

Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського

Кафедра математики та інформатики

**Проблеми математики та інформатики  
в педагогічному ЗВО:  
теорія і практика**

колективна монографія

*До 90-ї річниці*

*кафедри математики та інформатики*

*Вінницького державного педагогічного університету*

*імені Михайла Коцюбинського*

Вінниця  
ВНТУ  
2023

УДК [001+37.016]:[51+004](06)

П-78

DOI: <https://doi.org/10.31652/978-617-8163-03-7-1-243>

*Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського  
(протокол № 7 від 20 грудня 2023 р.)*

**Автори:**

**С. М. Бак, Г. М. Ковтонюк, М. М. Ковтонюк, О. П. Косовець,  
Я. В. Крупський, І. М. Леонова, О. М. Соя**

**Рецензенти:**

**Коломієць Алла Миколаївна** – доктор педагогічних наук, професор, проректор з наукової роботи Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;

**Михалевич Володимир Маркусович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету.

**Проблеми математики та інформатики в педагогічному ЗВО: теорія і практика** : колективна монографія [Електронний ресурс] / за заг. ред. М. М. Ковтонюк та С. М. Бака. Вінниця: ВНТУ, 2023. (PDF, 243 с.).

ISBN 978-617-8163-03-7 (PDF)

Монографію підготовлено до 90-річчя створення кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Представлено результати наукових досліджень членів кафедри математики та інформатики, які виконувалися в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Проблеми математики та інформатики у педагогічному ВНЗ: теорія і практика» (РК №0119U103325). Видання адресовано науковим, науково-педагогічним і педагогічним працівникам, аспірантам, докторантам, широкому колу осіб, хто цікавиться науковими та освітніми проблемами математики та інформатики.

УДК [001+37.016]:[51+004](06)

ISBN 978-617-8163-03-7 (PDF)

© ВДПУ ім. М. Коцюбинського, 2023

© Автори монографії, 2023

## Передмова

Монографія присвячена моделюванню науково-освітнього середовища з математики та інформатики в педагогічних закладах вищої освіти. Тут представлено результати наукових досліджень членів кафедри математики та інформатики, які виконувалися в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Проблеми математики та інформатики у педагогічному ВНЗ: теорія і практика» (РК №0119U103325).

Одержано низку теоретичних математичних результатів. Зокрема, встановлено умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці та умови існування стоячих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона. Для цього використано варіаційний метод і метод періодичних апроксимацій. Також побудовано формальні розв'язки зчисленної системи диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами і встановлено їх асимптотичний характер. Результати цих досліджень інтегровано в освітній процес.

Також у монографії представлено ряд теоретичних і практичних результатів науково-методичного характеру. Зокрема, досліджено концептуальні засади форсайт моделювання синергетичного освітнього простору бакалавра математики. Розкрито можливості змісту навчального матеріалу з математичних та інформатичних дисциплін та методів їх навчання у формуванні в студентів математичних, інформатичних та професійних компетентностей. Досліджено технології використання систем комп'ютерної математики у процесі вивчення математичних та інформатичних дисциплін. Проаналізовано основні тенденції і стратегії використання цифрових технологій в ЗВО та їх застосування у підготовці майбутніх учителів математики та інформатики у ВДПУ. Розроблено методичну систему навчання математичних та інформатичних дисциплін в умовах змішаної системи навчання у педагогічних ЗВО.

# РОЗДІЛ 1

## ІСНУВАННЯ І ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗЧИСЛЕННИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

### 1.1. Існування біжучих і стоячих хвиль в системах осциляторів

*Бак С. М., Ковтонюк Г. М.*

**1.1.1. Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці.** У 1953 році один із найвидатніших фізиків ХХ століття Енріко Фермі попросив двох своїх колег (по Лос-Аламоській лабораторії) Станіслава Улама і Джона Пасту розв'язати одну з нелінійних задач на ЕОМ. Вони повинні були дослідити питання про термалізацію енергії в нелінійних дискретно навантажених струнах на прикладі коливання 64 важок, пов'язаних одна з одною пружинками (рис. 1.1), які при відхиленні від положення рівноваги на  $\Delta l$  отримували силу повернення, рівну  $k\Delta l + \alpha(\Delta l)^2$ . Тут  $k$  і  $\alpha$  – сталі коефіцієнти. При цьому нелінійний доданок передбачався малим у порівнянні з основною силою  $k\Delta l$ . Створюючи початкове коливання, дослідники хотіли подивитися, як ця початкова мода буде розподілятися по всіх інших модах.

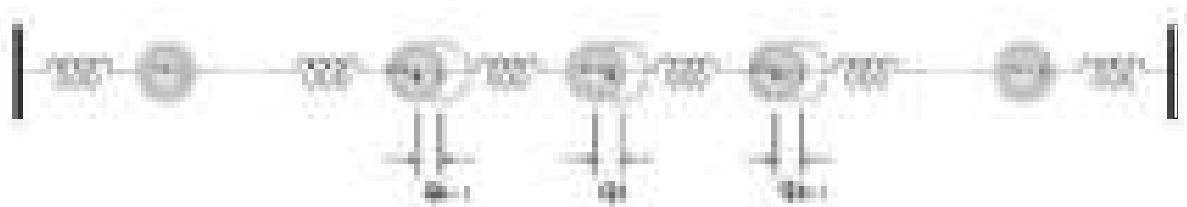


Рис. 1.1. Ланцюг зв'язаних важок

Передбачалося, що енергія в кінці кінців рівномірно розподілиться між модами, тобто по всій довжині хвилі, тим самим відбудеться термалізація енергії. У 1954 році після проведення розрахунків цієї задачі на ЕОМ

очікуваного результату вони не отримали, але виявили, що перекачування енергії в дві або три моди на початковому етапі розрахунку дійсно відбувається, але потім спостерігається повернення до початкового стану. Про цей парадокс, пов'язаний з поверненням початкового коливання, стало відомо кільком математикам і фізикам. Зокрема, про цю задачу дізналися американські фізики Мартін Крускал і Норман Забускі ([34]), які вирішили продовжити обчислювальні експерименти з моделлю, запропонованою Фермі. Виявилось, що в ланцюжку виникають особливі хвилі – солітони, які не дають енергії рівномірно розподілятися по всій її довжині. Це було виявлено тільки через 11 років.

Результати досліджень Енріко Фермі, Джона Пасти і Станіслава Улама [14] дали поштовх для багатьох наступних досліджень систем типу Фермі-Пасти-Улама. До подібних систем також належить повністю інтегрований ланцюг Тоди (див. [31]). Разом з тим ланцюг Тоди є єдиною відомою цілком інтегрованою системою типу ФПУ. Для всіх інших подібних систем існуючі результати переважно стосуються точних або наближених часткових їх розв'язків.

Зауважимо, що один з перших строгих результатів для більш загальних (нескінченних) систем типу ФПУ був одержаний Жеро Фрізеке і Джонатаном Ватгісом у 1994 році ([15]). Вчені встановили умови існування відокремлених біжучих хвиль з певними припущеннями, які стосуються потенціалів взаємодії між частинками. Зокрема, встановлені умови задовольняють потенціали типу Леннарда-Джонса, Тоди та ін. Для доведення існування відокремлених біжучих хвиль вони використали метод умовної мінімізації і принцип концентрованої компактності ([19]).

Існування надзвукових відокремлених біжучих хвиль з іншими припущеннями було встановлено Дідьє Сметсом і Майклом Віллемом в праці [29] у 1997 році. Для доведення основного результату вони застосували одну із

версій теореми про гірський перевал, в якій відсутня так звана умова Пале–Смейла.

Переглянувши останній підхід, Олександр Панков і Клаус Пфлюгер у 2000 році довели існування періодичних біжучих хвиль за допомогою стандартної теореми про гірський перевал (з умовою Пале-Смейла), а існування відокремлених біжучих хвиль – за допомогою методу періодичних апроксимацій (див. [25]).

У 2005 році вийшла монографія Олександра Панкова [23], в якій можна знайти найбільш повний на той час огляд результатів про існування розв’язків і, зокрема, існування біжучих хвиль в системах ФПУ. Панков розглядав одновимірний нескінченний ланцюг зв’язаних частинок, які взаємодіють зі своїми попередньою і наступною сусідніми частинками. Динаміка такого ланцюга описується нескінченною системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$m_n \ddot{q}_n = U'_{n+1}(q_{n+1} - q_n) - U'_n(q_n - q_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де  $q_n = q_n(t)$  – координата  $n$ -ї частинки в момент часу  $t$ ,  $m_n$  – маса  $n$ -ї частинки,  $U_n$  – потенціал взаємодії між сусідніми  $n$ -ою та  $(n-1)$ -ю частинками. Панков досить детально дослідив не тільки питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль, але й питання коректності задачі Коші та існування періодичних розв’язків. Зауважимо, що у цьому випадку біжучою хвилею є розв’язок вигляду

$$q_n(t) = u(n - ct),$$

де функція  $u(s)$ ,  $s = n - ct$ , називається *профільною* функцією або *профілем* хвилі (вона визначає форму хвилі), а стала  $c$  задає *швидкість* хвилі.

У 2006 році Імран Батт і Джонатан Ваттіс в статті [11] показали, що двовимірна ґратка типу ФПУ може бути використана для моделювання передачі (трансмісії) електричного заряду. Ця ґратка представляє собою мережу повторюваних секцій електричної установки. При цьому кожна секція

складається з двох ідентичних лінійних *індукторів* (відповідають за створення робочого магнітного потоку) і нелінійного *конденсатора* (накопичує заряд і блокує постійний струм, пропускаючи змінний струм). Взаємне розташування вузлів ґратки, які визначаються за розташуванням конденсаторів, показано на рис. 1.2.

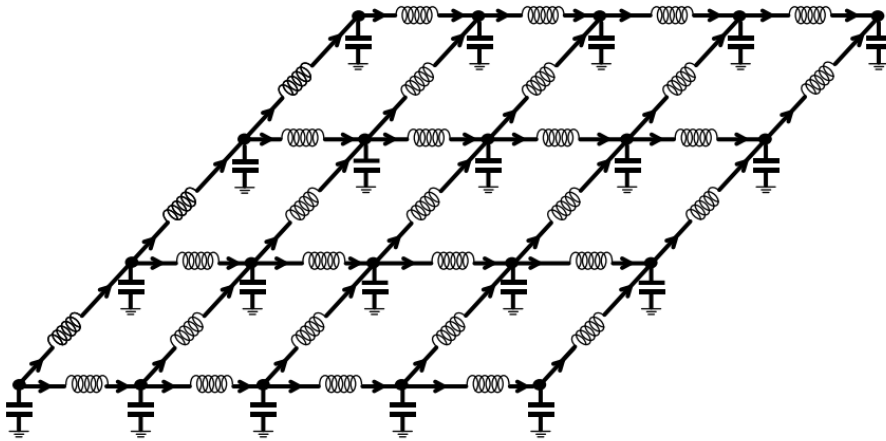


Рис.1.2. Двовимірна ґратка електричної передачі

Основні їх результати стосуються дослідження дискретних брізерів для двовимірної ґратки ФПУ та одержані за допомогою асимптотичних методів.

Аналогічні результати для двовимірної гексагональної ґратки ФПУ (рис. 1.3) вони одержали вже у наступному році в статті [12].

