

УДК 538.9+517.9

*Андрій Кошелєв,
студент факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського*

ГРАТКА ТА ОСЦИЛЯТОР ТОДИ: ВНЕСОК МОРИКАДЗУ ТОДИ У НЕЛІНІЙНУ ДИНАМІКУ ТА ІНТЕГРОВНІ СИСТЕМИ

Анотація. Стаття присвячена гратці Тоди, відкритій японським фізиком Морикадзу Тодою, який відомий своїм вкладом у нелінійну динаміку. Це одна з найбільш ранніх повністю інтегрованих систем у фізиці, яка використовується для моделювання динаміки кристалів і солітонів. Введені змінні Флашки та оператори Лакса дали можливість описати і проаналізувати динаміку гратки Тоди через математичні моделі. Окрім цього, він також розробив модель осцилятора Тода, яка використовується для опису нелінійних явищ, зокрема в лазерній фізиці. Тодів осцилятор і гратка Тоди є важливими інструментами для розуміння складної поведінки фізичних систем і динаміки солітонів.

Ключові слова: Морикадзу Тода, гратка Тоди, осцилятор Тоди, нелінійна динаміка, солітони, інтегровні системи, змінні Флашки, оператори Лакса.

Abstract. Morikazu Toda was a Japanese physicist known for his contributions to nonlinear dynamics, notably the discovery of the Toda lattice. It is one of the earliest fully integrated systems in physics used to model the dynamics of crystals and solitons. The introduced Flashka variables and Lax operators made it possible to describe and analyze the dynamics of the Toda lattice through mathematical models. In addition, he also developed the Toda oscillator model, which is used to describe nonlinear phenomena, particularly in laser physics. The Toda oscillator and the Toda lattice are important tools for understanding the complex behavior of physical systems and the dynamics of solitons.

Key words: Morikazu Toda, Toda lattice, Toda oscillator, nonlinear dynamics, solitons, integrable systems, Flashki variables, Lax operators.

Морикадзу Тода (Toda Morikazu, 20 жовтня 1917 — 6 жовтня 2010) — японський фізик, найбільш відомий відкриттям гратки Тоди. Його головні інтереси були в статистичній механіці та фізиці конденсованого стану [1].

Після закінчення факультету фізики Токійського університету він став доцентом спочатку в Університеті Кейдзо, а потім в Токійському університеті освіти (Університет Кьойку). У 1952 році він отримав звання професора і обіймав наступні посади в Університеті Чіба, Національному університеті Йокогами та

Університеті Ейр. Крім того, він був запрошений працювати деякий час в Університеті Сан-Паулу та Норвезькому університеті науки і технологій. Він був почесним професором Токійського університету освіти.

У 1947 році він отримав премію Майнічі Шуппан-Бунка за внесок у теорію рідин, а в 1981 році премію Фуджіхара за відкриття ланцюга Тоди (ґратки Тоди). Він був членом Норвезького королівського товариства наук і літератури [2]. Він помер від поліорганої недостатності 6 жовтня 2010 року.

Став відомим завдяки відкриттю ланцюга Тоди та осцилятора Тоди.

Ґратка Тода, введена Моріказу Тода (1967), є простою моделлю одновимірного кристала у фізиці твердого тіла. Вона відома тим, що є одним з найбільш ранніх прикладів нелінійної повністю інтегрованої системи.

Вона задається ланцюжком частинок з найближчим сусіднім взаємодією, описаним гамільтоніаном

$$H(p, q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{p(n, t)^2}{2} + V(q(n+1, t) - q(n, t)) \right)$$

і рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(n, t) &= -\frac{\partial H(n, q)}{\partial q}(n, t) = e^{-(q(n, t) - q(n-1, t))} - e^{-(q(n+1, t) - q(n, t))}, \\ \frac{d}{dt} q(n, t) &= \frac{\partial H(p, q)}{\partial p(n, t)} = p(n, t), \end{aligned}$$

де $q(n, t)$ є зміщенням n -а частинка з положення рівноваги, і $p(n, t)$ – це його імпульс (маса $m = 1$), і потенціал Тода $V(r) = e^{-r} + r - 1$. Рівняння динаміки ланцюга Тоди є частковим випадком відомої системи Фермі–Пасти–Улама [8]. Зауважимо, що в статтях [4–7] вивчалось питання існування відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці.

Ґратка Тоди має солітонні розв'язки, які представляють собою відокремлені хвилі, що поширюються в часі без зміни своєї форми і розмірів і взаємодіють один

з одним частинкоподібним чином [3]. Загальний N -солітонний розв'язок рівняння має вигляд

$$q_N(n, t) = q_+ + \ln \left(\frac{\det(I + C_N(n, t))}{\det(I + C_N(n+1, t))} \right),$$

де

$$G_N(n, t) = \frac{\sqrt{\gamma_i(n, t) \cdot \gamma_j(n, t)}}{1 - e^{-k_i + k_j}}, \quad 1 < i, j < N,$$

$$\text{з } \gamma_{ij}(n, t) = \gamma_i e^{-2k_j n - 2\sigma_j \sinh(k_j)t} \text{ де } k_j, \gamma_j > 0 \text{ і } \sigma_j \in \{\pm 1\}.$$

Гратка Тоди є прикладом повністю інтегрованої системи. Щоб побачити це, використовуються змінні Флашки.

Герман Флашка (25 березня 1945 — 18 березня 2021) — австрійсько-американський математичний, фахівець з математичної фізики, професор математики в Університеті Арізони, відомий своїм важливим внеском у повністю інтегровані системи (солітонні рівняння). Він зробив важливий внесок у теорію повністю інтегрованих систем, зокрема ґратки Тоди та рівняння Кортевега — де Фріза.

