

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

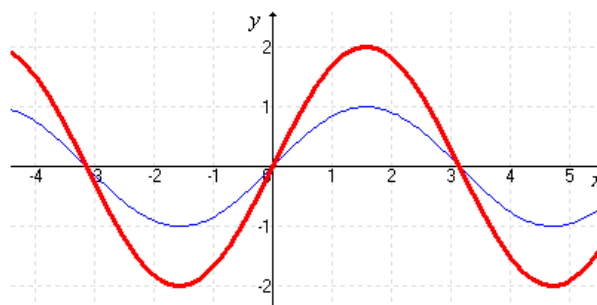
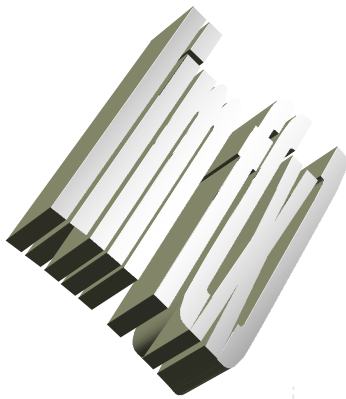
РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

з математичного аналізу

I семестр

Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та
інтегральне числення функції однієї змінної

для студентів предметних спеціальностей
А4.08 Середня освіта (Фізика та астрономія),
А4.09 Середня освіта (Інформатика)



Вінниця 2026

*Схвалено і рекомендовано до видання вченою радою факультету
математики фізики і комп'ютерних наук,
протокол №2 від 30.09.2026 року.*

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук,
професор **Бак С. М.**

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Панасенко О. Б.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. I семестр. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної (для студентів предметних спеціальностей А4.08 Середня освіта (Фізика та астрономія), А4.09 Середня освіта (Інформатика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2026. 38 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз.

Розділи: Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Інтегральне числення функції однієї змінної.

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами предметних спеціальностей А4.08 Середня освіта (Фізика та астрономія), А4.09 Середня освіта (Інформатика) при вивченні розділів «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Інтегральне числення функції однієї змінної».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання.

Після кожного розділу подано зразок контрольної роботи. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

1. Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі робочої програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Таблиця 1. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма здобуття освіти					
	усього	зокрема				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
1-й семестр						
Розділ 1. Вступ до математичного аналізу						
Тема 1. Математичний аналіз як розділ математики. Множина дійсних чисел	7	2	0	0	0	5
Тема 2. Функції та їх класифікація	8	2	1	0	0	5
Тема 3. Збіжні послідовності	9	2	1	0	0	6
Тема 4. Границя і неперервність функції в точці	10	2	2	0	0	6
Разом за розділом 1	34	8	4	0	0	22
Розділ 2. Диференціальне числення функції однієї змінної						
Тема 1. Похідна та диференціал	8	1	1	0	0	6
Тема 2. Похідні та диференціали вищих порядків	8	1	1	0	0	6
Тема 3. Застосування похідної при знаходженні границь функцій у точці	8	1	1	0	0	6
Тема 4. Формула Тейлора та її застосування	8	1	1	0	0	6
Тема 5. Дослідження функцій на монотонність, екстремум та опуклість	9	1	2	0	0	6

Тема 6. Повне дослідження функції і побудова графіка функції	9	1	2	0	0	6
Разом за розділом 2	50	6	8	0	0	36
Розділ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної						
Тема 1. Первісна та невизначений інтеграл	10	2	2	0	0	6
Тема 2. Інтегрування раціональних дробів	10	2	2	0	0	6
Тема 3. Інтегрування деяких ірраціональних функцій	10	2	2	0	0	6
Тема 4. Інтегрування деяких трансцендентних функцій	10	2	2	0	0	6
Тема 5. Визначений інтеграл. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца	8	1	1	0	0	6
Тема 6. Основні методи обчислення визначеного інтеграла	9	1	2	0	0	6
Тема 7. Застосування визначених інтегралів	9	2	1	0	0	6
Разом за розділом 3	66	12	12	0	0	42
Усього годин за 1-й семестр	150	26	24	0	0	100

Таблиця 2. Теми лекцій

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1-й семестр		
1.	Математичний аналіз як розділ математики. Множина дійсних чисел	2
2.	Функції та їх класифікація	2
3.	Збіжні послідовності	2
4.	Границя і неперервність функції в точці	2
5.	Похідна та диференціал	1
6.	Похідні та диференціали вищих порядків	1

7.	Застосування похідної при знаходженні границь функцій у точці. Формула Тейлора	2
8.	Повне дослідження функції і побудова її графіка	2
9.	Первісна та невизначений інтеграл	2
10.	Інтегрування раціональних дробів	2
11.	Інтегрування деяких ірраціональних функцій	2
12.	Інтегрування деяких трансцендентних функцій	2
13.	Визначений інтеграл	1
14.	Основні методи обчислення визначеного інтеграла	1
15.	Застосування визначених інтегралів	2
	Усього годин за 1-й семестр:	26

Таблиця 3. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1-й семестр		
1.	Функції дійсної змінної. Властивості функцій. Числові послідовності. Границя числової послідовності	2
2.	Границя функції в точці. Техніка знаходження границь функцій. Функції, неперервні в точці, їх властивості. Точки розриву, їх класифікація	2
3.	Означення похідної. Таблиця похідних. Правила диференціювання	2
4.	Геометричний і механічний зміст похідної. Формула Тейлора. Застосування похідної при знаходженні границь	2
5.	Дослідження функцій на сталість і монотонність, екстремум та опуклість. Повне дослідження функції і побудова графіка функції	2
6.	Контрольна робота	2
7.	Первісна та невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування	2
8.	Інтегрування раціональних функцій	2
9.	Інтегрування деяких ірраціональних функцій	2
10.	Інтегрування деяких трансцендентних функцій	2
11.	Означення та основні властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца. Застосування визначеного інтеграла	2
12.	Контрольна робота	2
	Усього годин за 1-й семестр:	24

Розподіл балів за видами контролю та самостійної роботи

№	Вид поточного контролю та самостійної роботи	Кількість балів
1.	Домашні завдання	10
2.	Конспект	10
3.	Контрольна робота 1	20
4.	Контрольна робота 2	20
5.	Колоквіум	20
6.	Підсумковий тест	20
Загальна кількість балів		100

Шкала оцінювання: стобальна, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОBOB'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Практичне заняття № 1

Тема: Функції дійсної змінної. Властивості функцій.
Числові послідовності. Границя числової послідовності

1. Знайти область визначення функції $f(x)$, якщо:

1.1. $f(x) = \frac{x}{x+1}$;

1.2. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 8}$;

1.3. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^3 - 4x}$;

1.4. $f(x) = \frac{1}{x + |x|}$;

1.5. $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$;

1.6. $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}$;

1.11.

