\vec{j}dV$ . Цей елемент  $\vec{j}dV$  є об'ємним елементом струму (рис. 99).

Будь-який вектор в точці  $P$  визначається:

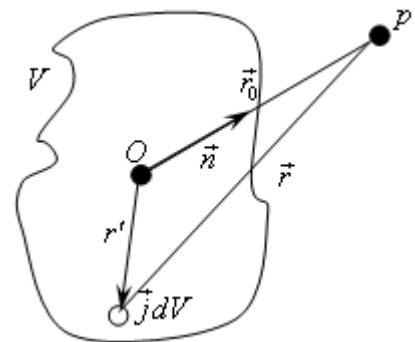


Рис. 99

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{j}dV}{4\pi r}.$$

Положення точки  $P$  визначається радіусом-вектором  $\vec{r}_0$ . За принципом суперпозиції:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}dV}{r}; \quad (105.1)$$

$$r' \ll r_0;$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left( 1 + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{r_0} + \frac{3}{2} \left( \frac{\vec{n}\vec{r}'}{r_0} \right)^2 \right).$$

Тепер вираз для  $\vec{A}$  має вигляд:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \int \vec{j} \left( 1 + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{r_0} + \frac{3}{2} \left( \frac{\vec{n}\vec{r}'}{r_0} \right)^2 + \dots \right) dV.$$

З цього виразу можна написати три інтеграли, а решта

упускаються.

Розіб'ємо все поле на трубки струму (рис. 100), в кожній з яких  $\Delta I$  буде стала ( $\Delta I = \text{const}$ ). Тоді для такої трубки:

$$\int_V \vec{j} dV = \sum_i \oint_{Li} \Delta I_i \Delta l.$$

В цих інтегралах нам доведеться брати замість об'ємного елемента струму  $\vec{j} dV$ , лінійний  $I_i dl$ .

Величина  $\Delta I_i$  є величиною фіксованою по всій довжині контуру  $L$ , тому ми її винесемо за інтеграл

$$\oint_{Li} d\vec{l} = 0.$$

Другий інтеграл, як показали теоретичні дослідження робить найбільший вклад у величину векторного потенціалу  $A$

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{n}\vec{r}')}{r^2_0} dV.$$

Даний інтеграл можна перетворити:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{8\pi r_0^2} \int_V [[\vec{r}'\vec{j}]\vec{n}] dV \quad \text{або} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r_0^2} \left[ \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}'\vec{j}] dV \vec{n} \right].$$

Величина

$$\frac{1}{2} \int_V [\vec{r}'\vec{j}] dV = \vec{P}_m \quad (105.2)$$

в фізиці прийнята як магнітний момент даної системи електричних струмів. Для електричного моменту:

$$\vec{P}_e = \int_V \rho \vec{r} dV.$$

Тепер векторний потенціал можна представити:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{P}_m \vec{r}_0]}{r_0^3}. \quad (105.3)$$

Співвідношення (105.3) для векторного потенціалу  $A$  -

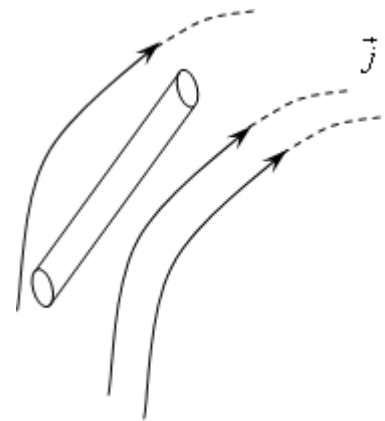


Рис. 100

сукупність струмів, які зосередженні в об'ємі  $V$ , вказує, що векторний потенціал як і скалярний потенціал в електричному полі виражається через магнітний момент. Формула (105.3) представляє сукупність зарядів в дипольному наближенні.

## §106. Магнітний момент та його властивості. Магнітний момент витка з струмом

Будь-який магнітний момент  $P_M$  фактично являє джерело магнітного поля

$$\vec{B} = \text{rot} \left( \frac{\mu_0 [\vec{P}_M \vec{r}_0]}{4\pi r_0^3} \right),$$

$$[\nabla [\vec{P}_M \vec{r}_0]] = \text{rot} [\vec{P}_M \vec{r}_0].$$

В результаті складних перетворень, ми отримаємо вираз:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{P}_M \vec{r}_0) \vec{r}_0}{r^5} - \frac{\vec{P}_M}{r^3} \right). \quad (106.1)$$

Знаючи  $\vec{P}_M$  за формулою (106.1) ми можемо розрахувати магнітне поле даного магнітного моменту  $\vec{P}_M$  (рис. 101). Як видно цей вираз подібно до виразу  $\vec{E}$  електричного поля електричного дипольного моменту (104.2). Найпростішим магнітним моментом електричного струму може бути, наприклад, момент магнітного поля плоского електричного струму. Розглянемо приклад. Мабуть рівняння (105.3) в даному конкретному випадку треба буде переробити для лінійного струму

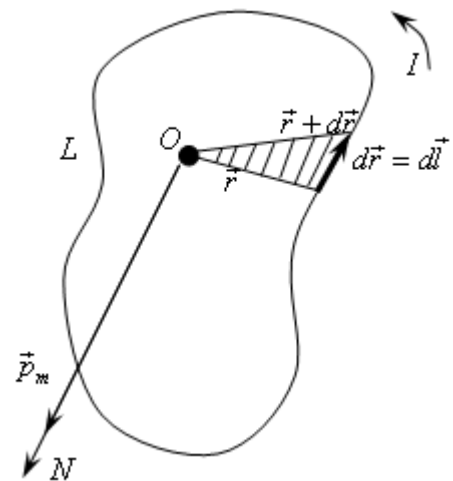


Рис. 101

$$\vec{P}_M = \frac{1}{2} \oint_L [\vec{r} I dl] = \frac{1}{2} \oint_L [\vec{r} d\vec{l}],$$

де  $\frac{1}{2} [\vec{r} d\vec{l}] = d\vec{S}$  - площа заштрихованого трикутника.

$$\vec{p}_m = I \vec{S}.$$

Магнітний момент плоского замкнутого струму дорівнює добутку сили струму на площу обмежену цим контуром, спрямованою в напрямі магнітного поля цього струму. Енергія магнітного моменту

в магнітному полі:

$$W = -\vec{P}_M \vec{B}.$$

Механічний момент:

$$M_{\text{мех}} = [\vec{P}_M \vec{B}].$$

## Лекція 22. КВАЗИСТАЦІОНАРНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ

§107. Умови і характеристики квазістатичного електромагнітного поля.

§108. Закон електромагнітної індукції Фарадея і його вираз у диференціальній формі.

§109 Вираз напруженості електричного поля через електродинамічні потенціали. Струм зміщення.

§110. Енергія магнітного поля. Об'ємна густина енергії магнітного поля.

[1. §67-§72; 2. §24-§27; 6. §17]

### §107. Умови і характеристики квазістаціонарного електромагнітного поля

Параметри, характеристики, які описують такі поля є змінними. Ці поля є частинними проявами квазістаціонарних процесів. Процеси такі називаються повільними (рис. 102), бо їх зміна по відношенню до швидкостей з якими вони розповсюджуються повільна.



Рис. 102

1. Час розповсюдження процесу в такій фізичній системі значно менший від змін, які відбуваються в даній фізичній системі.

2. Домножимо на  $c$  праву і ліву сторону нерівності, отримаємо  $ct \ll cT$ , тоді  $l < \lambda$ .

Саме тому, що в таких системах існують квазістаціонарні струми, для них можна застосувати закони Ома і Джоуля-Ленца. Довжина хвилі промислового струму 6000 км.

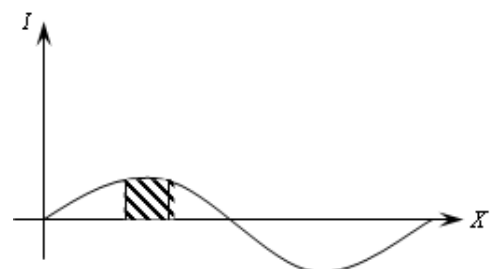


Рис. 103

Через 3000 км  $I = 0$ , значить і потужність дорівнює нулю. Ефективно працювати на віддалі в заштрихованій області призводить до втрати

потужності (рис. 103).

*Квазістатичними полями* називають такі поля в яких струмами зміщення можна знехтувати по відношенню до струмів провідності.

### §108. Закон електромагнітної індукції Фарадея і його вираз у диференціальній формі

Фарадей експериментально дослідив явище електромагнітної індукції. Він показав, що всякі зміни магнітного поля викликають в провідниках появу ЕРС, а якщо ці провідники замкнуті, то виникають індукційні струми

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (108.1)$$

В замкнутому контурі ЕРС прямо пропорційна до швидкості зміни магнітного потоку  $\Phi$ , через контур в якому виникає струм. Мінус у формулі відображає закон Ленца (струм, який виникає зміною зовнішнього магнітного поля має такий напрям, що намагається зменшити зміни зовнішнього поля).

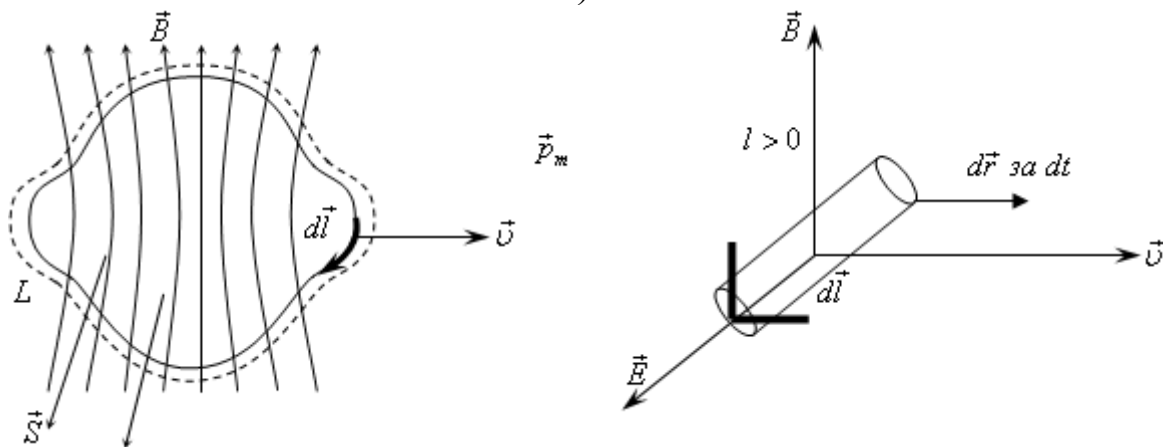


Рис. 104

Візьмемо елемент провідника, який знаходиться в магнітному полі. Skorистаємось відносним рухом контуру по відношенню до поля, заставивши його розширюватись. Відрізок  $dl$  зміниться в нове положення на відрізок  $dr$  (віддаль між контурами), то швидкість  $v = \frac{dr}{dt}$ . Внесемо цей елемент у зовнішнє поле (рис. 104).

Вважаємо, що заряд, який є в цьому провідникові  $e > 0$ . Сила, з якою магнітне поле буде діяти на заряд означає, що має існувати електричне поле. Сила Лоренца

$$\vec{F} = e[\vec{v}\vec{B}];$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{e} = [\vec{v}\vec{B}].$$

Електричне поле буде спрямоване в ту сторону куди буде напрямлений векторний добуток  $[\vec{v}\vec{B}]$ . В ту ж саму сторону буде напрямлена і сила Лоренца (за правилом гвинта). По всьому контурі буде існувати поле. Постає питання: чому буде дорівнювати ЕРС?

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l}.$$

ЕРС визначається циркуляцією вектора  $\vec{E}$  по замкнутому контуру. Треба оцінити  $\vec{E} d\vec{l}$  для того, щоб потім можна було проінтегрувати

$$\vec{E} d\vec{l} = [\vec{v}\vec{B}] d\vec{l} = [d\vec{l}\vec{v}]\vec{B} = \frac{I}{dt} [d\vec{l}d\vec{r}]\vec{B},$$

де  $d\vec{l}$  - повинно співпадати з напрямком струму;  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

Нагадаємо, що при проходженні струму через контур в такому напрямі, який ми вибрали магнітний момент зміститься вниз. І  $\vec{S}$  співпадає з напрямком магнітного моменту  $P_M$ , тобто

$$\begin{aligned} \vec{P}_M &= I\vec{S}, \\ [d\vec{l}d\vec{r}] &= -d\vec{S}_0, \\ \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{I}{dt} \vec{B} d\vec{S}_0 = -\frac{I}{dt} d\Phi_0. \end{aligned}$$

Це є елементарний магнітний потік через площину, що сформувався. Повернемось тепер до

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{I}{dt} \oint_L d\Phi_0.$$

↓  
 $d\Phi$



Рис. 105

Цей інтеграл дасть  $d\Phi$ , це та область, яка є в тому прошарку (рис. 105).

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{d\Phi}{dt}; \\ \varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned}$$

Теоретичним шляхом одержали формулу Фарадея (108.1), яка виражає закон Фарадея: ЕРС індукції прямо пропорційна швидкості зміни магнітного потоку через контур досліджуваного провідника. Для перетворення виразу (108.1) в диференціальну форму, виберемо довільний контур  $L$ , в магнітному полі  $\vec{B}$ . Візьмемо в кожній точці свої значення  $\vec{E}$  і  $d\vec{l}$ , тому, що при зміні  $d\vec{l}$  і  $\vec{E}$  будуть змінювати свій напрям. Тоді

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

де величина  $dS$  - повинна обмежуватись контуром  $L$ . Внаслідок того, що координата не залежить від часу, то ми можемо взяти частинну похідну

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} dS \quad \text{або} \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Застосуємо теорему Стокса до лівого інтегралу:

$$\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = \int_S - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Якщо інтеграли беруться по одній поверхні  $S$ , то підінтегральні вирази рівні

$$\text{rot} \vec{E} = - \dot{\vec{B}}. \quad (108.2)$$

Це є рівняння Максвелла (83.3) і воно є узагальненням індукції Фарадея та виражає закон в диференціальній формі.

## §109. Вираз напруженості електричного поля через електродинамічні потенціали. Струм зміщення

Основне рівняння електростатичного поля  $\text{rot} \vec{E} = 0$  було до тих пір, коли не було виведено рівняння Максвелла  $\text{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$  (для змінних полів)

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{A}, \\ B &\rightarrow \text{rot} \vec{A}, \\ \text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned}$$

В змінних потенціальних полях ми можемо створити

стаціонарне поле, але воно буде дорівнювати  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}\varphi,$$

$$E = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (109.1)$$

Обидва ці потенціали є чисто математичними функціями. Виявилось, що закони магнітостатичного поля  $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$ ,  $\text{div}\vec{B} = 0$  є неповними при розгляданні змінних полів

$$\text{rot}\vec{E} = -\vec{B}.$$

Подіємо  $\text{div}$  на рівняння магнітостатичного поля

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} \quad | \quad \text{div}V,$$

$$\text{div rot}\vec{H} = 0,$$

де  $\text{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  – це випливає з рівняння неперервності дивись формулу (100.1).

Виходячи з простих міркувань Максвелл дослідив, що треба ввести, ще *струм зміщення*  $\vec{j}_3$ , тобто до струму провідності  $\vec{j}$  треба додати струм зміщення. Якщо врахуємо ці струми тепер, то маємо:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_3.$$

Коли подіємо оператором  $\text{div}$ , то

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_3 \quad | \quad \text{div},$$

$$\text{div}(\vec{j} + \vec{j}_3) = 0.$$

На основі останнього ми бачимо:

$$\text{div}\vec{j}_3 = -\text{div}\vec{j}.$$

Якщо в останнє рівняння замість  $\text{div}\vec{j}$  підставити значення виразу (108.1), то

$$\text{div}\vec{j}_3 = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Далі використовуючи рівняння Максвелла  $\rho = \text{div}\vec{D}$ , яке підставляємо у попереднє, отримаємо:

$$\text{div}\vec{j}_3 = \text{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Отже, звідси випливає:

$$\vec{j}_3 = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (109.2)$$

$$\vec{j}_3 = \vec{D}.$$

Ми помічаємо, що густина струму зміщення визначається швидкістю зміни вектора  $\vec{D}$ . Чим ця зміна швидша, тим більше буде значення  $\vec{j}_3$ . Для прикладу:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{D}_0 e^{i\omega t}; \\ \dot{D} &= i\omega D; \\ \omega &= 2\pi f; \\ f_1 &= 100 \text{ Гц}; f_2 = 10^7 \text{ Гц}.\end{aligned}$$

І тепер рівняння Максвелла для змінних полів:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}. \quad (109.3)$$

Вираз (109.3) підставимо у вираз (82.1).

Навколо струмів зміщення і навколо струму провідності існує магнітне поле про що свідчить рівняння (109.3).

### §110. Енергія магнітного поля. Об'ємна густина енергії магнітного поля

Запишемо вираз для густини енергії електричного поля

$$\omega_e = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} E^2.$$

Об'ємна густина енергії магнітного поля оцінюється аналогічно:

$$\omega_m = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{2} H^2. \quad (110.1)$$

Для виведення (110.1) ми розглянемо сукупність струмів у вибраному об'ємі  $V$ . Одна із умов квазістаціонарних полів та, що ми струмом зміщення можемо знехтувати. Таким чином, ми маємо струм в об'ємі  $V$  у квазістаціонарі. Ми їх закріпимо так щоб вони не переміщувалися, тоді не буде виконуватись робота по переміщенню.

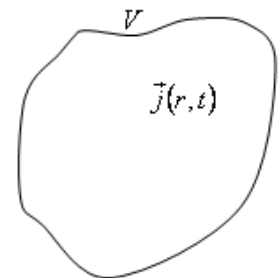


Рис. 106

Домовимось, що теплових втрат не буде. Коли в деякий момент часу появляються струми в об'ємі  $V$  (рис. 106), тоді магнітне поле буде описуватись вектором  $\vec{B}$ , а через час  $dt$  він спишетесья  $\vec{B} + d\vec{B}$ . При цьому виконається робота

$$dA = -dt \int_V \vec{j} \vec{E} dV.$$

Щоб вираз включав магнітні величини, треба ввести деяку заміну:

$$\vec{j} = \text{rot}\vec{H} - \underbrace{\vec{D}}_0.$$

Так як ми знехтували струмами зміщення, тому що квазістаціонарні поля, то  $\vec{D} \rightarrow 0$ . Тоді

$$dA = -dt \int_V \vec{E} \text{rot}\vec{H} dV.$$

Ми помічаємо, що вираз  $\vec{E} \text{rot}\vec{H}$  входить у перетворення  $\text{div}[\vec{E}\vec{H}]$ , а саме:

$$\text{div}[\vec{E}\vec{H}] = \vec{H} \text{rot}\vec{E} - \vec{E} \text{rot}\vec{H}.$$

Отже,  $\vec{E} \text{rot}\vec{H}$ , що входить в останній інтеграл ми можемо підставити:

$$dA = dt \int_V \text{div}[\vec{E}\vec{H}] dV - dt \int_V \vec{H} \text{rot}\vec{E} dV.$$

Можна показати, що перший інтеграл рівний нулеві.

$$\int_V \text{div}[\vec{E}\vec{H}] dV = \oint_S [\vec{E}\vec{H}] dS.$$

Отже, взявши за основу рівняння Максвелла, маємо

$$dA = -dt \int_V \vec{H} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV \text{ або } dA = \int_V \vec{H} d\vec{B} dV.$$

Таким чином, прибавляється за рахунок цієї енергії, енергія магнітного поля за час  $dt$

$$dA_0 = \vec{H} d\vec{B}.$$

В кожному одиничному об'ємі величина енергії зростає на  $dA_0$ . Згадавши перший закон термодинаміки, що

$$dQ = dU + dA,$$

а для одного об'єму

$$dQ = dU - HdB \text{ та } dQ = TdS,$$

$$TdS = dU - \vec{H} d\vec{B}, \rightarrow dU = TdS + \vec{H} d\vec{B}.$$

Це значення  $TdS$  підставимо у попередню формулу:

$$d(U - TS) = \vec{H} d\vec{B} - SdT.$$

Вираз у дужках  $d(U - TS)$  - це є вільна енергія  $F$ , тобто

$$dF = \vec{H} d\vec{B} - SdT.$$

Розглянемо термодинамічний процес (ізотермічний процес  $T = \text{const}$ )

$$dF = \vec{H}d\vec{B}.$$

Енергія, яка зосереджена в електромагнітному полі йде на зміну вільної енергії системи.

Постає запитання: яку енергію посилає магнітне поле, коли індукція міняється від нуля і до  $B$ ? Запишемо дані вирази:

$$\omega_M = \int_0^B \vec{H}d\vec{B} = \int_0^B \frac{BdB}{\mu_0\mu};$$
$$\omega_M = \frac{1}{2\mu_0\mu}B^2 = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}.$$

От ми і одержали формулу (110.1), яка дає оцінку тієї енергії, яка закладена в одиничному об'ємі  $V$ , через вектор магнітного поля.

Енергія:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{H}\vec{B}dV.$$

## Лекція 23. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

§111. Хвильові рівняння для напруженостей електромагнітного поля. Плоскі електромагнітні хвилі.

§112. Монохроматичні плоскі електромагнітні хвилі та їх рівняння. Хвильовий вектор.

§113. Структура поля плоских монохроматичних хвиль. Вираз густини потоку енергії для плоских хвиль.

[1. §85, §112; 2. §57, §58, §69; 4. §5.1-5.11; 6. §27-§38]

### **§111. Хвильові рівняння для напруженостей електромагнітного поля. Плоскі електромагнітні хвилі**

В цьому параграфі ми розглядатимемо таке середовище, в якому відсутні заряди поверхневі і об'ємні ( $\rho = 0$ ;  $\delta = 0$ ), відсутні струми провідності  $\vec{j} = 0$ , магнітні і електричні проникності є величинами сталими. Тоді при цих умовах для даного поля рівняння Максвелла будуть мати вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}; \vec{j} = 0; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0; \rho = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (111.1)$$

Для того щоб одержати хвильові диференціальні рівняння, ми поступимо таким чином, будемо діяти оператором  $\operatorname{rot}$  на перше рівняння і праву сторону ми замінимо на основі третього рівняння, отримаємо:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = [\nabla[\nabla \vec{H}]] = \underbrace{\nabla(\nabla \vec{H})}_{\operatorname{div} \vec{H}} - \nabla^2 \vec{H}.$$

Тепер подіємо на третє рівняння оператором  $\operatorname{rot}$

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0; \quad (111.2)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (111.3)$$

Ми одержали диференціальні рівняння, які описують електромагнітну хвилю через векторні функції  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ . Як видно ці диференціальні рівняння частинних похідних за координатами і часом в декартовій системі координат з сталими коефіцієнтами, а в інших ці коефіцієнти будуть різні.

Швидкість поширення хвилі (цей множник сталий в рівнянні Даламбера):

$$\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu = \frac{1}{v^2}.$$

Ми можемо переписати ці два рівняння в такому зручному для нас вигляді:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad (111.4)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0; \quad (111.5)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (111.6)$$

Цей коефіцієнт  $\sqrt{\epsilon\mu} = n$  - показник заломлення електромагнітних хвиль. Максвелл розв'язуючи ці рівняння прийшов до висновку, що  $\sqrt{\epsilon\mu} = n$ . Ця властивість перевірена. В кристалах ця теорія не справджується і це непередбачена теорія Максвелла (явища дисперсії). Дане явище було ще пояснено на основі електронної теорії. Розв'язок цих рівнянь досить складний при розгляді плоскої хвилі. Фронт хвилі характеризується тим, що всі точки коливаються в одній фазі (рис. 107).

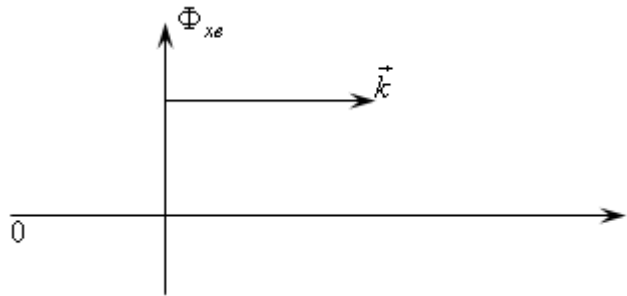


Рис. 107

Розв'язок в такому випадку буде мати вигляд:

$$\vec{H} = \vec{H} \left( t - \frac{x}{v} \right) \text{ та } \vec{E} = \vec{E} \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

Ці функції визначаються за початковими умовами:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_2(x); \quad \vec{E} \Big|_{t=0} = f_1(x).$$

Величина, якою тут виражається аргумент  $t - \frac{x}{v}$  є фактично фаза хвилі. Тобто ця швидкість є фазовою швидкістю:

$$\theta_0 = t - \frac{x}{v},$$

де  $x = v t - v\theta$  - цей вираз дає фазову площину;  $v_{em} = \frac{dx}{dt} = v = v_\phi$  - фазова швидкість;  $v_{em}$  - швидкість електромагнітної хвилі.

Теоретичні дослідження та експеримент показали, що цей розв'язок є частинним інтегралом. Повторний (загальний) розв'язок для кожного з цих рівнянь (111.4; 111.5) має вигляд:

$$\vec{E} \left( t - \frac{x}{v} \right) + \vec{E} \left( t + \frac{x}{v} \right);$$

$$\vec{H} \left( t - \frac{x}{v} \right) + \vec{H} \left( t + \frac{x}{v} \right).$$

Перший доданок – випромінювання джерела; другий – стороннє випромінювання. Дію сторонніх полів потрібно ліквідувати.

## §112. Монохроматичні плоскі електромагнітні хвилі та їх рівняння. Хвильовий вектор

Для практики виключно мають велике значення плоскі монохроматичні хвилі. *Монохроматичними хвилями* будемо називати,

в яких векторні функції  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  міняються за гармонічним законом (за законом  $\sin$ ,  $\cos$ , а взагалі і за  $e^{i\omega t}$ ):

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x)e^{i\omega t}; \quad (112.1)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0(x)e^{i\omega t}. \quad (112.2)$$

Нам потрібно знати ці функції, які мають коефіцієнти  $\vec{E}_0(x)$  і  $\vec{H}_0(x)$ . З цією метою вирази (112.1), (112.2) підставляють в диференціальні рівняння (111.4), (111.5). Тут буде використовуватись  $\nabla$ , як

$$\nabla^2 = \nabla_k^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

та отримаємо такий вираз:

$$\nabla^2 E_0(x)e^{i\omega t} + \frac{\omega^2}{v^2} E_0(x)e^{i\omega t} = 0.$$

Скоротимо на  $e^{i\omega t}$  та пропонується ввести величину  $\frac{\omega}{v} = k$  і назвати модулем хвильового вектора. Таким чином, ми одержуємо після скорочення таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + k^2 \vec{E}_0 = 0;$$

$$\vec{E}_0 = \vec{C}_1 e^{-ikx} + \vec{C}'_1 e^{ikx}.$$

Аналогічно

$$\vec{H}_0 = \vec{C}_2 e^{-ikx} + \vec{C}'_2 e^{ikx}.$$

Підставимо ці рівняння у вирази (112.1) і (112.2), отримаємо:

$$\vec{E} = \vec{C}_1 e^{i(\omega t - kx)} + \vec{C}'_1 e^{i(\omega t + kx)};$$

$$\vec{H} = \vec{C}_2 e^{i(\omega t - kx)} + \vec{C}'_2 e^{i(\omega t + kx)}.$$

Перевіримо правильність розв'язку:

$$\omega t - kx = \omega \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

Виходячи з нашої умови, використаємо ці рівняння тільки з першими доданками, бо другі доданки походять від зовнішніх полів

$$\vec{E} = \vec{C}_1 e^{i(\omega t - kx)};$$

$$\vec{H} = \vec{C}_2 e^{i(\omega t - kx)}.$$

Узагальнимо вираз  $kx$ , який би можна було б використовувати не тільки в плоских хвилях, але і в більш складних хвильових процесах (рис. 108). Можна замінити скалярним добутком:

$$kx = \vec{k}\vec{r} = rk \cos(\vec{r}, \vec{k}).$$

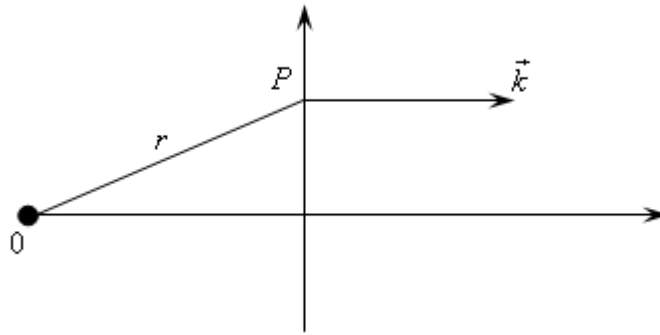


Рис. 108

У складних процесах добуток  $\vec{k}\vec{r}$  треба розуміти як просторову величину

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Одержані вирази для напруженості магнітного та електричного полів будуть мати вигляд:

$$\vec{E} = \vec{C}_1 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}; \quad (112.3)$$

$$\vec{H} = \vec{C}_2 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}. \quad (112.4)$$

Ми одержали формули, які називаються *рівняннями монохроматичних електромагнітних хвиль*.

### §113. Структура поля плоских монохроматичних хвиль. Вираз густини потоку енергії для плоских хвиль

На основі рівнянь хвилі (112.3) і (112.4) для монохроматичних електромагнітних хвиль ми можемо без особливих труднощів виявити структуру електромагнітного поля

$$\text{div}\vec{E} = -i\vec{k}\vec{E} = 0.$$

Поле зорієнтоване в одному напрямі весь час

$$\nabla e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}(-ik),$$

але  $\text{div}\vec{E} = 0$ .

Отже, вектор  $\vec{E}$  має бути перпендикулярним до вектора  $\vec{k}$ , тільки тоді скалярний добуток дорівнює нулю. Отже,  $\vec{E} \perp \vec{k}$  (хвиля поперечна).

Аналогічно показуємо:

$$\text{div}\vec{H} = -ik\vec{H} = 0,$$

то  $\vec{H} \perp \vec{k}$ . Отже, і ця хвиля поперечна.

Залишилося вяснити як  $\vec{H}$  і  $\vec{E}$  зорієнтовані у площині між собою. Подіємо  $\text{rot}$  на вектор  $\vec{E}$  у рівнянні (112.3)

$$\text{rot}\vec{E} = -i[\vec{k}\vec{E}].$$

З іншої сторони

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu_0\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0\mu i\omega\vec{H}.$$

Скоротивши, одержимо:

$$[\vec{k}\vec{E}] = \mu_0\mu\omega\vec{H}.$$

Ці вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ :

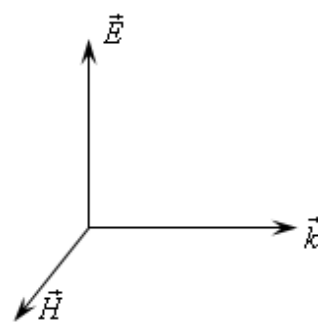


Рис. 109

1) розташовані перпендикулярно до

напрямку поширення хвилі  $I$ ;

2) між собою вони розташовані взаємноперпендикулярно (рис. 109). З цієї останньої формули ми можемо записати:

$$kE = \mu_0\mu\omega H.$$

Замість  $k$  можна написати  $\frac{\omega}{v}$  і скоротити на  $v$

$$\vec{E} = \mu_0\mu v\vec{H}.$$

Виключимо  $v$ , отримаємо

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H. \quad (113.1)$$

Формула (113.1) показує як зв'язані між собою вектор електричного поля  $\vec{E}$  та вектор магнітного поля  $\vec{H}$ . Піднесемо до квадрату і поділимо на 2

$$\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2},$$

$$\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}. \quad (113.2)$$

Ця остання формула вказує, що енергія розділяється рівномірно між електричними та магнітними складовими даної електромагнітної хвилі.

*Вектор Умова-Пойтінга:*

$$U_p = EH.$$

Підставимо значення  $H$  із рівняння (113.1), одержимо:

$$U_p = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}} = v\varepsilon_0\varepsilon E^2 = v\omega_{\text{ем}}.$$

Вектор Умова-Пойтінга дорівнює добутку об'ємної густини електромагнітного поля на швидкість розповсюдження цього поля.

## Лекція 24. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ДОВІЛЬНО РУХОМИХ ЗАРЯДІВ

§114. Рівняння Даламбера та їх загальний розв'язок для електромагнітного поля довільно рухомих зарядів. Запізнювальні потенціали електромагнітного поля.

§115. Дипольне випромінювання зарядів і струмів. Вирази для запізнювальних електродинамічних потенціалів.

§116. Випромінювання електричного диполя (гармонічного осцилятора) Герца.

§117. Поле гармонічного осцилятора Герца в ближній зоні (дипольне наближення) і у хвильовій (далекій) зоні – наближення плоских хвиль.

[1. §81-§83, §94-§96; 2. §31-§38; 4. §4.1-§4.5, §5.1-§5.11]

### **§114. Рівняння Даламбера та їх загальний розв'язок для електромагнітного поля довільно рухомих зарядів. Запізнювальні потенціали електромагнітного поля**

Рівняння Даламбера виведенні нами в §83:

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}; \quad (83.3)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mu \vec{j}. \quad (83.2)$$

Ці обидва рівняння виведенні із рівнянь Максвелла для швидкозмінних полів. До них додається, ще умова Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0; \quad (83.1)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t};$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Розв'язуючи ці рівняння як математичні процеси Даламбер показав, що функція  $\varphi$ , яка входить в (83.3) може бути виражена в такій формі:

$$\varphi = \frac{1}{r} \left( \theta_1 \left( t - \frac{r}{v} + \theta_2 \left( t + \frac{r}{v} \right) \right) \right). \quad (114.1)$$

Коефіцієнт  $\frac{1}{r}$  свідчить, що поле хвиль, які одержуються на основі рівнянь Даламбера має центральну симетрію, тобто фронт хвилі має сферичну поверхню.

Початкові умови:

$$\theta_{1|t=0} = f_1(r); \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_2(r).$$

Наше завдання: скориставшись виразом (114.1) вивести загальний розв'язок рівняння Даламбера для сукупності рухомих зарядів і струмів.

Так як формула для фазової швидкості має вигляд:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}},$$

то розглянемо деякий об'єм  $V$  (рис. 110). У будь якій точці будуть мати свої значення також і струми  $\vec{j}$ , які міняються із збігом часу. Величина  $\vec{r}_0$ - радіус, що визначає положення польової точки. В точці  $M$  існує потенціал. Припустимо, що заряди і струми не змінюються з часом

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r}.$$

А якщо положення точки міняється з бігом часу, то

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \left( t - \frac{r}{v} \vec{r}' \right) dV}{r}.$$

Зафіксуємо потенціал в точці  $M$  (рис. 110). Аналогічно до рівняння Пуассона  $\varphi$  буде суперпозицією всіх полів  $d\varphi$ , які одержуються при розбитті об'єму  $V$  на безмежну кількість елемента  $dV$

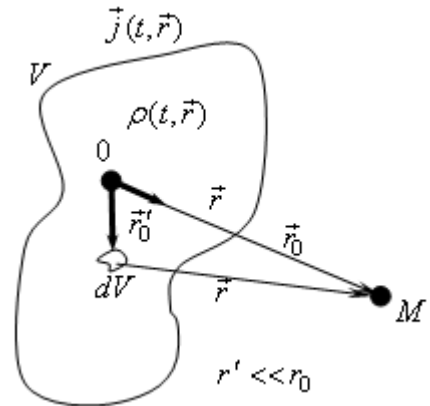


Рис. 110

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\rho \left( t - \frac{r}{v} \vec{r}' \right)}{r} dV. \quad (114.2)$$

Аналогічно векторний потенціал  $\vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \left( t - \frac{r}{v} \vec{r}' \right)}{r} dV. \quad (114.3)$$

Щоб переконатися, що вирази (114.2) і (114.3) є розв'язками рівнянь (83.2) і (83.3) досить їх підставити в рівняння і отримати тотожність.