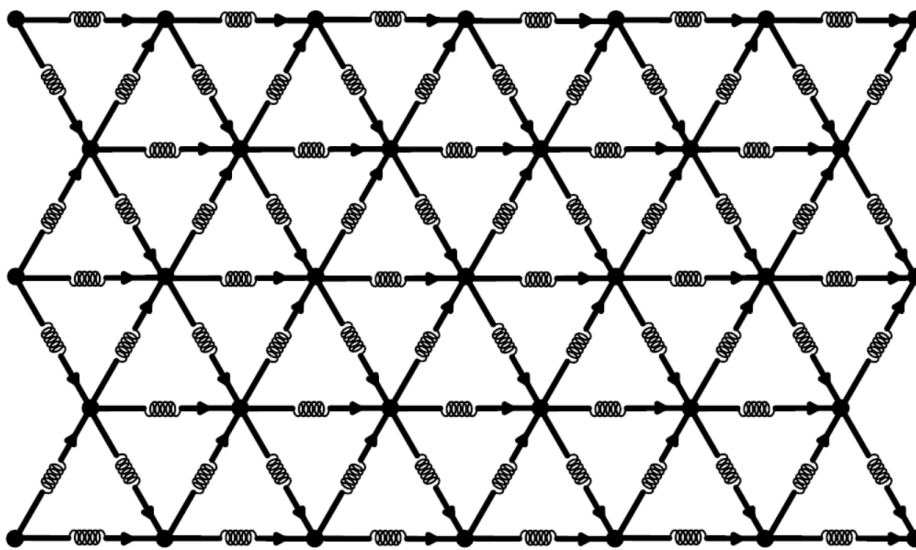


Рис. 1.3. Двовимірна гексагональна ґратка електричної передачі

У 2009 році Йі Ксянг, Джонатан Ваттіс, Хаді Сузанто та Лінда Каммінгс розглянули механічну пружинну ґратку, що описується двовимірною системою типу ФПУ, і побудували асимптотичне наближення бризера для цієї системи ([33]).

У 2012 році один із співавторів цього підрозділу (див. [36]) встановив умови існування періодичних біжучих хвиль в нескінченних системах типу ФПУ на двовимірній ґратці. В системах, які він розглядав, враховувалася лише локальна взаємодія, тобто кожна частинка взаємодіяла з чотирма своїми найближчими сусідами (по два по вертикалі і по горизонталі). Динаміка такої системи описується такою системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\ddot{q}_{n,m} = U'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + U'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n,m-1}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2.$$

Зауважимо, що у цьому випадку біжучою хвилею є розв'язок вигляду

$$q_{n,m}(t) = u(n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct),$$

де функція  $u(s)$ ,  $s = n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct$ , називається *профільною* функцією або *профілем* хвилі, а стала  $c$  задає швидкість хвилі, вектор  $\vec{l}(\cos \varphi, \sin \varphi)$  – хвильовий вектор (визначає напрям поширення хвилі).

У цій роботі вивчалися біжучі хвилі, які мали періодичний профіль відносних зміщень (тобто похідна профілю хвилі), тоді як сам профіль біжучої хвилі може бути не обов'язково періодичним. Для одержання основних результатів він використав варіаційний підхід. Зокрема, за допомогою теореми про гірський перевал було встановлено існування надзвукових періодичних біжучих хвиль з монотонними профілями, а за допомогою теореми про зачеплення – існування дозвукових періодичних біжучих хвиль.

У 2018 році авторами цього підрозділу (див. [2]) було встановлено існування відокремлених надзвукових біжучих хвиль з монотонними профілями для систем вигляду (1.9). Для одержання основних результатів було використано метод періодичних апроксимацій. Суть цього методу полягає в

тому, що відокремлені біжучі хвилі будуються за допомогою граничного переходу в періодичних біжучих хвилях, коли період прямує до нескінченності.

У 2019 році Олександр Панков ([24]) розглянув системи типу ФПУ з нелокальною взаємодією, в яких кожна частинка взаємодіє з  $2M$  сусідами:

$$\ddot{q}_j = \sum_{m=1}^M \left[ U'_m(q_{j+m} - q_j) - U'_m(q_j - q_{j-m}) \right], \quad j \in \mathbb{Z},$$

для яких за допомогою варіаційного підходу встановив умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

У 2020 році автори цього підрозділу (див. [5; 9]) за допомогою варіаційного підходу дослідили питання існування несталих періодичних і відокремлених надзвукових біжучих хвиль для систем вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,m} = & W'_1(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - W'_1(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + \\ & + W'_2(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - W'_2(q_{n,m} - q_{n,m-1}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \end{aligned}$$

де  $W_1$  і  $W_2$  – потенціали взаємодії сусідніх частинок. У цій статті періодичні умови та граничні умови накладалися вже на сам профіль хвилі, а не на його похідну, як це робилося у попередніх їх працях. Розглянемо більш детально результати цих статей.

**Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама з нелінійностями типу Амброзетті-Рабіновича.** Будемо вивчати систему типу Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці. Нехай  $q_{n,m}(t)$  – координата  $(n,m)$ -ї частинки (осцилятора) в момент часу  $t$ . Передбачається, що кожна частинка нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,m} = & W'_1(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - W'_1(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + \\ & + W'_2(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - W'_2(q_{n,m} - q_{n,m-1}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Будемо шукати розв'язки системи (1.1) у вигляді біжучих хвиль:

$$q_{n,m}(t) = u(n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct), \tag{1.2}$$

де  $\vec{l}(\cos \varphi, \sin \varphi)$  – фіксований *хвильовий вектор*, який задає напрям поширення хвилі. Функція  $u(s)$  неперервного аргументу  $s \in \mathbb{R}$  називається *профілем* біжучої хвилі. Стала  $c$  представляє собою *швидкість* хвилі. Якщо  $c > 0$ , то хвиля зміщується вправо, а якщо  $c < 0$ , то вліво. Для профілю  $u(s)$  біжучої хвилі, де  $s = n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct$ , рівняння (1.1) набуде вигляду

$$c^2 u''(s) = W_1'(u(s + \cos \varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s - \cos \varphi)) + W_2'(u(s + \sin \varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s - \sin \varphi)). \quad (1.3)$$

Спочатку будемо вивчати періодичні та відокремлені біжучі хвилі в рівнянні (1.3). Зокрема, профіль періодичної хвилі задовольняє умову періодичності

$$u(s + 2k) = u(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

а профіль відокремленої хвилі задовольняє крайові умови на нескінченності

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \quad (1.5)$$

Позначимо через  $E_k$  гільбертів простір

$$E_k = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u'(s + 2k) = u'(s), u(0) = 0\}$$

зі скалярним добутком

$$(u, v)_k = \int_{-k}^k u'(s)v'(s)ds,$$

а через  $X_k$  – гільбертів простір

$$X_k = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u(s + 2k) = u(s), u(0) = 0\}$$

з тим самим скалярним добутком, що й в  $E_k$  і відповідною нормою

$\|u\|_k = (u, u)_k^{\frac{1}{2}}$ . Цей простір є замкненим підпростором простору  $E_k$ . Більше того,  $u \in E_k$  належить  $X_k$  тоді і тільки тоді, коли похідна  $u'$  має нульове середнє значення, тобто

$$\langle u' \rangle := \int_{-k}^k u'(s)ds = 0.$$

Це означає, що  $X_k$  є 1-ковимірним підпростором простору  $E_k$ . А ортогональне доповнення є власне підпростір  $E_k$ , породжений функцією  $h_0(s) = s$ .

Позначимо через  $E$  гільбертів простір

$$E = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}), u(0) = 0\}$$

зі скалярним добутком

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(s)v'(s) ds$$

і відповідною нормою  $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ . Через  $\|\cdot\|_*$  позначимо норму на просторі  $E^*$ , який є спряженим (дуальним) до простору  $E$ . Простір  $E$  є 1-ковимірним підпростором гільбертового простору

$$\tilde{E} = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

зі скалярним добутком

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(s)v'(s) ds + u(0)v(0).$$

Нехай  $X$  замикання простору  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  по відношенню до норми

$$\|u\| = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |u'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, що  $X$  є замкненим підпростором простору  $\tilde{E}$ , а тому функції з  $X$  задовольняють умову (1.5).

Далі означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s + \cos \varphi) - u(s) = \int_s^{s+\cos \varphi} u'(\tau) d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s + \sin \varphi) - u(s) = \int_s^{s+\sin \varphi} u'(\tau) d\tau.$$

Ці оператори є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності (див. [дисертація], Лема 6.1).

$$\|Au\|_{L^\infty(-k,k)} \leq l_1(k) \cdot \|u\|_k, \quad \|Au\|_{L^2(-k,k)} \leq |\cos \varphi| \cdot \|u\|_k, \quad (1.6)$$

$$\|Bu\|_{L^\infty(-k,k)} \leq l_2(k) \cdot \|u\|_k, \quad \|Bu\|_{L^2(-k,k)} \leq |\sin \varphi| \cdot \|u\|_k, \quad (1.7)$$

де

$$l_1(k) = \begin{cases} |\cos \varphi| \sqrt{\left[\frac{1}{2k}\right] + 1}, & 0 < 2k < 1, \\ |\cos \varphi|, & 2k \geq 1, \end{cases}$$

та

$$l_2(k) = \begin{cases} |\cos \varphi| \sqrt{\left[\frac{1}{2k}\right] + 1}, & 0 < 2k < 1, \\ |\sin \varphi|, & 2k \geq 1, \end{cases}$$

де  $\left[\frac{1}{2k}\right]$  – ціла частина  $\frac{1}{2k}$ .

Припустимо, що виконуються умови:

$$(i_1) \quad W_i(r) = \frac{c_i}{2} r^2 + f_i(r), \quad i=1, 2, \quad \text{де} \quad f_i \in C^1(\mathbb{R}), \quad f_i(0) = f_i'(0) = 0 \quad i$$

$f_i'(r) = o(|r|)$  при  $r \rightarrow 0$ ;

(ii<sub>1</sub>) існують такі  $r_0 \in \mathbb{R}$  і  $\mu > 2$ , що  $f_i(r_0) > 0$  і  $\mu f_i(r) \leq r f_i'(r)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

Останню нерівність називають *нерівністю Амброзетті-Рабіновича*.

На просторах  $X_k$  та  $X$  розглянемо відповідно функціонали

$$J_k(u) = \int_{-k}^k \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) \right\} ds,$$

$$J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) \right\} ds.$$

Неважко переконатися, що ці функціонали є неперервно диференційовними на відповідних просторах, а їхні похідні визначаються формулами

$$\langle J'_k(u), h \rangle = \int_{-k}^k [c^2 u'(s) h'(s) - c_1^2 Au(s) Ah(s) - c_2^2 Bu(s) Bh(s) -$$

$$-f_1'(Au(s))Ah(s) - f_2'(Bu(s))Bh(s)], \quad u, h \in X_k,$$

$$\langle J'(u), h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [c^2 u'(s)h'(s) - c_1^2 Au(s)Ah(s) - c_2^2 Bu(s)Bh(s) - f_1'(Au(s))Ah(s) - f_2'(Bu(s))Bh(s)], \quad u, h \in X.$$

Легко бачити, що критичні точки цих функціоналів у просторах  $X_k$  та  $X$  є розв'язками рівняння (1.3), що задовольняють умови (1.4) та (1.5) відповідно.

За допомогою теореми про гірський перевал і методу періодичних апроксимацій відповідно, одержуються наступні результати.