$f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2} + \sqrt{x^2(x-1)^2}$ ($x \in \mathbb{R}$); 4) $(-\infty; 0]$;

1.7.

$f(x) = \log_2(4-x) - \log_2(x+7)$;

1.8. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}}$;

1.9. $f(x) = \arcsin x + \sqrt{\frac{2}{4x-1}}$;

1.10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - 2|x-1|}}$;

5) $[-2; 1]$; 6) $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup [3; +\infty)$; 7)

8) $(-1; 1) \cup (1; 4]$; 9) $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$; 10) $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$; 11) $[3; +\infty)$.

Відповідь: 1) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; 2)

$\mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$; 3) $\mathbb{R} \setminus \{0; \pm 2\}$; 4)

$(0; +\infty)$;

2. Перевірити на парність і непарність функції:

4.1. $y = \sin(\cos x)$;

4.2. $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$;

4.3. $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

4.4. $y = \log_2(x + \sqrt{1+x^2})$;

4.5. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$;

4.6. $y = \log_2 \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$;

4.7. $y = |x-1| + |x+1| - 2|x|$;

4.8. $y = \arccos(\cos x)$;

4.9. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

4.10. $y = \frac{|\sin x|}{1 - \cos x}$.

3. Знайти найменший період функції:

3.1. $y = \sin 2x$;

3.2. $y = \operatorname{tg} 3x$;

3.3. $y = 3 \cos \frac{x}{2}$;

3.4. $y = 5 \sin \pi x$;

3.5. $y = \operatorname{ctg} \frac{3x}{2}$;

3.6. $y = \sin \frac{\pi x}{4}$;

3.7. $y = \operatorname{ctg} 4x$;

3.8. $y = \cos \frac{x}{3}$;

3.9. $y = 10 \operatorname{tg} 15x$.

Відповідь: 1) π ; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) 4π ; 4) 2 ; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) 8 ; 7) $\frac{\pi}{4}$; 8) 6π ; 9) $\frac{\pi}{15}$.

4. Знайти перші шість членів послідовності (x_n) , заданої формулою загального члена:

4.1. $x_n = 3$;

4.2. $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$;

4.3. $x_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$;

4.4. $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$;

4.5. $x_n = n \sin \frac{n\pi}{2} + n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$;

4.6. $x_n = n^{(-1)^n}$;

1.7. $x_n = \frac{n!}{n^n + 1}$;

1.8. $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$;

1.9. $x_n = \left[\sqrt{n^2 + n} \right]$;

1.10. $x_n = \sum_{k=1}^n k$.

5. Знайти перші п'ять членів послідовності, заданої рекурентно:

5.1. $x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n$;

5.2. $x_1 = 1, x_{n+1} = 3x_n - 2$;

5.3. $x_1 = 3, x_{n+1} = x_n - n$;

5.4. $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{n}$;

5.5.

$x_1 = x_2 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$;

5.6.

$x_1 = -1, x_2 = 0, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$;

5.7.

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = x_{n+1} \cdot x_n$;

5.8. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{x_n}$;

5.9.

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$;

5.10.

$x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$.

6. Довести за означенням, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

$$6.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n} = 3;$$

$$6.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0;$$

$$6.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 3n + 4} = \frac{1}{2};$$

$$6.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 2}{n^2 + n + 1} = 3;$$

$$6.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{(n+1) \cdot 2^n} = 0;$$

$$6.6. \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{3^n}{5n + 3^n} = 1.$$

7. Знайти границю:

$$7.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 7n + 1}{n^2 + 1};$$

$$7.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-4};$$

$$7.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{n^2 + n};$$

$$7.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 4}{2n^2 + n + 3};$$

$$7.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)};$$

$$7.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^2;$$

$$7.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{2+3n^2}{2n^2-7}\right);$$

$$7.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2};$$

$$7.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4}{n + 5n^2 + 8}.$$

$$7.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^{n-1}};$$

$$7.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2};$$

$$7.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}.$$

$$7.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3-1}{5n^3-1} - \frac{2-n}{5n+3}\right);$$

$$7.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^2 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}.$$

Відповідь: 1) -2 ; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0 ; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1 ; 6) $\frac{4}{9}$; 7) 1 ; 8) ∞ ; 9) ∞ ;

10) 4950 .

8. Знайти границю:

$$8.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+3}};$$

$$8.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{2n}\right);$$

$$8.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3n^2 + 2n - 1} - \sqrt{3n^2 - 4n + 8}\right);$$

$$8.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{2 + n^2}};$$

$$8.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n} \right);$$

$$8.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{n^4 + n^2} - n \right);$$

$$8.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[p]{n^p + (p-1)n^{p-1}} - n \right);$$

$$8.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^3 + n^2} \right);$$

$$8.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}};$$

$$8.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{3n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^5 + 1}}.$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) ∞ ; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0; 7) $\frac{p-1}{p}$; 8) $\frac{1}{6}$; 9) $\sqrt{3}$;

10) 0.

9. Знайти границю:

$$9.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!};$$

$$9.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!};$$

$$9.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!};$$

$$9.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{((n+1)! + n!) \cdot n};$$

$$9.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)! + (n+3)!};$$

$$9.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot n!}{(n+1)!}.$$

Відповідь: 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 1; 5) 0; 6) 1.