## §115. Дипольне вимірювання зарядів і струмів. Вирази для запізнювальних електродинамічних потенціалів

Розглянемо випадок, коли точки  $M$  будуть віддалені від

сукупності зарядів і струмів, що зосередженні в об'ємі  $V$ . Тоді в рівняннях (114.1) і (114.2) ми можемо зробити спрощення, замінивши

$$r = r_0 - \vec{n}\vec{r}'.$$

Таким чином, рівняння (114.2) має вигляд:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\rho\left(\frac{t - r_0 - \vec{n}\vec{r}'}{v} \vec{r}'\right) dV}{r_0 - \vec{n}\vec{r}'_1}.$$

Зрозуміло, що

$$\vec{n}\vec{r}' \ll r_0, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}_0}{r_0},$$

$$\varphi = F(r_0 - \vec{n}\vec{r}') = F(r_0) - \vec{n}\vec{r}' \frac{\partial F}{\partial r_0} + \frac{(\vec{n}\vec{r}')^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial r_0^2}.$$

Це розклад функції в ряд по степенях малої величини  $\vec{n}\vec{r}'$ . Тоді

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\rho\left(t - \frac{r_0}{v} \vec{r}'\right)}{r_0} dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \vec{n}\vec{r}' \frac{\partial}{\partial r_0} \int_V \frac{\rho\left(t - \frac{r_0}{v} \vec{r}'\right)}{r_0} dV.$$

↓  
0

На практиці використовуються електричні заряди і струми, що є електрично-нейтральними. Для електрично-нейтральних систем перший інтеграл відпадає, тоді  $\varphi$  буде виражатися тільки другим інтегралом:

$$\varphi = -\frac{\vec{n}}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial}{\partial r_0} \frac{1}{r_0} \int_V \underbrace{\vec{r}' \rho\left(t - \frac{r_0}{v} \vec{r}'\right) dV}_{\vec{P} - \text{ електричний диполь}}.$$

Отже,

$$\varphi = -\frac{\vec{n}}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial}{\partial r_0} \frac{\vec{p}\left(t - \frac{r_0}{v}\right)}{r_0} \quad \text{або} \quad \varphi = -\vec{n} \frac{\partial}{\partial r_0} \frac{\vec{p}\left(t - \frac{r_0}{v}\right)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_0}.$$

Цей останній вираз є дивергенцією складових векторів, який стоїть у вигляді дробу

$$\varphi = -\text{div} \frac{\vec{p}\left(t - \frac{r_0}{v}\right)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_0}. \quad (115.1)$$

Цей вираз для  $\varphi$  досить в лаконічній формі. Вводимо позначення:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{p}\left(t - \frac{r_0}{v}\right)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_0}; \quad (115.2)$$

$$\varphi = -\text{div}\vec{Z}. \quad (115.3)$$

Провівши дослідження та математичні перетворення для векторного потенціалу, ми одержимо для відкритої антени значення векторного потенціалу:

$$\vec{A} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}. \quad (115.4)$$

Отже, обидва потенціали виражені через  $Z$ . А функція  $Z$  виражена через дипольний момент системи, тому природно назвати випромінювання такої системи дипольним.

### §116. Вимірювання електричного диполя (гармонічного осцилятора) Герца

Вперше випромінювання електромагнітних хвиль в експериментальному дослідженні (рис. 111) провів Г. Герц у 1888 році. Хоча Максвелл передбачив ці випромінювання теоретично за 25 років до Герца.

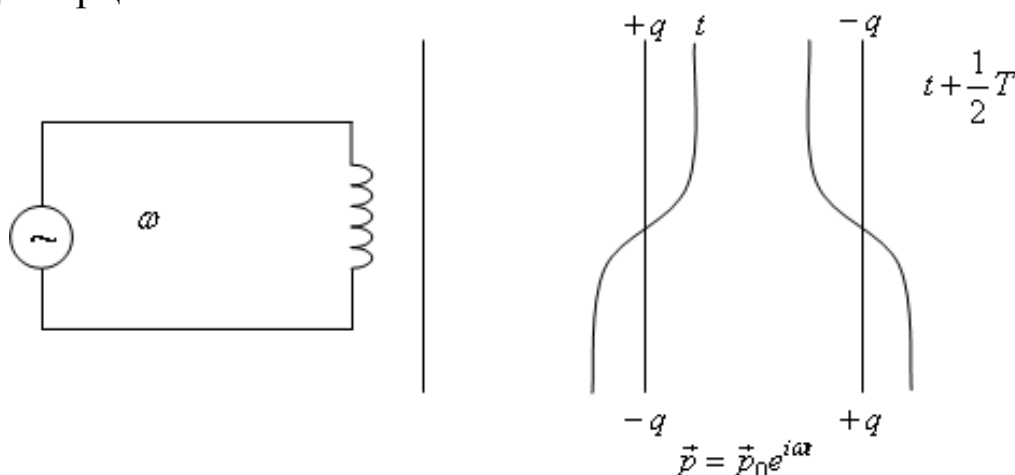


Рис. 111

Це означає, що вектор  $\vec{Z}$  у рівнянні (115.2) можна представити так:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{p}_0 e^{i\omega \left(t - \frac{r_0}{v}\right)}}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r_0}. \quad (116.1)$$

Щоб знайти  $\vec{E}$  для цього конкретного випадку в точці  $M$  (рис. 112), нам необхідно скористатися виразами (115.3) та (115.4):

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

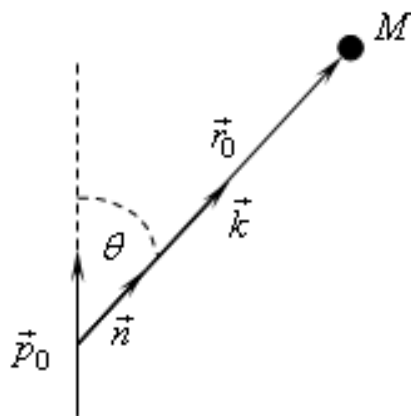


Рис. 112

А щоб знайти  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

Будемо мати такі вирази (причому  $\varepsilon = 1$ ):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \left( \frac{k^2}{r_0} - \frac{ik}{r_0^2} - \frac{1}{r_0^3} \right) \vec{p}_0 - (\vec{p}_0 \vec{n}) \left( \frac{k^2}{r_0} - \frac{3ik}{r_0^2} - \frac{3}{r_0^3} \right) \vec{n} \right) e^{i(\omega t - kr_0)}. \quad (116.2)$$

Знаючи  $\vec{B}$ , можна знайти  $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu},$$

тоді

$$\vec{H} = \frac{i\omega}{4\pi} [\vec{p}_0 \vec{n}] \left( \frac{ik}{r_0} + \frac{1}{r_0^2} \right) e^{i(\omega t - kr_0)}. \quad (116.3)$$

Як видно гармонічний осцилятор Герца поправу називається гармонічним тому, що електромагнітні хвилі в точці  $M$  змінюються по гармонічному закону. Вектор  $\vec{E}$  компланарний з площиною, яка формується  $\vec{p}_0, \vec{k}$ . Вектор  $\vec{H}$  перпендикулярний до цієї площини видно із векторного добутку  $[\vec{p}_0 \vec{n}]$ .

### §117. Поле гармонічного осцилятора герца в ближній зоні (дипольне наближення) і у хвильовій (далекій) зоні - наближення плоских хвиль

*Ближня зона* – точки, якої лежать близько від осцилятора Герца:  $r_0 \ll \lambda$ , тобто

$$kr_0 = 2\pi \frac{r_0}{\lambda} \ll 1,$$

де  $r_0$ - відстань точок від осцилятора.

*Ближня зона* – це зона де електромагнітне поле можна розглядати як квазістатичне. При визначенні  $\vec{E}$  згідно виразу (116.2) ми збережемо тільки ті доданки в яких  $r_0$  буде в кубі. Таким чином, ми можемо знехтувати  $r_0$  в першому і  $r_0$  - другому

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} (-\vec{p}_0 + 3\vec{n}(\vec{p}_0 \vec{n})) e^{i\omega t};$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p}_0\vec{n})\vec{n}}{r_0^3} - \frac{\vec{p}_0}{r_0^3} \right) e^{i\omega t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p}\vec{n})\vec{n}}{r_0^3} - \frac{\vec{p}}{r_0^3} \right); \quad (117.1)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{n}\vec{r}_0)\vec{r}_0}{r_0^5} - \frac{\vec{p}}{r_0^3}. \quad (117.2)$$

Вираз вектора  $\vec{H}$  в ближній зоні виражається так точно як закон Біо-Савара-Лапласа.

*Далека зона* – це та частина електромагнітного поля в якому виконується зворотна нерівність  $r_0 \gg \lambda$ .

В цьому випадку у виразі (116.2) ми відкинемо ті доданки в знаменнику  $r_0$  стоять в квадраті і в кубі

$$\vec{E} = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\vec{p}_0 - \vec{n}(\vec{p}_0\vec{n})) e^{i(\omega t - kr_0)}.$$

Можна показати, що вираз в дужках є подвійним векторним добутком такого типу:  $[\vec{n}[\vec{p}_0\vec{n}]]$ . Перевірити це можна розкривши подвійний добуток за методом тотожних перетворень. Інакше кажучи:

$$\vec{E} = -\frac{k^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} [\vec{n}[\vec{p}_0\vec{n}]] e^{i(\omega t - kr_0)}.$$

Як відомо з попередньої лекції  $\vec{k}$  - це хвильовий вектор, модуль якого дорівнює:

$$k = \frac{\omega}{c}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}; \quad \mu = \epsilon = 1.$$

Можна показати, що вираз

$$\omega^2 \vec{p}_0 e^{i(\omega t - kr_0)} = \vec{p} = \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial t^2}.$$

Таким чином, ми одержуємо вираз:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0 c^2} [\vec{n}[\vec{p}\vec{n}]]; \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0 c^2} [[\vec{p}\vec{n}]\vec{n}]. \end{aligned} \quad (117.3)$$

Для вектора  $\vec{H}$ , виходячи із формули (116.3) ми збережемо ті доданки в яких  $\vec{r}_0$  стоїть у степені. За аналогією ми одержимо такий вираз:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi r_0 c} [\vec{p}\vec{n}]. \quad (117.4)$$

Очевидно, виходячи із цих формул (117.3) і (117.4) ми можемо вже сказати, що вектор електричного поля  $\vec{E}$  буде перпендикулярний

до вектора  $\vec{n}$  у виразі (117.3), бо  $\vec{n}$  входить у векторний добуток, який нам дає  $\vec{E}$  ( $\vec{E} \perp \vec{n}$ ), тобто векторна складова вібратора Герца буде перпендикулярна до напрямку розповсюдження хвилі. Електрична складова у вібраторі Герца розповсюджується поперечною хвилею.

Взагалі електромагнітна хвиля, яка одержується у вібраторі Герца буде поперечною хвилею. Ми помічали, що у формулу (117.3) входить повністю рівність (117.4). Ми одержимо лаконічний вираз для  $\vec{E}$  через  $\vec{H}$ .

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 c} [\vec{H} \vec{n}]. \quad (117.5)$$

Останнє рівняння підкреслює нам, що  $\vec{E}$  є перпендикулярним до  $\vec{n}$ , але вони і є взаємоперпендикулярні між собою  $\vec{E} \perp \vec{H}$ ;  $\vec{H} \perp \vec{n}$ . З цієї формули ми можемо показати, ще одну властивість, перейшовши до модуля

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 c} H, \\ \sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H. \quad (117.6)$$

Величина  $r_0$  втрачається, тому що вона входить як константа сферичної хвилі.

Розглянемо інтенсивність випромінювання осцилятора Герца. Інтенсивність випромінювання антени виражається через  $U_p$ - вектор Умова-Пойтінга

$$U_p = EH \text{ та } \sin(\vec{E} \vec{H}) = 1.$$

Із рівняння (117.4) ми можемо підставити  $H$ , а з рівняння (117.6) ми можемо підставити  $E$

$$H = \frac{1}{4\pi r_0 c} \ddot{p} \sin \theta. \quad (117.7)$$

Тоді величина густини потоку енергії в будь-якій точці (вектор Умова-Пойтінга), буде мати вигляд:

$$U_p = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c^2 r_0^2} \text{ або } U_p = \frac{p_0 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^2 r_0^2} e^{2i(\omega t - kx)}.$$

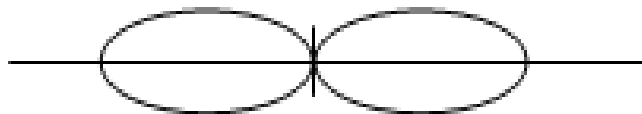


Рис. 113

Максимальна величина енергії буде розповсюджуватись в

напрямку перпендикулярному до ліній випромінювання (рис. 113).

## Лекція 25. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ У РЕЧОВИНІ

§118. Рівняння Лоренца для мікроскопічного електричного і мікроскопічного магнітного полів. Вільні та зв'язані заряди. Мікроструми в речовині.

§119. Макроскопічне усереднення рівнянь Лоренца. Струми провідності та намагніченості.

§120. Вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  електромагнітного поля. Рівняння Максвелла і матеріальні рівняння в речовині. Граничні умови.

[1. §22, §23, §59; 4. §2.1-§2.6; 6. §7, §8]

### §118. Рівняння Лоренца для мікроскопічного електричного і мікроскопічного магнітного полів. Вільні та зв'язані заряди. Мікроструми в речовині

Виявляється, що Лоренц розвив електрону теорію, використав рівняння для мікрополів, які існують в речовині. Лоренц для описування мікрополів застосував рівняння Максвелла, які подібні для макрополів.

Вводиться напруженість  $\vec{e}$  мікрополя, потенціал  $\varphi_\mu$ , магнітна індукція  $\vec{l}$ , мікрострум провідності  $\vec{j}_\mu$ . Досліджуючи електричне поле він скористався такими формулами:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{e} &= 0; \\ \vec{e} &= -\operatorname{grad} \varphi_\mu; \\ \operatorname{div} \vec{e} &= \frac{\rho_\mu}{\varepsilon_0},\end{aligned}$$

де  $\rho_\mu$  - об'ємна густина мікрозаряду.

Для подальшого розгляду даної теми поставимо такі запитання:

1. Чи законно використовувати формулу Лоренца?
2. Чи можна для них вивести мікроскопічні рівняння Максвелла?

Мабуть перше запитання дасть позитивну відповідь, якщо ми даємо відповідь на друге запитання. Щоб дати відповідь на це запитання треба провести усереднення. Треба усереднити мікророзміри за об'ємом, а якщо пов'язана з часом, то і за часом.

Усереднення за об'ємом ми будемо робити таким способом. Вибирається невеликий об'єм, який називається *нескінченно малим*, *фізично малим об'ємом*  $V_\phi$ . Верхня межа повинна бути такою, щоб термодинамічні параметри залишилися практично однаковими, а якщо міняються, то дуже мало, цими змінами ми можемо знехтувати.

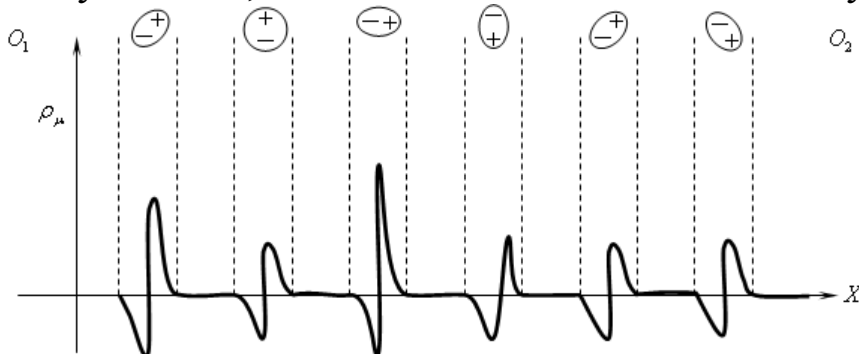


Рис. 114

Виберемо уявну лінію вздовж якої розміщені молекули (рис. 114).

Напруженості електричного мікрополя можуть набувати таких значень, яких у лабораторії важко досягнути.

На рис. 115 величина  $\vec{p}_{OM}$  – це орбітальний магнітний момент.

Лоренц допускає, що

$$\text{rot } \vec{b} = \frac{\vec{j}}{\mu_0} = \vec{j}_\mu;$$

$$\vec{j}_\mu = \vec{j}_{\mu\text{пр}} + \vec{j}_{\text{мол}},$$

де  $\vec{j}_{\mu\text{пр}}$  – мікрострум провідності;  $\vec{j}_{\text{мол}}$  –

молекулярні струми;  $\vec{j}$  – мікрострум складається з двох частин вище сказаних  $\vec{j}_{\mu\text{пр}} + \vec{j}_{\text{мол}}$ .

А відповідно

$$\text{div } \vec{b} = 0.$$

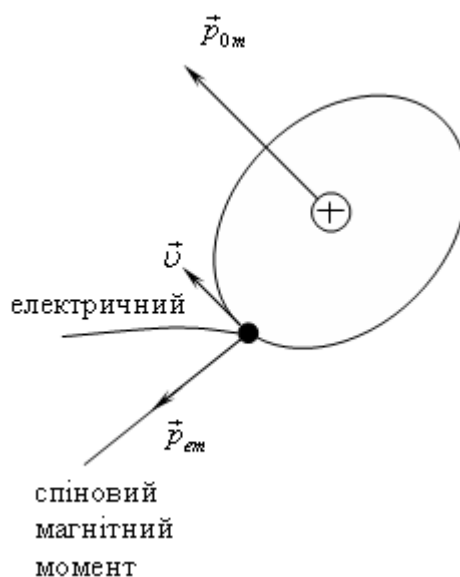


Рис. 115

## §119. Макроскопічне усереднення рівнянь Лоренца. Струми провідності та намагніченості

Усереднення будемо робити за фізично нескінченно малим об'ємом. Покажемо, що рівняння Лоренца шляхом усереднення можуть привести до рівнянь Максвелла

$$\langle \rho_\mu \rangle \geq \rho,$$

$$\langle \rho_\mu \rangle = \frac{1}{V_\varphi} \int_{V_\varphi} \rho_\mu dV - \rho + \rho_{зв}.$$

Як показує практика, об'ємна густина повинна враховувати два доданки: об'ємну густину вільних зарядів і об'ємну густину зв'язних зарядів

$$\langle \varphi_\mu \rangle = \frac{1}{V_\varphi} \int_{V_\varphi} \varphi_\mu dV = \varphi.$$

Але усереднення це не дуже проста операція. Для цього необхідно вивести теорему про середнє значення похідної.

*Теорема.* Середнє значення похідної за координатою в тому числі за часом від довільної функції  $U(\vec{r}, t)$  рівне похідні від середнього значення цієї функції

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial X} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial X} \langle U \rangle.$$

Усереднимо

$$\text{rot } \vec{e} = 0;$$

$$\frac{1}{V_\varphi} \int_{V_\varphi} \text{rot } \vec{e} dV = \text{rot} \left( \frac{1}{V_\varphi} \int_{V_\varphi} \vec{e} dV \right) = \text{rot } \vec{E} = 0.$$

Пам'ятаємо, що операція  $\text{rot}$  це є диференціальний оператор за координатами, тому його винесемо за знак інтегралу. Отже, ми одержали формулу рівняння Максвелла для електростатичного поля. Візьмемо  $\vec{e} = -\text{grad } \varphi$ , тут ми усереднимо і ліву і праву частину рівняння

$$\frac{1}{V_\varphi} \int_{V_\varphi} e dV = -\frac{1}{V_\varphi} \int_{V_\varphi} \text{grad } \varphi_\mu dV.$$

За визначенням, усереднення дасть  $\varphi_\mu$  наступне

$$E = -\text{grad } \varphi.$$

Візьмемо наступну формулу:

$$\text{div } \vec{e} = \frac{\rho_\mu}{\varepsilon_0};$$

$$\frac{1}{V_\varphi} \int_{V_\varphi} \operatorname{div} \vec{e} dV = \frac{1}{V_\varphi} \int_{V_\varphi} \frac{\rho_x}{\varepsilon_0} dV.$$

У лівій частині, якщо  $\operatorname{div}$  винести за знак інтегралу, то усереднення  $\vec{e} dV$  дасть  $\vec{E}$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho_{зв}). \quad (119.1)$$

Усереднимо вираз для магнітного поля

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{b}}{\mu_0} = \vec{J}_M;$$

$$\vec{J}_M = \vec{J}_{\text{МПР}} + \vec{J}_{\text{МОЛ}}.$$

$$\frac{1}{V_\varphi} \int_{V_\varphi} \operatorname{rot} \frac{\vec{b}}{\mu_0} dV = \frac{1}{V_\varphi} \int_{V_\varphi} (\vec{J}_{\text{МПР}} + \vec{J}_{\text{МОЛ}}) dV.$$

В ліву частину внесемо  $\operatorname{rot}$ , а праву область розіб'ємо на два інтеграли

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \vec{J}_{\text{НАМ}}, \quad (119.2)$$

де  $\vec{J}_{\text{НАМ}}$  - густина струму намагнічення.

Отже, ми прийшли до висновку, що рівняння Лоренца законні, ними можна користуватися при описуванні мікрополів (електричного та магнітного). Для змінних полів треба робити ще усереднення за часом. Тому ці рівняння називаються рівняннями Лоренца-Максвелла для речовини.

## §120. Вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ електромагнітного поля. Рівняння Максвелла і матеріальні рівняння в речовині. Граничні умови

Покажемо, що рівняння (119.1) і (119.2) при аналізі не відрізняються. Теоретичні дослідження показали, що об'ємна густина зарядів може бути виражена через *вектор поляризації*

$$\rho_{зв} = -\operatorname{div} \vec{P}.$$

Враховуючи це, ми формулу (82.2) можемо записати так:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho.$$

В речовині вектор  $\vec{D} = (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$ , а в рівнянні Максвелла

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ . У вакуумі  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ .

Тоді рівняння (119.1) стає таким же як і рівняння Максвелла для вакууму

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Для всіх без винятку ізотропних однорідних середовищ можна записати

$$\vec{P} = \kappa \vec{E},$$

де  $\kappa$  (капа) – електрична сприйнятливість діелектрика (поляризованість чи коефіцієнт поляризації діелектрика).

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \varepsilon_0 \kappa \vec{E}, \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \kappa)}_{\varepsilon} \vec{E}, \end{aligned}$$

де  $1 + \kappa$  - діелектрична проникність речовини.

Матеріальне рівняння Максвелла

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

виражає залежність від речовини.

Розглянемо вираз (119.2)

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{нам}} &= \operatorname{rot} \vec{M}; \\ \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) &= \vec{j}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

Отже, в речовині, ще треба відняти вектор намагнічення магнетика

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \quad (120.2)$$

Але

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \alpha \vec{H}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \underbrace{(1 + \alpha)}_{\mu} \vec{H}, \end{aligned}$$

де  $\alpha$  - коефіцієнт намагнічення;  $1 + \alpha$  - прийнято називати магнітною проникністю речовини.

Тоді

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Рівняння Максвелла (83.3), (83.4) треба доповнити в речовині ще матеріальними рівняннями, тобто

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (120.3)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (120.4)$$

Ще є два рівняння Максвелла, які слід врахувати до викладених

$$\vec{j} = \delta(\vec{E} + \vec{E}_c). \quad (120.5)$$

Рівняння (120.5) диференціальне рівняння Ома в речовині.

Для об'ємної густини електричного і магнітного полів можна записати:

$$\omega = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}). \quad (120.6)$$

Крім того до системи рівнянь Максвелла треба додати, ще *граничні умови*

$$D_{2n} - D_{1n} = \delta; \quad (120.7)$$

$$E_{2t} = E_{1t}; \quad (120.8)$$

$$B_{2n} = B_{1n}; \quad (120.9)$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_{\text{пов}}; \quad (120.10)$$

$$j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (120.11)$$

де  $\sigma$  - поверхнева густина вільних зарядів, які накопичуються на межі двох областей при відсутності вільних зарядів накопичених не буде, тому права частина рівнянь (120.7) і (120.11) перетворюються в нуль.

Гранична умова рівняння (120.11) впливає із закону неперервності електричного струму.

Поверхнева густина (рис. 116):

$$j_{\text{пов}} = \frac{I_{\text{пов}}}{l};$$

$$[j_{\text{пов}}] = \frac{A}{\mu};$$

$$[j] = \frac{A}{\text{м}^2}.$$

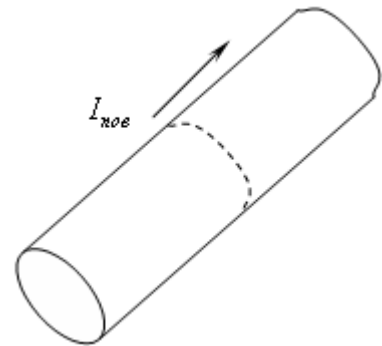


Рис. 116

## ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТА ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ З ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ТА СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

1. Спеціальна теорія відносності, як розділ теоретичної фізики.
2. Експерименти, що лежать в основі спеціальної теорії відносності (СТВ).
3. Постулати Ейнштейна.
4. Просторово-часовий інтервал та його інваріантність.
5. Перетворення координат Лоренца та одержання їх на основі

постулатів Ейнштейна.

6. Кінетичні наслідки перетворення Лоренца.

7. Релятивістський закон перетворення швидкостей.

8. Дослід Фізо. Аберация світла.

9. Чотиривимірний простір Мінковського. Геометрична інтерпретація простору Мінковського.

10. Чотиривимірні вектори і тензори.

11. Чотиривимірні вектори швидкості і прискорення.

12. Імпульс і маса тіла в СТВ. Чотиривимірний вектор імпульсу.

13. Вираз сили в чотиривимірному просторі. Перетворення координат чотиривимірного вектора сили.

14. Другий закон Ньютона в СТВ. Релятивістське рівняння руху частинки.

15. Релятивістський вираз для енергії. Взаємозв'язок між масою та енергією тіла. Чотиривимірний вектор енергії імпульсу.

16. Енергія зв'язку системи. Дефект мас та його експериментальне підтвердження.

17. Закони збереження релятивістської механіки.

18. Предмет і методи класичної електродинаміки. Електромагнітна взаємодія та її характеристики.

19. Експериментальні основи електродинаміки: закон Кулона; закон Біо-Савара-Лапласа; електромагнітна індукція; закон Фарадея; закон збереження електричного заряду; гіпотеза Максвелла про струм зміщення.

20. Електричний заряд та його властивості. Густина заряду та густина струму. Закон збереження електричних зарядів.

21. Електричне та магнітне поля у вакуумі. Напруженість електричного та індукція магнітного полів.

22. Дія електричного та магнітного полів на заряди та струми (сила Лоренца та сила Ампера).

23. Змінне електромагнітне поле. Вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  як змінні стани електромагнітного поля. Принцип суперпозиції електромагнітних полів.

24. Система основних рівнянь Максвелла для електромагнітного поля у вакуумі в диференціальній формі. Фізичний зміст кожного рівняння Максвелла.

25. Електродинамічний потенціал електромагнітного поля та його математичний вираз. Колібровочна інваріантність та умова Лоренца.

26. Загальне поняття про енергію, густину енергії і густину потоку енергії і густину енергії електромагнітного поля. Закон збереження енергії в електромагнітному полі.

27. Поняття про імпульс електромагнітного поля. Тиск світла.

28. Чотиривимірні вектори густини струму і потенціалу. Перетворення цих компонентів чотирьох векторів при зміні ІСВ. Відносність поняття заряду і струму.

29. Закон збереження зарядів у СТВ в координатній формі. Умова Лоренца в коваріантній формі.

30. Тензори електромагнітного поля. Дуальний тензор.

31. Перетворення електричних і магнітних полів при зміні ІСВ. Інваріанти електромагнітного поля.

32. Коваріантна форма рівнянь Максвелла у вакуумі.

33. Чотиривимірний вектор. Пояснення аберації світла.

34. Ефект Доплера (подовжній та поперечний) в оптиці та його пояснення в СТВ.

35. Рівняння електростатики у вакуумі. Електростатичний потенціал. Рівняння Пуассона.

36. Загальний розв'язок рівняння Пуассона.

37. Електростатичне поле у дипольному наближенні. Дипольний момент і його властивості.

38. Потенціал у системі зарядів на великих віддалях.

39. Енергія системи нерухомих зарядів. Об'ємна густина енергії електростатичного поля.

40. Система нерухомих зарядів у зовнішньому електричному полі.

41. Сила, момент сили, що діють з боку поля на електричні заряди.

42. Густина електричного струму і провідність речовин. Диференціальна форма закону Ома.

43. Диференціальна форма закону Джоуля-Ленца. Питома теплота потужності.

44. Закон збереження електричних зарядів. Рівняння неперервності електричного струму.

45. Сторонні електрорушійні сили (ЕРС). Закон Ома і закон Джоуля-Ленца при наявності сторонніх ЕРС.

46. Магнітне поле струму. Рівняння Максвелла магнітостатичного поля. Закон Біо-Савара-Лапласа.

47. Векторний потенціал магнітного поля. Рівняння Пуассона

для векторного потенціалу. Граничні умови.

48. Електромагнітне поле заряду, що перебуває в рівномірному русі.

49. Векторний потенціал системи струмів на великих віддальх. Стаціонарне магнітне поле у дипольному наближенні.

50. Магнітний момент та його властивості. Магнітний момент витка з струмом.

51. Умови і характеристики квазістатичного електромагнітного поля.

52. Закон електромагнітної індукції Фарадея і вираз його у диференціальній формі.

53. Вираз напруженості електричного поля через електродинамічні потенціали. Струм зміщення.

54. Енергія магнітного поля. Об'ємна густина енергії магнітного поля.

55. Хвильові рівняння для напруженостей електромагнітного поля. Плоскі електромагнітні хвилі.

56. Монохроматичні плоскі електромагнітні хвилі та їх рівняння. Хвильовий вектор.

57. Структура поля плоских монохроматичних хвиль. Вираз густини потоку енергії для плоских хвиль.

58. Рівняння Даламбера та їх загальний розв'язок для електромагнітного поля довільно рухомих зарядів. Запізнювальні потенціали електромагнітного поля.

59. Дипольне випромінювання зарядів і струмів. Вирази для запізнювальних електродинамічних потенціалів.

60. Випромінювання електричного диполя (гармонічного осцилятора) Герца.

61. Поле гармонічного осцилятора Герца в ближній зоні (дипольне наближення) і у хвильовій (далекій) зоні – наближення плоских хвиль.

62. Рівняння Лоренца для мікроскопічного електричного і мікроскопічного магнітного полів. Вільні та зв'язані заряди. Мікро-струми в речовині.

63. Макроскопічне усереднення рівнянь Лоренца. Теорема про середнє значення похідної. Струми провідності та намагніченості.

64. Вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  електромагнітного поля. Рівняння Максвелла і матеріальні рівняння в речовині. Граничні умови.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА З СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ ТА ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

### Спеціальна теорія відносності (СТВ)

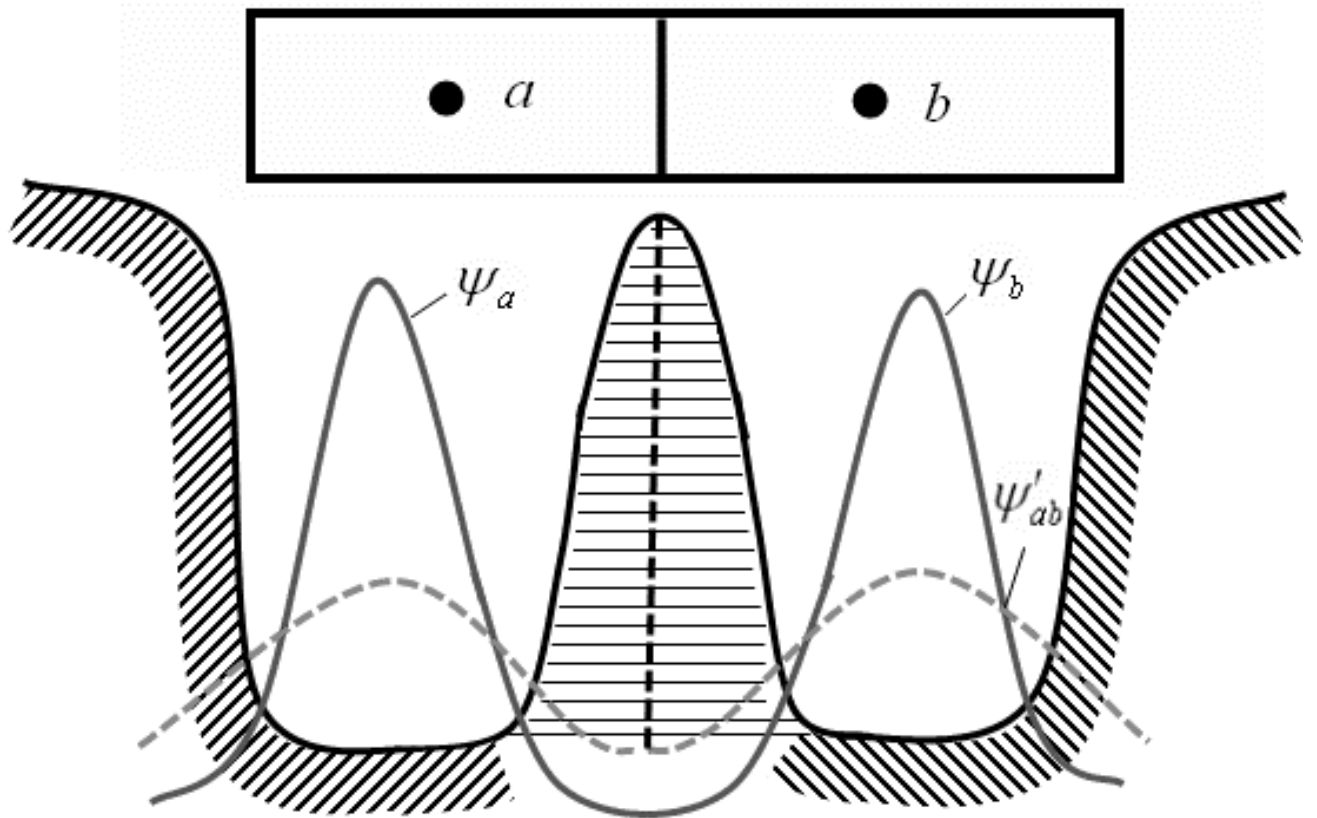
1. Бугаєнко Г.О., Фонкич М.Є. Електродинаміка. Теорія відносності. - К.: Радянська школа, 1965. – 419 с.
2. Коновал О.А. Електродинаміка і теорія відносності: навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів. – Кривий Ріг: КДПУ, 2011. – 133 с.
3. Коновал О.А. Основи спеціальної теорії відносності: навч.-метод. посібник. - Кривий Ріг: Видавець Роман Козлов, 2014. - 272 с.
4. Класична механіка (курс лекцій): навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей. / Уклад. М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко. Умань: ПП «Жовтий», 2015. 160 с.
5. Певзнер М.Ш. Основи теорії відносності: навч. пос. – Д.: ДВНЗ «Національний гірничий університет», 2013. – 134 с.