**Теорема 1.1.** *Нехай виконуються умови  $(i_1)$ ,  $(ii_1)$ . Тоді для будь-яких  $k > 0$  і  $c^2 > a := \max\{c_1, c_2, 0\}$  рівняння (1.3) має несталий розв'язок  $u$ , що задовольняє умову (1.4).*

Перевіримо виконання умов теореми про гірський перевал для функціоналу  $J_k$ .

**Лема 1.1.** *За виконання умов теореми 6.1 функціонал  $J_k$  задовольняє умову Пале–Смейла.*

*Доведення.* Нехай  $\{u_n\} \subset X_k$  послідовність Пале–Смейла функціоналу  $J_k$  рівня  $b$ . Тоді для достатньо великих  $n$ ,

$$\begin{aligned} b + 1 + \frac{1}{\mu} \|u_n\|_k &\geq J_k(u_n) - \frac{1}{\mu} \langle J'_k(u_n), u_n \rangle = \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \int_{-k}^k \left( c^2 |u'_n(s)|^2 - c_1 |Au_n(s)|^2 - c_2 |Bu_n(s)|^2 \right) ds + \\ &+ \int_{-k}^k \left[ \frac{1}{\mu} \left( f_1'(Au_n(s)) Au_n(s) + f_2'(Bu_n(s)) Bu_n(s) \right) - f_1(Au_n(s)) - f_2(Bu_n(s)) \right] ds. \end{aligned}$$

Відповідно до умови леми другий і третій інтеграли є невід'ємними і тому, за лемою 6.1 ([41]), маємо

$$b + 1 + \frac{1}{\mu} \|u_n\|_k \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) (c^2 - a) \|u_n\|_k^2.$$

А це означає, що послідовність  $\{u_n\}$  є обмеженою у просторі  $X_k$ .

Тоді, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням),  $u_n \rightarrow u$  слабо в  $X_k$ , а отже,  $Au_n \rightarrow Au$  і  $Bu_n \rightarrow Bu$  слабо в  $X_k$ , і сильно в  $L^2(-k, k)$  і  $C([-k, k])$ . Прямим обчисленням показується, що

$$\begin{aligned} c^2 \|u_n - u\|_k^2 &= \int_{-k}^k c^2 |u'_n(s) - u'(s)|^2 ds = \\ &= \langle J'_k(u_n) - J'_k(u), u_n - u \rangle + c_1 \|Au_n - Au\|_{L^2(-k, k)}^2 + c_2 \|Bu_n - Bu\|_{L^2(-k, k)}^2 + \\ &\quad + \int_{-k}^k (f'_1(Au_n(s)) - f'_1(Au(s)))(Au_n(s) - Au(s)) ds + \\ &\quad + \int_{-k}^k (f'_2(Bu_n(s)) - f'_2(Bu(s)))(Bu_n(s) - Bu(s)) ds. \end{aligned}$$

Як і вище, всі доданки в правій частині останньої рівності збігаються до нуля.

Таким чином,  $\|u_n - u\|_k \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , і лему доведено.  $\square$

**Лема 1.2.** За виконання умов теореми 1.1 існують такі  $r_0 > 0$  і  $\alpha_0 > 0$ , які не залежать від  $k$ , що  $\inf_{\|u\|_k=r_0} J_k(u) > \alpha_0$ .

*Доведення.* Подамо функціонал  $J_k$  у вигляді

$$J_k(u) = \frac{1}{2} \Psi_k(u) - S_k(u),$$

де

$$\Psi_k(u) = \int_{-k}^k \left[ c^2 |u'(s)|^2 - c_1 |Au(s)|^2 - c_2 |Bu(s)|^2 \right] ds,$$

$$S_k(u) = \int_{-k}^k [f_1(Au(s)) + f_2(Bu(s))] ds.$$

Тоді за лемою 6.1 ([41]) маємо

$$J_k(u) + S_k(u) = \frac{1}{2} \Psi_k(u) \geq \frac{c^2 - a}{2} \|u\|_k^2.$$

Покажемо, що  $S_k(u) = o(\|u\|_k^2)$ . Згідно умови  $(i_1)$ , для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що при  $|r| \leq \delta$

$$\max\{f_1(r), f_2(r)\} \leq \frac{\varepsilon r^2}{2}.$$

Покладемо

$$r_0 = \frac{\delta}{\max\{l_1(k), l_2(k)\}},$$

і візьмемо  $u \in X_k$  з нормою  $\|u\|_k = r_0$ . Тоді, враховуючи цю лему, для майже всіх  $s$  маємо

$$\begin{aligned} |Au(s)| &\leq \|Au\|_{L^\infty(-k, k)} \leq l_1(k) \|u'\|_k \leq \delta, \\ |Bu(s)| &\leq \|Bu\|_{L^\infty(-k, k)} \leq l_2(k) \|u'\|_k \leq \delta. \end{aligned}$$

Отже,

$$S_k(u) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-k}^k \left[ (Au(s))^2 + (Bu(s))^2 \right] ds \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_k^2.$$

В силу довільності  $\varepsilon$ , маємо

$$S_k(u) = o(\|u\|_k^2).$$

Зокрема, якщо вибрати  $\varepsilon$  так, щоб  $0 < \varepsilon < c^2 - a$ , то одержимо

$$J_k(u) \geq (c^2 - a - \varepsilon) \frac{r_0^2}{2} > 0$$

і лему доведено.  $\square$

**Лема 1.3.** За виконання умов теореми 1.1 існує елемент  $e \in X_k$  з нормою  $\|e\|_k > r_0$  такий, що  $J_k(e) \leq 0$ .

*Доведення.* За лемою 3.1 ([41]), для всіх  $r$

$$\min\{f_1(r), f_2(r)\} \geq d|r|^\mu - d_0.$$

Нехай  $u \in X_k \setminus \{0\}$  та  $r > 0$ . Тоді маємо

$$\begin{aligned}
 J_k(ru) &= \frac{1}{2} \int_{-k}^k \left\{ c^2 r^2 |u'(s)|^2 - c_1 r^2 |Au(s)|^2 - c_2 r^2 |Bu(s)|^2 \right\} ds - \\
 &\quad - \int_{-k}^k \left\{ f_1(Aru(s)) + f_2(Bru(s)) \right\} ds \leq \\
 &\leq \frac{r^2}{2} \int_{-k}^k \left[ c^2 |u'(s)|^2 - c_1 |Au(s)|^2 - c_2 |Bu(s)|^2 \right] ds - \\
 &\quad - dr^\mu \int_{-k}^k \left[ |Au(s)|^\mu + |Bu(s)|^\mu \right] ds + 4kd_0.
 \end{aligned}$$

Оскільки  $\mu > 2$ , то  $J_k(ru) \rightarrow -\infty$  при  $r \rightarrow +\infty$ , а отже, існує таке  $r_0 = r_0(u) > 0$ , що  $J_k(ru) \leq 0$  для всіх  $r > r_0$  і лему доведено.  $\square$

*Доведення теореми 1.1.* Лема 1.1 – 1.3 показують, що для функціоналу  $J_k$  виконуються всі умови теореми про гірський перевал ([32]). Отже,  $J_k$  має ненульову критичну точку  $u \in X_k$ , яка є розв'язком задачі (1.3), (1.4). Несталість розв'язку очевидна. Теорему доведено.  $\square$

**Теорема 1.2.** *Нехай виконуються умови  $(i_1)$ ,  $(ii_1)$  і  $c^2 > a := \max\{c_1, c_2, 0\}$ . Тоді рівняння (1.3) має несталий розв'язок  $u$ , що задовольняє умову (1.5).*

*Доведення.* Міркуючи аналогічно, як у підрозділі 6.2 дисертації [41], неважко довести, що функціонал  $J$  задовольняє геометрію гірського перевалу в просторі  $E$ . Оскільки існує такий елемент  $e \in X$ , що  $J(e) < 0$ , то функціонал  $J$  задовольняє геометрію гірського перевалу і в просторі  $X$ . Тоді за теоремою С.3 ([23]), існує послідовність Пале-Смейла  $\{u_n\} \subset X$  рівня  $b$ , тобто  $J(u_n) \rightarrow b$  і  $J'(u_n) \rightarrow 0$  у просторі  $X^*$ .

Як і вище, послідовність  $\{u_n\}$  обмежена в  $X$ . Більше того, як і в лемі 6.11, маємо, що  $\|u_n\|$  обмежена знизу додатною сталою, а отже,  $\|u_n\| \not\rightarrow 0$ . Тому можна вважати, що  $u_n \rightarrow u$  слабо в  $X$ . Далі, як і в лемі 6.12 ([41]), для будь-якого  $r > 0$  існують  $\theta > 0$ , підпослідовність послідовності  $\{u_n\}$  (як і раніше позначатимемо через  $\{u_n\}$ ) та  $\{\eta_n\} \subset \mathbb{R}$ , такі, що

$$\int_{\eta_n-r}^{\eta_n+r} \left[ |Au_n(s)|^2 + |Bu_n(s)|^2 \right] ds \geq \theta.$$

Замінюючи  $u_n(s)$  на  $u_n(s - \eta_n)$ , одержуємо

$$\int_{-r}^r \left[ |Au_n(s)|^2 + |Bu_n(s)|^2 \right] ds \geq \theta$$

і нова послідовність  $\{u_n\}$  залишається послідовністю Пале-Смейла. Згідно теореми вкладення,  $Au_n \rightarrow Au$  і  $Bu_n \rightarrow Bu$  у просторі  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ , тобто рівномірно на відрізках  $i$ , отже,

$$\int_{-r}^r \left[ |Au(s)|^2 + |Bu(s)|^2 \right] ds \geq \theta > 0.$$

А це означає, що  $u \neq 0$ .

Далі, як і в доведенні лемі 6.13 ([41]), беремо  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  і показуємо, що  $\langle J'(u), g \rangle = 0$ , тобто  $u$  – нетривіальна критична точка функціоналу  $J$ , а отже, розв'язок рівняння (1.3), що задовольняє умови (1.5). Несталість розв'язку очевидна. Теорему доведено.  $\square$

**Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійностями.** Тепер розглянемо більш детально результати авторів цього підрозділу, одержані в статтях [3; 4; 7; 8]. Будемо вивчати рівняння (1.3) із так званими насичуваними нелінійностями. Це означає, що на нескінченності  $W_i'(r)$  ростуть як  $const \cdot r$ , тобто потенціали  $W_i(r)$  є асимптотично квадратичними на нескінченності ( $i=1,2$ ).

Далі будемо вивчати два види біжучих хвиль: періодичні і відокремленні. Але у цьому випадку періодична хвиля має періодичні профілі відносних зміщень, тобто періодичну похідну профілю:

$$u'(s + 2k) = u'(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

де  $k > 0$  – деяке число. Зауважимо, що профіль такої хвилі не обов'язково періодичний.