10. Знайти границю:

$$10.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{2^n + 5};$$

$$10.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + 2 \cdot 3^n};$$

$$10.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{7n+5} - \frac{5^n+1}{4-3 \cdot 5^n} \right);$$

$$10.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + (-1)^n)^n}{3^n \ln(n+2)};$$

$$10.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(n^2 + n - 1)}{\lg(n^{10} + n^5 + 1)};$$

$$10.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 5^n + \lg(n+1)}{n^2 - 5^n + \lg(n+1)};$$

$$10.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n + \log_3 n}{\log_3 n + \log_4 n};$$

$$10.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n^{1000} + 1)}{n+2}.$$

Відповідь: 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{16}{21}$; 4) 0; 5) $\frac{1}{5}$; 6) -1; 7) $\frac{\log_2 e + \log_3 e}{\log_3 e + \log_4 e}$; 8) 0.

11. Знайти границю:

$$11.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(n+2)}{n+2};$$

$$11.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi(n+1)}{n+2};$$

$$11.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2 + \sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}} + \frac{\cos n}{n^2} \right);$$

$$11.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n} \cos n \right);$$

$$11.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1};$$

$$11.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin n}{2n + \sin n}.$$

Відповідь: 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) 0; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$.

12. Знайти границю:

$$12.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{n^2};$$

$$12.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$$

$$12.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \dots + \frac{n}{n^3} \right)};$$

$$12.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1+3+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n-1};$$

$$21.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right);$$

$$12.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$12.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right);$$

$$12.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+4+\dots+2^{n-1}}{2^{n+1}};$$

$$12.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \right);$$

$$12.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

Відповідь: 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{3}{2}$; 6) -1 ; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{3}{2}$;

10) $\frac{4}{3}$.

✎13. Знайти границю:

13.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right);$

13.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right);$

13.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 18} + \dots + \frac{1}{(7n-3)(7n+4)} \right);$

13.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{(7n-5)(7n+2)} \right).$

Відповідь: 1) 1; 2) $\frac{1}{28}$; 3) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{1}{14}$.

✎14. Дослідити на збіжність числову послідовність, якщо:

14.1. $x_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3};$

14.2. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n;$

14.3. $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n};$

14.4. $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!};$

14.5. $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n};$

14.6. $x_n = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{n}{4^{n-1}};$

14.7. $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{4n};$

14.8. $x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$

14.9. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}};$

$$14.10. x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}.$$

15. Знайти границю:

$$15.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n-9};$$

$$15.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{3n};$$

$$15.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n};$$

$$15.5. \lim_{n \rightarrow \infty} 8n(\ln(n+3) - \ln(n+1));$$

$$15.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1+n}{n^2+2}\right)^{2n};$$

$$15.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n-3}\right)^{3n-4}.$$

Відповідь: 1) e^2 ; 2) e^{-5} ; 3) e^2 ; 4) e^{-12} ; 5) 16; 6) e^{12} .

16. Знайти границю послідовності (x_n) , заданої рекурентно:

$$16.1. x_1 = 5, x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.2. x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.3. x_1 = 13, x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.4. x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, a > 0;$$

$$16.5. x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n}{3}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.6. x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.7. x_1 = \frac{a}{2}, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2}, n \in \mathbb{N}, a \in [0; 1];$$

$$16.8. x_1 = 1, x_{n+1} = x_n^2 + a, n \in \mathbb{N}, a \in \left[0; \frac{1}{4}\right];$$

$$16.9. x_1 = 1, x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.10. x_1 = 0, x_{n+1} = \frac{1}{4(1-x_n)}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.11. x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), n \in \mathbb{N};$$

$$16.12. x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}, n \in \mathbb{N}.$$

📖 Практичне заняття № 2

Тема: Границя функції в точці. Функції, неперервні в точці, їх властивості. Точки розриву, їх класифікація

✎1. Довести (знайти $\delta(\varepsilon)$):

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^5 - 5x + 1}{x - \frac{1}{3}} = -1.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - \frac{1}{2}} = -5.$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = 9.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 2.$$

✎2. Знайти границю функції:

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 4).$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2)^{\lg x}.$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 2} (x\sqrt{x+2} - x^2 - x).$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x^3 + 2\cos x).$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 4}{6 - 5x}.$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - x^3}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + 2x}.$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}.$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 2} (3x)^{x^2}.$$

Відповідь: 1) 1; 2) -2; 3) 7; 4) 3; 5) 6^4 ; 6) 1; 7) $\frac{\pi^3}{64} + \sqrt{2}$; 8) $\frac{1}{3}$.

✎3. Знайти границю функції:

$$3.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}.$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}.$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}.$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15}{x^4 - 29x^2 + 100}.$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$$

Відповідь: 1) 4; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 10; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{17}{5}$; 7) $\frac{64}{105}$; 8) $\frac{m}{n}$;

12) 5050.

✎4. Знайти границю функції:

$$4.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3}.$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}.$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}.$$

$$4.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}.$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}.$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}. \text{ (Заміна } x = z^{15}).$$

$$4.8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}.$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3 ; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) -2 ; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{5}{3}$; 8) $\frac{1}{16}$.

✎5. Знайти границю функції:

$$5.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin 2x}.$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}.$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x - \sin 2x}.$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt[4]{x+1} - 1}.$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

$$5.10. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4} + 2^{\frac{1}{(x-2)^2}} \right).$$

Відповідь: 1) 3; 2) 2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 0; 6) 0; 7) $\frac{9}{4}$; 8) 16; 9) $\frac{1}{3}$; 10) $+\infty$;

✎6. Знайти границю функції:

$$6.1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}.$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}.$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{2^x - 1}.$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x).$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\operatorname{tg} 3x} - 1}{\sin 3x}.$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{2x}.$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - \sqrt{1+x}}{x}.$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}.$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}.$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1+\sin x^2} - 1}.$$

✎ 7. Знайти границю функції:

$$7.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}.$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+x} - x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3x^4 \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{ctgx})^{\operatorname{tg} x}.$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{arctg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x^2}}.$$

Відповідь: 1) e^8 ; 2) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 3) e^3 ; 4)

e ; 5) $\sqrt{e}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 7) e^{-18} ; 8) $e^{\frac{1}{e}}$;

9) $\frac{e}{\pi}$; 10) $\sqrt{e}$.