### Класична електродинаміка

1. Бугаєнко Г.О., Фонкич М.Є. Електродинаміка. Теорія відносності. - К.: Радянська школа, 1965. – 419 с.
2. Електродинаміка (курс лекцій): навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей. / Уклад. М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко. – Умань: ПП «Жовтий», 2015. – 120 с.
3. Коновал О.А. Електродинаміка і теорія відносності: навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів. – Кривий Ріг: КДПУ, 2011. – 133 с.
4. Коновал О.А. Основи електродинаміки: навч. посіб для студ. вищ. пед. навч. закл. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 347 с.
5. Сугаков В.Й. Теоретична фізика. Електродинаміка: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1974. – 271 с.
6. Теоретична електродинаміка: підручник / О.В. Багацька та ін. - Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2017. – 411 с.

## Розділ 3.

# КВАНТОВА МЕХАНІКА



## Лекція 26. ОСОБЛИВОСТІ ПОВЕДІНКИ МІКРООБ'ЄКТІВ. КВАНТОВІ ВЛАСТИВОСТІ СВІТЛА

§121. Проблема рівноважного теплового випромінювання.

§122. Фотоефект. Поняття про фотони.

§123. Ефект Комптона.

[1. §7.1-§7.3, §8.5, §14.1; 2. §66]

### **§121. Проблема рівноважного теплового випромінювання**

В період розвитку класичної фізики різко відмежувались явища зв'язані з рухом корпускул від явищ хвильових. У зв'язку з цим наш оточуючий світ уявлявся як такий, що складається з корпускул і полів. Тобто розкриваються *філософські проблеми квантової механіки та межі її застосування*. Так як, квантова механіка є основою сучасної фізики, то в цьому випадку ми ознайомлюємося з новими поняттями для розуміння яких необхідно використовувати філософські категорії. Наприклад, корпускулярно-хвильовий дуалізм: одні вчені за первинне вибирали хвилю, а інші – частинку. З точки зору філософії ми не можемо щось вибирати за первинне, а щось за вторинне, отже, ми - це щось єдине.

Однак в кінці XIX на початку XX століття було поставлено цілий ряд експериментів, які з одного боку показали корпускулярні властивості світла (проблема теплового рівноважного випромінювання, ефект Комптона), а з другого боку показали хвильові властивості частинок (дифракція електронів).

Проведемо короткий аналіз названих експериментів. Перш за все розкриємо проблему рівноважного теплового випромінювання. Як відомо, для такого випромінювання на основі загальних положень термодинаміки було встановлено закон Кірхгофа, із якого випливає, що спектральна інтенсивність  $I(\omega, T)$  і спектральна густина  $\rho(\omega, T)$  є універсальними функціями частоти і температури.

Іншими словами, закон Кірхгофа можна сформулювати ще й так: тіло поглинає електромагнітні хвилі переважно в тому інтервалі, в якому само їх випромінює.

Використання законів термодинаміки і електродинаміки привело Віна до подання цих універсальних функцій через функцію з однією змінною - відношення частоти до абсолютної температури

$$\rho(\omega, T) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right). \quad (121.1)$$

Подальше розкриття характеру цієї функції вимагало певних припущень про природу самого випромінювання.

Експериментальні дослідження показали, що в області малих частот і досить високих температур для  $\rho(\omega, T)$  справджується закон Релея-Джинса

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT. \quad (121.2)$$

Крива (залежність)  $\rho(\omega, T)$  при фіксованому  $T$ , це квадратична парабола, яка монотонно зростає із ростом  $\omega$ . Вона не має максимуму і при великих  $\omega$  прямує до безмежності. До безмежності прямує і інтегральна густина енергії випромінювання для всіх частот при будь-якій температурі:

$$U = \int_0^{\infty} \rho(\omega, T) d\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega \rightarrow \infty, \quad (121.3)$$

що явно абсурдно і було названо Еренфестом ультрафіолетовою катастрофою.

Для великих частот і досить малих температур справджується закон Віна

$$\rho(\omega, T) = \alpha \omega^3 e^{-\beta \frac{\omega}{T}}. \quad (121.4)$$

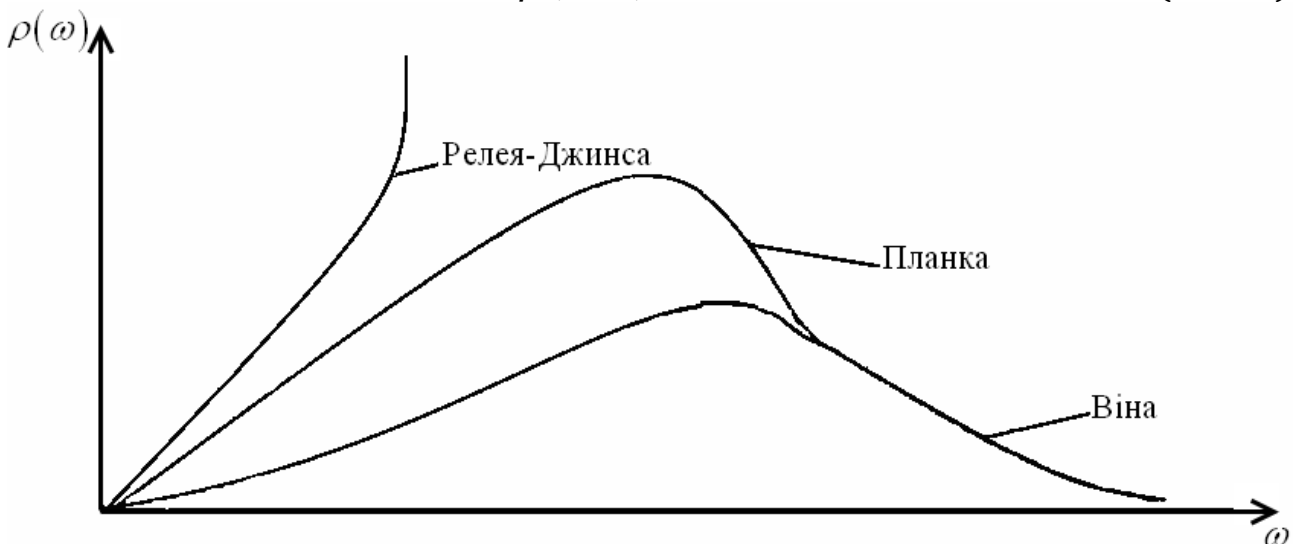


Рис. 117

Закону, щоб дав співпадання з експериментом в усій області частот не було (рис. 117). Вихід з такої ситуації був запропонований М. Планком за 14 днів до початку ХХ століття. Шляхом інтерполяції

вирази (121.2) і (121.4), а також на підставі припущення, що лінійні гармонічні - осцилятори, - якими Планк змодельював випромінюючу поверхню, можуть випромінювати і поглинати світло не безперервно, а окремими дискретними порціями (квантами), енергія яких

$$\varepsilon = \hbar\omega. \quad (121.5)$$

Планк отримав таку формулу:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (121.6)$$

Формула Планка була не просто новою формулою, що добре пояснювала експериментальні факти, гіпотеза, яка лежала в її основі обумовила одну із найглибших революцій у фізиці.

## §122. Фотоефект. поняття про фотони

Наступний крок на шляху створення квантової механіки був зроблений при поясненні фотоефекту. Суть якого полягала у вириванні електронів з поверхні твердих і рідких тіл під дією світла.

Відкритий Герцом (1887 рік), вивчений Столетовим (1888 - 1890 роки) і безпосередньо доказаний в дослідах Йофе (1922 рік).

Закономірності фотоефекту:

1. Явище фотоефекту безінерційне, тобто з припиненням освітлення поверхні відразу ж припиняється вивільнення фотоелектронів.

2. Кількість електронів, що вивільняються світлом за 1 с (або величина фотоструму насичення), прямо пропорційна величині світлового потоку, що падає на досліджуване тіло.

3. Швидкість вилітаючих фотоелектронів з тіла тим більша, чим більша частота  $\nu$  падаючого світла, але вона не залежить від його інтенсивності.

4. Незалежно від інтенсивності світла, фотоефект, починається тільки за певної для даного металу мінімальної частоти світла; цю частоту називають «червоною межею» фотоефекту.

При поясненні закономірностей фотоефекту з позицій хвильової теорії світла виникли труднощі, що викликали сумнів в універсальності хвильової теорії світла, це привело Ейнштейна в 1905 році до створення квантової теорії. Він висунув гіпотезу, що світло випромінюється і поглинається окремими порціями – квантами, не тому що така властивість осциляторів, а внаслідок того, що саме електромагнітне випромінювання складається із окремих квантів з

енергією  $\varepsilon = \hbar\omega$  та імпульсом  $p = \frac{\hbar\omega}{c}$ .

Виходячи з цих позицій Ейнштейн пояснив фотоефект і його закономірності. Крім цього фотон володіє також масою, вираз для якої отримується із формули взаємозв'язку маси і енергії:

$$W = mc^2; \quad (122.1)$$

$$\varepsilon = \hbar\omega; \quad (122.2)$$

$$W = \varepsilon; \quad (122.3)$$

$$mc^2 = \hbar\omega;$$

$$m = \frac{\hbar\omega}{c^2}. \quad (122.4)$$

Виявляється, що маса фотона відрізняється від маси інших елементарних частинок. Особливість полягає в тому, що маса спокою фотона рівна нулю.

Таким чином, фотон подібно будь-якій іншій частинці володіє енергією, масою та імпульсом, усі ці корпускулярні характеристики зв'язані з хвильовими. Поряд з цим фотон володіє також спіном, що рівний одиниці.

### §123. Ефект Комптона

Квантові властивості світла проявляються також в явищі виявленому Комптоном при розсіюванні рентгенівських променів «легкими» речовинами. Було показано, що довжина хвилі розсіюваного випромінювання більша від довжини хвилі падаючого, причому різниця в довжинах хвиль залежить тільки від кута розсіювання.

Процес розсіювання рентгенівських променів на слабо зв'язаних електронах розглядався Комптоном і Дебаєм як миттєва взаємодія (за законами пружного удару) між фотоном і електроном (рис. 118). За такої взаємодії повинні виконуватись закони збереження енергії та імпульсу.

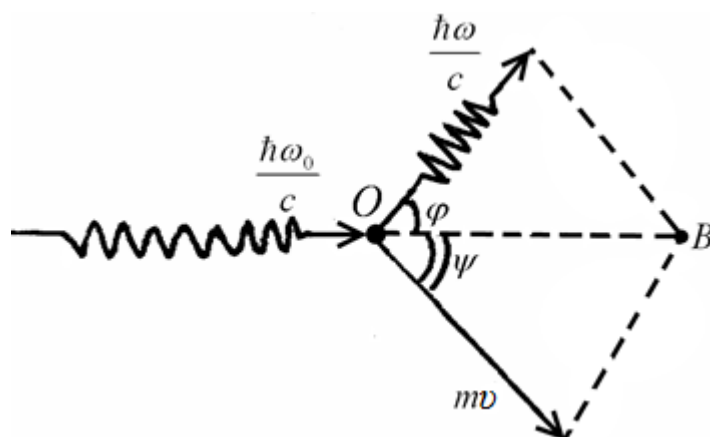


Рис. 118

Розглянемо найпростіший випадок, коли до взаємодії електрон знаходився в стані спокою (див. табл. 1).

Таблиця 1.

	$\varepsilon$	$\mathbf{p}$	
Фотон Електрон	$\hbar\omega_0$ $m_0c^2$	$\frac{\hbar\omega_0}{c}$ 0	До взаємодії
Фотон Електрон	$\hbar\omega$ $mc^2$	$\frac{\hbar\omega}{c}$ $m\mathbf{v}$	Після взаємодії

Запишемо закон збереження енергії та імпульсу

$$\hbar\omega_0 - \hbar\omega = mc^2 - m_0c^2, \quad (123.1)$$

$$\frac{\hbar\omega_0}{c}\vec{n}_0 - \frac{\hbar\omega}{c}\vec{n} = m\vec{v}. \quad (123.2)$$

Із векторного трикутника  $\Delta AOB$  визначимо сторону  $AB$ , що дорівнює  $m\mathbf{v}$

$$m^2v^2 = \left(\frac{\hbar\omega_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 - 2\hbar^2 \frac{\omega_0\omega}{c^2} \cos \varphi, \quad (123.3)$$

$$m^2v^2c^2 = \hbar^2(\omega_0^2 + \omega^2) - 2\hbar^2\omega_0\omega \cos \varphi. \quad (123.4)$$

Перепишемо вираз (123.1) у вигляді:

$$mc^2 = \hbar(\omega_0 - \omega) + m_0c^2. \quad (123.5)$$

Піднесемо співвідношення (123.5) до квадрату

$$m^2c^4 = \hbar^2(\omega_0^2 + \hbar^2\omega^2 - 2\hbar^2\omega_0\omega + m_0^2c^4 + 2\hbar(\omega_0 - \omega)m_0c^2). \quad (123.6)$$

Від виразу (123.6) віднімемо вираз (123.4)

$$m^2c^4 - m^2v^2c^2 = \hbar^2\omega_0^2 + \hbar^2\omega^2 - 2\hbar^2\omega_0\omega + m_0^2c^4 + 2\hbar(\omega_0 - \omega)m_0c^2 - \hbar^2\omega_0^2 + 2\hbar^2\omega_0\omega \cos \varphi. \quad (123.7)$$

В рівнянні (123.7) зліва винесемо за дужки  $m^2c^4$

$$m^2c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2c^4 - 2\hbar^2\omega_0\omega(1 - \cos \varphi) + 2\hbar(\omega_0 - \omega)m_0c^2. \quad (123.8)$$

Враховуючи, що  $m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0$ , скоротимо ці два доданки.

Із рівняння (123.8) визначимо таку величину:

$$c(\omega_0 - \omega) = \frac{\hbar}{m_0c} \omega_0\omega(1 - \cos \varphi). \quad (123.9)$$

Поділивши ліву і праву частину на добуток  $\omega_0\omega$ .

$$\frac{c}{\omega} - \frac{c}{\omega_0} = \frac{\hbar}{m_0c} (1 - \cos \varphi). \quad (123.10)$$

Враховуючи, що

$$\frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (123.11)$$

Тоді вираз (123.10) можна переписати:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \varphi); \quad (123.12)$$

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (123.13)$$

## Лекція 27. ХВИЛЬОВІ ВЛАСТИВОСТІ ЧАСТИНОК

§124. Гіпотеза де Бройля.

§125. Дифракція електронів.

§126. Уявний експеримент – дифракція електронів на двох щілинах.

§127. Статистичне тлумачення хвиль де Бройля.

§128. Принцип доповненості.

[1. §10.1-§10.6, §17.1-§17.4; 6. §1.1, §1.2]

### §124. Гіпотеза де Бройля

В 1924 році французький фізик Луї де Бройль в своїй докторській дисертації прийшов до висновку, що двояка корпускулярна, хвильова природа властива не тільки світлу, але й іншим частинкам матерії. Скориставшись формулою для імпульсу фотона:

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (124.1)$$

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (124.2)$$

$$p = mv, \quad (124.3)$$

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (124.4)$$

Де Бройль узагальнив дану формулу для фотона на інші частинок.

### §125. Дифракція електронів

Не пройшло і трьох років з часу появи знаменитої гіпотези де Бройля, як хвильові властивості частинок були доведені

експериментально в досліджах Девісона і Джермера по дифракції електронів. Схема досліду наступна (рис. 119).

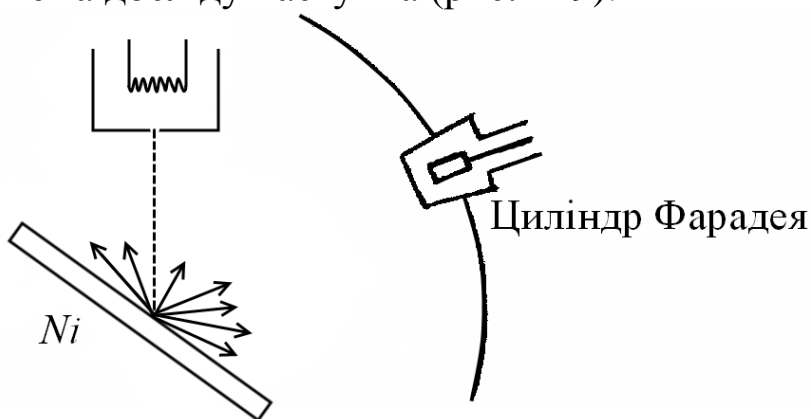


Рис. 119

Пучок електронів направлявся з електронної гармати на поверхню заземлену монокристалом нікелю (Ni). Будова електронної гармати дозволяла надавати електронам певної швидкості. В ролі уловлювача електронів служив циліндр Фарадея.

З класичної точки зору електрони, що володіють довільною кінетичною енергією відбиваються за відомими законами. Геометрична картина досліду наступна (рис. 120).

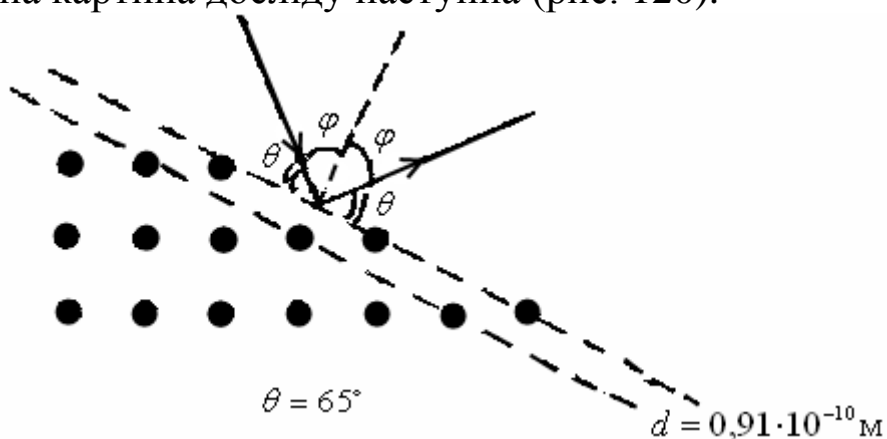


Рис. 120

Для такого випадку було отримано наступну залежність числа відбитих електронів від їх кінетичної енергії (рис. 121).

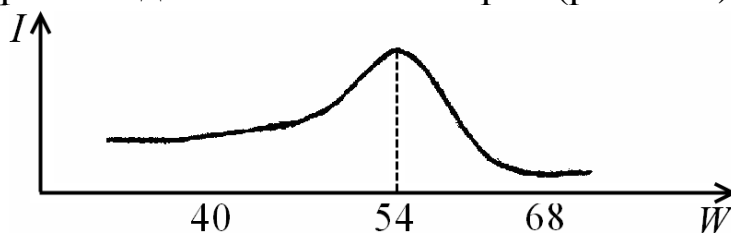


Рис. 121

Результати дослідів свідчать, що розсіювання електронів монокристалом нікелю нагадує відбивання таким кристалом рентгенівських променів.

Як відомо, відбивання рентгенівських променів відбувається лише для певних довжин хвиль, що задовольняють умову Вульфа-Брега:

$$n\lambda = 2d \sin \theta,$$

де  $n = 1$ .

Скориставшись цією формулою отримується значення довжини хвилі:

$$\lambda = 1,65 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Скориставшись формулою де Бройля одержують таке значення для довжини хвилі:

$$\lambda = 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Незабаром після дослідів Девісона і Джермера хвильові властивості електронів були виявлені незалежно Тартаковським в Ленінградському і Томсоном в Ебердинському університетах. Досліди полягали у вивченні проходження електронів через тонкі плівки кристалічної структури (рис. 122). В результаті були отримані дифракційні картини аналогічні дифракційним картинам рентгенівським променям.

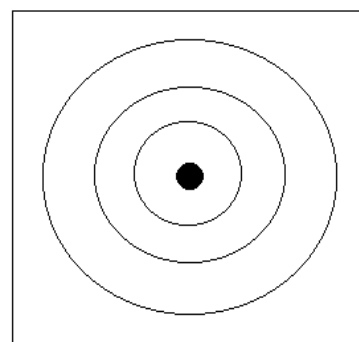


Рис. 122

## §126. Уявний експеримент – дифракція електронів на двох щілинах

В 1949 році в Москві Біbermanом, Сушкіним і Фабрикантом були здійсненні досліди по дифракції поодиноких електронів, якими «обстрілювалася речовина» і в результаті була отримана аналогічна дифракційна картина (рис. 123).

Пучок електронів направлявся на непрозору площину в якій прорізано дві щілини  $A$  і  $B$ . Нехай щілина  $B$  закрита, тоді після проходження через щілину  $A$  електронів отримується розподіл  $P_1$ , навпаки, якщо закрити щілину  $A$  отримаємо розподіл  $P_2$ . З класичних позицій при відкритих обох щілинах ми очікували отримати розподіл  $P_{12}$ , що являє собою суму  $P_1 + P_2$ . Експериментально було отримано розподіл  $P'_{12}$ , який мав максимум посередині між щілинами, а по

обидва його боки спостерігались цілий ряд максимумів з поступово спадною інтенсивністю.

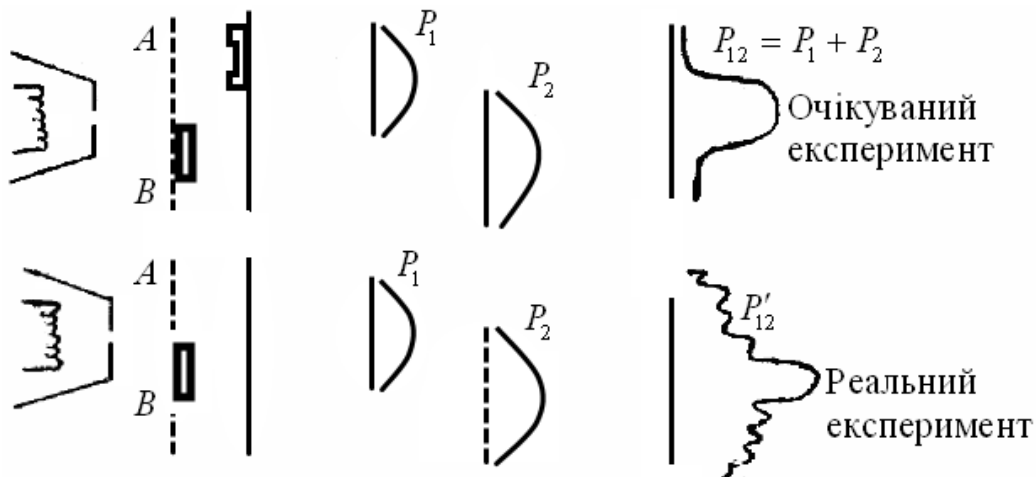


Рис. 123

Як відомо згідно ідеї де Бройля рух вільної частинки, що має енергію  $E = mc^2$  та імпульс  $p = mv$ , можна описати за допомогою плоскої монохроматичної хвилі:

$$\psi(r, t) = Ae^{-i(\omega t - kr)}. \quad (126.1)$$

Врахувавши взаємозв'язок між енергією, імпульсом і частотою хвилі:

$$E = \hbar\omega; \quad p = \hbar k. \quad (126.2)$$

Тоді рівняння (126.1) можна переписати:

$$\psi(r, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - pr)}; \quad (126.3)$$

$$Et - pr = \text{const}. \quad (126.4)$$

Для аналізу можливості зв'язувати з рухомим об'єктом плоску хвилю де Бройля, порівняємо швидкість розповсюдження об'єкта  $v$  з відповідною фазовою швидкістю хвилі де Бройля

$$U_\phi = \frac{du}{dt} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}, \quad (126.3a)$$

не можна так як  $U_\phi > c$  виходить, тому

$$U_\phi = \frac{c^2}{v}.$$

Окрім цього скориставшись формулою взаємозв'язку між енергією та імпульсом знайдемо:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = pc \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{p^2}}. \quad (126.5)$$

Скористаємось формулою де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p};$$

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

Дане значення  $p$  підставимо у формулу (126.5)

$$E = pc \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^2}{h^2} \lambda^2},$$

$$U_\Phi = \frac{E}{p} = c \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{h^2} \lambda^2} = U(\lambda). \quad (126.6)$$

Як впливає із виразу (126.6) хвилям де Бройля властиве явище дисперсії навіть у вакуумі. Як бачимо отримані результати переконливо показують, що з рухомим мікрооб'єктом не можна зв'язувати плоску монохроматичну хвилю (126.3а). З рухомим мікрооб'єктом було запропоновано зв'язувати не плоску монохроматичну хвилю, а так званий хвильовий пакет, це конструкція із набору хвиль з близькими частотами, сумарна амплітуда якого відмінна від нуля тільки в невеликій області простору, а за її межами рівна нулю. Саме з цією областю простору і зв'язували місце знаходження мікрооб'єкта. На користь цієї моделі свідчило те, що групова швидкість розповсюдження хвильового пакету співпадала із швидкістю руху відповідного мікрооб'єкту.

Проте ця модель виявилась недосконалою. Оскільки хвилям де Бройля властиве явище дисперсії навіть у вакуумі, то хвильовий пакет із часом повинен розпливатись і відповідний мікрооб'єкт повинен бути нестабільним, що протирічить експерименту.

У квантовій механіці як і в інших розділах теоретичної фізики використовують *моделі*. Тільки використані моделі в класичній механіці називаються *абсолютними моделями* або *класичний детермінізм*. У квантовій механіці вже користуються *відносними моделями*. В цьому випадку електрон розглядається не як частинка, що має лише корпускулярні властивості, а це приводить до відкриття нових властивостей і законів.

## §127. Статистичне тлумачення хвиль де Бройля

Правильне тлумачення хвиль де Бройля було дано М. Борном. Він запропонував статистичне тлумачення, яке дозволяло поєднати атомізм частинок з хвильовими явищами. Згідно статистичного

тлумачення: інтенсивність хвиль де Бройля, в якому-небудь місці простору пропорційна ймовірності виявити частинку в даному місці.

В такому розумінні хвилі де Бройля не мають нічого спільного з відомими хвилями в класичній фізиці. Як бачимо хвилі де Бройля визначають ймовірність знаходження (локалізації) частинки де-небудь в просторі в даний момент часу.

Розглянуті результати експериментів свідчать про єдність корпускулярних і хвильових властивостей матерії.

## §128. Принцип доповненості

Корпускулярно хвильова єдність матерії виливає також із *принципу доповненості Бора*. Ідея якого полягає в тому, що не тільки можливо, але й при певних умовах необхідно застосувати протилежні поняття до одного і того ж дослідженого об'єкта.

Таке поєднання не веде ні до яких формально-логічних протиріч в теорії, воно тільки може свідчити про появу нової теорії з своїми принципами і законами.

## Лекція 28. ЗОБРАЖЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЕЛИЧИН ОПЕРАТОРАМИ

§129. Лінійні і самоспряжені (ермітові) оператори.

§130. Умова одночасності виміру двох фізичних величин.

§131. Оператори координати, імпульсу, моменту імпульсу і енергії мікрооб'єкта (частинки).

[1. §15.1, §15.2; 2. §8-§14; 4. §1.1, §1.2; 5. §1, §5; 6. §2.1-2.10; 8. §4-§6]

## §129. Лінійні і самоспряжені (ермітові) оператори

Усі взаємовідношення між механічними величинами в квантовій механіці можна зобразити за допомогою операторів певного класу.

Під оператором будемо розуміти символ  $\hat{L}$ , що показує, яким чином кожній із розглядуваній класу функцій  $U(x)$  співставляється функція  $V(x)$

$$\hat{L}U(x) = V(x). \quad (129.1)$$

В цій рівності під оператором  $\hat{L}$  можна розуміти множення на  $x$  ( $\hat{L} = x$ ), диференціювання по  $(\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x})$ , добування кореня квадратного

( $\hat{L} = \sqrt{\quad}$ ) і так далі.

Із всієї різноманітності операторів в квантовій механіці для зображення механічних величин використовують тільки так звані лінійні і самоспряжені оператори.

Оператор  $\hat{L}$  називається лінійним, якщо він володіє такою властивістю:

$$\hat{L}(c_1 U_1 + c_2 U_2) = c_1 \hat{L}U_1 + c_2 \hat{L}U_2. \quad (129.2)$$

Обмеження лінійними операторами зумовлене тим, що тільки такі оператори не порушують принципу суперпозиції.

Оператор  $\hat{L}$  називають самоспряженим (ермітовим), якщо має місце така рівність:

$$\int U_1^*(q) \hat{L}U_2(q) dq = \int U_2(q) \hat{L}^* U_1^*(q) dq. \quad (129.3)$$

Обмеження самоспряженими операторами зумовлене тим, що тільки такі оператори зображають дійсні не уявні фізичні величини. Із простих операторів шляхом відомих математичних дій можна отримати більш складні. Слід тільки зауважити, що в ряді випадків результат множення операторів залежить від порядку співмножників. Тобто

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}.$$

Такі оператори називаються *некомутуючими*, а величина:

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{F}$$

називається *комутатором двох операторів*. Якщо тільки  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ , то такі оператори називаються *комутуючими*.

Розглянемо спектри значень фізичних величин, власні значення та власні функції операторів. Нехай  $\hat{L}$  – деякий поставлений у відповідність динамічній фізичній величині лінійний ермітів оператор. Розглянемо рівняння типу:

$$\hat{L}\Psi = L\Psi, \quad (129.4)$$

↓  
власне значення

де  $L$  – деяка стала величина.

Якщо для певного фіксованого значення сталої  $L = E$  рівняння (129.4) має хоча б один розв'язок  $\psi_n$ , то  $n$  називають *власним значенням*, а  $\psi_n$  – *власною функцією оператора  $\hat{L}$* . Отже, власні значення та власні функції, які їм відповідають, тотожно задовольняють рівняння

$$H\psi_n = E_n\psi_n. \quad (129.5)$$

↓  
власне значення

Сукупність усіх чисел  $n$ , для яких рівняння (129.4) або його розв'язок утворюють множину або спектр власних значень оператора  $\hat{L}$ . Спектр власних значень може бути дискретним, неперервним або складатися з двох частин: дискретної та неперервної. Кожному власному значенню відповідає одна або кілька власних функцій. Власне значення  $n$ , якому відповідає кілька власних функцій, називається *виродженим*, у противному разі воно *просте*.

Власні функції мають задовольняти певні умови, які визначаються з фізичних і математичних міркувань. Власні функції мають задовольняти також вимоги однозначності й неперервності. Оскільки власні функції є елементами гільбертового простору, то квадрат їх модуля має бути інтегрованою функцією, тобто треба, щоб існував інтеграл нормування.

### **§130. Умова одночасності виміру двох фізичних величин**

Як відомо в квантовій області існує цілий ряд фізичних величин, які не можуть бути виміряні одночасно. Можна показати, що умовою того, щоб дві фізичні величини одночасно мали певне значення є комутативність їх операторів.

Зв'язок між операторами і вимірюваними величинами здійснюється за допомогою формули для середнього значення:

$$\bar{L} = \int \psi^* \hat{L} \psi dq. \quad (130.1)$$

Оскільки хвильова функція розглядається як функція координат, частинки, постільки оператором координат  $x$  є саме число  $x$

$$\hat{x} = x.$$

### **§131. Оператори координати, імпульсу, моменту імпульсу і енергії мікрооб'єкта (частинки)**

Оператор імпульсу в квантовій механіці має такий вигляд:

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla, \quad (131.1)$$

де  $\nabla$  є оператором градієнта, тобто

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Звідси видно, що оператори проєкцій імпульсу частинки мають вигляд:

$$\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}; \quad \hat{P}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}; \quad \hat{P}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}. \quad (131.2)$$

Оператори проєкцій імпульсу і координат підлягають таким правилам перестановки:

$$\left. \begin{aligned} x\hat{P}_x - \hat{P}_x x &= i\hbar; \\ y\hat{P}_y - \hat{P}_y y &= i\hbar; \\ z\hat{P}_z - \hat{P}_z z &= i\hbar. \end{aligned} \right\} \quad (131.3)$$

Вирази (131.3) називають *перестановочними співвідношеннями Гейзенберга*.

Легко показати, що

$$\left. \begin{aligned} x\hat{P}_y - \hat{P}_y x &= 0; \\ x\hat{P}_z - \hat{P}_z x &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (131.4)$$

Оператор моменту імпульсу має такий вигляд:

$$\hat{M} = [\vec{r}\hat{P}]. \quad (131.5)$$

Звідки легко отримати оператори моменту імпульсу на осі координат

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_x &= \hat{P}_z y - \hat{P}_y z; \\ \hat{M}_y &= \hat{P}_x z - \hat{P}_z x; \\ \hat{M}_z &= \hat{P}_y x - \hat{P}_x y. \end{aligned} \right\} \quad (131.6)$$

Оператори проєкцій імпульсу підлягають таким перестановочним співвідношенням:

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_y \hat{M}_z - \hat{M}_z \hat{M}_y &= i\hbar \hat{M}_x; \\ \hat{M}_x \hat{M}_z - \hat{M}_z \hat{M}_x &= -i\hbar \hat{M}_y; \\ \hat{M}_x \hat{M}_y - \hat{M}_y \hat{M}_x &= i\hbar \hat{M}_z. \end{aligned} \right\} \quad (131.7)$$

Як бачимо оператори компонент моменту імпульсу некомутативні. Навпаки кожна із компонент комутує з оператором квадрата моменту імпульсу.

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_x \hat{M}^2 - \hat{M} \hat{M}_x &= 0; \\ \hat{M}_y \hat{M}^2 - \hat{M} \hat{M}_y &= 0; \\ \hat{M}_z \hat{M}^2 - \hat{M} \hat{M}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (131.8)$$

Кінетична енергія мікрочастинки, що має масу  $\mu$  та імпульсу  $p$  знаходиться за формулою:

$$T = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Відповідно оператор  $\hat{T}$  кінетичної енергії:

$$\hat{T} = \frac{1}{2\mu} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2). \quad (131.9)$$

Підставивши в (131.9) вирази для  $p_x, p_y, p_z$  отримаємо таку формулу для оператора кінетичної енергії:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2; \quad (131.10)$$

$$\left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

Оператор кінетичної енергії можна записати в будь-якій іншій системі координат, для цього необхідно тільки записати вираз для  $\nabla^2$  у відповідній системі. Наприклад, в полярній системі координат оператор  $\nabla^2$  має вигляд:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (131.11)$$

Оскільки потенціальна енергія являється функцією координат  $U(x, y, z)$  постільки оператором потенціальної енергії є сама потенціальна енергія. Тоді оператор повної енергії запишеться як сума операторів кінетичної і потенціальної енергії:

$$\hat{H} = \hat{T} + U(x, y, z), \quad (131.12)$$

де  $\hat{H}$ - гамільтоніан (оператор повної енергії).

Слід тільки зауважити, що в квантовій механіці повна енергія не може знаходитись як сума кінетичної і потенціальної енергії. Причина в тому, що потенціальна енергія залежить тільки від координат, а кінетична тільки від імпульсів. А як відомо імпульс і координату мікрооб'єкту одночасно поміряти не можливо. Значить для мікрооб'єктів повну енергію слід вимірювати як одне єдине ціле.