Профіль відокремленої хвилі задовольняє умови на нескінченності:

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u'(s) = u'(\pm\infty) = 0. \quad (1.9)$$

Всюди далі припускається, що виконуються умови:

(i<sub>2</sub>)  $W_i(r) = \frac{c_i^2}{2}r^2 + f_i(r)$ , де  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $f_i \in C^1(\mathbb{R})$ , причому  $f_i(0) = f_i'(0) = 0$  і  $f_i'(r) = o(r)$  при  $r \rightarrow 0$ ,  $i = 1, 2$ ;

(ii<sub>2</sub>) існує скінченна границя  $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} \frac{f_i'(r)}{r} = l$  та функції  $g_i(r) = f_i'(r) - lr$  обмежені ( $i = 1, 2$ );

(iii<sub>2</sub>)  $f_i(r) \geq 0$  для всіх  $r \in \mathbb{R}$  і для будь-якого  $r_0 > 0$  існує  $\delta_0 = \delta_0(r_0) > 0$  таке, що  $\frac{1}{2}rf_i'(r) - f_i(r) \geq \delta_0$  для  $|r| \geq r_0$  ( $i = 1, 2$ ).

**Зауваження 1.1.** Зроблені припущення зокрема означають, що функції  $f_i(r)$

зростаючі при  $r \geq 0$  і спадні при  $r \leq 0$ , а  $G_i(r) < 0$  для всіх  $r \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Для спрощення записів покладемо

$$h_i(r) := f_i'(r) = lr + g_i(r), \quad i = 1, 2,$$

та

$$G_i(r) := \int_0^r g_i(\rho) d\rho, \quad i = 1, 2,$$

і додатково припустимо, що виконується одна з умов:

$$(iv_2) \ G_i(r) \rightarrow -\infty \text{ при } r \rightarrow \pm\infty \ (i=1,2);$$

або

$$(v_2) \ c^2 \left( \frac{\pi n}{k} \right)^2 - 4(c_1^2 + l) \sin \left( \frac{\pi n}{2k} \cos \varphi \right) - 4(c_2^2 + l) \sin^2 \left( \frac{\pi n}{2k} \sin \varphi \right) \neq 0 \text{ для всіх}$$

$n \in \mathbb{N}$ .

Як і вище, на просторі  $E_k$  розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \int_{-k}^k \left[ \frac{c^2}{c} (u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2} (Au(s))^2 - \frac{c_2^2}{2} (Bu(s))^2 - f_1(Au(s)) - f_2(Bu(s)) \right] ds. \quad (1.10)$$

Неважко переконатися, що  $J_k$  – функціонал класу  $C^1$  на  $E_k$ , а його похідна визначається формулою

$$\begin{aligned} \langle J'_k(u), h \rangle = & \int_{-k}^k [c^2 u'(s) h'(s) - c_1^2 Au(s) Ah(s) - c_2^2 Bu(s) Bh(s) - \\ & - f'_1(Au(s)) Ah(s) - f'_2(Bu(s)) Bh(s)] \end{aligned}$$

для  $u, h \in E_k$ . Більше того, критичні точки функціоналу  $J_k \in$  розв'язками рівняння (1.3), що задовольняють умову (1.8).

Таким чином, для встановлення існування розв'язків рівняння (1.3), що задовольняють умову (1.8), достатньо довести існування нетривіальних критичних точок функціоналу  $J_k$ . Для цього буде використано спеціальну форму теорему про гірський перевал (див. [Willem, Pankov]).

Нехай на гільбертовому просторі  $H$  з нормою  $\|\cdot\|$  заданий функціонал  $I: H \rightarrow \mathbb{R}$  класу  $C^1$ . Кажуть, що  $I$  задовольняє умову Пале-Смейла, якщо виконується така умова:

(PS) якщо  $\{u_n\} \subset H$  така послідовність, що  $\{I(u_n)\}$  обмежена та  $I'(u_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , то  $\{u_n\}$  містить збіжну послідовність.

Зауважимо, що при перевірці цієї умови можна, без обмеження загальності, вважати, що числова послідовність  $\{I(u_n)\}$  збігається, оскільки з обмеженої числової послідовності можна виділити збіжну послідовність.

Послідовність  $\{u_n\}$  точок гільбертового простору  $H$  називається *послідовністю Пале-Смейла* функціоналу  $I$  на деякому рівні  $b$ , якщо  $I(u_n) \rightarrow b$  та  $I'(u_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Тоді, враховуючи сказане вище, умову Пале-Смейла можна переформулювати таким чином:

*(PS) будь-яка послідовність Пале-Смейла  $\{u_n\} \subset H$  містить збіжну під-послідовність.*

Якщо існують  $e \in H$  і  $r > 0$ , такі, що  $\|e\| > r$  і

$$\beta := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e),$$

то кажуть, що функціонал  $I$  задовольняє *геометрію гірського перевалу*.

Наступну теорему типу теореми про гірський перевал можна знайти в [10] (Теорема 10).

**Теорема 1.3.** *Нехай на гільбертовому просторі  $H$  заданий функціонал  $I: H \rightarrow \mathbb{R}$  класу  $C^1$ , який задовольняє умову Пале-Смейла та геометрію гірського перевалу  $I$  припустимо, що  $P: H \rightarrow H$  таке неперервне відображення, що*

$$I(Pu) \leq I(u)$$

для всіх  $u \in H$ , причому  $P(0) = 0$  і  $P(e) = e$ . Тоді існує критична точка  $u \in \overline{PH}$  (замикання  $PH$ ) функціоналу  $I$  з критичним значенням

$$I(u) = b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \beta,$$

де  $\Gamma := \{\gamma \in ([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ .

Покладемо

$$(Pu)(s) := \int_0^s |u'(t)| dt.$$

**Зауваження 1.2.** *Неважко перевірити, що  $P$  неперервно відображає простір  $E_k$  в себе і  $PE_k$  складається із неспадних функцій.*

Далі нам знадобиться така величина:

$$c_0 = c_0(\varphi) := \sqrt{c_1^2 \cos^2 \varphi + c_2^2 \sin^2 \varphi}.$$

Наступна теорема встановлює існування періодичних біжучих хвиль з неспадними і незростаючими профілями.

**Теорема 1.4.** *Нехай виконуються умови  $(i_2) - (iii_2)$  та  $(iv_2)$  або  $(v_2)$ . Тоді, якщо  $\varphi \in \left[ \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $k > 0$ , і  $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$ , то рівняння (1.3) має несталі як неспадні, так і незростаючі розв'язки, які задовольняють умову (1.8).*

Зауважимо, що з точки зору фізики, зростаючі хвилі є хвилями розширення, а спадні — хвилями стиснення.

**Зауваження 1.3.** *Оскільки ми розглядаємо монотонні хвилі, то можемо припустити, що умови теореми 1.4 виконуються для  $r \geq 0$  (відповідно для  $r \leq 0$ ), та отримати неспадні (відповідно, незростаючі) біжучі хвилі. З іншого боку, при доведенні теореми можна припустити, що потенціали  $f_i(r)$  є парними функціями.*

Для зручності подамо функціонал  $J_k$  у вигляді:

$$J_k(u) = \frac{1}{2} Q_k(u, u) - \int_{-k}^k [G_1(Au(s)) + G_2(Bu(s))] ds, \quad (1.11)$$

де

$$Q_k(u, h) = \int_{-k}^k [c^2 u'(s) v'(s) - (c_1^2 + l) Au(s) Ah(s) - (c_2^2 + l) Bu(s) Bh(s)] ds.$$

Тоді похідну можна записати у вигляді

$$\left\langle J'_k(u), h \right\rangle = Q_k(u, k) - \int_{-k}^k [g_1(Au(s))Ah(s) + g_2(Bu(s))Bh(s)] ds \quad (1.12)$$

для  $u, h \in E_k$ .

Нехай

$$\sigma(\xi) := c^2 \xi^2 - 4(c_1^2 + l) \sin^2 \left( \frac{\xi}{2} \cos \varphi \right) - 4(c_2^2 + l) \sin^2 \left( \frac{\xi}{2} \sin \varphi \right)$$

та  $\xi_n = \frac{\pi n}{k}$ , де  $n = 1, 2, \dots$ . Покладемо

$$e_0(s) = s, \quad e_n^{(1)}(s) = \sin(\xi_n s), \quad e_n^{(2)}(s) = \cos(\xi_n s) - 1,$$

де  $n = 1, 2, \dots$ . Тоді система функцій

$$\{e_0, e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : n = 1, 2, \dots\},$$

є повною ортогональною системою в  $E_k$ . Ця система є також ортогональною по відношенню до білінійної форми  $Q_k$ . Крім того,

$$Q_k(e_0, e_0) = 2k(c^2 - c_0^2 - l)$$

та

$$Q_k(e_n^{(1)}, e_n^{(1)}) = Q_k(e_n^{(2)}, e_n^{(2)}) = k\sigma(\xi_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Нехай

$$E_k^- := \text{span} \{e_0, e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : \sigma(\xi_n) < 0\},$$

$$E_k^0 = \text{span} \{e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : \sigma(\xi_n) = 0\}$$

та

$$E_k^+ = \text{span} \{e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : \sigma(\xi_n) > 0\}.$$

Ці підпростори є взаємно ортогональними щодо скалярного добутку і білінійної форми  $Q_k$ , та

$$E_k = E_k^- \oplus E_k^0 \oplus E_k^+.$$

Підпростори  $E_k^-$  та  $E_k^0$  є скінченновимірними, а  $E_k^+$  – нескінченновимірний. Очевидно, що форма  $Q_k$  від’ємно визначена на  $E_k^-$ , додатно визначена на  $E_k^+$ , і нульова на  $E_k^0$ .

Позначимо через  $u^-$ ,  $u^0$  та  $u^+$  ортогональні проєкції елемента  $u \in E_k$  відповідно на підпростори  $E_k^-$ ,  $E_k^0$  та  $E_k^+$ .

**Лема 1.4.** *За виконання умов теореми 1.4 функціонал  $J_k$  задовольняє умову Пале-Смейла.*

*Доведення.* Нехай  $\{u_n\} \subset E_k$  – послідовність Пале-Смейла функціоналу  $J_k$ , тобто  $\{J_k(u_n)\}$  обмежена і  $J_k'(u_n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Доведемо спочатку, що послідовність  $\{u_n\}$  обмежена. Оскільки форма  $Q_k$  додатно (відповідно, від’ємно) визначена на  $E_k^+$  (відповідно,  $E_k^-$ ), то існує  $\alpha > 0$  таке, що

$$\pm Q_k(u, u) \geq \alpha \|u\|_k^2$$

для всіх  $u \in E_k^\pm$ . Далі, оскільки  $J_k'(u_n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\left\| J_k'(u_n) \right\|_{k,*} \leq 1$$

для всіх досить великих  $n$ . Таким чином, з рівності (1.12) з  $u = u_n$  та  $h = u_n^\pm$  маємо, що

$$\alpha \|u_n^\pm\|_k^2 \leq \|u_n^\pm\|_k + \int_{-k}^k \left[ |g_1(Au_n(s))| |Au_n^\pm(s)| + |g_2(Bu_n(s))| |Bu_n^\pm(s)| \right] ds$$

для всіх досить великих  $n$ . Звідси за припущеннями  $(ii_2)$  та нерівностями (1.6), (1.7) одержуємо, що

$$\alpha \|u_n^\pm\|_k^2 \leq C \|u_n^\pm\|_k$$

з деяким  $C > 0$ . Отже, послідовності  $\{u_n^+\}$  та  $\{u_n^-\}$  обмежені.

У випадку, коли виконується  $(v_2)$ , маємо, що  $E_k^0 = \{0\}$ , і, отже,  $\{u_n\} = \{u_n^+ + u_n^-\}$  обмежена послідовність.