✎ 8. Виходячи з означення неперервності функції ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$), довести неперервність функцій:

$$8.1. y = x^2 + 3x + 1, x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$8.2. y = 2^x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$8.3. y = \arcsin x, x_0 \in (-1; 1).$$

$$8.4. y = \sqrt[3]{x}, x_0 \in \mathbb{R}.$$

✎ 9. Дослідити функцію на неперервність, встановити характер точок розриву і побудувати графік:

✎

$$2.3. y = \operatorname{tg} x, x_0 \in D(y).$$

$$2.4. y = \frac{1}{x^2}, x_0 \in D(y).$$

$$9.1. y = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 0, \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$9.2. y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0, \\ 5x - x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$9.3. y = \begin{cases} 1 - x^3, & x < 0, \\ (x - 1)^3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x, & x > 2. \end{cases}$$

$$9.4. y = \begin{cases} 2^x, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$9.5. y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{4}, \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4} < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$9.6. y = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ \frac{2}{x-1}, & x > -1. \end{cases}$$

$$9.7. y = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 0, \\ (x+1)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1-x, & x > 2. \end{cases}$$

$$9.8. y = x - E(x).$$

$$9.9. y = \frac{1}{x - E(x)}.$$

$$9.10. y = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2 - x}.$$

10. Знайти точки розриву функції, встановити їх рід, до визначити функцію в точках усувного розриву, знайти стрибки в точках розриву I роду:

$$10.1. y = \frac{x}{x^2 + x - 6}.$$

$$10.2. y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}.$$

$$10.3. y = \frac{\frac{x}{1} - \frac{x+1}{1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

$$10.4. y = \frac{x}{\cos x}.$$

$$10.5. y = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}.$$

$$10.6. y = \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^3 - x^2}.$$

$$10.7. y = \frac{2}{1 - 2^x}.$$

Практичне заняття № 3

Тема: Означення похідної. Таблиця похідних. Правила диференціювання

1. Користуючись означенням похідної, обчислити похідні таких функцій:

а) $y = 3x^2 - 4x$. б) $y = \frac{1}{x}$. в) $y = \sqrt{x}$. г) $y = \cos 3x$.

д) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$.

2. Дослідити на диференційовність функції:

а) $f(x) = |x|$. б) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$

3. Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні від таких функцій:

а) $y = x\sqrt{x}$. б) $y = \sqrt[3]{4x\sqrt{5x}}$.

в) $\varphi(t) = \frac{\sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{t}}{2t^2 \cdot \sqrt{t^3}}$. г) $y = \frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + 7x - 8$.

д) $y = \arctg x + x + \operatorname{arcctg} x$. е) $y = \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}$.

є) $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$. ж) $y = (3x^2 - 7x + 2)(1 - 2x - 6x^3)$.

з) $y = 2x \cos x$. и) $y = \log_2 x \cdot \ln x \cdot \log_3 x$.

і) $y = x^2 \arctg x$. ї) $y = \frac{2x^2 - 5}{x + 5}$.

й) $y = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$.

4. Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні від таких функцій:

а) $f(x) = 2x \cos x$. б) $f(x) = e^x (x^2 - 4x + 10)$.

$$\text{в)} f(x) = x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$\text{г)} f(x) = x^8 \operatorname{ctg} x.$$

$$\text{е)} f(x) = 12x^2 \cdot \sqrt[3]{x^7} \cdot \ln x.$$

$$\text{в)} f(x) = x^2 \cos x$$

$$\text{д)} f(x) = \sqrt[3]{x} \log_3 x.$$

$$\text{е)} f(x) = x^7 \cdot \operatorname{ctg} x \cdot 2^x.$$

$$\text{ж)} f(x) = (x-1)(x^2+5) \sin x.$$

$$\text{з)} f(x) = x^3 \sin x \cdot \ln x.$$

$$\text{и)} y = \frac{1-x^3}{1-x^5}.$$

$$\text{і)} y = \frac{2}{(1-x^2)(1+x^4)}.$$

$$\text{ї)} y = \frac{8-3\sqrt{x^3}+2x}{1+6x\sqrt{x}-3x^2}.$$

$$\text{й)} y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x}.$$

5. Обчислити значення похідної в заданій точці:

$$\text{а)} y = \frac{5-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}, x_0 = 1.$$

$$\text{б)} y = \frac{2^x}{\sin x}, x_0 = 5.$$

$$\text{в)} y = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\operatorname{tg} x}, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{г)} y = \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x^2}}, x_0 = 7.$$

$$\text{д)} y = \frac{\log_4 x}{x^2}, x_0 = 4.$$

$$\text{е)} y = \frac{6x^5}{\log_2 x}, x_0 = 2.$$

$$\text{е)} y = \frac{x^3+1}{x^3-1}, x_0 = 2.$$

$$\text{ж)} y = \frac{x}{\arcsin x}, x_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{з)} y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

6. Знайти похідні функцій:

$$\text{а)} y = (x^3 - 2x^2 + 5)^8.$$

$$\text{б)} y = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x} \right)^{20}.$$

$$\text{в)} y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$\text{г)} y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\text{д)} y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}}.$$

$$\text{е)} y = 3^{\operatorname{arctg}(x+\pi)}.$$

$$\text{е)} y = \sin \cos^2 x \cdot \cos \sin^2 x.$$

$$\text{ж)} y = \cos(3 \arccos x).$$

7. Знайти похідні функцій (логарифмічне диференціювання):

$$\text{а)} y = (x^2 + 1)^{2x}.$$

$$\text{б)} y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}}.$$

$$\text{в)} y = a^{a^a} + a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a} + a^{x^x} + x^{x^x}. \quad \text{г)} y = (\arcsin^2 x)^{\arctg x}.$$

$$\text{д)} y = (chx)^{e^x}.$$

$$\text{е)} y = \sqrt[3]{\arctg \sqrt[5]{\cos \ln^3 x}}.$$

8. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$\text{а)} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, y = \sqrt{1 - \sqrt{t}}, t_0 = \frac{1}{64}; M_0(1; 1).$$

$$\text{б)} x = \sin^2 t, y = \cos^2 t, t_0 = \frac{\pi}{4}; M_0\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

$$\text{в)} x = a \cdot ch t, y = b \cdot sh t, t_0 = \ln 2; M_0(a \cdot ch 1; b \cdot sh 1).$$

$$\text{г)} x = \ln \sin \frac{t}{2}, y = \ln \sin t, 0 < t < \pi.$$

$$\text{д)} x = t \cdot \ln t, y = \frac{\ln t}{t}, t_0 = 1.$$

$$\text{е)} x = a(\sh t - t), y = a(ch t - 1), t_0 = 0.$$

$$\text{є)} x = t^3 - 3\pi, y = t^3 - 6 \arctg t, t_0 = 1.$$

Практичне заняття № 4

Тема: Геометричний і механічний зміст похідної. Формула Тейлора. Застосування похідної при знаходженні границь функцій у точці

1. Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції:

$$\text{а)} y = 2 - 4x - 3x^2, x_0 = -2.$$

$$\text{б)} y = 2 \cos \frac{x}{2}, x_0 = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{в)} y = \sqrt{x^2 + 1}, x_0 = 2.$$

$$\text{г)} y = xe^{-x}, x_0 = 0.$$

$$\text{д)} y = 2 \cos \frac{x}{2}, x_0 = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{е)} y = x^2 e^{-x}, x_0 = 1.$$

$$\text{є)} y = \sqrt{2x - 1}, x_0 = 5.$$

$$\text{ж)} y = 2x^3 - 3x, x_0 = 1.$$

$$\text{з)} y = \tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{и)} y = \frac{3x - 4}{\sqrt[3]{x + 4}}, x_0 = 1.$$

$$\text{і)} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \text{ в точках перетину з віссю } Ox.$$

$$\text{ї)} x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Знайти абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $y = 5x^5 - 3x^3 + x + 1$ паралельна прямій $y = x$.

3. Знайти кути, під якими перетинаються лінії:

а) $x + y - 4 = 0$ і $2y = 8 - x^2$.

б) $x^2 + 4y^2 = 4$ і $4y = 4 - 5x^2$.

в) $y = \sin x$ і $y = \cos x$.

г) $y = x^2$ і $x = y^2$.

д) $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$ і $x = 1$.

е) $y = e^{x/2}$ і $x = 2$.

є) $x^2 + y^2 = 5$ і $y^2 = 4x$.

ж) $y^2 = 2x^3$ і $64x - 48y - 11 = 0$.

4. Точка здійснює гармонічні коливання за законом $x = 15 \sin 3t$. Знайти миттєву швидкість точки в момент часу t_0 .

5. Кількість радіоактивної речовини в момент часу t виражається

формулою $m = M \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, де T – так званий період піврозпаду, а M – початкова кількість речовини (в момент часу $t = 0$). Знайти миттєву швидкість розпаду речовини в момент часу t_0 .

6. Довжина вертикально поставленої драбини рівна 5 м. Нижній кінець драбини починає відсуватися від стіни зі сталою швидкістю 2 м/с. З якою швидкістю опускається в момент часу t верхній кінець драбини? Чому дорівнює його прискорення в цей момент часу?

7. Резервуар, що має форму півкулі, заповнюється водою. Вважаючи, що радіус кулі рівний R_0 , а швидкість його заповнення v_0 , визначити швидкість підняття рівня води в резервуарі.

Розклад основних елементарних функцій за формулою Тейлора.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^{2n})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n), \quad |x| < 1$$

8. Розкласти $f(x)$ в околі точки x_0 по формулі Тейлора до n -го порядку включно:

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$; $n = 3$.

б) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $x_0 = 1$; $n = 4$.

в) $f(x) = x^3 \ln x$, $x_0 = 1$; $n = 4$.

г) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x_0 = 2$; $n = 3$.

д) $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$, $x_0 = 1$; $n = 4$.

е)

$f(x) = (\sin x)^{\sin x}$, $x_0 = 1$; $n = 2$.

є) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$; $n = 2$.

ж) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$; $n = 5$.

9. Функцію $f(x)$ подати у вигляді формули Маклорена з залишковим членом $o(x^n)$, якщо:

а) $f(x) = (x+5)e^{2x}$.

б) $f(x) = \ln \frac{3+x}{2-x}$.

в) $f(x) = e^x \ln(1+x)$, $n = 4$.

г) $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+x-12}$.

д) $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-x}$.

е) $f(x) = (1+x^2) \ln \sqrt{1+x}$.

є) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}}$.

ж) $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+4}$.

10. За допомогою формули Тейлора наближено обчислити значення з точністю до ε :

- а) $\sqrt[5]{250}$, $\varepsilon = 10^{-4}$. б) $\sin 18^\circ$, $\varepsilon = 10^{-4}$. в) $\operatorname{arctg} 0,8$, $\varepsilon = 10^{-3}$.
 г) $\arcsin 0,45$, $\varepsilon = 10^{-3}$. д) $(1,1)^{1,2}$, $\varepsilon = 10^{-5}$. е) $\ln(1,1)$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

11. Знайти границю за допомогою формули Тейлора:

- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$. б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{\ln \frac{1+x}{1-x} - 2x}$.
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x) - e^{\frac{x^2}{2}}}$. г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x - \operatorname{th} x}$.
 д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$. е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
 є) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}$.
 з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$. и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \operatorname{ctg} x}{x \sin x}$.

12. Знайти границю функції, використовуючи, де це можливо, правила Лопітала:

- а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$. б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$.
 в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt{2+x+x}}$. г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$.
 д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln \cos(2x^2 - x)}$. е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.
 є) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$. ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.
 з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}$. и) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$\text{ї)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{к)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^2}{\sin^6 2x}.$$

📖 Практичне заняття № 5

Тема: Повне дослідження функції і побудова її графіка

З1. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції $f(x)$ на області визначення:

$$\text{а)} f(x) = x^3 + 3x^2.$$

л)

$$\text{б)} f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5.$$

$$f(x) = (x+1)\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}x^2 - x.$$

$$\text{в)} f(x) = x^4(1-x)^3.$$

$$\text{м)} f(x) = (x-1)e^{3x}.$$

$$\text{г)} f(x) = (x^3 - 10)(x+5)^2.$$

$$\text{н)} f(x) = (3-x^2)e^x.$$

$$\text{д)} f(x) = x^2(x-12)^2.$$

$$\text{о)} f(x) = x^3 e^{-4x}.$$

$$\text{е)} f(x) = (x+2)^2(x-3)^3.$$

$$\text{п)} f(x) = x^4 e^{-x^2}.$$

$$\text{є)} f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}.$$

$$\text{с)} f(x) = x + \sqrt{3-x}.$$

$$\text{ж)} f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}.$$

$$\text{т)} f(x) = \sqrt{x} \ln x.$$

$$\text{з)} f(x) = \frac{10}{8x^2 - 24x + 23}.$$

$$\text{у)} f(x) = \frac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}.$$

$$\text{и)} f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}.$$

ф)