## **Лекція 29. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ**

§132. Хвильова функція. Квантово-механічний принцип суперпозиції.

§133. Ймовірнісний характер поведінки мікрооб'єктів.

§134. Принцип невизначеності Гейзенберга.

[1. §10.5, §14.2; 2. §1-§7; 4. §1.3; 6. §1.2; 8. §1-§3]

### §132. Хвильова функція. Квантово-механічний принцип суперпозиції.

Основу математичного апарату квантової механіки складає твердження проте, що стан системи в будь-який момент часу може бути заданий за допомогою певної, взагалі кажучи комплексної хвильової функції координат

$$\psi(x, y, z); \psi(q), \\ dx dy dz \rightarrow dq,$$

тобто що

$$q = x, y, z.$$

Як впливає із статистичного тлумачення хвиль де Бройля, дано Борном: ймовірність місцезнаходження частинки визначається інтенсивністю хвиль, тобто квадратом амплітуди хвильової функції  $\psi$ .

Оскільки хвильова функція може бути комплексною величиною, а ймовірність місцезнаходження повинна бути дійсною і додатною, то за міру інтенсивності вибирають не  $\psi^2$ , а квадрат модуля в квадраті  $|\psi|^2$

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi, \quad (132.1)$$

де  $\psi^*$  - комплексно-спряжена величина  $\psi$ .

### §133. Ймовірнісний характер поведінки мікрооб'єктів

Таким чином, величина

$$dW(q) = |\psi|^2 dq \quad (133.1)$$

визначає ймовірність місце знаходження частинки в елементі конфігураційного простору  $dq$ , а величина

$$\omega(q) = \frac{dW}{dq} = |\psi|^2 \quad (133.2)$$

називається *густиною ймовірності*.

Тоді ймовірність знаходження частинки в даний момент часу в деякому скінченному об'ємі  $V$  згідно теореми додавання ймовірностей визначається:

$$W(q) = \int_V dW(q) = \int_V \omega(q) dq = \int_V |\psi|^2 dq = 1; \\ \int_V |\psi|^2 dq = 1. \quad (133.3)$$

Вираз (133.3) – умова нормування хвильових функцій.

До хвильових функцій ставиться вимога, щоб ймовірність виявити частинку де-небудь в просторі не залежала від часу, тобто щоб

$$\frac{d}{dt} \int_V |\psi|^2 dq = 0. \quad (133.4)$$

Щоб ця вимога виконувалась, необхідно, щоб сама хвильова функція задовольняла таким трьом умовам:

1. Хвильова функція повинна бути скінчена в усій області зміни змінних.
2. Вона повинна мати достатнє число неперервних похідних.
3. Вона повинна бути однозначна в усій області зміни її аргументів.

### §134. Принцип невизначеності Гейзенберга

Розглянемо один із основних принципів, що лежать в основі змісту квантової механіки, який формулюється таким чином: якщо система (частинка або їх сукупність) може знаходитись в стані, що описується хвильовою функцією  $\psi_1$ , а також в стані, що описується хвильовою функцією  $\psi_2$ , то вона може також знаходитись в деякому іншому стані, що описується хвильовою функцією  $\psi$ , яка являє собою лінійну комбінацію перших двох

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2. \quad (134.1)$$

Таким чином, в квантовій механіці стан руху частинки можна задати за допомогою хвильової функції  $\psi(x, t)$ .

Нехай система в початковий момент часу задається хвильовою функцією  $\psi(x, 0)$ . Що можна сказати про положення та імпульс частинки в момент часу  $t = 0$ ? Виходячи із статистичного тлумачення хвиль де Бройля, частинку ймовірніше виявити там де амплітуда хвильової функції велика. Якщо хвильова функція така, що її амплітуда відмінна від нуля тільки в невеликій області простору, а за межами цієї області рівна нулю, то можна твердити, що частинка знаходиться в межах даної області в момент часу  $t = 0$ , тобто положення частинки задано достатньо точно.

Якщо ж хвильова функція така, що її амплітуда слабо змінюється по мірі розповсюдження в просторі, то частинці неможливо приписати певне положення.

Аналогічна ситуація із заданням другої змінної, тобто імпульсу. Як відомо імпульс і довжина хвилі зв'язані співвідношенням де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Очевидно, що неможливо точно задати імпульс, якщо погано визначена довжина хвилі.

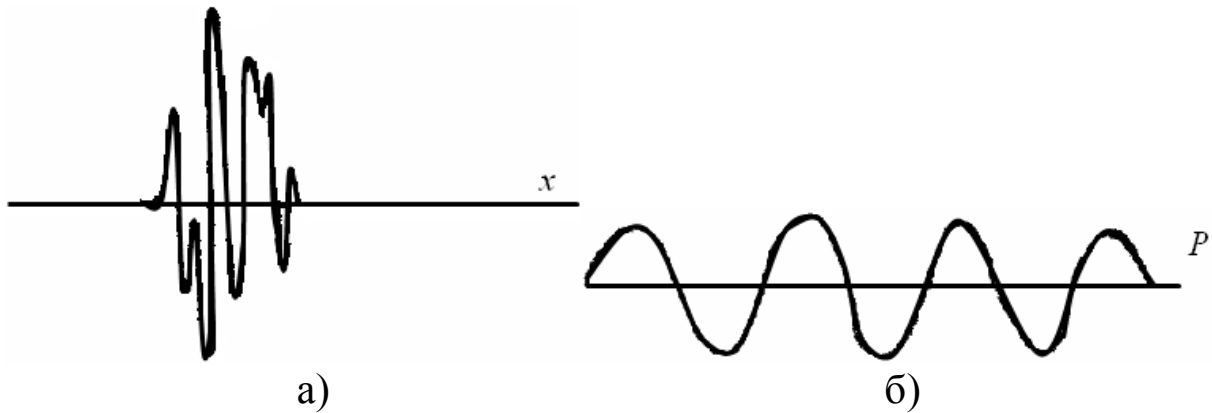


Рис. 124

Із рисунка 124 видно, що у першому випадку, ми достатньо точно задаємо положення частинки та однаке задати не можемо її імпульс (рис. 124, а) і навпаки в другому випадку (рис. 124, б) достатньо точно задаємо імпульс, однаке, не можемо визначити положення (координати).

Гейзенберг в 1927 році показав, що хоча не існує меж точності задання окремого положення та імпульсу мікрооб'єкта. Існує принципіальна межа визначення цих величин одночасно, це твердження сформулювали у вигляді принципу невизначеності Гейзенберга

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar, \\ \Delta x &\rightarrow 0, \\ \Delta p_x &= \frac{\hbar}{\Delta x} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Співвідношення невизначеності Гейзенберга визначає не стільки границю неточності в одночасному вимірюванні координати та імпульсу мікрочастинки, скільки границю непримінимості поняття координати і одночасно імпульсу або поняття класичної частинки до мікрооб'єкта.

Таким чином, посилаючись на те, що факти, які дають нам експерименти не вкладаються в теоретичні схеми класичної фізики, твердити про неповне знання мікрооб'єктів безпричинність їх поведінки, означає допускати помилки філософського характеру.

## Лекція 30. РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

§135. Принцип причинності в квантовій механіці.

§136. Загальне рівняння Шредінгера.

§137. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів.

§138. Зміна механічних величин з часом.

30 [1. §14.3, §14.4; 2. §15-§19; 4. §3.5; 6. §1.3-§1.5; 8. §27]

### §135. Принцип причинності в квантовій механіці

Неможливість точно передбачити як поведе себе мікрооб'єкт у вимірювальному процесі послужило підставою, що у мікросвіті відсутня причинність, а замість неї існує не контрольована випадковість. Такі припущення необґрунтовані. Причинність у мікросвіті має місце, тільки вона істотно відрізняється від принципу причинності в класичній фізиці. В квантовій механіці принцип причинності відноситься до потенціальних можливостей реалізації подій. Іншими словами, в квантовій механіці причинно пов'язані не окремі реалізовані події, а потенціальні можливості їх реалізації.

### §136. Загальне рівняння Шредінгера

Математичним виразом принципу причинності являється загальне рівняння Шредінгера.

Нехай в початковий момент часу стан системи задається хвильовою функцією  $t = 0$ ,  $\psi(x, 0)$ , а в деякий пізній момент часу хвильовою функцією  $\psi(x, t)$ .

Виберемо хвильову функцію в момент часу  $\Delta t$ , безмежно близького до  $t = 0$

$$\psi(x, \Delta t) = \psi(x, 0) + \left( \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right)_{t=0} \Delta t + \dots \quad (136.1)$$

Згідно сказаного  $\left( \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right)_{t=0}$  повинно однозначно визначатись із  $\psi(x, 0)$

$$\left( \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right)_{t=0} = \hat{L} \psi(x, t). \quad (136.2)$$

Або в загальному випадку:

$$\left( \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right) = \hat{L} \psi(x, t), \quad (136.3)$$

де  $\hat{L}$  називається оператором зміщення за часом.

Його вигляд в квантовій механіці постулюється при врахуванні, що він повинен бути лінійним і не містити похідних та інтегралів за часом

$$\hat{L} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H}. \quad (136.4)$$

Тоді рівняння (136.3) можна переписати у вигляді:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(x, t). \quad (136.5)$$

Або розкривши вигляд гамільтоніана (136.5) – перепишеться:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + U(x, y, z, t) \psi. \quad (136.6)$$

Вирази (136.5) і (136.6) - загальне рівняння Шредінгера.

Основною особливістю загального рівняння Шредінгера є наявність уявної одиниці перед похідною  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ . Внаслідок уявності коефіцієнт перед  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  (загальне рівняння Шредінгера) будучи рівнянням першого порядку за часом може мати періодичні розв'язки.

### §137. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

Перепишемо це рівняння у вигляді:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + U\psi, \quad (137.1)$$

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \varphi. \quad (137.2)$$

Рівняння (137.1) підставимо у вираз (137.2), отримаємо:

$$-\frac{\hbar}{i} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \varphi \nabla^2 \psi + U\psi \varphi. \quad (137.3)$$

Ліву і праву частину (137.3) Поділимо на добуток  $\varphi\psi$ :

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{\psi} \nabla^2 \psi + U; \quad (137.4)$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{\psi} \nabla^2 \psi - U = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (137.5)$$

Оскільки ліва частина виразу (137.5) залежить тільки від координат, а права тільки від часу, то вираз (137.5) буде виконуватись за умови, що обидві частини дорівнюють деякій константі

$$\frac{\hbar}{i} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -E. \quad (137.6)$$

Тоді вираз (137.5) перепишеться:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi - U \psi = -E \psi. \quad (137.7)$$

Звідки легко отримати:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0; \quad (137.8)$$

$$\Delta \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0. \quad (137.9)$$

Вираз (137.9) - рівняння Шредінгера для стаціонарних станів.

Знайдемо також вираз для хвильової функції  $\Psi(x, y, z, t)$ , що задовольняє загальному рівнянню Шредінгера. Для цього проінтегруємо рівність (137.6) і отримаємо:

$$\ln \varphi = -\frac{i}{\hbar} E t + \ln \varphi_0. \quad (137.10)$$

Перейдемо від логарифмів до самих функцій.

$$\varphi = \varphi_0 e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \quad (137.11)$$

Тоді вираз загальної функції  $\Psi(x, y, z, t)$  можна представити у наступному вигляді:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{i\frac{E}{\hbar}t}. \quad (137.12)$$

Таким чином, стан частинки описується періодичною функцією часу з циклічною частотою:

$$\omega = \frac{E}{\hbar}. \quad (137.13)$$

### §138. Зміна механічних величин з часом

Знайдемо зміну середнього значення деякої механічної величини за безмежно малий проміжок часу

$$\bar{L}(t) = \int \psi^*(x, t) \hat{L} \psi(x, t) dx. \quad (138.1)$$

Продиференціюємо рівняння (138.1) за часом, отримаємо:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \int \psi^* \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} \psi dx + \int \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{L} \psi dx + \int \psi^* \hat{L} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx. \quad (138.2)$$

Перший доданок справа:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial t} = \int \psi^* \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} \psi dx. \quad (138.3)$$

Він дорівнює нулю, якщо  $L$  явно не залежить від часу. Скористаємось рівнянням Шредінгера

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar} H \psi; \\ \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= -\frac{1}{i\hbar} H^* \psi^*. \end{aligned} \right\} \quad (138.4)$$

Тоді вираз (138.2) прийме вигляд:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} \int (H^* \psi^*) \hat{L} \psi dx + \frac{1}{i\hbar} \int \psi^* \hat{L} (H \psi) dx. \quad (138.5)$$

На основі самоспряженості оператора  $H$  вираз (138.5) можна переписати у вигляді:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} \left[ \int \psi^* (\hat{L} H) \psi dx - \frac{1}{i\hbar} \int \psi^* (H \hat{L}) \psi dx \right]. \quad (138.6)$$

Вираз (138.6) перепишемо:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [L\bar{H} - \bar{H}L]. \quad (138.7)$$

Введемо позначення:

$$[HL] = \frac{1}{i\hbar} [L\bar{H} - \bar{H}L]. \quad (138.8)$$

Вираз (138.8) називають квантовою дужкою Пуассона. Тоді на основі рівнянь (138.8), (138.7) можна переписати так:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} + [HL]. \quad (138.9)$$

Якщо  $L$  явно не залежить від часу, то вираз (138.9) прийме вигляд:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = [HL]. \quad (138.10)$$

Можна показати, що

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = [\hat{H}\hat{L}]. \quad (138.11)$$

Застосуємо останню рівність до операторів координат і проекцій імпульсів:  $(x, y, z,); (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$

$$\frac{dx}{dt} = [Hx]; \quad \frac{dy}{dt} = [Hy]; \quad \frac{dz}{dt} = [Hz], \quad (138.12)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = [H\hat{p}_x]; \quad \frac{dp_y}{dt} = [H\hat{p}_y]; \quad \frac{dp_z}{dt} = [H\hat{p}_z]. \quad (138.13)$$

Вирази (138.12.) і (138.13) - квантові рівняння Гамільтона. Розкривши вигляд операторів  $p$  і  $H$  вирази (138.12) і (138.13) можна переписати у виді:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\hat{p}_x}{\mu}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\hat{p}_y}{\mu}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\hat{p}_z}{\mu}; \quad (138.14)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = \hat{F}_x; \quad \frac{dp_y}{dt} = \hat{F}_y; \quad \frac{dp_z}{dt} = \hat{F}_z. \quad (138.15)$$

Вирази (138.14) і (138.15) рівняння Ньютона в операторній формі. В розкритій формі ці рівняння перепишуться:

$$\frac{d}{dt} \int \psi * x \psi dx = \frac{1}{\mu} \int \psi * \hat{p}_x \psi dx; \quad (138.16)$$

$$\frac{d}{dt} \int \psi * \hat{p}_x \psi dx = \int \psi * \hat{F}_x \psi dx. \quad (138.17)$$

Вирази (138.16) і (138.17) так звані теореми Еренфеста.

## Лекція 31. РУХ МІКРООБ'ЄКТІВ В ПОТЕНЦІАЛЬНИХ ПОЛЯХ

§139. Рух вільної частинки.

§140. Рух частинки в потенціальній ямі з безмежно високими стінками.

§141. Лінійний гармонічний осцилятор.

§142. Тунельний ефект.

§143. Явище холодної емісії електронів.

[1. §15.3, §16.1-16.3; 2. §20-§22, §25, §26; 5. §9; 6. §1.6-§1.8; 8. §28-§31]

### §139. Рух вільної частинки

Обмежимося одномірним випадком. У русі вільної частинки її повна енергія співпадає з кінетичною енергією. Швидкість такої частинки являється постійною. Рівняння Шредінгера для такого випадку прийме вигляд:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \psi = 0, \quad (139.1)$$

де  $U = 0$ .

Очевидно розв'язок рівняння (139.1) має вигляд:

$$\psi = A e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2\mu E} x} + B e^{-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2\mu E} x}. \quad (139.2)$$

Тоді загальний розв'язок запишеться:

$$\Psi(x, t) = Ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}x\right)} + Be^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t + \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}x\right)}. \quad (139.3)$$

Вираз (139.3) являє собою суперпозицію двох плоских монохроматичних хвиль з однаковою частотою  $\omega = \frac{E}{\hbar}$ , одна із яких рухається в додатному, а друга у від'ємному напрямі осі  $X$ . Порівнюючи (139.3) з рівнянням плоскої монохроматичної хвилі (139.4):

$$S = Ae^{-i(\omega t - kx)}, \quad (139.4)$$

можна записати, що

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar}}.$$

### §140. Рух частинки в потенціальній ямі з безмежно високими стінками

Виберемо одномірну потенціальну яму з безмежно високими стінкам (рис. 125).

$$\begin{aligned} U &= 0; \\ 0 &\leq x \leq l; \\ U &= \infty; \\ x < 0; x > l. \end{aligned}$$

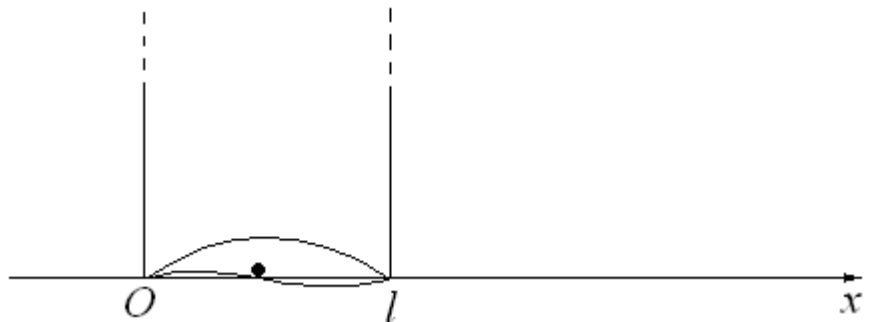


Рис. 125

Запишемо рівняння Шредінгера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (140.1)$$

Запишемо це рівняння для частинки в середині потенціальної ями,  $U = 0$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}E\psi = 0. \quad (140.2)$$

Запишемо краєві умови:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (140.3)$$

Введемо позначення:

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}E = k^2. \quad (140.4)$$

Тоді вираз (140.2) переписеться

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0. \quad (140.5)$$

Розв'язок, цього рівняння виберемо у вигляді:

$$\psi = A \cos kx + B \sin kx. \quad (140.6)$$

Задовільнимо першу частину умови виразу (140.3). Для того, щоб вираз (140.6) перетворити в 0, поставимо, що  $A = 0$ ,

$$\psi = B \sin kx. \quad (140.7)$$

Задовільнимо другу половину умови виразу (140.3) користуючись формулою (140.7)

$$A = 0, B \neq 0, \sin kl = 0. \quad (140.8)$$

Очевидно, що  $\sin = 0$ , коли

$$kl = n\pi. \quad (140.9)$$

Визначимо  $k$

$$k = \frac{n\pi}{l}. \quad (140.10)$$

Як відомо з загального курсу фізики  $k$  можна представити у вигляді:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (140.11)$$

Прирівняємо праві частини рівнянь (140.10) і (140.11)

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{l}.$$

Знайдемо:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad (140.12)$$

$$\frac{\lambda_n}{2} = \frac{l}{n}. \quad (140.13)$$

Як впливає із виразу (140.13) на можливі стани частинки накладаються певні обмеження, а саме частинка може бути тільки в таких станах, коли з нею можна зв'язати таку хвилю де Бройля, що по ширині потенціальної ями буде вкладатися ціле число півхвиль.

Розглянемо квантування енергії частинки в потенціальній ямі. На підставі виразів (140.4) і (140.10) запишемо (вираз (140.10) підносимо до квадрату і прирівнюємо):

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} E = \frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

Звідки визначаємо енергію частинки:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2\mu l^2}, \quad (140.14)$$

де  $E$  - в даній формулі залежить від  $n$  і воно називається *головним квантовим числом* ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Знайдемо віддаль між двома значеннями енергії частинки:

$$\begin{aligned} \Delta E = E_{n+1} - E_n &= \frac{(n+1)^2 \pi^2 \hbar^2}{2\mu l^2} - \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2\mu l^2} = \frac{(2n+1)\pi^2 \hbar^2}{2\mu l^2}; \\ \Delta E &= \frac{(2n+1)\pi^2 \hbar^2}{2\mu l^2}, \end{aligned} \quad (140.15)$$

де  $\mu$  - маса частинки;  $l$  - ширина потенціальної ями.

Як впливає із виразу (140.15)  $\Delta E$  перш за все залежить від маси частинки  $\mu$  і ширини потенціальної ями  $l$ . Легко бачити, що по мірі зростання  $\mu$  або  $l$ ,  $\Delta E$  зменшується і за переходу до макроскопічного випадку  $\Delta E \rightarrow 0$ , отримується суцільний енергетичний спектр.

Знайдемо відносне зближення енергетичних рівнів

$$\frac{\Delta E}{E_n} = \frac{(2n+1)\pi^2 \hbar^2}{2\mu l^2} \frac{2\mu l^2}{n^2 \pi^2 \hbar^2} = \frac{2n+1}{n^2}. \quad (140.16)$$

При великих  $n$ , припустимо, що  $2n+1 \approx 2n$ , тоді формула (140.16) прийме вигляд:

$$\frac{\Delta E}{E_n} = \frac{2}{n}. \quad (140.17)$$

Як впливає із виразу (140.17) по мірі зростання головного квантового числа  $n$  відбувається відносне зближення енергетичних рівнів. За дуже великих  $n$  дискретний енергетичний спектр переходить в суцільний, чим і підтверджується принцип відповідності.

Результати квантової механіки переходять в результати класичної фізики при  $\hbar \rightarrow 0$ .

### §141. Лінійний гармонічний осцилятор

Розглянемо лінійний гармонічний осцилятор методами квантової механіки. У ролі такого осцилятора може бути будь-яка частинка масою  $\mu$ , що рухається під дією квазіпружньої сили

$$F = -kx, \quad (141.1)$$

де  $k$  - коефіцієнт пружності, який зв'язаний з масою частинки  $\mu$  і циклічною частотою  $\omega_0$ , таким співвідношенням:

$$k = \mu \omega_0^2. \quad (141.2)$$

Потенціальна енергія такого осцилятора:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (141.3)$$

і зображається параболічною кривою.

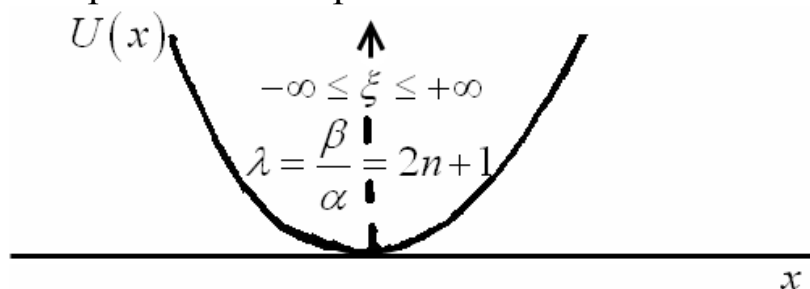


Рис. 126

Як бачимо задача про лінійний гармонічний осцилятор формально зводиться до задачі про рух частинки в параболічній потенціальній ямі. Запишемо рівняння Шредінгера для даного випадку

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (141.4)$$

Вираз (141.3) підставимо у вираз (141.4), отримаємо:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)\psi = 0. \quad (141.5)$$

Вираз (141.2) підставимо у вираз (141.5)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2\right)\psi = 0. \quad (141.6)$$

Введемо позначення:

$$\alpha = \frac{\mu\omega_0^2}{\hbar}; \beta = \frac{2\mu E}{\hbar^2}. \quad (141.7)$$

Врахувавши вираз (141.7) рівняння (141.6) можна переписати у вигляді:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\beta - \alpha^2 x^2)\psi = 0. \quad (141.8)$$

Введемо нову змінну

$$\xi = \sqrt{\alpha}x,$$

де  $\xi$  (ксі) – змінна величина. Тоді

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha \frac{d^2\psi}{d\xi^2}. \quad (141.9)$$

Рівняння (141.8) набуде вигляду:

$$\alpha \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\beta - \varepsilon\xi^2)\psi = 0. \quad (141.10)$$

Поділимо вираз (141.10) почленно на  $\alpha$ , отримаємо:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - \xi^2\right)\psi = 0. \quad (141.11)$$

Введемо позначення  $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ , тоді маємо

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0. \quad (141.12)$$

Задача зводиться до відшукування скінчених однозначних і неперервних розв'язків рівняння (141.12) в усій області зміни  $\xi$ :

$$-\infty \leq \xi \leq +\infty.$$

Можна показати, що такі розв'язки рівняння (141.12) має лише при певних значеннях параметру  $\lambda$

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} = 2n + 1. \quad (141.13)$$

Скориставшись виразом (141.7), отримаємо:

$$\frac{2\mu E \hbar}{\hbar^2 \mu \omega_0} = \frac{2E}{\hbar \omega_0} = 2n + 1.$$

Звідси знайдемо енергію осцилятора:

$$E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (141.14)$$

де  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Якщо  $n = 0$ , то

$$E = \frac{\hbar \omega_0}{2} \text{ min}. \quad (141.15)$$

Скориставшись рівнянням (141.14), знайдемо енергію лінійного гармонічного осцилятора на найнижчому рівні (при  $n = 0$ ). Маємо формулу (141.15).

Як бачимо, на відміну від класичної фізики лінійний гармонічний осцилятор володіє деякою нульовою енергією. Це свідчить про те, що не можна забрати енергію тіла навіть охолодженням до абсолютного нуля.

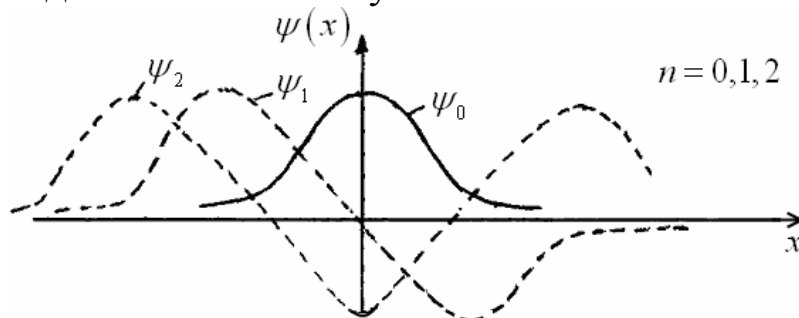


Рис. 127

Виявимо, який вигляд мають хвильові функції лінійного гармонічного осцилятора. Легко показати, що хвильові функції зображаються як на рис. 127.

Таким чином, число вузлів хвильової функції дорівнює квантовому числу  $n$  (рис. 128).

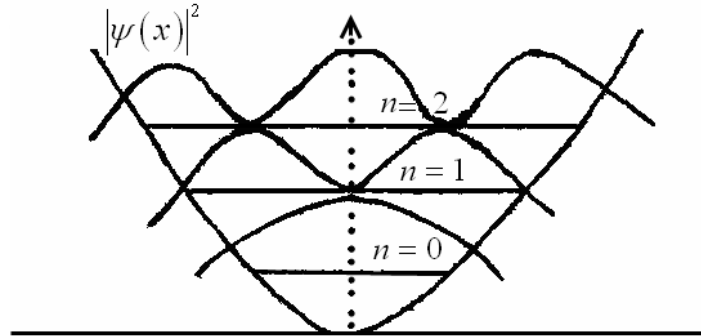


Рис. 128

Порівняємо значення енергії осцилятора і частинки в потенціальній ямі (рис. 129).

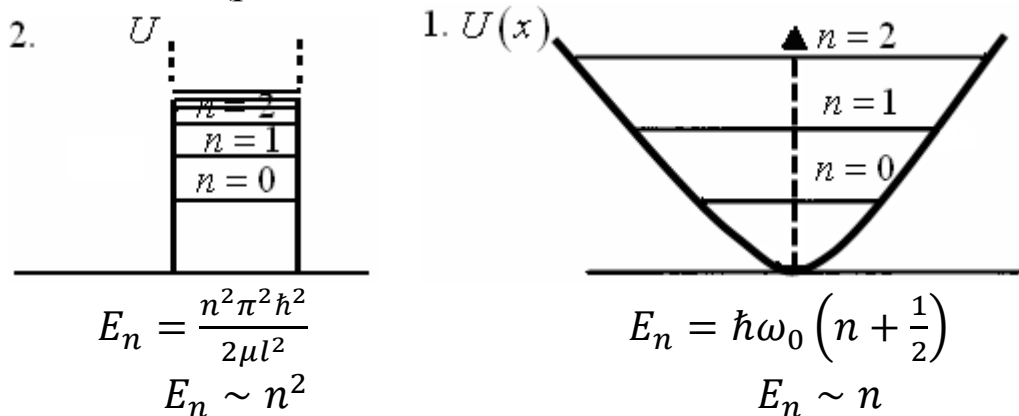


Рис. 129

Як бачимо, у випадку осцилятора енергія залежить від першої степені квантового числа  $n$ , тобто енергетичні рівні рівновіддалені (еквідистантні).

Розглянемо графіки хвильових функцій для конкретного осцилятора і густини розподілу ймовірності для  $n = 0, 1, 2$  і 6.

На нижньому рис. 130 суцільними лініями зображено густину ймовірності квантового механічного осцилятора  $|\psi(x)|^2$ , а пунктирними, густину ймовірності виявлення класичного осцилятора в околі деякої точки  $x$ . Як бачимо, при малих значеннях квантового числа  $n$  квантовий осцилятор веде себе зовсім по іншому, а ніж класичний, ймовірність виявити класичний осцилятор максимальна в точках його повороту, а ймовірність виявити квантовий осцилятор

максимальна в місці пучності хвильової функції  $\psi$ . При великих  $n$  усереднена крива для розподілу густини ймовірності краще узгоджується з кривою для класичного осцилятора. При  $n \rightarrow \infty$  взагалі результати, квантової механіки переходять в результати класичної фізики.

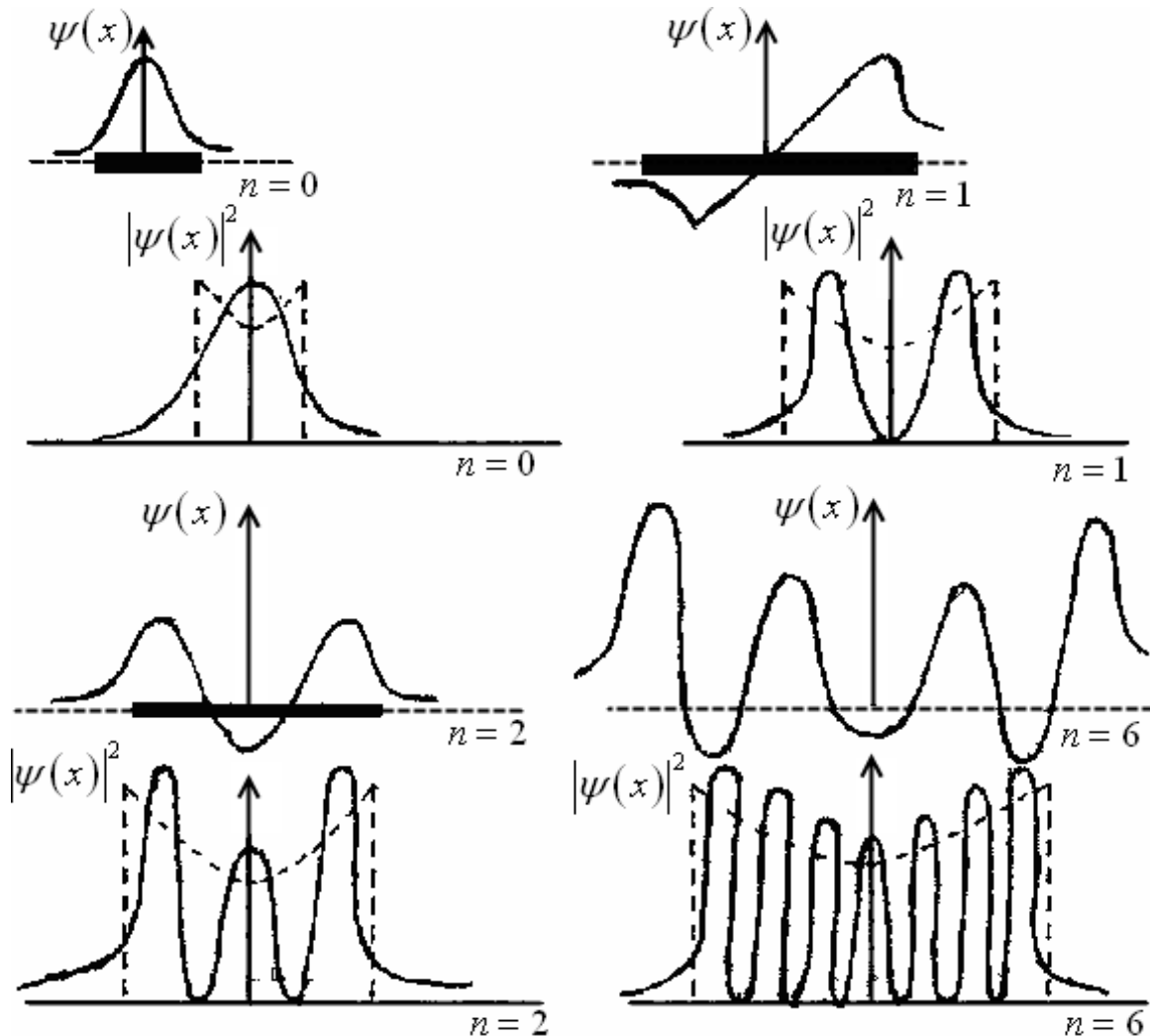


Рис. 130

### §142. Тунельний ефект

Квантова механіка приводить до висновку про можливість проходження частинки крізь потенціальний бар'єр. Це явище носить назву *тунельного ефекту*.

Розглянемо (рис. 131) одновимірний потенціальний бар'єр прямокутної форми висотою  $U_0$ .

Повна енергія частинки  $E < U_0$ . Запишемо рівняння Шредінгера для частинки в середині потенціального бар'єру

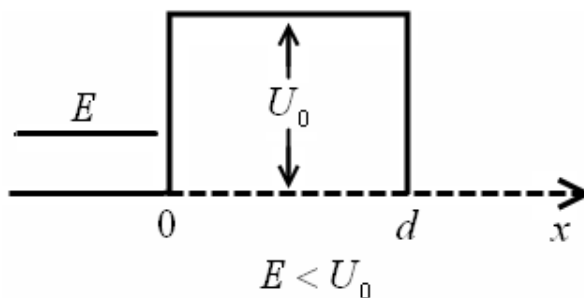


Рис. 131

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U_0) = 0. \quad (142.1)$$

Введемо позначення:

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U_0) = k^2. \quad (142.2)$$

Тоді

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0. \quad (142.3)$$

Розв'язок рівняння (142.3) запишемо у вигляді:

$$\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \quad (142.4)$$

Перший доданок розв'язку рівняння (142.4) зображає хвилю, що рухається в додатньому, напрямі осі  $X$ , другий - у від'ємному:

$$\begin{aligned} B &= 0; \\ \psi &= Ae^{ikx}. \end{aligned} \quad (142.5)$$

Оскільки нас цікавить ймовірність проникнення частинки крізь потенціальний бар'єр, то ми можемо обмежитись першим доданком розв'язку рівняння (142.4), причому прийемо  $B = 0$  і вираз (142.4) переписеться у вираз (142.5).