Нехай тепер виконується умова  $(iv_2)$ . Оскільки послідовність  $\{u_n^- + u_n^+\}$  обмежена, то залишається показати, що  $\{u_n^0\} \subset E_k^0$  є також обмеженою. Припустимо протилежне. Тоді, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що  $\|u_n^0\|_k \rightarrow \infty$ . За означенням підпростору  $E_k^0$ , можна  $u_n^0$  подати у вигляді

$$u_n^0(s) = \beta_n \sin(\xi^0 s + \varphi_n),$$

де  $|\beta_n| \rightarrow \infty$ , а  $\xi^0 \neq 0$  є добутком деякого натурального числа на  $\frac{\pi}{k}$  і таке, що  $\sigma(\xi^0) = 0$ . Тоді

$$Au_n^0(s) = 2\beta_n \sin\left(\frac{\xi^0}{2} \cos \varphi\right) \cos\left(\xi^0 \left(s + \frac{1}{2} \cos \varphi\right) + \varphi_n\right),$$

$$Bu_n^0(s) = 2\beta_n \sin\left(\frac{\xi^0}{2} \sin \varphi\right) \cos\left(\xi^0 \left(s + \frac{1}{2} \sin \varphi\right) + \varphi_n\right).$$

Це означає, що існують дві сталі  $\delta > 0$ ,  $\gamma > 0$  і підмножини  $M_n \subset [-k; k]$  міри  $\delta$ , такі, що  $|Au_n^0(s)| + |Bu_n^0(s)| \geq \gamma |\beta_n|$  на  $M_n$ .

Рівність (1.11) означає, що

$$J_k(u_n) = \frac{1}{2} \left[ Q_k(u_n^+, u_n^+) + Q_k(u_n^-, u_n^-) \right] - \int_{-k}^k \left[ G_1(Au_n^+(s) + Au_n^-(s) + Au_n^0(s)) + G_2(Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s) + Bu_n^0(s)) \right] ds. \quad (1.13)$$

За зауваженням 1.1.,  $G_i(r) < 0$  на  $\mathbb{R}$ , а нерівності (1.6) і (1.7) показують, що послідовності  $\{Au_n^+(s) + Au_n^-(s)\}$  та  $\{Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s)\}$  є обмеженими в  $L^\infty(-k; k)$ . Отже,

$$-\int_{-k}^k \left[ G_1(Au_n^+(s) + Au_n^-(s) + Au_n^0(s)) + G_2(Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s) + Bu_n^0(s)) \right] ds \geq$$

$$\geq - \int_{M_n} \left[ G_1 \left( Au_n^+(s) + Au_n^-(s) + Au_n^0(s) \right) + G_2 \left( Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s) + Bu_n^0(s) \right) \right] ds \rightarrow +\infty.$$

Оскільки всі інші доданки в правій частині (1.13) є обмеженими, то  $J_k(u_n) \rightarrow +\infty$ . Одержали протиріччя, яке і доводить, що  $\{u_n^0\} \subset E_k^0$  обмежена.

Отже, послідовність Пале-Смейла  $\{u_n\}$  обмежена.

Обмеженість послідовності  $\{u_n\}$  означає, що переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням),  $u_n \rightarrow u$  слабо в  $E_k$ , а отже,  $Au_n \rightarrow Au$  і  $Bu_n \rightarrow Bu$  слабо в  $E_k$ , і сильно в  $L^\infty(-k; k)$  і  $C([-k, k])$ . Прямим обчисленням показується, що

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_k^2 &= \int_{-k}^k \left( c^2 (u_n'(s) - u'(s))^2 - c^2 (u_n(s) - u(s))^2 \right) ds = \\ &= \langle J'_k(u_n) - J'_k(u), u_n - u \rangle + c_1^2 \|Au_n - Au\|_{L^2(-k, k)}^2 + c_2^2 \|Bu_n - Bu\|_{L^2(-k, k)}^2 + \\ &\quad + \int_{-k}^k (f_1'(Au_n(s)) - f_1'(Au(s)))(Au_n(s) - Au(s)) ds + \\ &\quad + \int_{-k}^k (f_2'(Bu_n(s)) - f_2'(Bu(s)))(Bu_n(s) - Bu(s)) ds. \end{aligned}$$

Очевидно, що всі доданки в правій частині останньої рівності збігаються до нуля, а отже,  $\|u_n - u\|_k \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Лему доведено.  $\square$

**Лема 1.5.** За виконання умов теореми 1.1 функціонал  $J_k$  задовольняє умову Пале-Смейла.

*Доведення.* З умови  $(i_2)$  випливає, що для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $r_0 > 0$ , що  $|f_i(r)| \leq \varepsilon r^2$  при  $r \leq r_0$  ( $i=1, 2$ ). Тоді, враховуючи нерівності (1.6) та (1.7), при  $\|u\|_k \leq r_0$ , маємо

$$\begin{aligned}
 J_k(u) &\geq \int_{-k}^k \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - \frac{c_1^2}{2} |Au(s)|^2 - \varepsilon |Au(s)|^2 - \frac{c_2^2}{2} |Bu(s)|^2 - \varepsilon |Bu(s)|^2 \right\} ds \geq \\
 &\geq \frac{c^2}{2} \|u\|_k^2 - \frac{c_1^2}{2} |\cos \varphi|^2 \|u\|_k^2 - \varepsilon |\cos \varphi|^2 \|u\|_k^2 - \frac{c_2^2}{2} |\sin \varphi|^2 \|u\|_k^2 - \varepsilon |\sin \varphi|^2 \|u\|_k^2 = \\
 &= \frac{c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon}{2} \|u\|_k^2.
 \end{aligned}$$

Тепер, вибираючи  $\varepsilon$  достатньо малим, одержуємо, що існує таке  $\beta > 0$ , що  $J_k(u) \geq \beta > 0$  при  $\|u\|_k = r_0$ .

Покажемо тепер, що існує такий елемент  $e \in E_k$ , що  $J_k(e) < 0$ . Нехай  $e_0(s) = s$  і  $\tau > 0$ . З умови  $(ii_2)$  випливає, що  $|G_i(r)| \leq C|r|$  з деякою сталою  $C > 0$ . Тоді рівність (1.11) означає, що

$$J_k(\tau e_0) \leq k(c^2 - c_0^2 - l)\tau^2 + 2k(|\cos \varphi| + |\sin \varphi|)|\tau|.$$

Таким чином,  $J_k(\tau e_0) < 0$  для достатньо великих  $|\tau|$ , а отже, існує таке  $\tau_0$ , що  $J_k(\tau_0 e_0) < 0$ . Тепер залишається взяти  $e = \tau_0 e_0$  і лему доведено.  $\square$

*Доведення теореми 1.4.* Нехай умови теореми виконуються для  $r \geq 0$ . Лема 1.4 та 1.5 показують, що для функціонал  $J_k$  виконуються майже всі умови теореми 1.3. Залишається тільки перевірити виконання нерівності  $J_k(Pu) \leq J_k(u)$  для всіх  $u \in E_k$ .

Нехай  $\varphi \in \left[ 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi \right]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Оскільки

$$(APu)(s) = \int_s^{s+\cos \varphi} (Pu)'(\tau) d\tau = \int_s^{s+\cos \varphi} |u'(\tau)| d\tau \geq \left| \int_s^{s+\cos \varphi} u'(\tau) d\tau \right|$$

і

$$(BPu)(s) = \int_s^{s+\sin \varphi} (Pu)'(\tau) d\tau = \int_s^{s+\sin \varphi} |u'(\tau)| d\tau \geq \left| \int_s^{s+\sin \varphi} u'(\tau) d\tau \right|,$$

то

$$(APu)(s) \geq |(APu)(s)| \geq (Au)(s)$$

i

$$(BPu)(s) \geq |(BPu)(s)| \geq (Bu)(s).$$

Оскільки, згідно зауваження 1.1, потенціали  $f_i(r)$  є неспадними, то

$$\begin{aligned} J_k(Pu) &= \int_{-k}^k \left[ c^2 ((Pu)'(s))^2 - c_1^2 (APu(s))^2 - c_2^2 (BPu(s))^2 - \right. \\ &\quad \left. - f_1(APu(s)) - f_2(BPu(s)) \right] ds = \\ &= \int_{-k}^k \left[ c^2 (u'(s))^2 - c_1^2 (APu(s))^2 - c_2^2 (BPu(s))^2 - f_1(APu(s)) - f_2(BPu(s)) \right] ds \leq \\ &\leq \int_{-k}^k \left[ c^2 (u'(s))^2 - c_1^2 (Au(s))^2 - c_2^2 (Bu(s))^2 - f_1(Au(s)) - f_2(Bu(s)) \right] ds = J_k(u). \end{aligned}$$

Таким чином, за теоремою 1.3 існує нетривіальна критична точка  $u \in PE_k$  функціоналу  $J_k$  така, що  $J_k(u) \geq \beta$  з  $\beta > 0$  з леми 1.1. Отже,  $J_k$  має ненульову критичну точку  $u \in PE_k \subset E_k$ , яка є розв'язком задачі (1.3), (1.8). Крім того, за зауваженням 1.2 цей розв'язок неспадний і не сталий в силу означення простору  $E_k$ .

Випадок  $r \geq 0$  аналогічний (із заміною  $P$  на  $-P$ ). При цьому одержуються незростаючі розв'язки.

Легко бачити, що при  $\varphi \in \left[ \pi + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , у випадку  $r \geq 0$  одержуються незростаючі хвилі, а у випадку  $r \leq 0$  – неспадні. Теорему доведено.  $\square$

Далі будемо розглядати випадок видокремлених біжучих хвиль, профіль яких є розв'язком рівняння (1.3), що задовольняє умови на нескінченності (1.9). Такі хвилі є в деякому сенсі граничним випадком розглянутих вище періодичних біжучих хвиль при  $k \rightarrow \infty$ . Тому їх буде побудовано за допомогою граничного переходу при  $k \rightarrow \infty$  в критичних точках функціоналу

$J_k$ . Цей метод називають методом періодичних апроксимацій.

Позначимо через  $E$  гільбертів простір

$$E = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}), u(0) = 0\}$$

зі скалярним добутком

$$(u, v)_{\bar{E}} = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(s)v'(s)ds + u(0)v(0).$$

Всюди далі припускається, що виконуються умови  $(i_2) - (iii_2)$ .

На просторі  $E$  розглянемо функціонал

$$J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{c^2}{2} (u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2} (Au(s))^2 - \frac{c_2^2}{2} (Bu(s))^2 - f_1(Au(s)) - f_2(Bu(s)) \right] ds. \quad (1.14)$$

Неважко переконатися, що  $J$  – функціонал класу  $C^1$  на  $E$ , а його похідна визначається формулою

$$\begin{aligned} \langle J'(u), h \rangle = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ c^2 u'(s)h'(s) - c_1^2 Au(s)Ah(s) - c_2^2 Bu(s)Bh(s) - \right. \\ & \left. - f_1'(Au(s))Ah(s) - f_2'(Bu(s))Bh(s) \right] ds \end{aligned}$$

для  $u, h \in E$ . Більше того, критичні точки функціоналу  $J$  є розв'язками рівняння (1.3), що задовольняють умови (1.9).

Наступна теорема встановлює існування відокремлених біжучих хвиль з неспадними і незростаючими профілями.