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 - \ln(x^2 - 4x + 4).$$

$$\text{і)} f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$\text{ц)} f(x) = \ln(x^2 - 1) - 2 \operatorname{arctg} x.$$

$$\text{ї)} f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

$$\text{ч)} f(x) = x + \sqrt{3-x}.$$

к)

$$\text{ш)} f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}.$$

$$f(x) = (x-2)\cos \pi x - \frac{1}{\pi} \sin \pi x.$$

$$\text{щ)} f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-4)^2}.$$

$$\text{ю)} f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}.$$

З2. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:

$$a) y = x^3 + 3x^2 - 72x + 90, [-5; 5].$$

$$б) y = x^3 - 6x^2 + 9, [-1; 2].$$

$$в) y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1; 2].$$

$$г) y = x + \sqrt{x}, [0; 4].$$

$$д) y = 1 - 3x^2 - x^3, [-1; 1].$$

$$е) y = x^3 - 2x|x - 2|, [0; 3].$$

$$є) y = x + \frac{4}{(x-2)^2}, [0; 5].$$

$$к) y = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x, \left[e^{\frac{3}{4}}; e^3 \right].$$

$$л) y = |x^2 + 2x - 3| + 1,5\ln x, [0,5; 4].$$

3. Знайти інтервали опуклості і точки перегину функції:

$$a) y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1.$$

$$б) y = x^5 - 10x^2 + 3x.$$

$$в) y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$$

$$г) y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50.$$

$$д) y = (x+2)^6 + 2x + 2.$$

$$е) y = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$є) y = \frac{x^3}{12+x^2}.$$

$$ж) y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

$$ж) y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}, [0; 1].$$

$$з) y = 4\sin 2x - 2\sin 4x, [0; \pi].$$

$$и) y = \sin 2x - x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$$

$$і) y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x, [\pi; 2\pi].$$

$$ї) y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, [0; 1].$$

$$з) y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}, a > 0.$$

$$и) y = \sqrt[3]{x+3}.$$

$$і) y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}.$$

$$ї) y = \ln(1+x^2).$$

$$ж) y = x \operatorname{arctg} x.$$

$$з) y = (x+1)^4 + e^x.$$

$$й) y = x^4(12\ln x - 7).$$

$$к) y = x^4(12\ln x - 7).$$

$$л) y = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

4. Знайти асимптоти кривих:

$$a) y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x-3}.$$

$$б) y = xe^x.$$

$$в) y = x + \frac{\sin x}{x}.$$

$$г) y = x \operatorname{arctg} x.$$

$$д) y = \ln(4-x^2).$$

$$е) y = \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}.$$

$$є) y = 3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}.$$

$$ж) y = \frac{2x^2-9}{x+2}.$$

$$з) y = \frac{x^5}{x^4-1}.$$

$$\text{и)} y = xe^{-x}. \quad \text{і)} y = x \operatorname{arccot} x. \quad \text{ї)} y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

5. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} y = x^3 - 3x^2 + 4. & \text{є)} y = \frac{x}{x^2 - 1}. & \text{л)} y = \frac{e^x}{1 + x}. \\ \text{б)} y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2. & \text{ж)} y = \frac{x^3 + x + 2}{x}. & \text{м)} y = \ln \frac{x}{x - 1}. \\ \text{в)} y = 3x^2 - x^3. & \text{з)} y = x^3 \sqrt{(x + 1)^2}. & \text{н)} y = \ln(4 - x^2). \\ \text{г)} y = \frac{x^3}{4(2 - x)^2}. & \text{і)} y = x\sqrt{4 - x^2}. & \text{о)} y = x^2 e^{-x}. \\ \text{д)} y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}. & \text{ї)} y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}. & \text{п)} y = x - \ln(x + 1). \\ \text{е)} y = \frac{x^4}{x^3 - 1}. & \text{й)} y = xe^{-x}. & \text{р)} y = x + \frac{\ln x}{x}. \\ & \text{к)} y = x + e^{-x}. & \end{array}$$

Практичне заняття № 6

Контрольна робота № 1 (зразок)

1. Обчислити границі числових послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}); \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 3}{2n + 1} \right)^{n+1}.$$

2. Обчислити границю функції:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{x + 1}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}.$$

3. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці x_0 : $y = 2 \cos \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

4. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Практичне заняття № 7

Тема: Первісна та невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування

✎1. Перевірити, чи функція F є первісною для функції f на проміжку X :

а) $F(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$, $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$, $X = \mathbb{R}$;

б) $F(x) = -\frac{1}{x^2} + 5$, $f(x) = \frac{2}{x^3}$, $X_1 = (2; 5)$, $X_2 = (-1; 1)$;

в) $F(x) = \frac{1}{8} \arcsin^8 x$, $f(x) = \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}$, $X = (-1; 1)$;

г) $F(x) = \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + 3$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$, $X = \mathbb{R}$;

✎2. Обчислити інтеграли:

а) $\int x(x+3)(x-2)dx$;

б) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}\sqrt{x}} dx$;

в) $\int \left(\frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} \right) dx$;

г) $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx$;

д) $\int 2^x \cdot 3^x \cdot e^x dx$;

е) $\int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx$.

✎3. Обчислити інтеграли $\left(\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \right)$:

а) $\int (4x-3)^7 dx$;

б) $\int \cos(ax+b)dx$, $a \neq 0$;

в) $\int \frac{dx}{(2x+5)^4}$;

г) $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx$;

д) $\int \sqrt{ax+b}dx$;

е) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$, $a \neq 0$.