Вираз (142.2) підставимо в рівняння (142.5)

$$\psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2\mu(E-U_0)}x} = Ae^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(U_0-E)}x}. \quad (142.6)$$

За аналогією з оптикою введемо поняття прозорості потенціального бар'єру

$$D = \frac{|\psi(x)|^2}{|\psi(0)|^2}. \quad (142.7)$$

Рівність виражає відношення густини ймовірності в певній точці  $x$  в середині бар'єру до густини ймовірності в точці  $x = 0$ .

$$|\psi(x)|^2 = A^2 e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2\mu(U_0-E)}x}, \quad (142.8)$$

$$|\psi(x_0)|^2 = A^2. \quad (142.9)$$

Тоді формула для прозорості потенціального бар'єру переписеться

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2\mu(U_0-E)}x}. \quad (142.10)$$

Для всього бар'єру вираз (142.10) переписеться:

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2\mu(U_0-E)}d}, \quad (142.11)$$

де  $D$  - залежить від  $\mu$  і від  $d$ .

Знайдемо прозорість потенціального бар'єру довільної форми.

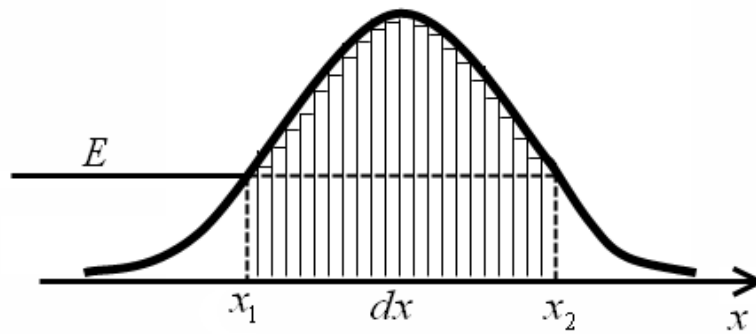


Рис. 132

Розбиваємо потенціальний бар'єр довільної форми на систему прямокутних бар'єрів з безмежно малою шириною (рис. 132). Залишимо формулу прозорості для одного із таких бар'єрів

$$\Delta D = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2\mu[U(x)-E]} dx}, \quad (142.12)$$

де  $\Delta$  - це прозорість, яка є дуже малою.

Тоді прозорість всього бар'єру знаходиться шляхом інтегрування

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2\mu[U(x)-E]} dx}, \quad (142.13)$$

$U(x)$  - тому що в кожній точці  $x$  існує своє  $U$  (рис. 130).

### §143. Явище холодної емісії електронів

Одним із експериментальних фактів, який підтверджений на основі тунельного ефекту, являється явище холодної емісії електронів (рис. 133). Якщо до металу прикласти значне електричне поле ( $10^6$  В/см) так щоб він являвся катодом, тоді таке поле спроможне виривати із металу електрони. Оскільки для того, щоб вирвати електрон із металу потрібно виконати певну роботу, то логічно припустити, що енергія електрона всередині металу менша ніж зовні нього. Найпростіше припустити, що енергія електрона в середині металу рівна нулю, а зовні вона дорівнює деякій константі  $U_0$ .

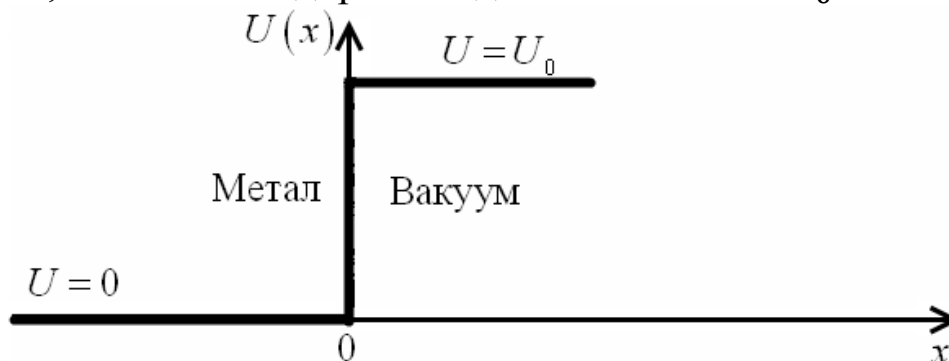


Рис. 133

Нехай повна енергія електрона в середині металу дорівнює  $E$ .

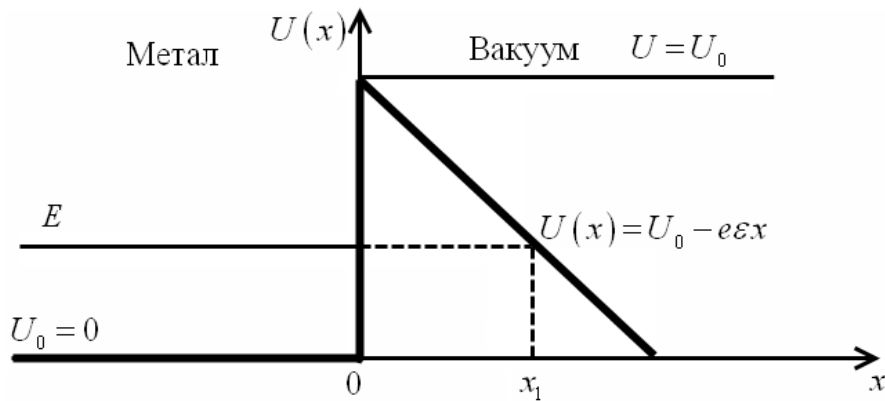


Рис. 134

Прикладемо до металу електричне поле в напрямі осі  $x$ , при цьому потенціальна енергія електрона прийме вигляд (рис. 134):

$$U(x) = U_0 - e\epsilon x,$$

де  $e$  - заряд електрона;  $\epsilon$  - напруженість електричного поля.

Як бачимо, наявність електричного поля створює потенціальний бар'єр скінченої довжини  $0x_1$ . Причому, чим сильніше буде поле тим вужчий бар'єр, а значить і більша ймовірність проникнення електрона через такий потенціальний бар'єр

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_0^{x_1} \sqrt{2\mu[U(x)-E]} dx}.$$

Координата  $x_1$  зв'язана з напруженістю електричного поля і знаходиться таким чином:

$$E = U_0 - e\epsilon x_1; \rightarrow e\epsilon x_1 = U_0 - E;$$

$$x_1 = \frac{U_0 - E}{e\epsilon}.$$

## Лекція 32. РУХ У ПОЛІ З ЦЕНТРАЛЬНОЮ СИМЕТРІЄЮ

§144. Зв'язок енергетичного спектру з видом потенціалу.

§145. Рух мікрооб'єкта в центральній-симетричному полі.

§146. Рух електрона в кулонівському полі ядра.

[1. §12.2-§12.4, §12.6; 2. §39-§44; 4. §5.2-§5.4; 5. §11, §12; 8. §29,

§30]

## §144. Зв'язок енергетичного спектру з видом потенціалу

Як відомо, стаціонарне рівняння Шредінгера містить  $[E - U(x)]$ , що являє собою різницю між повною і потенціальною енергією мікрооб'єкта. Очевидно, застосування цього рівняння до різних квантово-механічних задач про стан мікрооб'єктів в зовнішніх постійних потенціальних полях зумовлює залежність енергетичного спектру від вигляду потенціалу.

При виведенні рівняння Шредінгера вважалось, що потенціальна енергія  $U(x)$  менша від повної енергії. Проаналізуємо результати, що отримуються для тих випадків, коли  $[E - U(x)]$  приймає різні значення і навіть той випадок, коли  $U > E$ . Згідно класичної фізики такі області недоступні для частинки, однак в квантовій механіці ситуація дещо інша. Розглянемо такі характерні випадки.

1. Рух вільної частинки,  $U(x) = 0$ . Стан такої частинки описується плоскою монохроматичною хвилею де Бройля з довжиною  $\lambda = \frac{h}{mv}$ .

Енергія такої частинки визначається формулою  $E = \hbar\omega$  і є постійною в усіх точках простору.

2. Рух частинки в потенціальній ямі з безмежно високими стінками (рис. 135). Для такої частинки, що знаходиться в зв'язаному стані, повна енергія частинки в даному випадку приймає від'ємні значення. Отримується дискретний енергетичний спектр. Формула для знаходження енергії має вигляд:

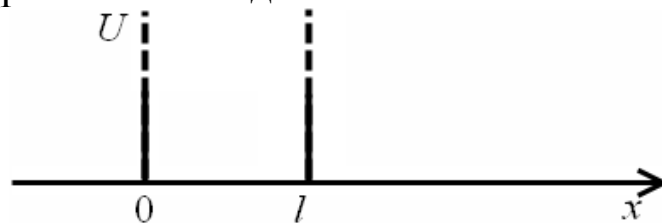


Рис. 135

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2\mu l^2}.$$

По мірі зростання головного квантового числа спостерігається відносне зближення енергетичних рівнів.

3. Частинка в потенціальній ямі скінченної глибини (рис. 136).

В даній задачі треба розглянути два випадки:

- а)  $E > U_0$ ;  
 б)  $E < U_0$ .

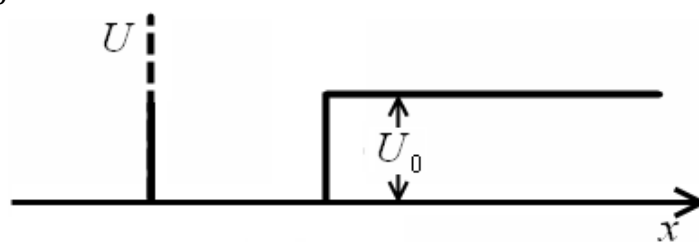


Рис. 136

При  $E > U_0$  рівняння Шредінгера завжди має розв'язок, ніякої дискретності власних значень енергії  $E$  немає. Енергетичний спектр суцільний. При  $E < U_0$  існує тільки декілька власних значень енергії.

4. Лінійний гармонічний осцилятор. Розглянемо лінійний гармонічний осцилятор методами квантової механіки. Такий розгляд привів до задачі про рух частинки в параболічній потенціальній ямі (рис. 137). При цьому отримується такий дискретний енергетичний спектр. Енергія знаходиться за формулою:

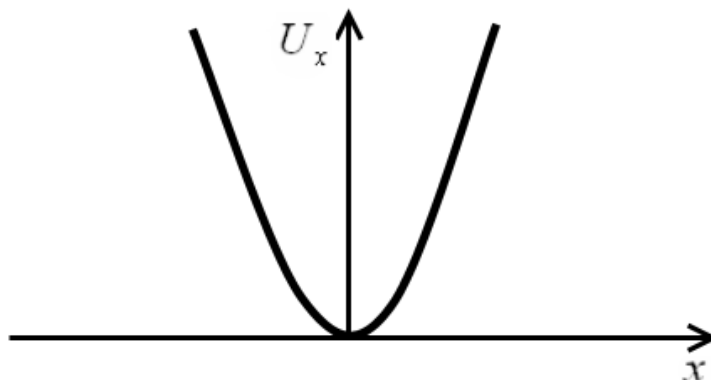


Рис. 137

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

5. Вивчення руху електрона в центрально-симетричному кулонівському полі ядра дозволяє виявити такі можливі значення його енергії

$$E_n = \frac{Z^2 e^4 \mu}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Наведені приклади є переконливим доказом безпосередньої залежності енергетичного спектра мікрооб'єкта від вигляду потенціалу. Цим і пояснюється наявність у конкретних мікрооб'єктів в тих чи інших умовах дискретних, суцільних і змінних енергетичних спектрів.

Пояснити питання дискретності станів мікрооб'єктів та їхні лінійчасті спектри з точки зору квантової механіки можна також на основі постулатів Бора. Почавши з класичних міркувань, а саме: ядерна модель атома спирається на незаперечні експериментальні факти. Однак вона несумісна з законами класичної фізики.

Відповідно до електромагнітної теорії будь-яка заряджена частка, що рухається з прискоренням, неперервно випромінює енергію. Під час руху навколо ядра електрон має доцентрове прискорення і, отже, повинен неперервно втрачати енергію на випромінювання. Тому електрон в атомі мав би рухатися по спіралі, наближаючись до ядра, і зрештою впасти на нього (рис. 138).

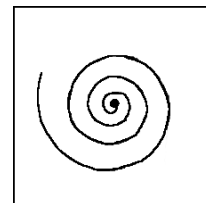


Рис. 138

Але атоми є стійкими системами і можуть необмежено довго існувати без зміни властивостей. Тому ми вимушені констатувати, що під час руху в атомі електрон не випромінює енергії. Ця обставина, а також невідповідність інших властивостей атомів законам класичної фізики спонукали видатного датського фізика, одного з творців квантової механіки Н. Бора, до формулювання так званих квантових постулатів Бора:

1. Постулат стаціонарних станів або правило квантування орбіт:

- в атомі існують стаціонарні квантові стани, що не змінюються протягом часу без зовнішніх взаємодій на атом. У стаціонарному стані атом не випромінює;

- в стаціонарному стані атома, електрон, рухаючись по коловій орбіті, повинен мати дискретні, квантові значення моменту імпульсу

$$L_n = mv_n r_n = n\hbar, \quad (144.1)$$

де  $n = 1, 2, 3, \dots$

2. Постулат правило частот Бора:

- при переході атома з одного стаціонарного стану в інший випромінюється або поглинається один фотон;

- атом випромінює або поглинає квант електромагнітної енергії внаслідок перескакування електрона з однієї стаціонарної орбіти на іншу

$$h\nu_{mn} = E_m - E_n. \quad (144.2)$$

Поглинати енергію атоми теж можуть тільки дискретними порціями з енергіями (частотами), що задовольняють умовам (144.1) і (144.2). Отже, енергія електрона приймає дискретні значення (квантується). Енергії стаціонарних станів утворюють дискретний набір значень:  $E_1, E_2, \dots, E_n, E_m, \dots$ . Отже, перший постулат Бора провів

ідею дискретності у квантовій механіці.

Хоча постулати Бора різко суперечать законам класичної фізики, вони відображують незаперечні дослідні факти: стійкість атомів і дискретний (квантовий) характер електромагнітного випромінювання.

Дискретність квантових станів у атомі та правило частот пояснюють лінійчастий і виключно індивідуальний характер спектрів випромінювання і поглинання розріджених атомарних газів: атом кожного хімічного елемента має властивий тільки йому дискретний набір спектральних ліній.

### §145. Рух мікроб'єкта в центральном-симетричному полі

Рух частинки в центральном-симетричному полі являє основну задачу атомної фізики. Щоб розв'язати вказану задачу необхідно записати рівняння Шредінгера в сферичних координатах. Для цього потрібно вміти записати вираз для  $\nabla^2$  в таких координатах.

Зауважимо, що тільки центральном-симетричне поле характеризується тим, що потенціальна енергія частинки в такому полі залежить лише від віддалі до центра силового поля (рис. 139).

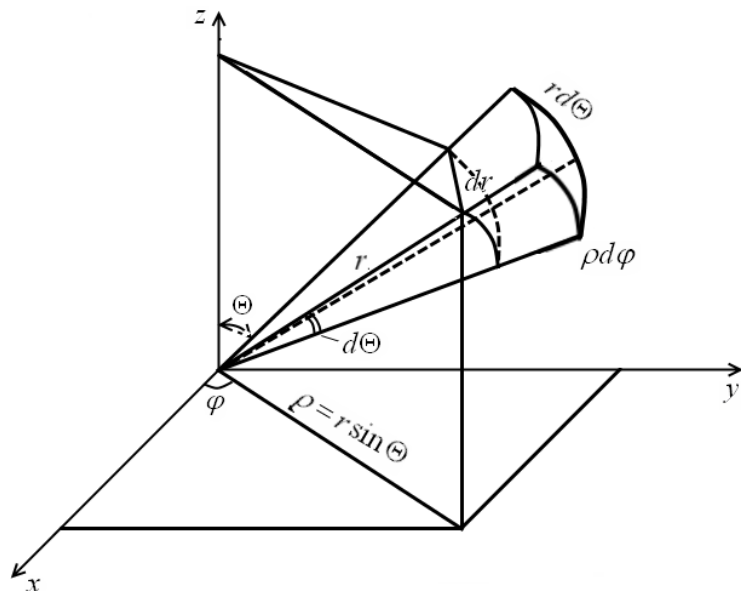


Рис. 139

Скористаємось тотожністю:

$$\nabla^2 \psi = \text{div grad} \psi. \quad (145.1)$$

Знайдемо спочатку компоненти деякого вектора  $\vec{B}$  в сферичних координатах

$$B = \text{grad} \psi, \quad (145.2)$$

де grad характеризує зміну скалярного поля в деякому напрямі.

$$B = \text{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial l}. \quad (145.3)$$

Тоді згідно рисунка 138 можна записати:

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r}; B_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \\ B_\varphi &= \frac{\partial \psi}{\rho \partial \varphi} = \frac{\partial \psi}{r \sin \theta \partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (145.4)$$

Як відомо  $r$ ,  $\theta$  і  $\varphi$  зв'язані з декартовими координатами такими співвідношеннями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi; \\ y &= \rho \sin \varphi; \\ z &= r \cos \theta; \\ \rho &= r \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (145.5)$$

Знайдемо  $\text{div}$ . Згідно визначення можна записати:

$$\text{div} B = \frac{1}{d^3 x} \lim_{s \rightarrow 0} \oint_s (B ds) = \frac{1}{d^3 x} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i dS_i) dx, \quad (145.6)$$

де  $d^3 x$  - елемент об'єму в сферичній системі координат;

$$d^3 x = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \quad (145.7)$$

де  $x_i$  - відповідно координати  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ;  $B_i$  - знаходиться згідно виразу (145.4);  $dS_i$  - елементарні площадки перпендикулярні відповідно таким напрямкам  $dr, r d\theta, \rho d\varphi$ .

$$\left. \begin{aligned} dS_r &= r^2 \sin \theta d\theta d\varphi; \\ dS_\theta &= r \sin \theta dr d\varphi; \\ dS_\varphi &= r dr d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (145.8)$$

Очевидно вираз для  $\text{div}$  прийме вигляд:

$$\begin{aligned} \text{div} B &= \frac{1}{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \right) dr \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} r \sin \theta dr d\varphi \right) d\theta \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \psi}{r \sin \theta \partial \varphi} r dr d\theta \right) d\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (145.9)$$

Звідси легко отримати вираз для  $\nabla^2$

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (145.10)$$

$$\nabla_{\theta\varphi}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (145.11)$$

На підставі введених позначень вираз (145.10) можна записати:

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_{\theta\varphi}^2. \quad (145.12)$$

Скористаємось виразом для оператора кінетичної енергії:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2. \quad (145.13)$$

Вираз (145.12) підставимо у вираз (145.13) і врахувавши, що

$$\hat{M}^2 = -\hbar^2 \nabla_{\theta\varphi}^2. \quad (145.14)$$

Вираз для оператора кінетичної енергії прийме вигляд:

$$\hat{T} = T_r + \frac{\hat{M}^2}{2\mu r^2}, \quad (145.15)$$

де  $\hat{T}_r$  - називається оператором кінетичної енергії радіального руху;  $\frac{\hat{M}^2}{2\mu r^2}$  - оператор кінетичної енергії трансверсального руху.

Тоді оператор повної енергії буде мати вигляд:

$$\hat{H} = \hat{T}_r + \frac{\hat{M}^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (145.16)$$

Звідки легко отримати рівняння Шредінгера

$$\hat{T}_r + \frac{\hat{M}^2}{2\mu r^2} + U(r)\psi = E\psi. \quad (145.17)$$

Хвильова функція в рівнянні (145.17) є функцією координат  $r, \theta, \varphi$ . Будемо шукати розв'язок рівняння в усій області змін  $r, \theta, \varphi$ :

$$0 \leq r \leq \infty;$$

$$0 \leq \theta \leq \pi;$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Так як оператори  $H$  і  $\hat{M}^2$  комутують між собою, то вони повинні мати спільні власні функції, а значить можна записати і ще одне рівняння для  $\psi$

$$\hat{M}^2\psi = M^2\psi. \quad (145.18)$$

Підставимо у рівняння (145.18) вираз  $M^2$  із рівняння (145.14) і ввівши позначення  $\frac{M^2}{\hbar^2} = \lambda$ , отримаємо рівняння (145.18) у вигляді:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \lambda \psi = 0. \quad (145.19)$$

Вираз (145.19) - рівняння Шредінгера для шарових хвильових функцій (поверхневих). Рівняння (145.19) розв'язується досить складно, причому виявляється, що розв'язок існує лише при певних значеннях параметру  $\lambda$

$$\lambda = l(l+1), \quad (145.20)$$

де  $l = 0, 1, 2, \dots$

Тоді власне значення оператора квадрата моменту імпульсу прийме вигляд:

$$M^2 = \hbar^2 l(l + 1). \quad (145.21)$$

Підставимо вираз (145.21) у вираз (145.17)

$$\hat{T}_r \psi + \frac{\hbar^2 l(l + 1)}{2\mu r^2} \psi + U\psi = E\psi. \quad (145.22)$$

В рівнянні (145.22) хвильова функція залежить від  $r, \theta, \varphi$ . Представимо її у вигляді добутку двох хвильових функцій, одна із яких буде залежати тільки від радіуса – друга від кутів

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi). \quad (145.23)$$

Підставимо вираз (145.23) у вираз (145.22) і поділимо почленно рівняння (145.22) на  $Y(\theta, \varphi)$ , отримаємо:

$$\hat{T}_r R + \frac{\hbar^2 l(l + 1)}{2\mu r^2} R + UR = ER, \quad (145.24)$$

де  $R$  - це хвильова функція, що залежить від радіуса ( $r$ ).

Вираз (145.24) називається рівнянням Шредінгера для радіальних хвильових функцій. Представимо розв'язок рівняння (145.24) у вигляді:

$$R(r) = \frac{V(r)}{r}. \quad (145.25)$$

Тоді перший доданок в рівнянні (145.25) прийме вигляд:

$$T_r R = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{d^2 V}{dr^2}. \quad (145.26)$$

Таким чином, вираз (145.26) переписеться:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l + 1)}{2\mu r^2} V + UV = EV. \quad (145.27)$$

Розглянемо асимптотичні розв'язки рівняння (145.27) при  $r \rightarrow \infty$ . В цьому випадку можна знехтувати другим доданком внаслідок величини  $\frac{1}{r}$  і третім  $U$ , тому що на далекій відстані  $U = 0$  (взаємодія слабка між тілами), тобто  $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} V = 0, UV = 0$ . Тоді рівняння (145.27) переписеться:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 V}{dr^2} = EV. \quad (145.28)$$

Його можна переписати так:

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + -\frac{2\mu}{\hbar^2} EV = 0. \quad (145.29)$$

Виведемо позначення:

$$\frac{2\mu E}{\hbar^2} = k^2, \text{ тоді, коли } E > 0,$$

$$\frac{2\mu E}{\hbar^2} = \lambda^2, E < 0. \quad (145.30)$$

Тоді розв'язки рівняння (145.29) будуть мати вигляд:

$$V = C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr}, E > 0; \quad (145.31)$$

$$V' = C_1' e^{-\lambda r} + C_2' e^{\lambda r}, E < 0. \quad (145.32)$$

Розв'язок радіального рівняння Шредінгера має вигляд:

$$R = \frac{C_1 e^{ikr}}{r} + \frac{C_2 e^{-ikr}}{r}, E > 0; \quad (145.33)$$

$$R' = \frac{C_1' e^{-\lambda r}}{r} + \frac{C_2' e^{\lambda r}}{r}, E < 0. \quad (145.34)$$

В першому випадку, коли  $E > 0$  розв'язок  $R$  являється скінченним і неперервним при будь-яких значеннях постійних. Він являє собою суперпозицію збіжних і розбіжних хвиль. Ймовірність виявити частинку не зникає навіть при великих  $\vec{r}$  і пропорційна  $|R|^2$ , а також об'єму кульового шару  $4\pi r^2 dr$ . Енергія частинки в даному випадку також може приймати довільні значення. Таким чином, при  $E > 0$ , отримується неперервний енергетичний спектр. Запишемо також вираз для ймовірності виявити частинку в об'ємі кульового шару товщиною

$$W(V)dV = |R|^2 4\pi r^2 dr = 4\pi |C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr}|^2 dr. \quad (145.35)$$

Такий стан відповідає аперіодичним орбітам в класичній механіці, коли частинка рухається з безмежності до центру силового поля, а потім знову віддаляється в безмежність.

Розглянемо випадок, коли  $E < 0$ . Для даного випадку, щоб хвильова функція була скінченною при  $r \rightarrow \infty$  необхідно поставити  $C_2' = 0$ . Тоді хвильова функція прийме вигляд:

$$R' = C_1' \frac{e^{-\lambda r}}{r}. \quad (145.36)$$

Вираз для ймовірності виявити частинку в такому ж самому кульовому шарі прийме вигляд:

$$W(V)dV = 4\pi |C_1'|^2 e^{-2\lambda r} dr. \quad (145.37)$$

Із виразу (145.37) випливає, що для великих  $r$  -  $W(r) \rightarrow 0$ . Таким чином, частинку можна виявити тільки поблизу силового центру, що відповідає періодичним орбітам в класичній механіці. Поряд з цим легко показати, що в даному випадку при  $E < 0$  отримується

дискретний енергетичний спектр.

Розглянемо кілька видів потенціальної енергії, що приводить до подібних полів. Як відомо, в усіх практичних задачах характер потенціального поля такий, що для  $r \rightarrow 0$  -  $U(r)$  має полюс порядку меншого ніж одиниця на  $r^2 \left(\frac{1}{r^2}\right)$ . З другого боку для  $r \rightarrow \infty$  -  $U(r) \rightarrow 0$ . Можливі такі випадки дії сил, що обумовлюють подібні потенціальні поля (рис. 140).

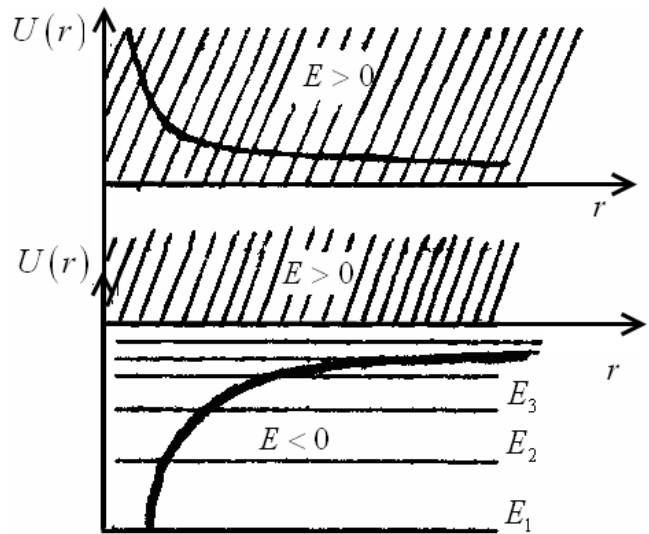


Рис. 140

1. Сили відштовхування. Повна енергія додатна  $E > 0$ . Енергетичний спектр неперервний.

2. Сили притягання. У випадку дії сил притягання треба розглядати дві можливості:

- а)  $E > 0$ , енергетичний спектр неперервний;
- б)  $E < 0$ , енергетичний спектр дискретний.

Загалом енергетичний спектр змішаний, подібні спектри властиві електрону. При чому суцільний спектр властивий «ізолюваному» електрону, а дискретний «зв'язаному» електрону.

3. Взаємодія атомів. При  $r \rightarrow \infty$  -  $U(r) \rightarrow 0$  на дуже великих відстанях атоми не взаємодіють. При зближенні атомів починають діяти сили притягання.

Енергія  $E < 0$ , енергетичний спектр дискретний. І на кінець при дуже малих відстанях вступають в дію сили відштовхування. Енергія зростає  $E > 0$ . Енергетичний спектр суцільний (рис. 141).

Отже, коли електрон і вільна частинка рухається у полі вони мають як неперервний (суцільний) так і дискретний спектри, тобто загалом їхній

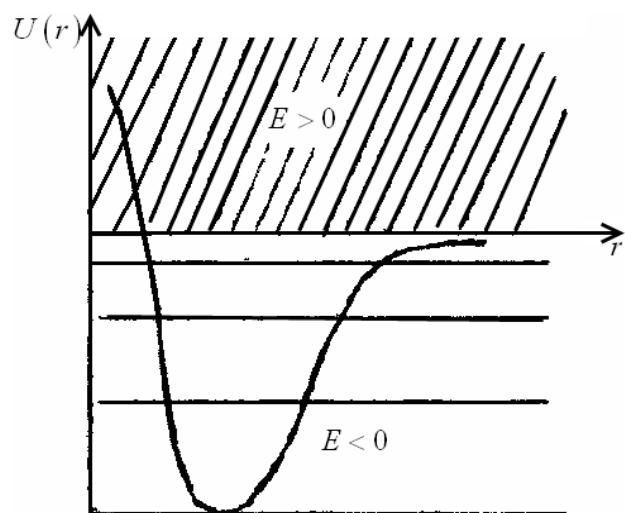


Рис. 141

спектр можна вважати змішаним. Розглянемо, ще деякі приклади для вільної частинки і електрона які рухаються у полі та доводять, що загалом енергетичний спектр змішаний.

Енергетичний спектр електронів у кристалі із застосуванням одноелектронного та адіабатичного наближень визначається із рівняння Шредінгера

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r) \right] \Psi(r) = E\Psi(r),$$

де  $U(r)$  – періодичний потенціал кристала.

Таким чином, знаходження власних функцій і значень цього рівняння зводиться до визначення потенціалу  $U(r)$  і розв'язку рівняння з обумовленим потенціалом.

Рівняння Шредінгера для стаціонарного стану

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) = 0. \quad (145.38)$$

Рівняння Шредінгера для вільної частинки. Так як частинка вільна, зовнішні поля відсутні, тобто ( $U = 0$ ) і в цьому випадку рівняння (145.38) набуває вигляд:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi = 0.$$

Після деяких перетворень знайдемо значення енергії:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (145.39)$$

З виразу (145.39) видно, так як число  $k$  може набувати будь-яких значень, то і  $E$  також може набувати будь-які значення, тобто енергетичний спектр вільної частинки суцільний.

Якщо частинка перебуває в одновимірній потенціальній ямі, то значення енергії знаходимо за формулою:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2ml^2} n^2. \quad (145.40)$$

Вираз (145.40) визначає значення енергії частинки у потенціальній ямі та показує, що воно набуває дискретний набір значень, тобто енергія квантується.

Для електрона можна записати:

$$\Delta E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2ml^2} n.$$

1. Оцінімо  $\Delta E_n$  для електрона, який знаходиться у шматку металу ( $l = 10$  см):

$$\Delta E_n = \frac{9,86 \cdot 10^{-68}}{9,1 \cdot 10^{-31} 10^{-2}} n = 10^{-35} \text{ Дж} = 10^{-16} n \text{ еВ.}$$

Отримане  $\Delta E_n$  дуже мале, тому можна вважати, що енергетичний спектр електрона в металі суцільний (енергія не квантується).

2. Розглянемо електрон в атомі ( $l \sim 10^{-10}$  м):

$$\Delta E_n = \frac{9,86 \cdot 10^{-68}}{9,1 \cdot 10^{-31} 10^{-20}} n \approx 10^{-17} \text{ Дж} \approx 10^2 n \text{ еВ.}$$

Цей розрахунок для електрона в атомі показує, що енергія квантується.

Тому для великих  $n$  маємо:

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2}{n} \ll 1,$$

спектр енергій буде неперервним (дискретність втрачається).

Цей висновок є поодиноким випадком більш загального принципу, який називають принципом відповідності Бора, згідно з яким для великих квантових чисел закони квантової механіки переходять в закони класичної фізики. Є більш загальне формулювання цього принципу.

Будь-яка нова теорія, яка виникає в фізиці, не повинна відкидати закони класичної фізики. Вона лише вказує межі застосування цих законів та при певних умовах закони нової теорії повинні переходити в закони класичної фізики.

## §146. Рух електрона в кулонівському полі ядра

Скористаємось рівнянням Шредингера для радіальних хвильових функцій. Застосуємо його до вивчення руху електрона в середині атома водню та водневоподібних атомів ( $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$ )

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} V + U(r)V = EV, \quad (146.1)$$

де  $V$  - хвильова функція (радіальна);  $U$  - потенціальна енергія;  $r$  - віддаль від ядра до електрона.

Як відомо потенціальна енергія електрона в кулонівському полі ядра має вигляд:

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r}, \quad (146.2)$$

де  $Z$  - заряд ядра.

Підставимо формулу (146.2) в рівняння (146.1)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} V - \frac{Ze^2}{r} V = EV. \quad (146.3)$$

Даний випадок відповідає дії сил притягання, а значить при  $E > 0$ , отримається неперервний спектр, а при  $E < 0$  дискретний енергетичний спектр. Розглянемо тільки дискретний енергетичний спектр ( $E < 0$ ) і власні функції, що описують поведінку електрона в середині атома. Введемо замість  $r$  і  $E$  такі величини  $\rho$  і  $\varepsilon$

$$\rho = \frac{r}{a}; \quad \varepsilon = \frac{E}{E_1}; \quad a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}; \quad E_1 = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2}. \quad (146.4)$$

Підставимо вирази (146.4) у формулу (146.3), отримаємо таке рівняння (дивись практичні)

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} + \left[ \varepsilon + \frac{2Z}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] V = 0. \quad (146.5)$$

Розглянемо асимптотичний розв'язок рівняння (146.5). Для цього виберемо хвильову функцію у вигляді

$$V(\rho) = e^{-\alpha\rho} f(\rho), \quad (146.6)$$

де  $\alpha = \sqrt{-\varepsilon}$ ;

$f(\rho)$  - деяка нова функція.

Вираз хвильової функції (146.6) підставимо у формулу (146.5), отримаємо таке рівняння:

$$\frac{d^2f}{d\rho^2} - 2\alpha \frac{df}{d\rho} + \left[ \frac{2Z}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] f = 0. \quad (146.7)$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді ряду по степенях  $\rho$ . Із загальної теорії відомо, що скінченний розв'язок рівняння (146.7) при  $\rho \rightarrow 0$ , ( $\rho = 0$ ) починається членом  $\rho^{l+1}$ . Тоді розв'язок рівняння (146.7) можна записати у вигляді:

$$f(\rho) = \rho^{l+1} \sum_{v=0}^{\infty} d_v \rho^v. \quad (146.8)$$

Підставимо рівняння (146.8) в формулу (146.7) і згрупуємо члени при однакових степенях  $\rho$ , отримаємо:

$$\sum_v \left\{ a_{v+1} [(v+l+2)(v+l+1) - l(l+1)] + a_v [2Z - 2\alpha(v+l+1)] \right\} \rho^{v+l} = 0. \quad (146.9)$$

Щоб вираз (146.9) виконувався при всіх значеннях  $\rho$  від 0 до  $\infty$  необхідно, щоб коефіцієнти при кожній степені  $\rho$  були рівні 0. Тоді ми із виразу (146.9), отримаємо:

$$a_{v+1} [(v+l+2)(v+l+1) - l(l+1)] +$$

$$+a_\nu[2Z - 2\alpha(\nu + l + 1)] = 0. \quad (146.10)$$

Звідки отримаємо таке співвідношення для визначення невідомих коефіцієнтів

$$a_{\nu+1} = \frac{2\alpha(\nu + l + 1) - 2Z}{(\nu + l + 2)(\nu + l + 1) - l(l + 1)} a_\nu. \quad (146.11)$$

Це однорідне рівняння, причому коефіцієнт  $a_0$  довільний. Задавши йому певного значення знаходимо згідно виразу (146.11) решту коефіцієнтів, а знаючи коефіцієнти, згідно рівняння (146.8), отримаємо розв'язок. Отриманий ряд при дуже великих  $\rho$  буде швидко зростати, тобто розв'язок при  $\rho = 0$  є скінченним і при  $\rho = \infty$  - нескінченний. Щоб розв'язок був скінченним і для  $\rho = \infty$ , необхідно обірвати ряд на деякому члені, перетворивши його у многочлен. Такий обрив ряду можна зробити лише при особливому параметру  $\alpha$ .