**Теорема 1.5.** *Нехай виконуються умови  $(i_2) - (iii_2)$ . Тоді, якщо*

$\varphi \in \left[ \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi \right]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  і  $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$ , *то рівняння (1.3) має несталі як*

*неспадні, так і незростаючі розв'язки, які задовольняють умови (1.9).*

Далі нам знадобляться такі дві леми (див. [Панков, Ротос], Лема 2 і Лема 3). Перша з них є одним із варіантів принципу концентрованої компактності Ліонса [19].

**Лема 1.6.** Нехай послідовність  $\{u_n\} \subset E_{k_n}, k_n \rightarrow \infty$ , така, що  $\|u_n\|_{k_n}$  обмежена.

Тоді виконується одна з таких двох можливостей:

(a) (нерозпливання) для будь-якого  $\sigma > 0$  існує  $\eta > 0$ , підпослідовність послідовності  $\{u_n\}$  (з тим самим позначенням) та послідовність  $\{\zeta_n\} \subset \mathbb{R}$ , такі, що

$$\int_{\zeta_n - \sigma}^{\zeta_n + \sigma} (|Au_n(s)|^2 + |Bu_n(s)|^2) ds \geq \eta; \quad (1.15)$$

або

(b) (розпливання)  $\|Au_n\|_{L^p(-k_n, k_n)} + \|Bu_n\|_{L^p(-k_n, k_n)} \rightarrow 0$  для всіх  $p > 2$ .

Крім того, якщо додатково виконується умова  $(i_2)$ ,  $c > c_0$  і  $\|J_k(u_n)\|_{k_n} \rightarrow 0$ , то у випадку (b) маємо, що  $\|(u_n)\|_{k_n} \rightarrow 0$ .

Друга лема дає верхню рівномірну оцінку для значення гірського перевалу функціоналу  $J_k$ .

**Лема 1.7.** Нехай виконуються умови  $(i_2) - (iii_2)$ , і  $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$ . Тоді існує така додатна стала  $K$ , що значення гірського перевалу  $b_k$  функціоналу  $J_k$  задовольняє нерівність

$$b_k \leq K \quad (1.16)$$

для всіх  $k > 1$ .

*Доведення теореми 1.5.* Зафіксуємо довільну послідовність  $\{k_n\}, k_n \rightarrow \infty$ , і виберемо послідовність  $\{c_n\}, c_n \rightarrow c$  так, щоб теорема 1.4 гарантувала існування біжучої хвилі з неспадним профілем  $u_n \in E_{k_n}$  та швидкістю  $c_n$  ( $c_n = c$  у випадку умови  $(iv_2)$ ). Далі ми будемо часто переходити до підпослідовності без зміни позначення. Також позначимо через  $\tilde{J}_{k_n}$  функціонал  $J_{k_n}$  з  $c$  заміненним на  $c_n$ .

Методом від супротивного покажемо, що послідовність  $\{\|u_n\|_{k_n}\}$  обмежена. Припустимо протилежне. Тоді, переходячи до підпослідовності,

можна вважати, що  $\|u_n\|_{k_n} \rightarrow \infty$ . За лемою 1.6, для  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{k_n}}$  маємо, що виконується одна з двох можливостей: (a) (нерозпливання) або (b) (розпливання).

Припустимо, що виконується нерозпливання. Необмежуючи загальності можна вважати, що в рівності (2.13):  $\zeta_n = 0$ . Оскільки  $\|v_n\|_{k_n} = 1$ , то, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що  $v_n \rightarrow v$  слабо в  $H_{loc}^1(\mathbb{R})$  і рівномірно на кожному скінченному інтервалі. Більше того,  $v \in E$  та  $\|v\| \leq 1$ , і нерозпливання означає, що  $v$  не є сталою.

Нехай тепер  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Тоді для всіх достатньо великих  $n$ :  $2k_n$ -періодизація  $h_n$  функції  $h$  є коректно визначеною і належить простору  $E_{k_n}$ , причому

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\|u_n\|_{k_n}} \langle \tilde{J}'_k(u_n), h_n \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [c_n^2 v_n'(s) h'(s) - (c_1^2 + l) A v_n(s) A h(s) - (c_2^2 + l) B v_n(s) B h(s)] ds - \\ &\quad - \frac{1}{\|u_n\|_{k_n}} \int_{-\infty}^{+\infty} [g_1(Au_n(s)) + g_2(Bu_n(s))] ds. \end{aligned}$$

Оскільки функції  $g_i$  є обмеженими, то другий інтеграл в правій частині останньої рівності прямує до нуля. Тому, переходячи до границі при  $n \rightarrow \infty$ , одержуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [c_n^2 v_n'(s) h'(s) - (c_1^2 + l) A v(s) A h(s) - (c_2^2 + l) B v(s) B h(s)] ds = 0.$$

Це означає, що

$$\begin{aligned} (Lv)(s) &:= -c^2 v''(s) + (c_1^2 + l)(v(s + \cos \varphi) + v(s - \cos \varphi) - 2v(s)) + \\ &\quad + (c_2^2 + l)(v(s + \sin \varphi) + v(s - \sin \varphi) - 2v(s)) = 0. \end{aligned}$$

Оператор  $L$  є псевдодиференціальним оператором з символом  $\sigma(\xi)$ , введеним у попередньому підрозділі. Очевидно, що  $Lv' = 0$  та  $v' \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . З іншого боку, використовуючи перетворення Фур'є, одержуємо, що  $\sigma(\xi)\hat{v}'(\xi) = 0$  і, отже,  $v' = 0$ . Отримали протиріччя, яке виключає нерозпливання.

Тепер покажемо методом від супротивного, що для  $v_n$  розпливання також неможливе. У цьому випадку маємо, що

$$\|Av_n\|_{L^p(-k_n, k_n)} + \|Bv_n\|_{L^p(-k_n, k_n)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

для всіх  $p > 2$ . Зафіксуємо довільне таке  $p$ . Маємо, що

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\|u_n\|_{k_n}^2} \langle \tilde{J}'_k(u_n), h_n \rangle = \\ &= \int_{-k_n}^{k_n} [c_n^2 v_n'(s)^2 - c_1^2 (Av_n(s))^2 - c_2^2 (Bv_n(s))^2] ds - \\ &\quad - \int_{-k_n}^{k_n} \left[ \frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)} (Av_n(s))^2 + \frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)} (Bv_n(s))^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Оскільки  $c_n \rightarrow c$ , то  $2\alpha_0 := \inf(c_n \rightarrow c_0) > 0$  і, отже,

$$2\alpha_0 = 2\alpha_0 \|v_n\|_{k_n}^2 \leq \int_{-k_n}^{k_n} \left[ \frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)} (Av_n(s))^2 + \frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)} (Bv_n(s))^2 \right] ds. \quad (1.17)$$

За припущенням  $(i_2)$ , існує таке  $r_0 > 0$ , що  $\frac{h_i(r)}{r} \leq \alpha_0$  при  $|r| \leq r_0$ . Нехай

$D_n = \{s \in [-k_n, k_n] : \max\{|Au_n(s)|, |Bu_n(s)|\} \leq r_0\}$  і  $CD_n = [-k_n, k_n] \setminus D_n$ . Тоді

$$\begin{aligned} &\int_{D_n} \left[ \frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)} (Av_n(s))^2 + \frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)} (Bv_n(s))^2 \right] ds \leq \\ &\leq \alpha_0 \int_{D_n} [(Av_n(s))^2 + (Bv_n(s))^2] ds \leq \\ &\leq \left[ \|Av_n\|_{L^2(-k_n, k_n)}^2 + \|Bv_n\|_{L^2(-k_n, k_n)}^2 \right] \leq \alpha_0 \|v_n\|_{k_n}^2 = \alpha_0. \end{aligned}$$

Звідси враховуючи рівність (1.17), одержуємо, що

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{CD_n} \left[ \frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)} (Av_n(s))^2 + \frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)} (Bv_n(s))^2 \right] ds \geq \alpha_0. \quad (1.18)$$

З іншого боку, за припущенням  $(ii_2)$ , існує така стала  $\alpha_1 > 0$ , що  $|h_i(r)| \leq \alpha_1 |r|$  для всіх  $r$ . Таким чином, за нерівністю Гельдера маємо

$$\begin{aligned} & \int_{CD_n} \left[ \frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)} (Av_n(s))^2 + \frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)} (Bv_n(s))^2 \right] ds \geq \\ & \leq \alpha_1 (meas(CD_n))^{\frac{p-2}{p}} \left( |Av_n|_{L^p(-k_n, k_n)}^{\frac{2}{p}} + |Bv_n|_{L^p(-k_n, k_n)}^{\frac{2}{p}} \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

де  $meas$  позначає міру Лебега. З нерівності (1.18), враховуючи (1.17), одержуємо, що  $meas(CD_n) \rightarrow \infty$ . Тоді, за припущенням  $(iii_2)$ , маємо

$$\begin{aligned} b_{k_n} &= \tilde{J}_{k_n}(u_n) = \tilde{J}_{k_n}(u_n) - \frac{1}{2} \langle \tilde{J}'_{k_n}(u_n), u_n \rangle = \\ &= \int_{-k_n}^{k_n} \left[ \frac{1}{2} h_1(Au_n(s)) Au_n(s) - f_1(Au_n(s)) \right] ds + \\ &+ \int_{-k_n}^{k_n} \left[ \frac{1}{2} h_2(Bu_n(s)) Bu_n(s) - f_2(Bu_n(s)) \right] ds \geq \\ &\geq \int_{CD_n} \left[ \frac{1}{2} h_1(Au_n(s)) Au_n(s) - f_1(Au_n(s)) \right] ds + \\ &+ \int_{CD_n} \left[ \frac{1}{2} h_2(Bu_n(s)) Bu_n(s) - f_2(Bu_n(s)) \right] ds \geq 2\delta_0 meas(CD_n) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отримали протиріччя, оскільки за лемою 1.7,  $b_k$  обмежено зверху. Отже, розпливання також неможливе, а це означає, що припущення про необмеженість послідовності  $\{\|u_n\|_{k_n}\}$  хибне.

Обмеженість  $\{\|u_n\|_{k_n}\}$  означає, що переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), існують  $\varsigma_n \in \mathbb{R}$  і функція  $u \neq 0$  такі, що  $u_n(\cdot + \varsigma) \rightarrow u$  слабо в  $H_{loc}^1(\mathbb{R})$  і рівномірно на кожному скінченному інтервалі. Більше того,

обмеженість  $\{\|u_n\|_{k_n}\}$  означає, що  $\|u\|$  скінченна і, отже,  $u \in E$ . Неважко перевірити, що  $u$  є неспадною критичною точкою функціоналу  $J$  і, отже, розв'язком рівняння (1.3), що задовольняє умову (1.9).

Доведення у випадку незростаючих розв'язків аналогічне. Теорему доведено.  $\square$

### 1.1.2. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона.

Дискретні нескінченновимірні динамічні системи широко використовуються для моделювання складних квантових і оптичних явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи типу Фермі–Пасти–Улама, дискретні нелінійне рівняння типу Шредінгера, дискретні рівняння типу Клейна-Гордона. Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують розв'язки у вигляді біжучих і стоячих хвиль. В статтях [1; 17; 18; 35; 40] для рівнянь типу Клейна-Гордона досліджено питання існування біжучих хвиль. В статтях [6; 21; 22; 26; 37; 38] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера. В той же час для рівнянь типу Клейна-Гордона відомі декілька праць [16; 20; 39; 42], в перших двох з яких вивчалось питання стійкості стоячих хвиль. Розглянемо більш детально результати одного з авторів цього підрозділу зі статті [42].

*Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона із насичуваними нелінійностями.*

Будемо вивчати дискретні нелінійні рівняння типу Клейна-Гордона, які описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних осциляторів:

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n + f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.20)$$

де  $q_n = q_n(t)$  – узагальнена координата  $n$ -го осцилятора в момент часу  $t$ ,  $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$  – одновимірний дискретний оператор Лапласа,  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  калібровано інваріантна функція, тобто

$$f(e^{i\omega t} z) = e^{i\omega t} f(z) \quad (1.21)$$

для всіх  $\omega \in \mathbb{R}$ . Припустимо, що  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ . Рівняння (1.20) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Далі будемо розглядати *насичувані* нелінійності  $f(z)$ . Прикладом таких нелінійностей є

$$f(u) = \frac{\nu |u|^p}{1 + \mu |u|^p} u, \quad \mu > 0, \nu > 0, p > 1.$$

Будемо шукати розв'язки системи (1.20) у вигляді стоячих хвиль

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \quad (1.22)$$

де  $(u_n) \subset \mathbb{R}$  називається амплітудою стоячої хвилі, а  $\omega \in \mathbb{R}$  – частотою. Такі розв'язки іноді називають *бризерами* або *лакунарними солітонами*.

Підставляючи стоячу хвилю (1.22) в рівняння (1.20), одержуємо систему

$$(Lu)_n + \omega^2 u_n = f(u_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.23)$$

де  $(Lu)_n = (\Delta u)_n - m^2 u_n$ .

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з  $k$ -періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто

$$u_{n+k} = u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.24)$$

де  $k$  – деяке натуральне число, то

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} u_n = 0 \quad (1.25)$$

відповідно.

Нехай  $F(t)$  первісна функція для функції  $f(t)$ , тобто  $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ .

Тоді всюди далі припустимо, що виконуються такі умови:

$$(i_3) \quad f(t) = o(t), \quad t \rightarrow 0;$$

$$(ii_3) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(t)}{t} = l < \infty;$$

$$(iii_3) \quad f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ і } f(t)t < f'(t)t^2, \quad t \neq 0;$$

$$(iv_3) \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{2} f(t)t - F(t) \right) = \infty.$$

З системою (1.23) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2} (Lu + \omega^2 u, u) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(u_n),$$

визначений на гільбертовому просторі  $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$  зі скалярним добутком

$$(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v_n \text{ та нормою } \|u\| = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Зазначимо, що кожний елемент простору  $l^2$  автоматично задовольняє умову (1.25).

Нехай  $k \geq 2$  – натуральне число. Тоді через  $l_k^2$  позначимо простір всіх  $k$ -періодичних послідовностей  $\{u_n\}$ , які задовольняють умову (1.24). Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком  $(u, v)_k = \sum_{n \in Q_k} u_n v_n$  та нормою

$$\|u\|_k = \left( \sum_{n \in Q_k} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ де } Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[ \frac{k}{2} \right] \leq n \leq k - \left[ \frac{k}{2} \right] - 1 \right\}, \left[ \frac{k}{2} \right] - \text{ціла частина } \frac{k}{2}.$$

На просторі  $l_k^2$  розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2} (L_k u + \omega^2 u)_k - \sum_{n \in Q_k} F(u_n),$$

де  $L_k$  – оператор  $L$ , який діє в просторі  $l_k^2$ .

Іноді ми також будемо розглядати простори  $l^p$  та  $l_k^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) з нормами

$$\|u\|_{l^p} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|u\|_{l_k^p} = \left( \sum_{n \in Q_k} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

з відомою зміною при  $p = \infty$ . Нагадаємо, що при  $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\|u\|_{l^q} \leq \|u\|_{l^p}, \quad \|u\|_{l_k^q} \leq \|u\|_{l_k^p}. \quad (1.26)$$

**Зауваження 1.4.** Оператор  $L$  є обмеженим і самоспряженим у просторі  $l^2$ , а його спектр збігається з відрізком  $[-m^2 - 4, -m^2]$  і є абсолютно неперервним.

Причому за виконання умов  $(i_3)$ ,  $(ii_3)$  функція  $\frac{f(t)}{|t|}$  строго зростаюча, тоді як функція  $\frac{1}{2}f(t)t - F(t)$  строго зростає при  $t \geq 0$  і строго спадає при  $t \leq 0$ , а отже, є невід'ємною.

За зроблених припущень функціонали  $J_k$  та  $J$  належать класу  $C^1$ , а їх похідні визначаються формулами

$$\langle J'_k(u), h \rangle = (L_k u + \omega^2 u, h)_k - \sum_{n \in Q_k} f(u_n) h_n, \quad u, h \in l^2_k, \quad (1.27)$$

$$\langle J'(u), h \rangle = (Lu + \omega^2 u, h) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(u_n) h_n, \quad u, h \in l^2. \quad (1.28)$$

Крім того, критичні точки  $J_k$  та  $J$  є розв'язками рівняння (1.23), що задовольняють відповідно умови (1.24) та (1.25).

Для функціоналів  $J_k$  та  $J$  означимо відповідні *многовиди Нехарі*

$$N_k := \{u \in l^2_k \mid \langle J'_k(u), u \rangle = 0, u \neq 0\} \subset l^2_k$$

та

$$N := \{u \in l^2 \mid \langle J'(u), u \rangle = 0, u \neq 0\} \subset l^2.$$

Введемо позначення  $I_k(u) := \langle J'_k(u), u \rangle$  та  $I(u) := \langle J'(u), u \rangle$ . Це  $C^1$ -функціонали, похідні яких визначаються формулами

$$\langle I'_k(u), h \rangle = 2(L_k u + \omega^2 u, h)_k - \sum_{n \in Q_k} (f(u_n) + f'(u_n)u_n) h_n, \quad (1.29)$$

$$\langle I'(u), h \rangle = 2(Lu + \omega^2 u, h) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f(u_n) + f'(u_n)u_n) h_n. \quad (1.30)$$

**Лема 1.8.** Нехай виконуються умови  $(i_3) - (iii_3)$ ,  $\omega^2 > m^2 + 4$  та  $\omega^2 - l < m^2 + 4$ . Тоді множини  $N_k$  та  $N$  є непорожніми замкненими  $C^1$ -підмноговидами відповідно у просторах  $l_k^2$  та  $l^2$ , на яких  $I'_k(u) \neq 0$  та  $I'(u) \neq 0$ . Крім того, існує  $\beta_0 > 0$ , яке не залежить від  $k$  і таке, що  $\|u\|_k \geq \beta_0$ ,  $u \in N_k$ , та  $\|u\| \geq \beta_0$ ,  $u \in N$ .

*Доведення.* Розглянемо випадок  $N_k$  (інший випадок аналогічний). Спочатку покажемо, що многовид  $N_k$  непорожній. Нехай  $\delta \in (\omega^2, l + m^2 + 4)$  і  $E_\delta$  – спектральний підпростір оператора  $L_k + \omega^2$  в просторі  $l_k^2$ , що відповідає відрізьку  $[0, \delta]$ . Оскільки  $\omega^2 \in \sigma(L_k + \omega^2)$ , то  $E_\delta \neq \{0\}$ . Нехай  $v \in E_\delta \setminus \{0\}$ . За умовою  $(i_3)$

$$\begin{aligned} \langle J'_k(tv), tv \rangle &= t^2 (L_k v + \omega^2 v, v)_k - \sum_{n \in Q_k} f(tv_n) tv_n = \\ &= t^2 (L_k v + \omega^2 v, v)_k - o(t^2) > 0 \end{aligned}$$

для достатньо малих  $t > 0$ . З іншого боку,

$$\begin{aligned} \langle J'_k(tv), tv \rangle &= t^2 (L_k v + \omega^2 v, v)_k - \sum_{n \in Q_k} f(tv_n) tv_n \leq \\ &\leq t^2 \left( \delta \|v\|_k^2 - \sum_{n \in Q_k} \frac{f(tv_n) v_n^2}{tv_n} \right). \end{aligned}$$

За умовою  $(ii_3)$  сума в дужках збігається до  $l \|v\|_k^2$ , а тому  $\langle J'_k(tv), tv \rangle < 0$  для достатньо великих  $t > 0$ . Тоді існує  $t^* > 0$  таке, що  $\langle J'_k(t^* v), t^* v \rangle = 0$  і  $t^* v \in N_k$ . Отже,  $N_k \neq \emptyset$ .

Нехай  $u \in N_k$ , тоді з рівностей (1.27), (1.29) та означення  $N_k$ , одержуємо

$$\langle I'_k(u), u \rangle = \langle I'_k(u), u \rangle - 2I_k(u) = \sum_{n \in Q_k} (f(u_n) u_n - f'(u_n) u_n^2).$$

За умовою  $(iii_3)$  ця сума є від'ємною. Тому  $I'_k(u) \neq 0$  і за теоремою про неявну функцію (див. [13], Теорема 4.2.1),  $N_k$  є  $C^1$ -підмноговином в просторі  $l_k^2$ . Замкненість  $N_k$  очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини лєми. Нехай  $\varphi(r) = \sup_{|t| \leq r} \frac{f(t)}{t}$ . Це зростаюча функція від  $r \geq 0$  і, згідно  $(i_3)$ ,  $\varphi(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ . Нехай  $u \in N_k$ . Зазначимо, що оператор  $L_k + \omega^2$  додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі і нерівностей (1.26) маємо

$$\begin{aligned} \omega^2 \|u\|_k^2 &\leq (L_k u + \omega^2 u, u)_k = \sum_{n \in Q_k} f(u_n) u_n \leq \\ &\leq \varphi(\|u\|_{l_k^\infty}) \cdot \|u\|_k^2 \leq \varphi(\|u\|_k) \cdot \|u\|_k^2. \end{aligned}$$

А це означає, що  $\varphi(\|u\|_k) \geq \omega^2$ . Оскільки функція  $\varphi$  зростаюча, то знайдеться  $\beta_0 > 0$  таке, що  $\|u\|_k \geq \beta_0$ ,  $u \in N_k$ . Лєму доведено.  $\square$

**Наслідок 1.1.** *Якщо  $I_k(v) \leq 0$  (відповідно  $I(v) \leq 0$ ), то існує єдине  $t^* \in (0, 1]$  таке, що  $t^* v \in N_k$  (відповідно  $t^* v \in N$ ), а також існує таке  $v \in E_k \setminus \{0\}$  (відповідно  $v \in E \setminus \{0\}$ ), що  $J_k(v) < 0$  (відповідно  $J(v) < 0$ ).*

З означень  $J_k$  та  $I_k$  випливає, що на  $N_k$

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2} I_k(u) = \sum_{n \in Q_k} \left( \frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right). \quad (1.31)$$

За умовою  $(iii_3)$   $J_k(u) \geq 0$ ,  $u \in N_k$ . Аналогічно, з означень  $J$  та  $I$  випливає, що на  $N$

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{2} I(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) \quad (1.32)$$

та  $J(u) \geq 0$ ,  $u \in N$ .

**Лема 1.9.** Нехай виконуються умови  $(i_3) - (iii_3)$ ,  $\omega^2 > m^2 + 4$  та  $\omega^2 - l < m^2 + 4$ . Тоді існує таке число  $\alpha_0 = \alpha_0(k) > 0$ , що  $J_k(u) \geq \alpha_0$  для всіх  $u \in N_k$ .