✎4. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{(2x+7)dx}{x^2 + 7x + 8}$;

б) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$;

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x}$;

г) $\int \frac{(tg^2 x - 2tgx + 1)dx}{\cos^2 x}$;

$$д) \int \frac{x dx}{(1-x^2)^2};$$

$$е) \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{2x} + 2}}.$$

5. Обчислити інтеграли:

$$а) \int x \cdot 2^x dx;$$

$$б) \int x^5 \ln x dx;$$

$$в) \int x^2 \cos x dx;$$

$$г) \int (ax^2 + bx + c) \sin 2x dx.$$

📖 Практичне заняття № 8

Тема: Інтегрування раціональних функцій

1. Обчислити інтеграли:

$$а) \int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx;$$

$$б) \int \frac{x^3-7x+18}{x^2-3x+2} dx;$$

$$в) \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx;$$

$$г) \int \frac{3x-1}{x^3-x^2-2x} dx;$$

$$д) \int \frac{2x^2+3x+8}{(x+1)(2x+3)(3x+4)} dx;$$

$$е) \int \frac{x^7-5x^5+7x^4+4}{x^5-5x^3+4x} dx.$$

2. Обчислити інтеграли:

$$а) \int \frac{x^4}{(x+1)^2(x-2)} dx;$$

$$б) \int \frac{x^5+x}{(x+2)^2(x+3)^2} dx;$$

$$в) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3};$$

$$г) \int \frac{2x^4+3x^2+x-1}{x^3-3x^2} dx.$$

3. Обчислити інтеграли:

$$а) \int \frac{dx}{x^2+4x+9};$$

$$б) \int \frac{2x+3}{x^2+8x+20} dx;$$

$$в) \int \frac{(x+1)dx}{(x^2-6x+5)(x^2+6x+10)}; \quad г) \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx;$$

$$д) \int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx;$$

$$е) \int \frac{3x+5}{x(x^2+1)^2} dx;$$

$$є) \int \frac{3x^4-4}{x^2(x^2+2)^3} dx;$$

$$ж) \int \frac{x(2x^2+2x-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx.$$

4. Обчислити інтеграли методом Остроградського:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{x^4 + x^3 + x + 4}{(x^3 + 1)^2} dx; & \text{б)} \int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx; \\ \text{в)} \int \frac{x}{(x-1)^2 (x+1)^3} dx; & \text{г)} \int \frac{2x+1}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx; \quad \text{д)} \int \frac{(4x^2 - 8x) dx}{(x-1)^2 (x^2 + 1)^2}. \end{array}$$

Практичне заняття № 9

Тема: Інтегрування деяких ірраціональних функцій

 1. Обчислити інтеграли ($\int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_k}) dx$):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}; & \text{б)} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3} + 1}; \\ \text{в)} \int \frac{x dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}; & \text{г)} \int \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{5}{4}}\right) dx}{x^{\frac{1}{2}+1}}. \end{array}$$

 2. Обчислити інтеграли

$$\left(\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right) dx; \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \right):$$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}; & \text{б)} \int \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx; \\ \text{в)} \int \frac{x^3 \sqrt{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx; & \text{г)} \int \frac{dx}{x \left(2 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}; \\ \text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5}}; & \text{е)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2 (x-1)^4}}. \end{array}$$

 3. Обчислити інтеграли за допомогою підстановок Ейлера:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}; & \text{б)} \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx; \\ \text{в)} \int \frac{x-1}{(x^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}} dx; & \text{г)} \int \frac{x dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}; \end{array}$$

$$\text{д)} \int \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{(x+1)^2} dx, \quad x > -1; \quad \text{е)} \int \frac{dx}{\left(1 + \sqrt{x^2 + x}\right)^2}.$$

4. Обчислити інтеграли (частинні випадки квадратичних ірраціональностей):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{x^2 + 1}}; & \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}}; \\ \text{в)} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2}}; & \text{г)} \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}; \\ \text{д)} \int \frac{x^3 dx}{(x+1)\sqrt{1 + 2x - x^2}}; & \text{е)} \int \frac{x^2 dx}{(4 - 2x + x^2)\sqrt{2 + 2x - x^2}}. \end{array}$$

5. Обчислити інтеграли $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ за допомогою підстановок Чебишева:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^3 dx; & \text{б)} \int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2}; \\ \text{в)} \int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1 + 3\sqrt[3]{x^2}} dx; & \text{г)} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}; \\ \text{д)} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}; & \text{е)} \int x\sqrt{1 + x^4} dx; \\ \text{є)} \int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx; & \text{ж)} \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{x} dx. \end{array}$$

Практичне заняття № 10

Тема: Інтегрування деяких трансцендентних функцій

1. Обчислити інтеграли:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int \sin 2x \sin 3x dx; & \text{б)} \int \sin 7x \sin 15x dx; \\ \text{в)} \int \sin 3x \cos 8x dx; & \text{г)} \int \cos 4x \cos 9x dx; \\ \text{д)} \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx; & \text{е)} \int \cos x \cos 3x \cos 5x dx. \end{array}$$

2. Обчислити інтеграли, використовуючи універсальну підстановку $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t\right)$:

а) $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x};$

б) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5};$

в) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx;$

г) $\int \frac{(1 + \sin x) dx}{\sin x (1 + \cos x)}.$

3. Обчислити інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:

а) $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x};$

б) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x};$

в) $\int \sin^7 2x \cos^5 2x dx;$

г) $\int \frac{\sin 3x dx}{\cos x};$

д) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x};$

е) $\int \frac{dx}{\cos^3 x};$

є) $\int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{\sin^4 x - 1};$

ж) $\int \frac{(\cos^5 x + 2 \cos^3 x) dx}{\sin^4 x + \sin^2 x}.$

4. Обчислити інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:

а) $\int \frac{\cos^2 x \sin^2 x dx}{\sin^8 x + \cos^8 x};$

б) $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x};$

в) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x};$

г) $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x};$

д) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x};$

е) $\int \operatorname{ctg}^6 x dx;$

є) $\int \frac{(2 \operatorname{tg} x + 3) dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x};$

ж) $\int \frac{(3 \cos x - 8 \sin x) dx}{7 \cos x + 4 \sin x};$

з) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$

и) $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

5. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{x e^x dx}{(x+1)^2};$

б) $\int x e^{\sqrt{x}} dx;$

в) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x dx;$

г) $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x dx}{\operatorname{sh}^4 x}.$

Практичне заняття № 11

Тема: Означення та основні властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца. Застосування визначеного інтеграла

З1. Обчислити визначені інтеграли як границі інтегральних сум Рімана, розбивши відрізок інтегрування на n рівних частин:

а) $\int_0^1 e^x dx$; б) $\int_0^2 x^2 dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$.