Нехай обірвемо ряд при  $\nu = n_r$ . В такому випадку  $a_{nr} \neq 0, a_{nr+1} = 0$ . Бачимо, в такому випадку згідно виразу (146.11) чисельник повинен дорівнювати нулю

$$2\alpha(\nu + l + 1) - 2Z = 0. \quad (146.12)$$

Тоді з співвідношення (146.12)  $\alpha$  приймає вигляд:

$$\alpha = \frac{Z}{n_r + l + 1}. \quad (146.13)$$

Вираз (146.13) – це необхідна і достатня умова того, щоб розв'язок рівняння (146.8) перетворився в многочлен і хвильова функція була скінченною. Введемо позначення:

$$n = n_r + l + 1. \quad (146.14)$$

Використавши рівняння (146.4), (146.6) і (146.14) легко отримати:

$$\varepsilon = -\frac{Z^2}{n^2}. \quad (146.15)$$

Скориставшись виразом (7.3.4) знайдемо вираз для можливих значень енергії електрона в атомі водню

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{2\hbar^2 n^2}. \quad (146.16)$$

Як бачимо з виразу (146.14) головне квантове число  $n$  приймає значення 1, 2, ... . Це число визначає енергію електрона. Якщо це число задано, то із виразу (146.14) випливає, що число  $l$  приймає таке значення:

$$l = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \quad (146.17)$$

де  $l$  називається *орбітальним квантовим числом*.

При заданому орбітальному квантовому числу, магнітне квантове число приймає такі значення:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (146.18)$$

Знаючи  $n$ ,  $l$  і  $m$  можна розрахувати скільки хвильових функцій належить квантовому рівню  $E_n$ . При заданому  $l$  отримується  $2l + 1$  хвильова функція, що відрізняється числом  $m$ . В свою чергу  $m$  приймає значення від 0 до  $n - 1$ , тому загальне число функцій буде таким:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2. \quad (146.19)$$

Як бачимо наявне  $n^2$  - виродження. Звідки видно, що стан електрона в атомі водню можна задати за допомогою 3-х квантових чисел. При чому це не просто абстрактні числа, а кожне із них визначає певну фізичну величину, а саме: головне квантове число визначає енергію електрона із виразу (146.16)

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}.$$

Орбітальне квантове число визначає момент імпульсу:

$$M_e^2 = \hbar^2 l(l + 1),$$

а магнітне квантове число визначає проекцію цього моменту на деякий напрям  $Oz$

$$M_z = \hbar m.$$

Як відомо стан електрона задається за допомогою квадрата модуля хвильової функції

$$\begin{aligned} \omega_{nlm}(r, \theta, \varphi) &= r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (146.20)$$

Представимо хвильову функцію, що залежить від  $r, \theta, \varphi$  у вигляді добутку двох хвильових функцій, одна з яких залежатиме від радіуса  $r$ , а друга від двох кутів  $\theta, \varphi$

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_n(r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (146.21)$$

На підставі виразу (146.21) формула (146.20) буде мати вигляд:

$$\sin \theta d\theta d\varphi = d\Omega;$$

$$\omega_{nlm}(r, \theta, \varphi) r^2 dr d\Omega = R_n^2(r) r^2 dr |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (146.22)$$

Скористаємось умовою нормування хвильових функцій. Проінтегрувавши по всіх кутах, отримаємо:

$$\omega_n(r) r^2 dr = R_n^2 r^2 dU. \quad (146.23)$$

Зображемо графічно залежність (146.23) для випадку такого стану електрона в якому квантові числа приймають такі значення:

$$n = 1, l = 0, m = 0 \text{ (рис. 142),}$$

де  $r_B$  - борівська орбіта.

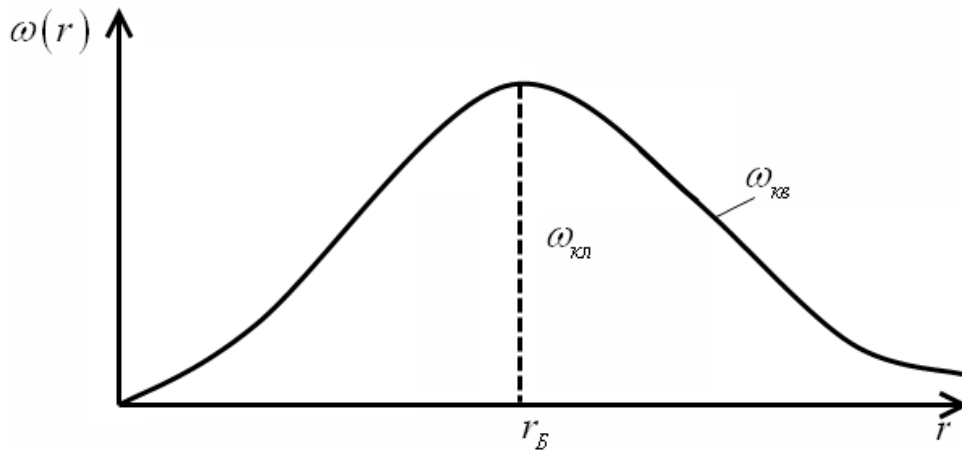


Рис. 142

$$n = 2 \text{ та } n = 3, l = 0, m = 0 \text{ (рис. 143).}$$

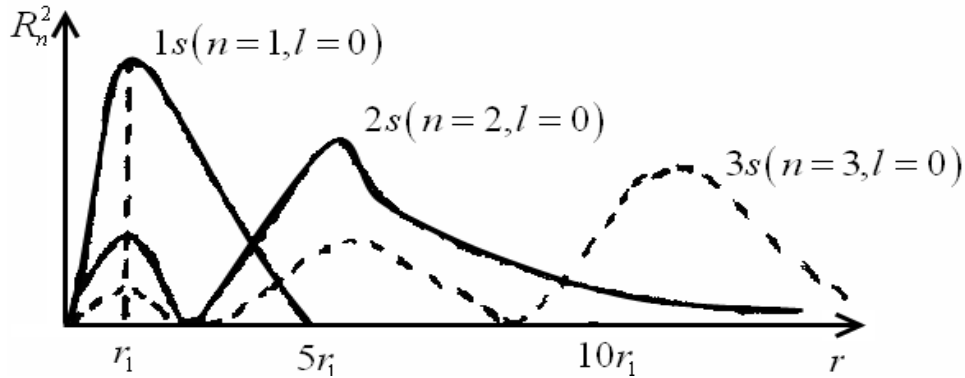


Рис. 143

Вираз (146.23) - ймовірність знаходження електрона в області між сферами радіусами  $r$  і  $r + dr$  (рис. 144).

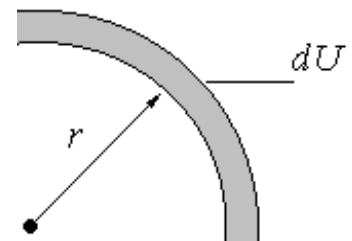


Рис. 144

Знайдемо розподіл густини ймовірності від кутів  $\theta, \varphi$ . Для цього проінтегруємо вираз (146.22) по радіусу від 0 до  $\infty$ , отримаємо ймовірність виявити електрон в деякому тілесному куті  $d\Omega$  поблизу променя  $(\theta, \varphi)$

$$\omega_{lm}(\theta, \varphi)d\Omega = |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (146.24)$$

Із аналізу ймовірностей можна зробити висновок, що форма атома залежить від орбітального числа  $l$ , а магнітне квантове число  $m$  визначає орієнтацію атома у просторі (рис. 145).

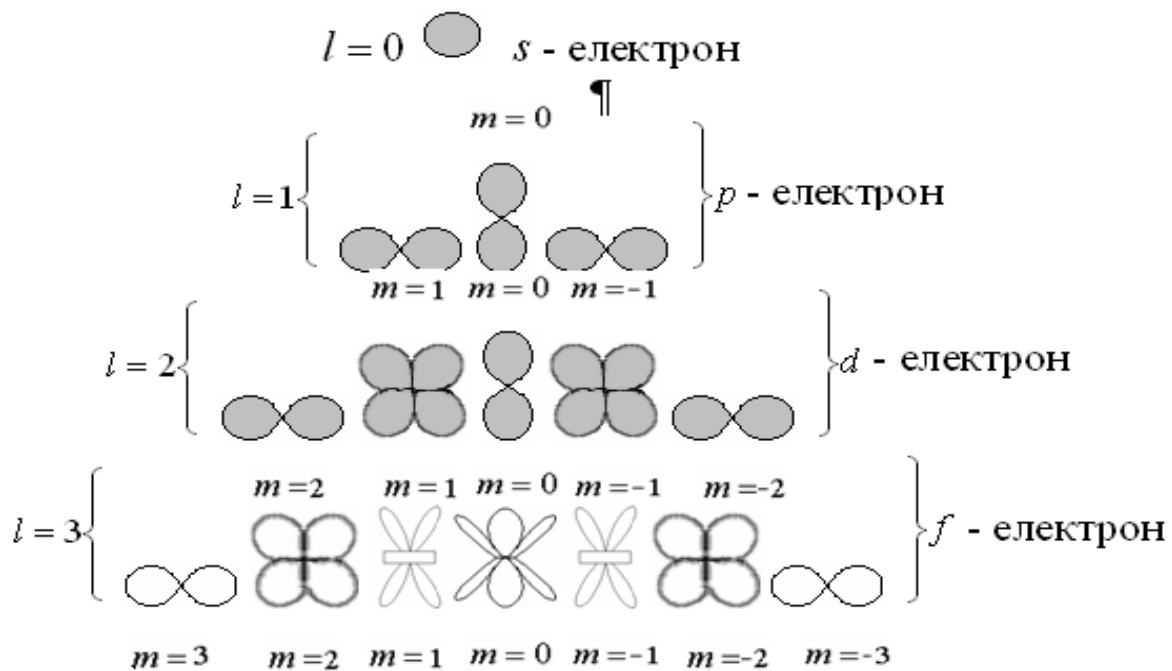


Рис. 145

### Лекція 33. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

§147. Закони збереження в квантовій механіці та їх зв'язок з фундаментальними властивостями часу і простору.

§148. Парність станів.

[1. §2.1-§2.3; 2. §32-§34]

#### §147. Закони збереження в квантовій механіці та їх зв'язок з фундаментальними властивостями часу і простору

Розглянемо існуючі в квантовій механіці деякі універсальні інтеграли руху, а саме: закони збереження енергії, кількості руху і моменту кількості руху, які є наслідками фундаментальних властивостей часу і простору.

Як відомо величина  $L$  буде інтегралом руху, якщо

$$\frac{d\hat{L}}{dt} \equiv 0. \quad (147.1)$$

Оскільки

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + [\hat{H}\hat{L}] \equiv 0. \quad (147.2)$$

Так як  $L$  явно не залежить від часу, то  $\frac{d\hat{L}}{dt} = 0$ . Тоді із виразу (147.2), отримаємо:

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{H}\hat{L}] \equiv 0; \quad (147.3)$$

$$[\hat{H}\hat{L}] = 0. \quad (147.4)$$

Тобто для інтегралів руху, що явно не залежать від часу квантова дужка Пуассона дорівнює нулю. Так як  $[\hat{H}\hat{L}]$  являє собою комутатор оператора  $\hat{L}$  і оператора Гамільтона  $\hat{H}$ , то всяка величина, що явно не залежить від часу буде інтегралом руху, якщо її оператор комутує з оператором  $\hat{H}$ . Таким чином, середнє значення інтегралів руху не залежить від часу

$$\frac{d}{dt}(\bar{L}) = 0. \quad (147.5)$$

Застосуємо умову (147.2) до оператора Гамільтона. Припускаємо  $\hat{L} = \hat{H}$ ,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + [HH] = 0. \quad (147.6)$$

В цьому випадку гамільтоніан співпадає з оператором повної енергії, тобто повна енергія мікрооб'єкта в полі сил, що не залежать від часу є інтегралом руху, що і виражає закон збереження енергії в квантовій механіці.

Поряд з цим в квантовій механіці виконуються закони збереження кількості руху і моменту кількості руху, що є наслідками однорідності та ізотропності простору.

Розглянемо ізолювану квантову систему, тобто систему, що не знаходиться в зовнішньому полі. Для такої системи внаслідок однорідності простору усі її положення еквівалентні, тобто гамільтоніан не повинен змінюватись при перенесенні (зміщенні системи) на довільну відстань. При зміщенні системи як цілого на безмежно малу відстань  $dr$  хвильова функція перетворюється в наступну:

$$\begin{aligned} \psi(\dots, r_k + dr, \dots) &= \psi(\dots, r_k, \dots) + \sum_{k=1}^N \nabla_k \psi(\dots, r_k, \dots) = \\ &= \left[ 1 + dr \sum_{k=1}^N \nabla_k \right] \psi(\dots, r_k, \dots). \end{aligned} \quad (147.7)$$

Оператор Гамільтона при цьому не змінюється, а значить

функція  $H\psi$  в якій уже виконано записане перетворення повинна співпадати з функцією, яка отримується в результаті застосування  $H$  до функції

$$\psi(\dots, r_k + dr, \dots),$$

тобто

$$\left[1 + dr \sum_{k=1}^N \nabla_k\right] H\psi = H \left[1 + dr \sum_{k=1}^N \nabla_k\right] \psi. \quad (147.8)$$

Із довільності вектора  $dr$ , випливає, що оператор суми комутують між собою

$$\left(\sum_{k=1}^N \nabla_k\right) H - H \left(\sum_{k=1}^N \nabla_k\right) = 0. \quad (147.9)$$

Домножимо останню рівність на  $(-i\hbar)$  і врахувавши, що

$$-i\hbar \sum_{k=1}^N \nabla_k = \hat{P}. \quad (147.10)$$

Вираз (147.9) перепишеться:

$$\hat{P}H - H\hat{P} = 0. \quad (147.11)$$

Оскільки оператор імпульсу  $\hat{P}$  комутує з гамільтоніаном, то імпульс являє собою інтеграл руху, що і виражає закон збереження імпульсу.

Простір, в якому існують і рухаються матеріальні об'єкти поряд з однорідністю володіє також ізотропністю, тобто в ньому усі напрями еквівалентні. А значить оператор Гамільтона не повинен змінюватись при повороті системи на довільний кут навколо певної осі. Зміна віддалей при повороті системи на безмежно малий кут  $\varphi$ , знаходиться таким чином:

$$dr_k = [d\varphi r_k]. \quad (147.12)$$

Тоді хвильова функція при такому повороті перетвориться наступним чином:

$$\psi(\dots, r_k + dr, \dots) = \psi(\dots, r_k, \dots) + \sum_{k=1}^N dr_k \nabla_k \psi(\dots, r_k, \dots) =$$

(замість  $dr$  підставимо вираз (147.12))

$$= \psi(\dots, r_k, \dots) + \sum_{k=1}^N [d\varphi r_k] \nabla_k \psi(\dots, r_k, \dots) =$$

$$\begin{aligned}
&= \psi(\dots, r_k, \dots) + d\varphi \sum_{k=1}^N [r_k \nabla_k] \psi(\dots r_k \dots) = \\
&= \left\{ 1 + d\varphi \sum_{k=1}^N [r_k \nabla_k] \right\} \psi(\dots, r_k, \dots). \quad (147.13)
\end{aligned}$$

Аналогічно попередньому випадку, можна записати:

$$\begin{aligned}
&\left\{ 1 + d\varphi \sum_{k=1}^N [r_k \nabla_k] \right\} H\psi(\dots, r_k, \dots) = \\
&= H \left\{ 1 + d\varphi \sum_{k=1}^N [r_k \nabla_k] \right\} \psi(\dots, r_k, \dots). \quad (147.14)
\end{aligned}$$

Звідки випливає, що оператор Гамільтона і оператор

$$\sum_{k=1}^N [r_k \nabla_k]$$

комутують між собою (по скільки  $d\varphi$  довільне), а значить можна записати:

$$\left( \sum_{k=1}^N [r_k \nabla_k] \right) H - H \left( \sum_{k=1}^N r_k \nabla_k \right) = 0. \quad (147.15)$$

Домножимо останню рівність на  $(-i\hbar)$  і врахувавши, що

$$-i\hbar \sum_{k=1}^N [r_k \nabla_k] = \sum_{k=1}^N [r_k \hat{P}_k] = \hat{M}. \quad (147.16)$$

Вираз (147.15) переписеться:

$$\hat{M}H - H\hat{M} = 0. \quad (147.17)$$

Рівняння (147.17) виражає закон збереження кількості руху чи моменту імпульсу. Таким чином, закони збереження імпульсу і моменту імпульсу випливають відповідно із однорідності та ізотропності простору.

## §148. Парність станів

Поряд з цим існує і ще одне перетворення відносно якого оператор Гамільтона залишається інваріантом ізольованої системи. Це перетворення полягає у зміні знаків координат усіх частинок і називається інверсією. Оператор інверсії можна визначити таким чином:

$$\hat{I}\psi(\dots, r_k, \dots) = \psi(\dots, r_k, \dots). \quad (148.1)$$

Інваріантність оператора Гамільтона відносно інверсії означає, що дія оператора інверсії  $\hat{I}$  на  $\psi$  означає:

$$\hat{I}(H\psi) = H(\hat{I}\psi) \quad (148.2)$$

або

$$\hat{I}H - H\hat{I} = 0. \quad (148.3)$$

Тобто оператор інверсії комутує з оператором Гамільтона, а значить йому відповідає деякий інтеграл руху, зміст якого наступний: із останньої рівності випливає, що систему власної функції оператора Гамільтона можна вибрати таким чином, що вона буде одночасно системою власних функцій оператора інверсії. Тоді можемо записати таке рівняння:

$$\hat{I}\psi = \lambda\psi. \quad (148.4)$$

Звідки легко бачити:

$$\hat{I}^2\psi = \psi.$$

Очевидно, що  $\lambda^2 = 1$ , звідки  $\lambda = \pm 1$ , тобто власні значення оператора інверсії приймають тільки два значення. При  $\lambda = 1$ , можна отримати:

$$\hat{I}\psi = \psi.$$

Такі хвильові функції називаються парними.

При  $\lambda = -1$  дія оператора  $\hat{I}\psi = -\psi$ , такі хвильові функції називаються непарними (дія оператора інверсії  $I$  на хвильову функцію  $\psi \rightarrow \hat{I}\psi$ ).

Властивість парності або непарності хвильових функцій також є інтегралом руху, що і виражає закон збереження парності.

## **Лекція 34. МАТРИЧНА ФОРМА КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ**

§149. Оператори і матриці.

§150. Основи теорії представлень.

[1. §15.2; 2. §8-§14; 4. §3.1-§3.5, §4.1-§4.3; 5. §1, §2; 6. §2.1-§2.10; 8. §5, §17-§20]

### **§149. Оператори і матриці**

Розглянутий в попередніх лекціях розрахунковий метод квантової механіки – метод лінійних ермітових операторів є неєдиним

розрахунковим апаратом, що застосовується в квантовій механіці. Як вияснилось, що поряд з операторами всім механічним величинам в квантовій механіці можна співставляти так звані ермітові матриці. Під матрицею  $R$  розуміють сукупність величин, що утворюють таблицю

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}. \quad (149.1)$$

Число стрічок і стовпців в таблиці може в загальному випадку не співпадати. Кожна із величин (взагалі кажучи комплексних), що знаходяться в таблиці, носить назву матричного елемента. Матричний елемент має два індекси – перший означає номер стрічки, другий – номер стовпця.

В подальшому ми побачимо, що в квантовій механіці є можливість геометричної інтерпретації хвильової функції як вектора в деякому уявному просторі. Поки, що за допомогою загальних роздумів переконаємося, що кожному лінійному оператору  $\hat{F}$  може бути співставлена матриця  $F$  з певними значеннями матричних елементів.

Задання оператора означає, що заданий результат дії його на функцію  $\psi(x)$

$$\hat{R}\psi(x) = \varphi(x). \quad (149.2)$$

Знаючи матрицю, яка відповідає величині  $R$  можна знайти і середнє значення цієї величини в деякому стані  $\varphi$ . Маємо:

$$\bar{R} = \int \psi^* \hat{R} \psi dV. \quad (149.3)$$

Підставляючи у вираз (9.1.3) замість  $\psi$  формули представлень

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \sum_m c_m \psi_m(x); \\ \varphi(x) &= \sum_n b_n \psi_n(x), \end{aligned} \right\} \quad (149.4)$$

отримаємо:

$$\bar{R} = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \int \psi_m^* \hat{R} \psi_n dV = \sum_m \sum_n c_m^* R_{mn} c_n. \quad (149.5)$$

Відмітимо, що якщо ми визначимо матричні елементи з виразу

$$R_{lm} = \int \psi_l^*(x) \hat{R} \psi_m(x) dV \quad (149.6)$$

з допомогою хвильових функцій  $\psi_m$ , які є власними функціями оператора  $\hat{R}$ , то ми тим самим визначимо матрицю оператора  $R$  в її власному представленні

$$R_{lm} = \int \psi_m^*(x) \hat{R} \psi_l dV = R_l \int \psi_m^* \psi_l dV = R_l \delta_{ml}. \quad (149.7)$$

Ми бачимо, що в цьому випадку відмінні від нуля лише матричні елементи з  $m = l$ . Матриці такого виду називаються діагональними

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & \dots & \\ R_{21} & R_{22} & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & R_{33} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (149.8)$$

Таким чином, в своєму власному представленні будь-який оператор зображається діагональною матрицею, причому діагональні елементи рівні власним значенням цього оператора.

Задання матричних елементів  $R_{ml}$  повністю еквівалентно заданню оператора  $\hat{R}$ . Воно дозволяє визначити, як ми бачимо, власні значення і власні функції цього оператора. З іншої сторони, якщо відомий оператор  $\hat{R}$ , то можуть бути визначені і матричні елементи  $R_{ml}$ .

Ермітовість оператора  $\hat{R}$  накладає відоме обмеження на вигляд матричних елементів  $R_{ml}$ . Тобто для матричного елемента  $R_{ml}^*$  комплексно спряженого елемент  $R_{ml}$ , маємо:

$$R_{lm}^* = \left( \int \psi_m^* \hat{R} \psi_l dV \right)^* = \int \psi_m \hat{R}^* \psi_l^* dV. \quad (149.9)$$

За визначенням ермітового оператора

$$\int \psi_m \hat{R}^* \psi_l^* dV = \int \psi_l^* \hat{R} \psi_m dV, \quad (149.10)$$

так що

$$R_{ml}^* = R_{lm}. \quad (149.11)$$

Ми бачимо, що із вимог ермітовості оператора витікає властивість матричних елементів

$$R_{lm} = R_{ml}^*, \quad (149.12)$$

що називається *ермітовістю матриці*. Матриця  $\tilde{R}$ , що утворена із матриці  $R$  заміною стрічок на стовпці, називається матрицею транспонованої з вихідної матриці.

І так, кожній фізичній величині в квантовій механіці поряд з ермітовим оператором  $\hat{R}$  можна співставити ермітову матрицю  $R$ ,

матричні елементи якої визначаються формулою (149.6).

Як ми побачимо нижче, що матрична форма квантової механіки в деяких випадках зручніша операторної. Представлення квантової механіки в матричній формі дозволяє нам сформулювати рівняння квантової механіки, які подібні до рівнянь класичної фізики. В них не буде багато разів фігурувати хвильова функція. Самі рівняння за формою будуть співпадати з рівняннями класичної механіки, але з тією лише відмінністю, що в цих рівняннях класичні величини будуть замінені відповідними матрицями.

### §150. Основи теорії представлень

Як відомо, будь-яке явище у мікросвіті виглядає одночасно як корпускулярне і як хвильове, проте такий синтез здійснити наглядно неможливо, жоден прилад не дозволяє побачити обидві картини сумісно. Одна група приладів виявляє тільки корпускулярні - інша тільки хвильові властивості.

Перша група приладів аналізує ансамбль за координатами або за функціями від них ( $x, y, z; F(x, y, z)$ ).

Друга група приладів аналізує ансамбль за імпульсами або за функціями від імпульсів:

$$p_x, p_y, p_z; F(p_x, p_y, p_z).$$

Коротко кажучи стан системи в першому випадку задається в координатному представленні (« $x$ »), в другому - в імпульсному представленні (« $p$ »).

Знайдемо методи переходу від одного представлення до іншого. Нехай в координатному представленні задана хвильова функція:

$$\psi(x, t).$$

Розкладемо її за власними функціями оператора імпульсу  $\psi_p(x)$ , тобто в інтеграл Фур'є:

$$\psi(x, t) = \int c(p, t) \psi_p(x) dp; \quad (150.1)$$

$$c(p, t) = \int \psi(x, t) \psi_p^*(x) dx. \quad (150.2)$$

Якщо відомо  $c(p, t)$ , то згідно виразу (150.1) легко визначити  $\psi(x, t)$ , а тому  $c(p, t)$  розглядають як хвильову функцію в імпульсному представленні, що зображає той самий стан, що і  $\psi(x, t)$ . Таким чином, рівняння (150.1) дає можливість здійснити перехід від

$$\langle\langle p \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle x \rangle\rangle,$$

а рівняння (150.2) від координатного до імпульсного представлення:

$$\langle\langle x \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle p \rangle\rangle.$$

Якщо за основну змінну вибрати енергію, яка приймає дискретні значення  $E_1, E_2, \dots, E_n$  з відповідними власними функціями  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , то розглянуті перетворення приймуть вигляд:

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(x); \quad (150.3)$$

$$c_n(t) = \int \psi(x, t) \psi_n^*(x) dx. \quad (150.4)$$

Формула (150.3) виражає перехід від енергетичного до координатного представлення енергії ( $\langle\langle E \rangle\rangle$ ). Вираз (150.4) описує перехід від координатного до енергетичного представлення.

Знайдемо також вигляд операторів у різних представленнях. До цих пір ми користувались операторами тільки в координатному представленні. Знайдемо вигляд оператора в енергетичному представленні. Нехай в  $\langle\langle x \rangle\rangle$  представленні в нас є оператор  $\hat{L}$ . Для простоти будемо вважати, що енергія системи має дискретний спектр  $E_1, E_2, \dots, E_n$  і відповідає власним функціям  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ . Нехай дія оператора  $\hat{L}$  на хвильову функцію  $\psi(x)$  приводить до утворення хвильової функції  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \hat{L}\psi(x). \quad (150.5)$$

Представимо хвильові функції  $\psi$  і  $\varphi$  у вигляді:

$$\psi(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x); \quad (150.6)$$

$$\varphi(x) = \sum_n b_n \varphi_n(x). \quad (150.7)$$

Якщо дія оператора  $\hat{L}\psi$  приводить до утворення  $\varphi$ , то дія такого оператора  $c_n$  приводить до утворення  $b_n$ . Знайшовши вигляд такого оператора ми тим самим знайдемо вираз для оператора  $\hat{L}$  в енергетичному представленні. Підставивши рівняння (150.6), (150.7) у вираз (150.5), отримаємо:

$$\sum_n b_n \varphi_n(x) = \sum_n c_n \hat{L} \psi_n(x). \quad (150.8)$$

Домножимо вираз (150.8) на  $\varphi_m^*(x)$  і проінтегруємо по всіх значеннях  $x$ . В результаті отримаємо:

$$B_m = \sum_n L_{mn} C_n; \quad (150.9)$$

$$L_{mn} = \int \psi_m^*(x) \hat{L} \psi_n(x) dx, \quad (150.10)$$

де  $L_{mn}$  є оператор  $\hat{L}$  в енергетичному представленні.

Цю сукупність часто записують у вигляді матриці:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1n} \\ L_{21}, L_{22}, \dots, L_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ L_{m1}, L_{m2}, \dots, L_{mn} \end{bmatrix}. \quad (150.11)$$

## Лекція 35. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ В ОБЛАСТІ КВАНТУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ СТАНІВ АТОМА ТА ВИЯВЛЕННЯ СПІНУ ЕЛЕКТРОНА

§151. Досліди Франка-Герца.

§152. Дослід О. Штерна і В. Герлаха.

[1. §13.4, §22.3; 2. §18, §35; 6. §3.7; 8. §13]

### §151. Досліди Франка-Герца

Постулат Бора про квантування стаціонарних станів атома і правило частот (див. §144), знайшли своє експериментальне підтвердження в дослідах Франка-Герца поставлених в 1913 році.

В цих дослідах (рис. 146) вивчалось зіткнення електронів з атомами газів (парами ртуті) методом затримуючого потенціалу.

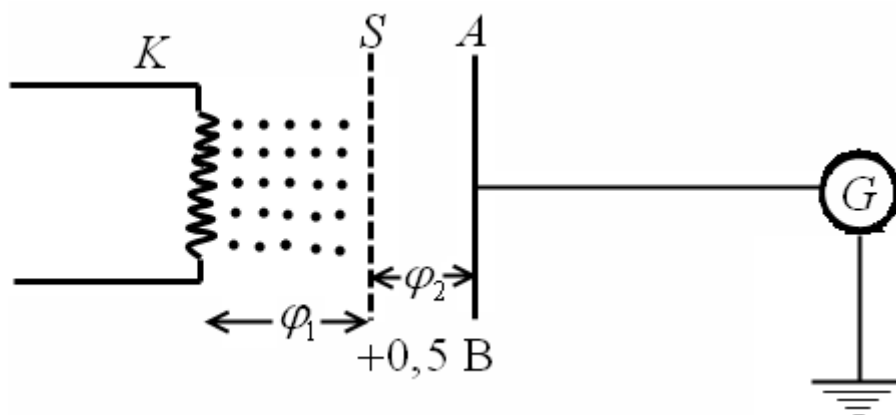


Рис. 146

Розжарений катод  $K$ , сітчастий електрод  $S$  і анод  $A$  з'єднанні з Землею, поміщались в посудину заповнену парами ртуті. Між катодом  $K$  і сіткою створювався прискорюючий потенціал  $\varphi_1$ , а між сіткою і анодом слабке затримуюче поле  $\varphi_2$ . В результаті свого руху електрони

могли зазнавати двояких зіткнень:

а) пружних, в результаті яких енергія електронів не змінюється, а лише відбувається зміна напрямку їх руху.

б) непружних, в результаті яких електрони втрачають енергію внаслідок передачі її атомам ртуті.

Результати дослідів свідчили, що по мірі збільшення енергії електронів, внаслідок їх прискорення до  $e\varphi_1 = 4,86$  еВ електрони зазнають тільки пружних зіткнень і анодний струм при цьому зростає. Як тільки енергія електронів досягла 4,86 еВ наступали не пружні зіткнення. При цьому електрони втрачали свою енергію внаслідок передачі її атомам ртуті, збуджуючи при цьому атоми. Електрони втративши енергію неспроможні подолати затримуюче поле і досягнути анода. Анодний струм при цьому падав. Аналогічні явища спостерігались при енергіях електрона:

$$e\varphi_1 = 2 \cdot 4,86 \text{ еВ}; 3 \cdot 4,86 \text{ еВ}; \dots; n \cdot 4,86 \text{ еВ}.$$

Таким чином, був доведений перший постулат Бора.

Ртутна пара збуджена електронним газом виявилась джерелом ультрафіолетового випромінювання з довжиною хвилі  $\lambda = 2537 \cdot 10^{-10}$  м. Це випромінювання відбувалось при переході атомів ртуті із збудженого в нормальний. Енергія випроміненого при цьому кванта знаходиться:

$$W_2 - W_1 = h\nu. \quad (151.1)$$

Звідки легко визначити частоту цього випромінювання

$$\nu = \frac{W_2 - W_1}{h}. \quad (151.2)$$

Або врахувавши зв'язок між частотою і довжиною хвилі:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

відповідно знайдемо, що

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta W}. \quad (151.3)$$

Отримана згідно цієї формули довжина хвилі співпала з експериментальним значенням.

## §152. Дослід О. Штерна і В. Герлаха

Як відомо орбітальний момент імпульсу електрона  $\vec{L}$  і пропорціональний йому магнітний момент  $\vec{p}_m$  орієнтовані перпендикулярно до площини орбіти електрона і напрямлені в протилежні сторони. Між цими векторами існує такий зв'язок:

$$\vec{L} = -g\vec{p}_m = -\frac{e}{2\mu}\vec{p}_m, \quad (152.1)$$

де  $g$  - гіромагнітне відхилення.

Оскільки в квантовій механіці відсутнє поняття орбіти, то для вказання орієнтації векторів  $\vec{L}$  і  $\vec{p}_m$  необхідно задати деякий напрям у просторі (рис. 147), а тоді орієнтацію названих векторів задавати кутом між обраним напрямом і напрямом відповідного вектора. За такий напрям вибирають напрям зовнішнього магнітного поля.

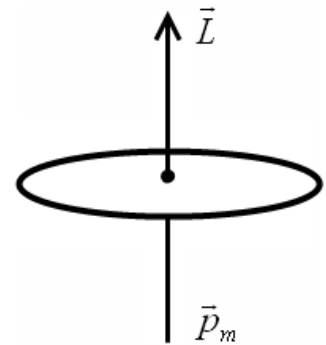


Рис. 147

З класичних позицій орієнтація вектора  $\vec{L}$  (або  $\vec{p}_m$ ) може бути довільною по відношенню до вибраного напрямку. Однак таке припущення виявилось помилковим, що було підтверджено в дослідах Штерна і Герлаха. Досліди проводились за наступною схемою (рис. 148).

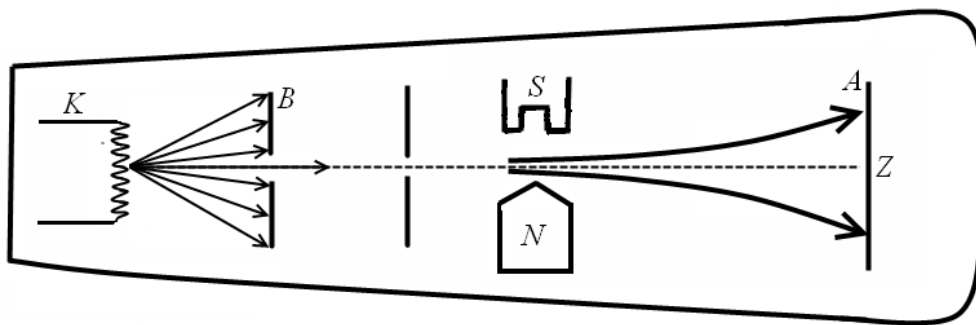


Рис. 148

В трубці де було створено певний вакуум поміщалося джерело пучка атомів. В перших дослідах це була срібна кулька. Атоми срібла вилітали з її поверхні з середньою тепловою швидкістю приблизно 10 м/с. За допомогою системи діафрагм  $B$  вирізався вузький пучок атомів, який пропускався через сильне неоднорідне магнітне поле, напрямлене перпендикулярно до пучка. Неоднорідність повинна бути такою, щоб вона впливала в межах розмірів атома.