Змінні Флашки мають вигляд

$$a(n, t) = \frac{1}{2} e^{-(q(n+1, t) - q(n, t))/2},$$

$$b(n, t) = -\frac{1}{2} p(n, t)$$

такий, що на ґратці Тоди читається

$$\dot{a}(n, t) = a(n, t)(b(n+1, t) - b(n, t)),$$

$$\dot{b}(n, t) = 2(a(n, t)^2 - a(n-1, t)^2).$$

Щоб показати, що система є повністю інтегрованою, достатньо знайти пару Лакса, тобто два оператори $L(t)$ і $P(t)$ у гільбертовому просторі $\ell^2(Z)$ такі, що

$$\frac{d}{dt} L(t) = [P(t), L(t)],$$

де $[L, P] = LP - PL$ – комутатор Лі двох операторів, еквівалентний похідній за часом змінних Флашки. Вибір

$$L(t)f(n) = a(n, t)f(n + 1) + a(n - 1, t)f(n - 1) + b(n, t)f(n),$$

$$P(t)f(n) = a(n, t)f(n + j) - a(n - 1, t)f(n - 1).$$

де $f(n+1)$ і $f(n-1)$ — оператори зсуву, впливає, що оператори $L(t)$ для різних t є унітарно еквівалентними.

Матриця $L(t)$ має таку властивість, що її власні значення інваріантні в часі. Ці власні значення складають незалежні інтеграли руху, тому ґратка Тоди є повністю інтегрованою. Зокрема, ґратка Тоди може бути розв'язана за допомогою оберненого перетворення розсіювання для оператора Якобі L [9]. З основного результату випливає, що довільні (досить швидкі) затухаючі початкові умови асимптотично для великих n розпадаються на суму солітонів і розпадається дисперсійна частина.

Також важливою науковою роботою Моріказу Тоди є осцилятор названий на його честь (осцилятор Тода). У фізиці осцилятор Тоди є особливим видом нелінійного осцилятора. Він являє собою ланцюжок частинок з експоненціальною потенційною взаємодією між сусідами. Осцилятор Тоди використовується як проста модель для розуміння явища власної пульсації, що представляє собою квазіперіодичну пульсацію вихідної інтенсивності твердотільного лазера в перехідному режимі [3].

Тодський осцилятор являє собою динамічну систему будь-якого походження, яку можна описати залежною координатою x і незалежні координати z , що характеризується тим, що еволюція по незалежній координаті z можна апроксимувати рівнянням

$$\frac{d^2x}{dz^2} + D(x)\frac{dx}{dz} + \Phi'(x) = 0,$$

де $D(x) = ue^x + v$, $\Phi(x) = e^x - x - 1$.

Незалежна координата z має значення часу. Дійсно, це може бути пропорційно часу t з деяким відношенням, наприклад, $z = \frac{t}{t_0}$, де t_0 є сталим.

Похідна $\dot{x} = \frac{dx}{dz}$ може мати значення швидкості частинки з координатами x ; то $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dz^2}$ можна трактувати як прискорення; а маса такої частинки дорівнює одиниці.

Дисипативна функція D може мати значення коефіцієнта пропорційного швидкості тертя. Зазвичай передбачається, що обидва параметри u і v є додатними. Тоді цей коефіцієнт співпропорційного тертя зростає в геометричній прогресії при великих додатних значеннях координати x .

Потенціал $\Phi(x) = e^x - x - 1$ є фіксованою функцією, яка також показує експоненціальне зростання при великих додатних значеннях координати x .

У застосуванні в лазерній фізиці, x може мати значення логарифма числа фотонів в порожнині лазера, пов'язане з його стаціонарним значенням. Тоді вихідна потужність такого лазера пропорційна $\exp(x)$ і може проявляти пульсацію при коливанні x [12].

Обидві аналогії, з одиничною масою частинки і логарифмом числа фотонів, корисні при аналізі поведінки осцилятора Тоди.

Таким чином, ґратка Тоди, відкрита Морікадзу Тодою, є важливою моделлю в нелінійній фізиці, яка демонструє повністю інтегровану систему. Її використання в теорії солітонів і нелінійній динаміці дозволило вченим глибше зрозуміти поведінку одновимірних кристалів та хвильових явищ. Змінні Флашки та оператори Лакса допомагають при розв'язуванні системи рівнянь ґратки Тоди, показуючи її аналітичну інтегровність. Крім того, осцилятор Тода відіграє ключову роль у моделюванні складних явищ, таких як пульсації лазерних систем. Внесок Тоди значно вплинув на розвиток сучасної теоретичної фізики, особливо в галузі нелінійних явищ та інтегровних систем.

Література:

1. Wadati M. Selected Papers of Morikazu Toda. 1993. P. 5–9.
2. Toda M. Waves in nonlinear lattice. Suppl. Theory Phys. 1970. № 45. P. 174–200.
3. Toda M. Theory of Nonlinear Lattices. 1981. P. 34–48.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75–87.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, № 3 (February). P. 397–406.
6. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, № 4 (January). P. 453–462.
7. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Solitary traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems with nonlocal interaction on 2D-lattice. *Український математичний вісник*. 2024. Т. 21, № 1. С. 1–15.
8. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices. London–Singapore : Imperial College Press, 2005. 196 p.
9. Кобушкін О. П. Квантова механіка. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2016. С. 148.
10. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці : дис. ... докт. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
11. Бак С. М. Основи теорії солітонів. Навчальний посібник (для студентів спеціальності 111 Математика). Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2021. 100 с.
12. Чадюк В. О. Оптоелектроніка: від макро до нано. Київ: НТУУ «КПІ», 2012. С. 28.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Ковтонюк Галина Миколаївна.