З2. Користуючись геометричним змістом інтегралу обчислити:

а) $\int_1^2 \sqrt{2x - x^2} dx$; б) $\int_0^2 \sqrt{4x - x^2} dx$;
в) $\int_{-1}^5 \sqrt{5 + 4x - x^2} dx$; г) $\int_{-1}^2 ||x| - 1| dx$.

З3. Довести, що кожний з інтегралів дорівнює нулю:

а) $\int_{-3}^3 x\sqrt{9 - x^2} dx$; б) $\int_{-10}^{10} \lg(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$;
в) $\int_{-2}^2 (|x - 1| + |x + 1| - 2|x|) dx$; г) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx$.

З4. Оцінити інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$;
в) $\int_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{1 + x}}$; г) $\int_{100}^{200} \frac{x^3 dx}{x^4 + x + 1}$.

З5. Обчислити інтеграли, користуючись формулою Ньютона-Лейбніца:

а) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$; б) $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx$;
в) $\int_1^2 \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2} dx$; г) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^7 - 2x^5 + 3x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx$.

✎6. Обчислити інтеграли, користуючись правилом заміни змінної:

а) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}};$

б) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}};$

в) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}};$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}.$

✎7. Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctg x dx;$

б) $\int_1^2 x^3 \ln x dx;$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x dx;$

г) $\int_0^1 e^x \cos x dx.$

✎8. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій:

а) $y = x^3, x = 1, x = 3;$

б) $y = x^2 + 4x, y = x + 4;$

в) $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = 3x;$

г) $y = x^2 + 1, y = \frac{1}{2}x^2 + 1, x = 1, x = 2;$

д) $y = -x^2 - 4x, y = 1, x = -3, x = -1;$ е) $xy = 4, x + y - 5 = 0.$

✎9. Знайти довжину кривої:

а) $y = 2x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 2\sqrt{3};$

б) $y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}, 0 \leq x \leq 9;$

в) $y = x^2 - 2x + 2, -1 \leq x \leq 1;$

г) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, 1 \leq x \leq 2.$

✎10. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, навколо осі l :

а) $y = 2x - x^2, y \geq 0, l: Ox; l: Oy;$

б) $y = x^2 + 1, x = 0, x = 1, y = 0;$

в) $y = 2x, y = x + 3, x = 0, x = -1;$

г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, l: Ox; l: Oy;$

д) $x^2 + (y - b)^2 = a^2, l: Ox.$

✎11. Знайти статичні моменти M_x та M_y однорідної кривої:

а) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x \geq 0, y \geq 0;$

б) $y^2 = 2x, 0 \leq x \leq 2;$

в) $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

г) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi;$

д) $\rho = 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$

е) $\rho = ae^\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

12. Знайти координати центра мас однорідної кривої:

а) $x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, |\varphi| \leq \alpha \leq \pi;$

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, x \geq 0, y \geq 0;$

в) $y = ach\left(\frac{x}{a}\right), |x| \leq b;$

г) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, 1 \leq y \leq 2;$

д) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi;$

Практичне заняття № 12

Контрольна робота № 2

(зразок)

1. Обчислити інтеграл від дробово-раціональної функції:

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 8x + 20} dx.$$

2. Обчислити інтеграл від тригонометричної функції:

$$\int \sin^7 2x \cos^5 2x dx.$$

3. Обчислити інтеграл, користуючись формулою інтегрування частинами:

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx.$$

4. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими: $y = 2 - x^2, y = x.$

Список рекомендованої літератури

1. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. I семестр. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Інтегральне числення функцій однієї змінної (для студентів предметної спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2025. 68 с. URL: <https://dspace.vspu.edu.ua/handle/123456789/16839>
2. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. II семестр. Числові та функціональні ряди. Аналіз функцій багатьох змінних (для студентів предметної спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2026. 42 с. URL: <https://dspace.vspu.edu.ua/handle/123456789/16803>
3. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Вступ в аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 299 с.
4. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. 289 с.
5. Ковтонюк М. М., Клімішина А. Я., Леонова І. М., Соля О. М. Практикум з диференціального числення функції багатьох змінних : навч. посіб. для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика). [Електронний ресурс]. Вінниця: ВНТУ. 2023. 251 с. URL: <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/812>
6. Ковтонюк М. М. Клімішина А. Я., Леонова І. М. Практикум з диференціального числення функції однієї змінної: [електронне мережне наукове видання]. Вінниця: ВНТУ, 2022. 380 с.

7. Практикум з інтегрального числення функцій однієї змінної та рядів (з використанням чисельних методів і систем комп'ютерної математики): навчальний посібник / М. М. Ковтонюк, А. Я. Клімішина, І. М. Леонова, О. М. Соля, О. П. Косовець. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2025. 656 с.

Додаткова

1. Безклубенко, І. С., Баліна О. І. Математичний аналіз: підручник: у 2 ч. Ч. 1. Київ: КНУБА, 2024. 224 с.
2. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз: Підручник. Київ: Знання, 2008. 421 с.
3. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Метричні простори. Диференціальне числення функції багатьох змінних. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 228 с.
4. Томусяк А.А., Вотякова Л.А. Аналіз функцій двох і трьох змінних (курс лекцій). Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2007. 229 с.
5. Щерба А. І., Нестеренко А. М., Мірошкіна І. В., Щерба В. О. Математичний аналіз: навч. посіб. [Електронний ресурс]. Черкаси: ЧДТУ, 2023. 513 с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Бібліотечний фонд кафедри математики та інформатики в університетському репозиторії. URL: <https://dspace.vspu.edu.ua/collections/860ee2c1-610e-4cd9-babf-0fe65f1b1ab2>
2. Сайт «Математичний аналіз і диференціальні рівняння вивчаю сам». URL: <https://kovtonyuk.com/>

Електронне навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА З МАТЕМАТИЧНОГО
АНАЛІЗУ
І семестр

Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та
інтегральне числення функції однієї змінної

для студентів предметних спеціальностей
А4.08 Середня освіта (Фізика та астрономія),
А4.09 Середня освіта (Інформатика)