Якщо момент імпульсу атома  $\vec{L}$  його магнітний момент  $\vec{p}_m$  могли приймати довільну орієнтацію в магнітному полі, то можна було очікувати неперервного розподілу попадання атомів на фотопластинку (анод  $A$ ) з максимальною густиною в центрі і спадання числа попадань до її країв.

Досліди показали зовсім інші результати. На фотопластинці отримали дві

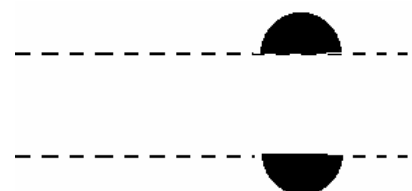


Рис. 149

чіткі смужки (рис. 149), які стверджували те, що атоми двояко відхиляються в магнітному полі, Це свідчить, що можливі дві орієнтації магнітного моменту атома в зовнішньому полі. Ці та інші досліди проведені з атомами інших елементів Періодичної системи переконливо показали просторове квантування моментів імпульсу, тобто, що вони можуть мати лише такі орієнтації в просторі, за яких їх проекції на напрям поля приймають дискретні значення кратні  $\hbar$ .

Другим важливим результатом дослідів Штерна і Герлаха було розщеплення пучка атомів першої групи елементів таблиці Менделєєва, які знаходяться в основному  $s$ -стані, в якому орбітальне квантове число  $l = 0$ . Тоді згідно формули

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (152.2)$$

орбітальний момент імпульсу електрона рівний нулю. Пояснити результати дослідів можна було припустивши, що електрону поряд з орбітальним механічним і магнітним моментами властиві також власний магнітний і механічний моменти  $\vec{L}_s$ ,  $\vec{p}_{ms}$ . Досліди показали також, що власний момент імпульсу  $\vec{L}_s$ , або просто спін електрона може приймати тільки дві орієнтації. Значить проекція спіна на напрям зовнішнього поля квантується по формулі:

$$L_s = m_s \hbar, \quad (152.3)$$

де  $m_s$  - магнітне квантове число, що приймає два значення  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ .

Таким чином, проекція спінового механічного моменту на напрям поля приймає два значення:

$$L_s = \pm \frac{1}{2} \hbar. \quad (152.4)$$

Наглядне значення спіну електрона було дано Кронекером.

## Лекція 36. ТЕОРІЯ ЗБУРЕНЬ

§153. Постановка задачі.

§154. Збурення при відсутності виродження.

§155. Збурення при наявності виродження.

§156. Теорія збурень у випадку, коли збурення залежить від часу.

§157. Випромінювання і поглинання атомами світла.

[2. §45-§58; 4. §6.1-6.4; 5. §6; 8. §39-§41]

### §153. Постановка задачі

Як відомо, квантова механіка дозволяє розв'язати задачу про рух електрона у атомі водню та водневоподібних атомах.

Вияснимо як зміниться енергетичний спектр і хвильові функції електрона, якщо атом помістити в зовнішнє електричне або магнітне поле. Оскільки ці поля значно менші від основного кулонівського поля, то їх дію можна розглядати як деяку малу поправку, яку називають збуренням. Методи розв'язування таких задач дає теорія збурень.

Нехай оператор енергії  $H$ , володіє дискретним спектром (дискретний – складається з різних (окремих) ліній). Запишемо його у вигляді:

$$H = H^0 + \widehat{W}, \quad (153.1)$$

де  $\widehat{W}$  - оператор енергії збурення - ( $W$  - енергія збурення), (малий за величині).

Нехай нам відомі власні значення енергії  $E_n^0$  оператора  $H^0$  та його власні функції  $\psi_n^0$ , тобто

$$H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0. \quad (153.2)$$

Знайдемо власні значення енергії  $E_n$  оператора  $\widehat{H}$  і його власні функції  $\psi_n$ . Для цього необхідно розв'язати таке рівняння:

$$H\psi = E\psi. \quad (153.3)$$

Вираз (153.3) відрізняється від виразу (153.2) членом  $\widehat{W}\psi$ .

Виберемо за основну змінну власні значення енергії  $E_n^0$ , тобто рівняння (153.2) візьмемо в енергетичному представленні. В той же час рівняння (153.1) і (153.3) записані в координатному представленні. Перейдемо і в цих рівняннях до енергетичного представлення (« $E$ »).

Нехай в координатному представленні власні функції оператора  $H^0$  є  $\psi_n^0$ . Розкладемо шукану хвильову функцію за власними функціями  $\psi_n^0$

$$\psi(x) = \sum_n C_n \psi_n^0(x). \quad (153.4)$$

Тоді сукупність усіх  $C_n$  не що інше як функція  $\psi_n$  в енергетичному представленні. Підставимо значення виразу (153.4) в формулу (153.3), домножимо на  $\psi_m^*(x)$  і проінтегруємо по всій області зміни  $x$ . В результаті отримаємо:

$$\sum_n H_{mn} C_n = E C_m, \quad (153.5)$$

де  $H_{mn}$  - матричний елемент оператора  $H$  в « $E$ » представленні. Він має

такий вигляд:

$$H_{mn} = \int \psi_m^*(x) H \psi_n(x) dx. \quad (153.6)$$

Скориставшись виразами (153.1) і (153.2), формулу (153.6) можна переписати:

$$H_{mn} = \int \psi_m^*(x) (H^0 + \widehat{W}) \psi_n(x) dx = \int \psi_m^*(x) H^0 \psi_n(x) dx + \int \psi_m^*(x) \widehat{W} \psi_n(x) dx = E_n^0 \sigma_{mn} + W_{mn}, \quad (153.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{mn} = 1, \text{ коли } n = m; \\ \sigma_{mn} = 0, \text{ коли } n \neq m, \end{array} \right\} \text{ символ Кронекера,}$$

де  $W_{mn}$  - матричний елемент оператора енергії збурення в « $E$ » представленні. Він має такий вигляд:

$$W_{mn} = \int \psi_m^*(x) W \psi_n(x) dx. \quad (153.8)$$

Підставимо формулу (153.7) в (153.5), отримаємо:

$$\sum_n [E_n^0 \sigma_{mn} + W_{mn}] C_n = E C_m. \quad (153.9)$$

Або перенісши всі члени вліво, вираз (153.9) перепишемо у такій формі:

$$[E_m^0 + W_{mn} - E] C_m + \sum_{n \neq m} W_{mn} C_n = 0. \quad (153.10)$$

Врахуємо ступінь малості  $W$ , для цього представимо його у вигляді:

$$W = \lambda \omega, \quad (153.11)$$

де  $\lambda$  - деякий малий параметр.

Формулу (153.11) підставимо в рівняння (153.10), отримаємо:

$$[E_m^0 + \lambda \omega_{mn} - E] C_m + \lambda \sum_{n \neq m} \omega_{mn} C_n = 0, \quad (153.12)$$

де  $C_n$  - хвильова функція в « $E$ » представленні.

Із виразу (153.12) випливає, що при  $\lambda = 0$  і з нього легко отримати вираз (153.2)

$$[E_m^0 - E] C_m = 0, \quad (153.13)$$

що має такі розв'язки:

$$E^0 = E_m^0; C_m^0 = 1. \quad (153.14)$$

Внаслідок малості параметру  $\lambda$  розв'язки рівняння (153.12) будуть близькими до розв'язків рівняння (153.13), тобто вираз (153.14). Виразимо це явно. Для цього представимо власні функції і

власні значення енергії системи, що розглядається, у вигляді степеневих рядів по  $\lambda$

$$C_m = C_m^{(0)} + \lambda C_m^{(1)} + \lambda^2 C_m^{(2)} + \dots, \quad (153.15)$$

$$E = E_m^0 + \lambda E_m^{(1)} + \lambda^2 E_m^{(2)} + \dots. \quad (153.16)$$

При  $\lambda = 0$  співвідношення (153.15) і (153.16) переходять у вираз (153.14).

### §154. Збурення при відсутності виродження

Виявляється, що розв'язки рівняння (153.12) істотно залежать від того, чи вироджена система чи ні.

Як відомо, у випадку невиродженої системи кожному власному значенню енергії відповідає лише одна власна функція. Для розв'язання поставленої задачі в цьому випадку поступають таким чином, підставимо ряди (153.15) і (153.16) в рівняння (153.12) і згрупуємо члени при однакових степенях  $\lambda$ . В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} & [E_m^0 - E^0]C_m^0 + \lambda \left\{ [\omega_{mn} - E^{(1)}]C_m^0 + [E_m^0 - E^0]C_m^{(1)} + \sum_{n \neq m} \omega_{mn} C_n^0 \right\} + \\ & + \lambda^2 \left\{ [\omega_{mn} - E^{(1)}]C_m^{(1)} - E^{(2)}C_m^{(0)} + [E_m^0 - E^0]C_m^{(2)} + \sum_{n \neq m} \omega_{mn} C_n^{(1)} \right\} + \\ & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots = 0. \end{aligned} \quad (154.1)$$

Рівняння (154.1) легко розв'язується методом послідовних наближень. При цьому поступають таким чином, перш за все розв'язують задачу в нульовому наближенні. Це означає, що припускають  $\lambda = 0$  в результаті отримують розв'язки (153.14). Після цього підставляють отримані розв'язки в рівняння (154.1) і розв'язують задачу в першому наближенні. Це означає, що враховують в (154.1) члени при  $\lambda^{(1)}$ , а всі решта при  $\lambda^2$  і вищих порядків прирівнюють до нуля.

### §155. ЗБУРЕННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ВИРОДЖЕННЯ

Дещо інша ситуація у випадку, коли маємо справу з виродженою системою. При наявності виродження, кожному власному значенню енергії відповідає не одна, а декілька власних функцій. При наявності виродження задача ускладнюється, проте методи її розв'язку залишаються тими ж. Розв'язавши цю задачу методом послідовних наближень легко бачити, що при накладанні збурення виродження частково або повністю знімається.

Вияснимо, чим зумовлено зняття виродження при накладанні

збурення. Причина в тому, що енергія електрона в полі центральних сил не залежить від орієнтації моменту імпульсу відносно поля, тобто гамільтоніан такої системи володіє симетрією тіла обертання. Це видно із формули:

$$H^0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + U(r), \quad (155.1)$$

куди входить  $\nabla^2$ , а квадрат вектора не змінюється при повороті. При накладанні збурення, яке не володіє сферичною симетрією, енергія електрона вже буде залежати від орієнтації моменту імпульсу, а значить відбудеться розчеплення енергетичних рівнів. Таким чином, можна зробити висновок, що наявність виродження зв'язана з певною симетрією поля, а злиття виродження з порушенням цієї симетрії. Іншими словами, якщо гамільтоніан  $H^0(x, y, z)$  являється інваріантним по відношенню до деякого перетворення координат

$$x, y, z \rightarrow x', y', z',$$

то власні значення енергії виродженні. Якщо ж тільки збурення, порушує цю інваріантність, то виродження хоча би частково знімається.

## §156. Теорія збурень у випадку, коли збурення залежить від часу

Очевидно, стан системи в цілому ряді випадків змінюється з часом, при чому ці зміни відбуваються внаслідок дії зовнішніх полів або деяких внутрішніх причин. Розглядаючи ці дії як деяке збурення, розглянемо перехід системи із одного стану в інший, тобто розглянемо теорію квантових переходів. В більшості випадків збурення, яке спричиняє перехід системи із одного енергетичного стану в інший залежить від часу  $W(t)$ . Поставлена задача має зміст, якщо збурення діє на скінченному проміжку часу  $t = 0$  до  $t = \tau$ . Для такого випадку рівняння Шредінгера запишеться у вигляді:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H^0(x)\psi + W(x, t)\psi. \quad (156.1)$$

Для знаходження ймовірності переходу системи із енергетичного рівняння  $E_n \rightarrow E_m$  необхідно записати рівняння (156.1) в енергетичному представленні. Для цього розкладемо хвильову функцію  $\psi(x, t)$  за власними функціями оператора  $H^0\psi_k(x)$

$$\psi(x, t) = \sum_k C_k(t) \psi_k(x) e^{-i\frac{E_k t}{\hbar}}. \quad (156.2)$$

Підставимо формулу (156.2) у вираз (156.1). Домножимо отримане рівняння на  $\psi_m^*(x)e^{\frac{iE_m t}{\hbar}}$  і проінтегрувавши по всіх значеннях  $x$ , одержимо:

$$i\hbar \frac{dC_m}{dt} = \sum_k W_{mk}(t) e^{i\omega_{mk}t} C_k(t), \quad (156.3)$$

де

$$W_{mk}(t) = \int \psi_m^*(x) W(x, t) \psi_k(x) dx, \quad (156.4)$$

а  $\omega_{mk} = \frac{E_m - E_k}{\hbar}$  - це борівська частота переходу (електрона) із  $E_m$  на  $E_k$  енергетичний рівень.

Тоді ймовірність переходу системи із одного енергетичного рівня на інший знайдеться:

$$p_{mk}(t) = |C_m(t)|^2. \quad (156.5)$$

Розв'язавши вираз (156.3) методом послідовних наближень можна отримати, що хвильова функція  $C_m$  в першому наближенні має вигляд:

$$C_m^{(1)} = \frac{2\pi}{i\hbar} W_{mk}(\omega_{mk}). \quad (156.6)$$

Значення формули (156.6) підставимо у вираз (156.5) знайдемо ймовірність переходу системи із одного енергетичного стану в інший.

$$p_{mk}(t) = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |W_{mk}(\omega_{mk})|^2. \quad (156.7)$$

Як впливає із аналізу формули (156.7)  $p_{mk}(t) \neq 0$  тільки тоді, коли  $W_{mk}(\omega_{mk}) \neq 0$ , а  $W_{mk}(\omega_{mk}) \neq 0$  тільки тоді, коли  $\omega_{mk} \neq 0$ .

Тобто перехід із одного енергетичного рівня на інший носить резонансний характер, він можливий тільки тоді, коли в спектрі збурення наявна борівська частота, що відповідає даному переходу.

## §157. Випромінювання і поглинання атомами світла

Скориставшись теорією квантових переходів, розглянемо ймовірність того, що під дією світла атом перейде в збуджений стан або навпаки. В першому випадку енергія атома збільшується на величину  $E_m - E_n$  в другому - зменшується на цю величину, де  $E_m$  - енергія збудженого стану,  $E_n$  - енергія нормального стану.

Якщо вважати, що енергія  $E_m - E_n$  взята в електромагнітному полі, то ймовірність переходу із  $E_n \rightarrow E_m$  ототожнюється з ймовірністю поглинання атомами кванта світла  $\hbar\omega = E_m - E_n$ . Це не

протиричить теорії квантових переходів, оскільки перехід можливий тільки тоді, коли в спектрі збурення присутня борівська частота

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}. \quad (157.1)$$

Аналогічно розглядається задача про перехід атома із збудженого стану в основний:  $E_m \rightarrow E_n$ .

Для знаходження ймовірності переходу атома із одного енергетичного рівня на інший необхідно розглянути взаємодію світла з оптичним електроном у атомі.

Розглянемо, поляризоване світло, світловий вектор якого  $\vec{\varepsilon}(x, t)$ . Дія електромагнітного поля на електрон різна в залежності від того чи змінюється поле істотно в межах атома чи ні. Нехай на електрон падає плоска монохроматична хвиля з довжиною  $\lambda$

$$\vec{\varepsilon}(x, t) = \vec{\varepsilon}_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (157.2)$$

де  $\omega_0 = \frac{2\pi x}{\lambda}$ .

Припустимо, що розміри атома  $a$ . Виберемо початок координат в центрі атома, тоді в межах атома фаза хвилі буде змінюватись на величину  $\pm \frac{2\pi a}{\lambda}$ .

1. Якщо розміри атома значно менші від довжини хвилі падаючого світла, то в межах атома зміною фази можна знехтувати і рівняння (157.2) прийме вигляд:

$$\vec{\varepsilon}(x, t) = \vec{\varepsilon}_0 \cos \omega_0 t. \quad (157.3)$$

Воно однакове в усіх точках простору в середині атома, але змінюється з часом. Видиме і ультрафіолетове світло задовольняє такі умові.

2. Зовсім інша ситуація у випадку взаємодії рентгенівського випромінювання з атомами для яких  $\lambda \approx a$ . Дія цих променів значно складніша.

Розглянемо перший випадок. Припускаємо, що в середині атома діє електричне поле, однакове в усіх точках, але залежить від часу

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon(t). \quad (157.4)$$

Це поле виводиться із скалярного потенціалу, таким чином:

$$\varphi(r, t) = -\vec{\varepsilon}r = -(\varepsilon_x x + \varepsilon_y y + \varepsilon_z z). \quad (157.5)$$

При цьому силова функція, що діє на електрон і грає роль збурення приймає вигляд:

$$W(r, t) = -e\varphi = e\vec{\varepsilon}r = -\varepsilon\vec{D}, \quad (157.6)$$

де

$$D = -er \quad (157.7)$$

і називається *електричним моментом електрона*.

Введемо одиничний вектор паралельний напрямку поля:

$$\vec{\varepsilon}(t) = \vec{l}\varepsilon(t). \quad (157.8)$$

Значення виразу (157.8) підставимо в формулу (157.6)

$$W(r, t) = -\varepsilon(t)(l\vec{D}). \quad (157.9)$$

Врахувавши це запишемо рівняння Шредінгера у вигляді:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = H^0(r)\psi + W(r, t)\psi. \quad (157.10)$$

Скориставшись теорією квантових переходів легко отримати, що ймовірність переходу атома із одного енергетичного рівня на інший дорівнює:

$$p_{mk}(t) = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |W_{mk}(\omega_{mk})|^2. \quad (157.11)$$

Експериментально і теоретично доведено, що переходи можливі не між довільними енергетичними рівнями, тобто існують правила відбору, які визначають тільки ті переходи, що насправді реалізуються в практиці. Щоб вибрати реальні переходи із усіх уявних, необхідно дослідити матрицю електричного моменту електрона, що взаємодіє з світловою хвилею, яка для електрона приймає вигляд:

$$\left. \begin{aligned} D_{mk}^x &= -e \int \psi_m^* x \psi_k dx; \\ D_{mk}^y &= -e \int \psi_m^* y \psi_k dy; \\ D_{mk}^z &= -e \int \psi_m^* z \psi_k dz. \end{aligned} \right\} \quad (157.12)$$

Можна показати, що з усіх можливих переходів реалізуються тільки ті для яких матриця електричного моменту відмінна від нуля

$$D_{mk} \neq 0.$$

Проілюструємо це для випадку осцилятора. Нехай осцилятор з масою  $m$ , зарядом  $e$  має власну частоту. Як відомо його квантові рівні знаходяться за формулою:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad (157.13)$$

де  $n = 0, 1, 2, \dots$

Для такого осцилятора елементи матриці електричного моменту дорівнюють

$$D_{mn} = e \cdot x \cdot e^{i\omega_{mnt}} = ex_{mn}e^{i\omega_0(m-n)t}, \quad (157.14)$$

де  $x_{mn}$  - елементи матриці координати,

$$x_{mn} = \int \psi_m^* x \psi_n dx. \quad (157.15)$$

Якщо у вираз (157.15) підставити конкретні вигляди хвильових функцій лінійного гармонічного осцилятора, то можна показати, що інтеграл буде визначений тільки при умові:

$$m = n \pm 1. \quad (157.16)$$

Значить елементи матриці координат відмінні від нуля тільки ті для яких  $m = n \pm 1$ . Таким чином, отримується правило відбору:

$$D_{mn} = 0, \quad (157.17)$$

тільки тоді, коли  $m = n \pm 1$ .

Відповідно отримується, що частоти будуть рівні власній частоті осцилятора.

$$\omega_{mn} = \omega_0(m - n) = \pm \omega_0. \quad (157.18)$$

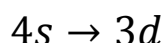
Аналогічно можна показати, що оптичні переходи електронів можливі лише між такими станами, які є сусідніми у відношенні до орбітального моменту:

$$M^2 = \hbar^2 l(l + 1), \quad (157.19)$$

тобто такими, де  $l' - l = \pm 1$ .

Отже, оптичні переходи можливі лише між  $s$  і  $p$  - станом,  $p$  і  $d$  станом,  $d$  і  $f$  станом і так далі. Оскільки, тільки для таких станів матриця  $D_{mn} \neq 0$ .

Відповідно до *правила Клічковського*: заповнення повинні відбутися з меншою енергією, а потім а більшою, тобто  $n = 1, n = 2$  і так далі. Але є відхилення:



Клічковський запропонував таке правило, що треба брати не одне квантове число  $n$ , а суму  $n + l$ . Наприклад:

$$\begin{array}{cc} s & d \\ l = 0; & l = 2; \\ 4 + 0 = 4; & 3 + 2 = 5. \end{array}$$

## Лекція 37. КВАНТОВА МЕХАНІКА СИСТЕМ ОДНАКОВИХ ЧАСТИНОК

§158. Принцип тотожності мікрочастинок.

§159. Частинки Бозе і частинки Фермі (бозони і ферміони).

[1. §36.1; 2. §81-§91; 4. §9.1, §9.3; 5. §10; 6. §3.10, §3.11; 8. §42-

### §158. Принцип тотожності мікрочастинок

Однаковими частинками будемо називати частинки, що мають однакову масу  $\mu$ , заряд  $e$ , спіні  $s$  і так далі. Нехай ми маємо  $N$  однакових частинок, тоді гамільтоніан системи таких частинок можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} H(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_k, \dots, q_N, t) = \\ = \sum_{k=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_k^2 + U(q_k, t) \right] + \sum_{k \neq j=1}^N W(q_k, q_j) \end{aligned} \quad (158.1)$$

Гамільтоніан (158.1) має ту властивість, що він не змінюється при перестановці будь-якої пари частинок. Наприклад, поміняємо координату  $k$ -тої і  $j$ -тої частинок.

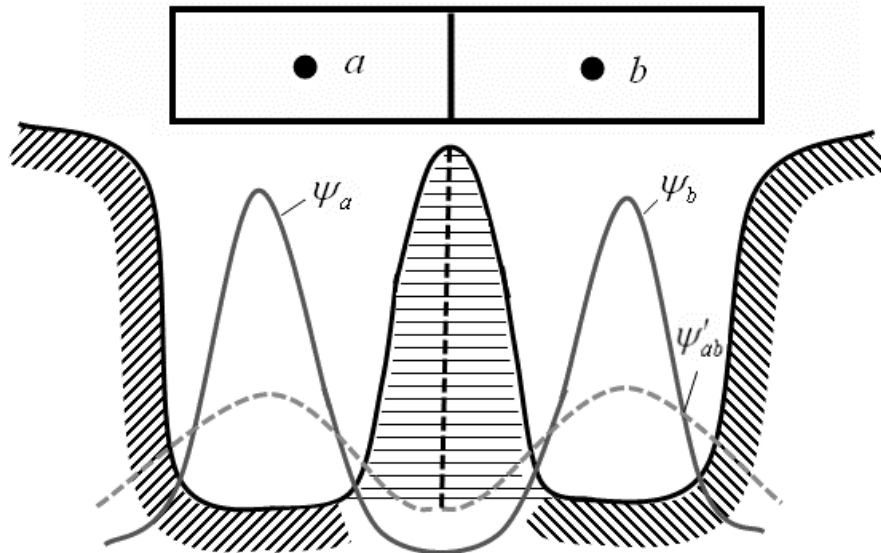
$$\begin{aligned} H(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_k, \dots, q_N, t) = \\ = H(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t). \end{aligned} \quad (158.2)$$

Цю властивість формулюють таким чином: гамільтоніан системи однакових частинок інваріантний відносно перестановки координат будь-якої пари частинок. Розглянемо це на прикладі, (див. рис. 150).

Оскільки при розгляді системи однакових частинок, часто приходиться мати справу з перестановками координат частинок, то вигідно ввести поняття оператора перестановки  $\hat{P}_{kj}$ .

Якщо

$$\begin{aligned} \hat{P}_{kj} \psi(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_k, \dots, q_N, t) = \\ = \psi(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t). \end{aligned} \quad (158.3)$$



Цей оператор належить до лінійних операторів. Він комутує з гамільтоніаном системи однакових частинок.

$$\begin{aligned} \hat{P}_{kj}H(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t) &= \\ &= H(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_k, \dots, t)\hat{P}_{kj}. \end{aligned} \quad (158.4)$$

Нехай хвильова функція системи  $N$  частинок має вигляд:

$$\psi(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t),$$

вона задовольняє рівнянню Шредінгера:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t)}{\partial t} &= \\ &= H(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t) \times \\ &\quad \times \psi(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t). \end{aligned} \quad (158.5)$$

В квантовій механіці показують, що і хвильова функція  $\psi'$

$$\begin{aligned} \psi' &= \hat{P}_{kj}\psi(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_j, \dots, q_N, t) = \\ &= \psi(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_k, \dots, q_N, t), \end{aligned} \quad (158.6)$$

також є розв'язком рівняння Шредінгера, тобто  $\psi'$  визначає один із можливих станів системи. На підставі цього приходиться зробити висновок, що якщо в деякий початковий момент часу при  $t = 0$  ми зафіксували дві частинки в певних положеннях, то зафіксувавши частинку в більш пізній момент часу при  $t > 0$ , ми не можемо визначити чи це перша чи друга частинка, що легко бачити із зробленого раніше рисунка 150. В квантовій області розрізнати однакові частинки за їх станами неможливо. Припускають, що квантові системи побудовані таким чином, що проблема розпізнавання однакових частинок є надуманою, тобто стани однакових частинок завжди такі, що можна говорити лише про стан системи в цілому, а не про розподіл частинок за станами. Це припущення формулюють у вигляді принципу тотожності частинок. З сукупності однакових частинок реалізуються тільки такі стани, які не змінюються при обміні місцями однакових частинок.

## §159. Частинки Бозе і частинки Фермі (бозони і ферміони)

Як бачимо, можливі стани системи із  $\mu$ -однакових частинок описуються такими хвильовими функціями:

$$\psi(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_k, \dots, q_N, t).$$

Легко показати, що за перестановки місцями будь-якої пари частинок ( $kj$ ) ці хвильові функції або залишаються незмінними, або міняють знак на протилежний. Перші називаються симетричними (хвильові функції), другі антисиметричними. Таким чином, квантова механіка приводить до висновку про існування двох класів хвильових функцій, а значить до двох видів частинок. Дослідним шляхом доведено існування обох класів. При цьому виконується таке правило:

1. Частинки, які описуються симетричними хвильовими функціями ( $\psi_S$ ) та мають спін, що рівний цілому числу постійної Планка

$$s = \hbar m,$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots$

Такі частинки називаються *частинками Бозе (бозони)*, а сукупності таких частинок називаються *ансамблями Бозе-Ейнштейна*.

2. Частинки, які описуються антисиметричними хвильовими функціями ( $\psi_a$ ) та мають спін, що рівний півцілому числу постійної Планка

$$s = \hbar m,$$

де  $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

Вони називаються *частинками Фермі (ферміони)*, а сукупність таких частинок носить назву *ансамблю Фермі-Дірака*.

Усі відомі елементарні частинки володіють спіном рівним  $0; \frac{1}{2}; 1$ . Спіном рівним  $\frac{1}{2}$  володіють: електрони, протони, нейтрони, гіперони,  $\mu$  – мезон, нейтрино та їх античастинки. Усі вони являються ферміонами.

Спіном рівним нулю володіють  $\pi$ -мезони і  $k$ -мезони.

Спін рівний 1 має фотон - ці частинки являються бозонами.

Належність більш складної системи до того чи іншого класу частинок визначається числом і класом складових частинок. Наприклад, атом водню, система із двох ферміонів (протона і електрона). Обидва вони мають спін рівний  $\pm \frac{\hbar}{2}$ . Значить сумарний спін атома водню рівний нулю, або  $\pm \hbar$ .

Таким чином, атом водню відноситься до бозонів. Усі ферміони підлягають принципу Паулі.

## Лекція 38. БАГАТОЕЛЕКТРОННІ АТОМИ

§160. Атом гелію

§161. Молекула водню.

§162. Мікрочастинка у зовнішньому магнітному полі.

[1. §20.1, §21.1; 2. §79, §80, §82, §87; 4. §7.5; 6. §3.1, §3.8, §4.1, §4.2; 8. §47, §53, §54]

### §160. Атом гелію

Атом гелію є найбільш простою системою із багатоелектронних атомів. Розглянемо якісний аналіз можливих станів атома гелію. Проаналізуємо вигляд гамільтоніана для електронів атома гелію. Розіб'ємо взаємодії всередині атома гелію на дві групи:

1. Сильна кулонівська взаємодія між електронами і ядром.

2. Слабка магнітна взаємодія спінів електронів між собою та з орбітальним рухом.

Нехай координати електрона  $r_1(x_1, y_1, z_1)$  і  $r_2(x_2, y_2, z_2)$  та спіни електронів  $s_1, s_2$ . Тоді вираз для оператора кулонівської взаємодії приймає вигляд:

$$U = -\frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}. \quad (160.1)$$

Де перші два члена – кулонівська взаємодія з ядром, заряд якого  $+2e$ . Третій член – взаємодія електронів між собою. Позначимо через  $W$  оператор магнітних взаємодій, який залежить від спінів, положення і швидкостей електронів

$$W(s_1, s_2, r_1, r_2, -i\hbar\nabla_1, -i\hbar\nabla_2).$$

Якщо врахувати кінетичну енергію обох електронів, то оператор Гамільтона можна записати у вигляді:

$$H(r_1, r_2, s_1, s_2) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_2^2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} + W. \quad (160.2)$$

При якісному аналізі магнітною взаємодією нехтуємо і вираз (160.2) переписується:

$$H(r_1, r_2, s_1, s_2) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_2^2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}. \quad (160.3)$$

Загалом хвильова функція залежить від

$$\psi(r_1, r_2, s_{z1}, s_{z2}),$$

де  $s_{z1}, s_{z2}$  - проекції спінів на вибраний напрямок  $OZ$ .

Розділимо змінні у хвильовій функції, для чого представимо її у

вигляді:

$$\psi(r_1, r_2, s_{z1}, s_{z2}) = \Phi(r_1, r_2)S(s_{z1}, s_{z2}). \quad (160.4)$$

Оскільки розглянуті електрони є ферміонами, то очевидно вони будуть підлягати принципу Паулі і описуватимуться антисиметричною функцією:

$$\hat{P}_{12}\psi(r_1, r_2, s_{z1}, s_{z2}) = -\psi(r_1, r_2, s_{z1}, s_{z2}). \quad (160.5)$$

Знак мінус (-) ставиться тому, що це антисиметрична хвильова функція.

Вираз (160.4) підставимо у формулу (160.5)

$$\hat{P}_{12}\Phi(r_1, r_2)S(s_{z1}, s_{z2}) = -\Phi(r_1, r_2)S(s_{z1}, s_{z2}). \quad (160.6)$$

Представимо оператор перестановки  $\hat{P}_{12}$  у вигляді добутку двох операторів, один з яких буде

$$\hat{P}_{12} = \hat{P}'_{12}\hat{P}''_{12} \quad (160.7)$$

переставляти координати, а другий спіни.

Перепишемо вираз (160.6) з урахуванням виразу (160.7)

$$\hat{P}'_{12}\Phi(r_1, r_2)\hat{P}''_{12}S(s_{z1}, s_{z2}) = -\Phi(r_1, r_2)S(s_{z1}, s_{z2}). \quad (160.8)$$

Звідси виникають дві можливості:

1.

$$\begin{cases} \hat{P}'_{12}\Phi(r_1 r_2) = +\Phi(r_1 r_2); \\ \hat{P}''_{12}S(s_{z1} s_{z2}) = -S(s_{z1} s_{z2}). \end{cases} \quad (160.9)$$

2.

$$\begin{cases} \hat{P}'_{12}\Phi(r_1 r_2) = -\Phi(r_1 r_2); \\ \hat{P}''_{12}S(s_{z1} s_{z2}) = +S(s_{z1} s_{z2}). \end{cases} \quad (160.10)$$

Тобто можливість станів електронів в атомі гелію описується за допомогою двох хвильових функцій:

$$\psi_1 = \Phi_S(r_1 r_2)S_A(s_{z1} s_{z2}); \quad (160.11)$$

$$\psi_2 = \Phi_A(r_1 r_2)S_S(s_{z1} s_{z2}). \quad (160.12)$$

Таким чином, стани симетричні в координатах центрів ваги електронів - це стани з сумарним спіном рівним нулю, а стани антисиметричні в координатах центрів ваги електронів - це стани з паралельними спінами, де сумарний спін рівний одиниці.

Ситуація така, ніби існує два сорти гелію: з паралельними і антипаралельними спінами. Перший називають ортогелієм, а другий парагелієм.

Запишемо рівняння Шредінгера для знаходження можливих станів електронів в атомі гелію

$$H(r_1, r_2, s_{z1}, s_{z2})\psi(r_1, r_2, s_{z1}, s_{z2}) = E\psi(r_1, r_2, s_{z1}, s_{z2}). \quad (160.13)$$

Знехтувавши спіноюю взаємодією, вираз (160.13) перепишемо:

$$H(r_1, r_2)\Phi(r_1, r_2) = E\Phi(r_1, r_2), \quad (160.14)$$

де оператор Гамільтона  $H(r_1, r_2)$  має вигляд:

$$H(r_1, r_2) = H^0(r_1, r_2) + W(r_{12}). \quad (160.15)$$

Або в явному вигляді рівняння (160.15) можна переписати:

$$H(r_1, r_2) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_2^2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} = H^0(r_1) + H^0(r_2); \quad (160.16)$$

$$W(r_{12}) = \frac{e^2}{r_{12}}. \quad (160.17)$$

Енергію взаємодії електронів між собою  $W(r_{12})$  будемо вважати як деяку малу поправку. Вказана задача розв'язується методом послідовних наближень. В ролі нульового наближення візьмемо рух невзаємодіючих електронів. Нехай в початковий момент часу перший електрон знаходився в стані  $\psi_n(r_1)$  з енергією  $E_n$ , а другий  $\psi_m(r_2)$  з енергією  $E_m$ . Тоді в ролі нульового наближення виберемо хвильову функцію у вигляді, яка належить рівню  $E_n + E_m$ :

$$\psi_1(r_1 r_2) = \psi_n(r_1)\psi_m(r_2). \quad (160.18)$$

Справді

$$\begin{aligned} H^0(r_1 r_2)\psi_1(r_1 r_2) &= H^0(r_1)\psi_n(r_1)\psi_m(r_2) + H^0(r_2)\psi_n(r_1)\psi_m(r_2) = \\ &= E_n\psi_n(r_1)\psi_m(r_2) + E_m\psi_n(r_1)\psi_m(r_2) = \\ &= (E_n + E_m)\psi_n(r_1)\psi_m(r_2) = (E_n + E_m)\psi_1(r_1 r_2). \end{aligned} \quad (160.19)$$

В розгорнутій формі, тобто

$$H^0(r_1 r_2)\psi_1(r_1 r_2) = (E_n + E_m)\psi_1(r_1 r_2). \quad (160.20)$$

Правда енергії  $E_n + E_m$  відповідає ще інший стан, коли перший електрон знаходиться в стані  $\psi_m(r_1)$  з енергією  $E_m$ , а другий в стані  $\psi_n(r_2)$  з енергією  $E_n$ . Цей стан описується такою хвильовою функцією:

$$\psi_2(r_1 r_2) = \psi_m(r_1)\psi_n(r_2). \quad (160.21)$$

Тоді отримується:

$$H^0(r_1 r_2)\psi_2(r_1 r_2) = (E_n + E_m)\psi_2(r_1 r_2). \quad (160.22)$$

Таким чином, стану  $E_n + E_m$  відповідає два різних стани електронів, які відрізняються обміном місцями електронів. Врахувавши взаємодію електронів між собою і застосувавши метод послідовних наближень, отримуємо такі два розв'язки рівняння Шредінгера в першому наближенні:

$$\Phi_S(r_1 r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2); \quad E_n + E_m + k + A; \quad (160.23)$$

$$\Phi_A(r_1 r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2); \quad E_n + E_m + k - A. \quad (160.24)$$

Поправка до енергії  $k$  в формулах (160.23) і (160.24) враховує

кулонівську взаємодію між електронами. Поправка до енергії  $A$  в формулах (160.23) і (160.24) враховує так звану енергію обмінної взаємодії. Обмінна енергія зовсім незв'язана спеціально з кулонівською взаємодією електронів. Якщо припустити будь-яку іншу взаємодію, то в результаті теоретичних розрахунків обов'язково отримуємо поправку на обмінну взаємодію. Обмінна взаємодія не має аналога в класичній фізиці, це чисто квантове явище. Воно зумовлене тим, що електрони міняються станами, тобто, якщо в початковий момент часу при  $t = 0$  перший електрон був в стані  $\psi_n$ , а другий в  $\psi_m$ , то через час

$$\tau = \frac{\pi \hbar}{2A}, \quad (160.25)$$

де  $A$  - та сама поправка.

Перший електрон перейде в  $\psi_m$ , а другий в  $\psi_n$  і так далі.

### §161. Молекула водню

Щоб розглянути причину утворення молекули водню із двох нейтральних атомів, необхідно розрахувати потенціальну енергію атомів як функцію віддалі між центрами атомів (рис. 151).

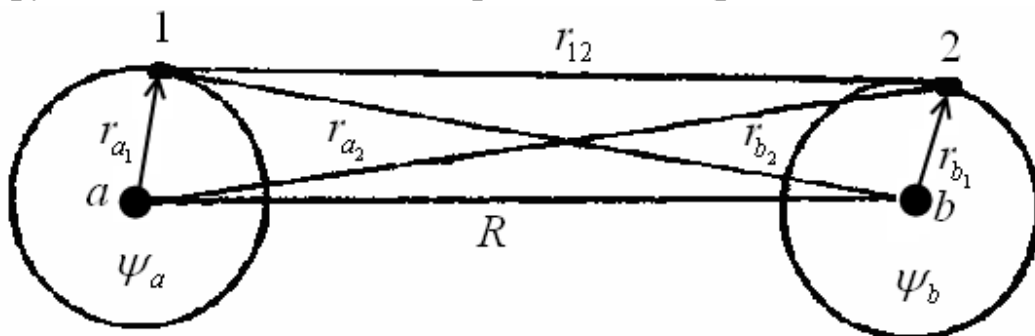


Рис. 151

Потенціальна енергія  $U(R)$  складається із енергії взаємодії між ядрами та енергії взаємодії між електронами.

$$U(R) = \frac{e^2}{R} + E(R), \quad (161.1)$$

де

$$E(R) = 2E_0 + \varepsilon(R), \quad (161.2)$$

де  $E(R)$  - знаходиться із рівняння Шредінгера як власне значення оператора Гамільтона,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_2^2 - \frac{e^2}{r_{a1}} - \frac{e^2}{r_{b2}} - \frac{e^2}{r_{a2}} - \frac{e^2}{r_{b1}} + \frac{e^2}{r_{12}}, \quad (161.3)$$

Оператори кінетичної енергії	Потенціальна енергія 1-електрона в полі ядра $a$	Потенціальна енергія 2-електрона в полі ядра $b$	Потенціальна енергія 2-електрона в полі ядра $a$	Потенціальна енергія 1-електрона в полі ядра $b$
------------------------------	--	--	--	--

де  $\frac{e^2}{r_{12}}$  - потенціальна енергія взаємодії електронів між собою.

Щоб визначити  $E(R)$  розв'язують таке рівняння Шредінгера:

$$H\Phi = E\Phi. \quad (161.4)$$

Далі розбиваючи гамільтоніан на дві частини так як ми це робили в випадку атома гелію і нехтуючи взаємодією першого електрона з ядром і другого електрона з ядром  $a$ , а також взаємодією електронів між собою, отримаємо два розв'язки рівняння Шредінгера, що відповідає значенню енергії електронів  $2E_0$ :

$$\psi_1(r_1 r_2) = \psi_a(r_{a1})\psi_b(r_{b2}); \quad (161.5)$$

$$\psi_2(r_1 r_2) = \psi_a(r_{a2})\psi_b(r_{b1}). \quad (161.6)$$

Якщо ж врахувати взаємодію між атомами і скористатись теорією збурень, то в першому наближенні можемо отримати такі два розв'язки:

- перший розв'язок

$$\Phi_S = \psi_1 + \psi_2 \quad (161.7)$$

і цей розв'язок відповідає такій енергії:

$$E_S = 2E_0 + \frac{k + A}{1 + S^2}; \quad (161.8)$$

- другий розв'язок

$$\Phi_A = \psi_1 - \psi_2, \quad (161.9)$$

$$E_A = 2E_0 + \frac{k + A}{1 - S^2}, \quad (161.10)$$

де

$$S^2 = \int \psi_1 \psi_2 dV_1 dV_2.$$

З курсу загальної фізики відомо, що спектр випромінювання атомарного водню має вигляд (див. рис. 152). Як показує дослід, спектр атомарного водню, світіння якого збуджується в розрядній трубці при низькому тиску, є лінійчастим з деякою правильною послідовністю спектральних ліній – лінії спектра згущуються з наближенням граничної довжини хвилі, що дорівнює 365 нм.

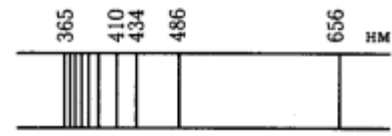


Рис. 152

## §162. Мікрочастинка у зовнішньому магнітному полі

Розглянемо атом з одним валентним електроном в зовнішньому однорідному магнітному полі. Значить електрон в атомі буде підлягати одночасній дії зовнішнього магнітного поля, а також електричного поля ядра та інших електронів. Для такого випадку рух електрона описується відомим рівнянням Паулі:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + U(x, y, z) \psi - \frac{i\hbar e}{2\mu c} H \left( x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{e^2}{8\mu c} H^2 (x^2 + y^2) \psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} (\delta_z H) \psi, \quad (162.1)$$

де  $H$  - напруженість магнітного поля;  $\delta_z$  - спінова матриця.

Для малих полів доданком, що містить  $H^2$  можна знехтувати, а також врахувавши, що

$$i\hbar \left( y \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = M_z, \quad (162.2)$$

отримаємо:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + U(x, y, z) = M^0. \quad (162.3)$$

Гамільтоніан для електрона можна записати у вигляді:

$$H = H^0 + \frac{eH}{2\mu c} (M_z + \hbar \delta_z) = H^0 + \frac{eH}{2\mu c} (M_z + 2S_z). \quad (162.4)$$

Записаний гамільтоніан внаслідок мультиплексної структури спектру треба ще доповнити членом, який б враховував би спін або орбітальну взаємодію, а також залежність маси електрона від швидкості

$$W = W^0 \left( x, y, z, S_z, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (162.5)$$

Ввівши позначення

$$W = \frac{eH}{2\mu c} (M_z + 2S_z). \quad (162.6)$$

Тоді гамільтоніан можна записати:

$$H = H^0 + W^0 + W. \quad (162.7)$$

Розглядають два випадки:

1. Коли магнітне поле велике:

$$W > W^0.$$

2. Коли магнітне поле мале:

$$W < W^0.$$

Розглянемо перший випадок, який носить назву нормального ефекту Зеймана. Будемо розглядати дію магнітного поля як потенціальну енергію магнітного диполя

$$U' = \frac{eH}{2\mu c} (M_z + 2S_z). \quad (162.8)$$

Знайдемо стаціонарний стан. Перепишемо рівняння (162.1) знехтувавши вище згаданими членами

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H^0 \psi + \frac{eH}{2\mu c} (M_z + \hbar \delta_z) \psi. \quad (162.9)$$

Представимо хвильову функцію у вигляді:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \quad (162.10)$$

Підставимо вираз (162.10) у формулу (162.9), отримаємо:

$$H^0 \psi + \frac{eH}{2\mu c} (M_z + \hbar \delta_z) \psi = E \psi. \quad (162.11)$$

Візьмемо представлення в якому матриця  $\delta_t$  – діагональна:

$$\delta_z \psi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +\psi_1 \\ -\psi_2 \end{vmatrix}. \quad (162.12)$$

В цьому випадку (162.11) розпадається на два рівняння:

$$H^0 \psi_1 + \frac{eH}{2\mu c} (M_z + \hbar) \psi_1 = E \psi_1; \quad (162.13)$$

$$H^0 \psi_2 + \frac{eH}{2\mu c} (M_z - \hbar) \psi_2 = E \psi_2. \quad (162.14)$$

Розв'язок цих рівнянь отримується досить легко, якщо врахувати, що за відсутності магнітного поля ми мали такі два розв'язки:

$$\psi'_{nlm}; \quad E_{nl} = E_{nl}^0; \quad S_z = +\frac{\hbar}{2}; \quad (162.15)$$

$$\psi''_{nlm}; \quad E_{nl} = E_{nl}^0; \quad S_z = -\frac{\hbar}{2}. \quad (162.16)$$

Пам'ятаючи, що

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (162.17)$$

а також

$$M_z \psi = \hbar m \psi \quad (162.18)$$

та підставивши розв'язки рівнянь (162.15) і (162.16) в рівняння (162.13) і (162.14), отримаємо такі два розв'язки:

$$\psi'_{n,l,m}; \quad E'_{nlm} = E_{nl}^0 + \frac{e\hbar H}{2\mu c} (m + 1); \quad S_z = +\frac{\hbar}{2}; \quad (162.19)$$

$$\psi''_{n,l,m}; \quad E''_{nlm} = E_{nl}^0 + \frac{e\hbar H}{2\mu c} (m - 1); \quad S_z = -\frac{\hbar}{2}. \quad (162.20)$$

Як бачимо, енергія залежить від орієнтації моменту відносно поля (магнітного), тобто співпадаючи у відсутності магнітного поля енергетичні рівні при накладанні поля розщеплюються. Внаслідок розщеплення збільшується число можливих переходів, а значить, число спостережуваних спектральних ліній (рис. 153). Це явище носить назву *нормального ефекту Зеемана*.

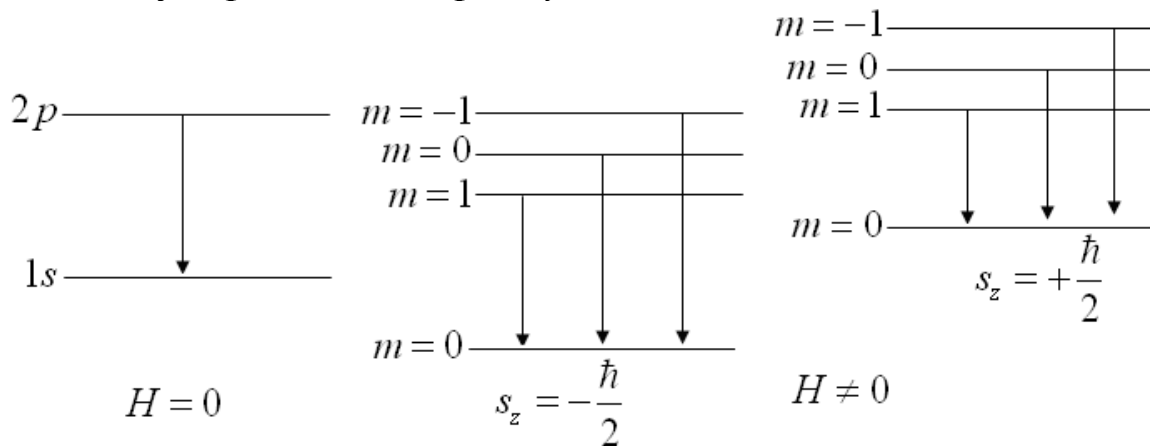


Рис. 153

Частоти розглядуваних переходів визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} \omega_{n'l'm'n''l''m''} &= \frac{E_{n''l''m''} - E_{n'l'm'}}{\hbar} = \\ &= \frac{E_{n''l''}^0 - E_{n'l'}^0}{\hbar} + \frac{eH}{2\mu c} (m'' - m'). \end{aligned} \quad (162.21)$$

Якщо власна частота переходу  $\omega_0$ , то вираз (162.21) можна переписати

$$\omega = \omega_0 + \frac{eH}{2\mu c} (m'' - m'). \quad (162.22)$$

Оскільки  $m'' - m'$  може приймати значення 0 або  $\pm 1$ , то після накладання магнітного поля отримується три частоти (три лінії): одна

незміщена, а дві зміщенні на величину  $\pm \frac{eH}{2\mu c}$ .

## ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТА ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ З КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

1. Філософські проблеми квантової механіки. Межі її застосування.
2. Теплове випромінювання та його закони. Закон Кірхгофа.
3. Закономірності фотоефекту. Фотони.
4. Ефект Комптона та його властивості.
5. Хвильові властивості частинок. Гіпотеза де Бройля.
6. Дифракція електронів. Статистичне тлумачення хвиль де Бройля.
7. Моделі в квантовій механіці. Принцип доповненості Бора.
8. Лінійні та ермітові оператори.
9. Спектри значень фізичних величин. Власні значення і власні функції операторів.
10. Комутація операторів. Гільбертів простір хвильових функцій.
11. Ймовірність результатів вимірювання. Середні значення фізичних величин.
12. Оператори координати, імпульсу, моменту імпульсу й енергії мікрооб'єкта. Перестановочні співвідношення Гейзенберга.
13. Хвильова функція та квантово-механічний принцип суперпозиції.
14. Ймовірнісний характер поведінки мікрооб'єктів: густина ймовірності та умова нормування хвильових функцій.
15. Співвідношення невизначеності Гейзенберга.
16. Принцип причинності в квантовій механіці. Загальне рівняння Шредінгера.
17. Стаціонарні стани. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів.
18. Зміна механічних величин з часом. Квантові рівняння Гамільтона.
19. Рух вільної частинки. Рівняння Шредінгера для цього випадку.
20. Рух частинки в потенціальній ямі з безмежно високими стінками. Квантування енергії частинки в потенціальній ямі.
21. Лінійний гармонічний осцилятор з точки зору квантової механіки. Енергія та хвильові функції лінійного гармонічного

осцилятора.

22. Тунельний ефект. Потенціальний бар'єр. Прозорість потенціального бар'єру.

23. Експериментальне підтвердження тунельного ефекту. Явище холодної емісії електронів.

24. Зв'язок енергетичного спектру з видом потенціалу. Залежність енергетичного спектра мікрооб'єкта від вигляду потенціалу.

25. Дискретність станів мікрооб'єктів. Лінійчасті спектри. Постулати Бора.

26. Рух мікрооб'єкта в центрально-симетричному полі. Енергетичні спектри електрона та вільної частинки, що рухаються у цьому полі.

27. Рух електрона в кулонівському полі ядра. Квантові числа.

28. Закони збереження в квантовій механіці. Інтеграл руху. Парність станів.

29. Матрична форма квантової механіки. Оператори і матриці.

30. Основи теорії представлень. Оператори в координатному та енергетичному представленні.

31. Експериментальні дослідження в області квантування стаціонарних станів та виявлення спіну електрона. Досліди Франка-Герца та О. Штерна і В. Герлаха.

32. Постулати Бора: постулат стаціонарних станів (правило квантування орбіт); правило частот.

33. Теорія збурень. Постановка задачі. Збурення при відсутності виродження та збурення при наявності виродження.

34. Теорія збурень, що не залежить від часу. Випромінювання і поглинання атомами світла.

35. Електричний момент електрона. Правило Клічковського.

36. Принцип тотожності частинок. Симетричні та антисиметричні стани.

37. Хвильові функції систем бозонів та ферміонів. Принцип Паулі.

38. Атом гелію. Ортогелій, парагелій.

39. Рівняння Шредінгера для знаходження можливих станів електронів в атомі гелію.

40. Молекула водню. Спектр атома водню та воднеподібних атомів.

41. Мікрочастинка в зовнішньому магнітному полі. Нормальний

ефект Зеємана.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА З КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

### Квантова механіка

1. Акоста В., Кован К., Грэм Б. Основы современной физики. / Пер. с англ. В.В. Толмачёва, В.Ф. Трифонова; Под ред. А.Н. Матвеева. - М.: Просвещение, 1981. – 495 с.
2. Вакарчук І.О. Квантова механіка: підручник. Вид. 4-е, доп. - Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2012. - 872 с.
3. Глауберман А.Ю., Манакін Л.О. Фізика атома та квантова механіка. - К.: Вища школа, 1972. – 291 с.
4. Кобушкін О.П. Квантова механіка: Навчальний посібник. – Київ: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2016. – 253 с.
5. Клубіс Я.Д., Шкатуляк Н.М. Деякі питання квантової механіки: Навчальний посібник для студентів та магістрантів фізичних спеціальностей. Одеса, 2018. 220 с.
6. Конспект лекцій з дисципліни «Квантова механіка» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 104 «Фізика та астрономія» / укл. С.В. Губарев. Кам'янське: ДДТУ, 2020. 100 с.
7. Хунд Ф. История квантовой теории. – К.: Наукова думка, 1980. – 244 с.
8. Юхновський І.Р. Основи квантової механіки: Навчальний посібник. Вид. 2-ге, перероб і доп. - К.: Либідь, 2002. – 392 с.

## Предметний покажчик

- абсолютність просторових інтервалів 20  
абсолютність часових інтервалів між подіями 20
- бар'єр потенціальний 73  
бінормаль 30  
бозони 346
- варіація 94  
варіація ізохронна 118  
варіювання 94  
вектор густини струму чотиривимірний 209  
вектор елементарного переміщення 22  
вектор енергії чотиривимірний 185  
вектор зовнішніх сил головний 59  
вектор імпульсу чотиривимірний 180, 185  
вектор переміщення 22  
вектор потенціалу чотиривимірний 209  
вектор прискорення чотиривимірний 177  
вектор Умова-Пойтінга 206, 257, 264  
вектор хвильовий 254  
вектор чотиривимірний 173, 215  
вектор швидкості 24  
вектор швидкості чотиривимірний 177  
вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , як змінні стани електромагнітного поля 199, 268  
взаємодія електромагнітна 188  
взаємозв'язок між масою та енергією тіла 184  
вивід рівнянь Лагранжа з принципу Остроградського-Гамільтона 123  
вимірювання електричного диполя Герца 261  
вимірювання зарядів і струмів дипольне 259  
випромінювання атомами світла 341  
відносність відстані 161  
відносність поняття заряду і струму 210  
відносність часу 161  
відстань прицільна (прицільний параметр) 86  
вісь обертання 35  
властивості світла квантові 276  
властивості частинок хвильові 281
- гіпотеза де Бройля 281  
гіпотеза Максвелла про струм зміщення 194  
густина електричного заряду 195  
густина електричного струму 195, 232  
густина енергії електромагнітного поля об'ємна 206, 229  
густина енергії магнітного поля об'ємна 250  
густина потоку енергії 206  
густина потоку енергії для плоских хвиль 256
- декремент згасання 141  
декремент згасання логарифмічний 141  
детермінізм класичний 285  
дефект мас 184  
динаміка 17, 39  
дифракція електронів 281  
дифракція електронів на двох щілинах 283  
дія електричного та магнітного полів на заряди 196  
дослід Штерна і Герлаха 334  
дослідження руху частинки в центральній-симетричному полі 79  
досліди Девісона і Джермера 282

досліди Франка-Герца 333  
 дужка Пуассона квантова 297  
 дужки Пуассона 117

елементи варіаційного числення 118  
 енергія електромагнітного поля 206, 229  
 енергія зв'язку системи 185  
 енергія кінетична руху точок системи відносно центра мас 63  
 енергія кінетична системи через її узагальнені швидкості 107  
 енергія кінетична точок системи відносно нерухомої системи координат 63  
 енергія кінетична точок системи разом з центром мас 63  
 енергія магнітного поля 252  
 енергія потенціальна 56-57  
 енергія релятивістська 184  
 енергія системи нерухомих зарядів 227  
 енергія частинки потенціальна 51  
 ефект Доплера в оптиці 218  
 ефект Доплера поздовжній 218  
 ефект Доплера поперечний 218  
 ефект Зеємана нормальний 355  
 ефект Комптона 279  
 ефект тунельний 305

задача двох тіл 74  
 задача динаміки обернена (основна) 45  
 задача динаміки пряма 45  
 задача Ціолковського друга 129  
 задача Ціолковського перша 128  
 закон Біо-Савара-Лапласа 191, 238  
 закон Віна 276, 277  
 закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі 234  
 закон Джоуля-Ленца за наявності сторонніх ЕРС 237  
 закон додавання швидкостей 163  
 закон електромагнітної індукції узагальнений у диференціальній формі 248  
 закон електромагнітної індукції фарадея 246  
 закон збереження електричних зарядів 191, 195, 234  
 закон збереження енергії в електромагнітному полі 206  
 закон збереження зарядів у СТВ в коваріантній формі 210  
 закон збереження імпульсу для замкненої системи 60  
 закон збереження моменту імпульсу 67, 70  
 закон збереження повної механічної енергії 58  
 закон зміни маси 127  
 закон Кірхгофа 276  
 закон Кулона 190  
 закон Ньютона другий в СТВ 181  
 закон обертання твердого тіла навколо нерухомої осі 36  
 закон Ома в диференціальній формі 233  
 закон Ома за наявності сторонніх ЕРС 237  
 закон площ (другий закон Кеплера) 68  
 закон Релея-Джинса 277  
 закон Фарадея 192  
 закони збереження в квантовій механіці 324  
 закони збереження в релятивістській механіці 187  
 закони Ньютона 42-43  
 закони руху матеріальної точки 23  
 заряд електричний та його властивості 195  
 заряди вільні та зв'язані 265  
 зв'язки 91  
 зв'язки голономні 91  
 зв'язки ідеальні 98  
 зв'язки неголономні 91  
 зв'язки нестационарні 91  
 зв'язки реальні 98  
 зв'язки стаціонарні 91

- зв'язок енергетичного спектру з  
видом потенціалу 308
- зв'язок законів збереження в  
квантовій механіці з  
фундаментальними  
властивостями часу і простору  
324
- зміна механічних величин з часом  
296
- змінні канонічні 113
- змінні лагранжеві 113
- зміст фізичний функції Гамільтона  
115
- зображення механічних величин  
операторами 286
- зона ближня 262
- зона далека 263
- імпульс (кількість руху) системи  
матеріальних точок 58
- імпульс електромагнітного поля 207
- імпульс тіла в СТВ 179
- імпульси узагальнені консервативної  
механічної системи 111
- інваріантність коливочна 204
- інваріантність просторово-  
часового інтервалу 156
- індукція електромагнітна 192
- інтеграл дії 122
- інтеграл енергії рівнянь Лагранжа  
110
- інтеграли циклічні рівнянь  
Лагранжа 112
- інтенсивність 88
- інтервал просторово-часовий 156
- катастрофа ультрафіолетова 278
- Кеплерова задача 81
- кінематика 17
- коливання вимушені системи з  
однією ступеню вільності 141
- коливання згасаючі 139
- коливання малі механічних систем  
135
- координати узагальнені 71, 95
- координати циклічні 112
- кут повороту 31, 35
- кут розсіювання 87
- кут суміжності 29
- кут тілесний елементарний 89
- маса 40
- маса приведена 76
- маса тіла в СТВ 179
- метод одномірного ефективного  
потенціалу 77
- методи вимірювання маси 40
- методи вимірювання сили 39
- механіка аналітична 91
- мікроструми в речовині 265
- мікрочастинка у зовнішньому  
магнітному полі 352
- моделі абсолютні 285
- моделі відносні 285
- момент дипольний 223
- момент електрона електричний 342
- момент зовнішніх сил відносно  
центра головний 69
- момент імпульсу 65
- момент імпульсу системи  
матеріальних точок 68
- момент імпульсу  $\alpha$ -частинки 87
- момент магнітний 244
- момент магнітний витка з струмом  
244
- момент сил електричного диполя  
механічний 225
- момент сили 65-66
- момент сили, що діє з боку поля на  
електричні заряди 231
- наближення плоских хвиль 262
- напруженість електричного поля  
через електродинамічні  
потенціали 248
- наслідки перетворення Лоренца  
кінематичні 161
- нормаль головна 30
- обертання твердого тіла навколо

нерухомої осі 35  
 область дозволена 73  
 область заборонена 73  
 оператор енергії мікрооб'єкта  
 (частинки) 288  
 оператор імпульсу мікрооб'єкта  
 (частинки) 288  
 оператор координати мікрооб'єкта  
 (частинки) 288  
 оператор моменту імпульсу  
 мікрооб'єкта (частинки) 288  
 оператори і матриці 328  
 оператори лінійні (ермітові) 286  
 оператори самоспряжені (ермітові)  
 286  
 особливості поведінки мікрооб'єктів  
 276  
 осцилятор гармонічний лінійний 301  
 осцилятор одномірний гармонічний  
 137  
  
 парність станів 327  
 переміщення дійсне невільної  
 системи 93  
 переміщення можливе (віртуальне)  
 93  
 переміщення можливі узагальнені 96  
 переріз розсіювання ефективний  
 диференціальний 89  
 перетворення Галілея 41  
 перетворення електричних і  
 магнітних полів за зміни ІСВ 212  
 перетворення енергетичні в коливній  
 системі 137  
 перетворення канонічні 113  
 перетворення координат Лоренца  
 157  
 перетворення координат  
 чотиривимірного вектора сили  
 181  
 перетворення швидкостей в СТВ  
 163  
 площина випрямляюча 28  
 площина нормальна 28  
 площина стична 28  
 поглинання атомами світла 341  
 поле гармонічного осцилятора Герца  
 262  
 поле електричне довільно рухомих  
 зарядів 257  
 поле електромагнітне заряду, що  
 перебуває в рівномірному русі 240  
 поле електромагнітне змінне 198  
 поле електромагнітне  
 квазістаціонарне 245  
 поле електромагнітне у речовині 265  
 поле електростатистичне у  
 дипольному наближенні 222  
 поле магнітне стаціонарне у  
 дипольному наближенні 242  
 поле нестаціонарне силове 51  
 поле однорідне або плоскопаралельне  
 52  
 поле потенціальне 49-50  
 поле струму магнітне 238  
 поле центральньо-симетричне 52  
 постулат про ідеальні зв'язки 98  
 постулати Ейнштейна 154  
 потенціал в системі зарядів на  
 великих віддалях 225  
 потенціал електродинамічний  
 електромагнітного поля 202  
 потенціал магнітного поля  
 векторний 239  
 потенціал системи струмів на  
 великих віддалях векторний 242  
 потенціали електродинамічні  
 запізнювальні 259  
 потенціали електромагнітного поля  
 запізнювальні 258  
 потужність питома тепла 234  
 пояснення аберації світла 217  
 пояснення аберації світла у СТВ 168  
 пояснення досліду Фізо у СТВ 167  
 принцип відносності 42  
 принцип відносності Ейнштейна 154  
 принцип Даламбера 101  
 принцип доповненості 286  
 принцип існування граничної  
 швидкості 155

принцип Лапласівського детермінізму 49  
 принцип можливих переміщень 100  
 принцип найменшої дії 123  
 принцип невизначеності Гейзенберга 292  
 принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції) 40  
 принцип Остроградського–Гамільтона 122  
 принцип причинності в квантовій механіці 294  
 принцип причинності класичної механіки 49  
 принцип суперпозиції електромагнітних полів 199  
 принцип суперпозиції квантово-механічний 291  
 принцип тотожності мікрочастинок 344  
 прискорення кутове 36-37  
 прискорення матеріальної точки 27  
 прискорення нормальне 30  
 прискорення радіальне 32  
 прискорення тангенціальне (дотичне) 30  
 прискорення трансверсальне 32  
 проблема рівноважного теплового випромінювання 276  
 простір в СТВ 155  
 простір евклідовий 20.  
 простір Мінковського чотиривимірний 170  
 радіус кривизни траєкторії 29  
 радіус-вектор матеріальної точки 22  
 реакції зв'язків 98  
 рівняння Гамільтона 115  
 рівняння Гамільтона квантові 297  
 рівняння Даламбера 204, 258  
 рівняння динаміки загальне 100.  
 рівняння Ейлера кінематичне друге 38  
 рівняння Ейлера кінематичне перше 38  
 рівняння електростатики у вакуумі 219  
 рівняння Лагранжа для консервативних систем 106, 112  
 рівняння Лагранжа другого роду 105  
 рівняння Лоренца для мікроскопічного електричного поля 265  
 рівняння Лоренца для мікроскопічного магнітного поля 265  
 рівняння Максвелла 268  
 рівняння Максвелла в диференціальній формі 200  
 рівняння Максвелла для вакууму в коваріантній формі 214  
 рівняння Максвелла магнітостатичного поля 238  
 рівняння матеріальні в речовині 268  
 рівняння Мецгерського 125  
 рівняння монохроматичних плоских електромагнітних хвиль 254  
 рівняння неперервності електричного струму 235  
 рівняння Ньютона в операторній формі 298  
 рівняння Пуассона 204, 220  
 рівняння Пуассона для векторного потенціалу 239  
 рівняння руху матеріальної точки диференціальні 43  
 рівняння руху матеріальної точки кінематичні 23  
 рівняння руху частинки релятивістське 183  
 рівняння хвильові для напруженостей електромагнітного поля 252  
 рівняння Шредінгера для стаціонарних станів 295  
 рівняння Шредінгера загальне робота віртуальна 96, 97  
 робота елементарна 49  
 робота сили 49

розв'язок рівняння Даламбера  
загальний 258

рух вільний 91

рух вільної частинки 298

рух електрона в кулонівському полі  
ядра 319

рух зарядженої частинки в  
кулонівському полі сил 81

рух інфінитний 73

рух механічний 17

рух мікрооб'єкта в центральньо-  
симетричному полі 312

рух мікрооб'єктів в потенціальних  
полях 298

рух одновимірний 71

рух твердого тіла поступальний 33

рух точки змінної маси в середовищі  
з гідравлічним опором 132

рух у полі з центральною симетрією  
308

рух фінітний 73

рух частинки в потенціальній ямі з  
безмежно високими стінками 299

рухливість зарядів 234

сила 39

сила Ампера 196

сила в чотиривимірному просторі  
180.

сила гіроскопічна 52

сила дисипативна 53

сила електричного струму 232

сила інерції 101

сила квазіпружна 137.

сила Лоренца 196

сила потенціальна 52

сила, що діє з боку поля на  
електричні заряди 231

сили внутрішні 53

сили електрорушійні сторонні 236

сили зовнішні 53

сили реакції 97

сили узагальнені 96

система відліку 21

система відліку інерціальна 41

система відліку неінерціальна 41.

система замкнена 53, 60

система матеріальних точок 18

система матеріальних точок  
невільна 91

система механічна 53

система механічна невідільна з  
голономними ідеальними  
зв'язками 102

система нерухомих зарядів у  
зовнішньому електричному полі  
230

системи відліку в СТВ 155

системи механічні консервативні 54

співвідношення Гейзенберга  
перестановочні 289

статика 17

структура поля плоских  
монохроматичних хвиль 256

струм зміщення 249

струм намагніченості 267

струм провідності 267

сума узагальнена віднесеної  
узагальненої координати 97

тензор 174

тензори електромагнітного поля  
210

теорема Діріхле про умови стійкої  
рівноваги 135

теорема Ейлера про однорідні  
функції 109

теорема Кеніга 65

теорема про зміну імпульсу системи  
математичних точок 59

теорема про зміну кінетичної  
енергії 110

теорема про зміну кінетичної  
енергії механічної системи 56

теорема про зміну моменту  
імпульсу 67-68, 70

теорема про зміну повної механічної  
енергії системи 57

теорема про проєкції швидкостей  
точок твердого тіла 34

теорема про рух центра мас  
     системи матеріальних точок 62  
 теореми Еренфеста 298  
 теорія відносності спеціальна 153  
 теорія збурень 336  
 теорія збурень за відсутності  
     виродження 339  
 теорія збурень за наявності  
     виродження 339  
 теорія збурень у випадку, коли  
     збурення залежить від часу 340  
 теорія представлень 331  
 тиск світла 207  
 тіло тверде абсолютно 18  
 тлумачення хвиль де Бройля  
     статистичне 285  
 точка матеріальна 18  
 точка матеріальна вільна 91  
 точки зворотні (точки зупинки  
     системи) 72  
 траєкторія 22  
 тригранник натуральний 28

умова Лоренца в коваріантній формі  
     210  
 умова Лоренца 204  
 умова одночасності виміру двох  
     фізичних величин 288  
 умови граничні 239, 268  
 умови рівноваги голономної системи  
     100  
 усереднення рівнянь Лоренца  
     макроскопічне 267

ферміони 346  
 формула Планка 278  
 формула Резерфорда 90  
 фотоефект 278

фотон 278  
 функція Лагранжа (лагранжіан) 106  
 функція Лагранжа для малих  
     коливань 136  
 функція силова 50  
 функція хвильова 291

характер ймовірнісний поведінки  
     мікрооб'єктів 291  
 характеристики електромагнітних  
     взаємодій 188  
 хвилі електромагнітні 252  
 хвилі електромагнітні плоскі 252  
 хвилі електромагнітні плоскі  
     монохроматичні 254

центр мас 61

час в СТВ 155  
 частинки Бозе 346  
 частинки Фермі 346  
 число квантове головне 300  
 число ступенів вільності 92  
 число ступенів вільності механічної  
     системи 71

швидкість відносна 164  
 швидкість кутова 36-37  
 швидкість миттєва 25  
 швидкість переміщення середня 25  
 швидкість радіальна 31  
 швидкість секторна 25-26  
 швидкість трансверсальна 31  
 швидкості узагальнені 102

явище холодної емісії електронів 307  
 яма потенціальна 73

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Сільвейстр Анатолій Миколайович  
Моклюк Микола Олексійович

## ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА

### Частина 1

---

*Класична механіка*  
*Електродинаміка. Спеціальна теорія відносності*  
*Квантова механіка*

### Курс лекцій

для здобувачів освіти фізико-математичних факультетів  
педагогічних закладів вищої освіти

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького державного  
педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.  
(Протокол № 11 від 21.06.2023 року).

Підписано до друку .  
Формат 64x90/16. Папір офсетний.  
Друк цифровий. Гарнітура Times New Roman.  
Ум. друк. арк. . Обл.-вид. арк.  
Наклад 300 прим. Зам. № .

Віддруковано з оригіналів замовника.  
ФОП Корзун Д.Ю.

Видавець ТОВ «Твори»  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до  
Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
Видавничої продукції серія ДК № 6188 від 18.05.2018 р.  
21027, а/с 8825, м. Вінниця, вул. Немирівське шосе, 62а.  
Тел.: +38(096) 973 09 34, + 38(093) 891 38 52.  
E-mail: [info@tvoru.com.ua](mailto:info@tvoru.com.ua), <http://www.tvoru.com.ua>