*Доведення.* Нехай  $u \in N_k$ , тоді має місце рівність (1.31). За лемою 1.8,  $\|u\|_k \geq \beta_0 > 0$ . Отже, існують  $n_0 \in Q_k$  (залежне від  $u$ ) і  $\delta_0 = \delta_0(k, \beta_0) > 0$  (незалежне від  $u$ ) такі, що  $|u_{n_0}| \geq \delta_0$ . Тоді, поклавши  $\alpha_0 = \frac{1}{2}f(\delta_0)\delta_0 - F(\delta_0)$ , за зауваженням 1.1 маємо, що  $J_k(u) \geq \alpha_0$  для  $u \in N_k$ . Лему доведено.  $\square$

Тепер розглянемо дві задачі мінімізації

$$\inf \{J_k(u) : u \in N_k\} =: m_k, \quad (1.33)$$

$$\inf \{J(u) : u \in N\} =: \bar{m}. \quad (1.34)$$

Виявляється, що розв'язки цих задач є розв'язками системи (1.23) у відповідних просторах.

**Лема 1.10.** Нехай виконуються умови  $(i_3) - (iii_3)$ ,  $\omega^2 > m^2 + 4$  та  $\omega^2 - l < m^2 + 4$ . Тоді розв'язки задач (1.33) і (1.34) є розв'язками рівняння (1.23) в просторах  $l_k^2$  та  $l^2$  відповідно.

*Доведення.* Розглянемо випадок задачі (1.34), інший випадок аналогічний. Нехай  $u \in N$  розв'язок задачі мінімізації (1.34). Згідно методу множників Лагранжа, існує  $\lambda \in \mathbb{R}$  таке, що

$$J'(u) + \lambda I'(u) = 0.$$

Оскільки  $\langle J'(u), u \rangle = I(u) = 0$ , то, враховуючи рівність (1.30), одержуємо

$$0 = \lambda \langle I'(u), u \rangle = \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right).$$

За умовою  $(iii_3)$  сума в правій частині останньої рівності від'ємна і, отже,  $\lambda = 0$ , що й доводить лему.  $\square$

**Лема 1.11.** Нехай виконуються умови  $(i_3) - (iv_3)$ ,  $\omega^2 > m^2 + 4$  та  $\omega^2 - l < m^2 + 4$ . Тоді задача (1.33) має розв'язок.

*Доведення.* Нехай  $\{u^j\} \subset N_k$  – мінімізуюча послідовність для  $J_k$ , тобто  $J_k(u^j) \rightarrow m_k$ . З рівності (1.31) маємо

$$J_k(u^j) = \sum_{n \in Q_k} \left( \frac{1}{2} f(u_n^j) u_n^j - F(u_n^j) \right). \quad (1.35)$$

Покажемо, що послідовність  $\{u^j\}$  обмежена в  $l_k^2$ . Припустимо протилежне. Оскільки простір  $l_k^2$  скінченновимірний, а  $l^\infty$ -норма еквівалентна евклідовій нормі на  $l_k^2$ , то, переходячи до підпослідовності, маємо, що  $\|u^j\|_{l^\infty} \rightarrow \infty$ . Тоді, для наступної підпослідовності, для якої збережемо теж саме позначення  $\{u^j\}$ , існує  $n_0 \in Q_k$  таке, що  $u_{n_0}^j \rightarrow \infty$ . Тоді за рівністю (1.35), враховуючи умову  $(iv_3)$ , це означає, що  $J_k(u^j) \rightarrow \infty$ . Отримали суперечність, оскільки  $J_k(u^j) \rightarrow m_k$  і, отже, послідовність  $\{u^j\}$  обмежена.

Оскільки  $l_k^2$  скінченновимірний простір та  $\{u^j\}$  обмежена послідовність, то, переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що  $\{u^j\}$  збігається до  $u \in l_k^2$ . Але многовид Нехарі  $N_k$  замкнений і  $J_k$  неперервний функціонал, тому  $u \in N_k$  і  $J_k(u) = m_k$ . Лемі доведено.  $\square$

Наступна теорема встановлює існування періодичних розв'язків.

**Теорема 1.6.** *Нехай виконуються умови  $(i_3) - (iv_3)$ ,  $\omega^2 > m^2 + 4$  та  $\omega^2 - l < m^2 + 4$ . Тоді для будь-якого  $k \geq 2$  рівняння (1.23) має нетривіальний  $k$ -періодичний розв'язок  $u \in l_k^2$ . Більше того, якщо функція  $f$  непарна, то рівняння (1.23) має два нетривіальні розв'язки  $\pm u \in l_k^2$ , один з яких невід'ємний.*

*Доведення.* Існування нетривіального  $k$ -періодичного розв'язку  $u \in l_k^2$  випливає з леми 1.11.

Нехай  $f$  непарна функція. Тоді  $F$  парна і очевидно, що рівняння (1.23) має два нетривіальні розв'язки  $\pm u \in l_k^2$ . Легко бачити, що

$$(L|u|, |u|)_k \leq (Lu, u)_k.$$

Крім того,  $f(|t|)|t| = f(t)t$  та  $F(|t|) = F(t)$ . А це означає, що

$$I_k(|u|) \leq I_k(u) = 0.$$

З іншого боку,

$$\sum_{n \in Q_k} \left( \frac{1}{2} f(|u_n|)|u_n| - F(|u_n|) \right) = \sum_{n \in Q_k} \left( \frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right) = m_k.$$

За наслідком 1.1, існує  $t^* \in (0, 1]$  таке, що  $u^* = t^*|u| \in N_k$ . Тоді за зауваженням 1.1 та рівністю (1.31), маємо

$$J_k(u^*) \leq \sum_{n \in Q_k} \left( \frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right) = m_k.$$

Таким чином,  $J_k(u^*) = m_k$  та  $u^*$  невід'ємний розв'язок, і, отже, можна взяти  $u = u^*$ . Теорему доведено.  $\square$

Аналогічну лему до леми 1.11 для задачі (1.34) довести складно. Тому для одержання  $l^2$ -розв'язку рівняння (1.23) ми скористаємося методом періодичних апроксимацій, тобто перейдемо до границі при  $k \rightarrow \infty$ . Для цього знадобиться лема:

**Лема 1.12.** *Нехай виконуються умови  $(i_3) - (iv_3)$ ,  $\omega^2 > m^2 + 4$  та  $\omega^2 - l < m^2 + 4$ .*

*І нехай  $u^k$  –  $k$ -періодичний розв'язок задачі (1.33). Тоді послідовності  $\{m_k\} = \{J_k(u^k)\}$  та  $\{\|u^k\|_k\}$  обмежені.*

*Доведення. Крок 1.* Спочатку нагадаємо, що спектр оператора  $L$  абсолютно неперервний і збігається з відрізком  $[-m^2 - 4, -m^2]$ . А отже, для будь-якого  $\delta \in (\omega^2, l + m^2 + 4)$  спектральний підпростір оператора  $L + \omega^2$  в

просторі  $l^2$ , що відповідає відрізку  $[0, \delta]$ , ненульовий. Нехай  $w \neq 0$  довільний вектор з цього підпростору. Тоді маємо

$$\begin{aligned} I(tw) &= \langle J'(tw), tw \rangle = t^2 (Lw + \omega^2 w, w) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(tw_n) tw_n \leq \\ &\leq t^2 \left( \delta \|w\|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f(tw_n)}{tw_n} w_n^2 \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

За умовами  $(i_3)$  та  $(ii_3)$  існує стала  $C > 0$ , яка не залежить від  $n$  і  $t$ , і така, що

$$\left| \frac{f(tw_n)}{tw_n} \right| \leq C$$

для всіх  $n \in \mathbb{Z}$  і  $t \in \mathbb{R}$ . Отже, ряд в правій частині нерівності (1.36) збігається рівномірно по відношенню до  $t \in \mathbb{R}$ . Тому, згідно умови  $(ii_3)$ , сума цього ряду збігається до  $l \|w\|^2$ , і нерівність (1.36) означає, що  $I(tw) < 0$  для всіх достатньо великих  $t > 0$ . Зафіксуємо довільне  $t$  з такою властивістю. Оскільки послідовності зі скінченним носієм щільні в  $l^2$ , то існує вектор  $\tilde{w} \in l^2$  зі скінченним носієм достатньо близький до  $tw$  і такий, що  $I(\tilde{w}) < 0$ . За наслідком 1.1 існує  $t^* \in (0, 1)$  таке, що  $I(v) = 0$ , де  $v = t^* \tilde{w}$ . Оскільки  $v$  має скінченний носій, то  $\text{supp } v \subset Q_k$  для всіх достатньо великих  $k$ . Тоді для будь-якого такого  $k$  нехай  $v^k \in l_k^2$  єдиний елемент такий, що  $v_n^k = v_n$  для  $n \in Q_k$ . Легко бачити, що  $I_k(v^k) = I(v) = 0$  та  $m_k \leq J_k(v^k) = J(v)$ . Отже, послідовність  $\{m_k\}$  обмежена.

*Крок 2.* Методом від супротивного доведемо, що  $\{\|u^k\|_k\}$  також обмежена.

Припустимо, що  $\{\|u^k\|_k\}$  необмежена. Тоді, переходячи до підпослідовності (яку будемо так само позначати), можна вважати, що  $\|u^k\|_k \rightarrow \infty$ . Візьмемо

$v^k = \frac{u^k}{\|u^k\|_k}$ , тоді  $\|v^k\|_k = 1$  та виконується одна з таких двох умов:

(а) послідовність  $\{v^k\}$  задовольняє умову  $\|v^k\|_{l_k^\infty} = \|u^k\|_{l_k^\infty} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ;

(b) існують такі  $\delta > 0$  та  $x_k \in \mathbb{Z}$ , що  $|v_{x_k}^k| \geq \delta$  для всіх  $k$ .

Розглянемо перший випадок (умова (a)). Оскільки оператор  $L$  невід'ємний та

$$0 = \frac{1}{\|u^k\|_k^2} I_k(u^k) = (L_k v^k + \omega^2 v^k, v^k)_k - \sum_{n \in Q_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2,$$

то

$$\omega^2 = \omega^2 \|v^k\|_k^2 \leq (L_k v^k + \omega^2 v^k, v^k)_k = \sum_{n \in Q_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2. \quad (1.37)$$

За умовою (i) існує  $t_0 > 0$  таке, що  $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{\omega^2}{2}$  при  $t < |t_0|$ . Нехай

$$A_k = \{n \in Q_k : |u_n^k| < t_0\},$$

$$B_k = \{n \in Q_k : |u_n^k| \geq t_0\}.$$

Тоді

$$\sum_{n \in A_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2 \leq \frac{\omega^2}{2} \sum_{n \in A_k} (v_n^k)^2 \leq \frac{\omega^2}{2} \|v^k\|_k^2 = \frac{\omega^2}{2}.$$

Звідси, враховуючи нерівність (1.37), одержуємо

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \in B_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \in B_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2 \geq \frac{\omega^2}{2}. \quad (1.38)$$

З іншого боку,  $|f(t)| \leq C_0 |u|$  з деякою сталою  $C_0 > 0$  і за нерівністю Гельдера

$$\sum_{n \in B_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2 \leq C_0 |B_k|^{\frac{p-2}{p}} \|v^k\|_{l_k^p}^{\frac{2}{p}} \quad (1.39)$$

для будь-якого  $p > 2$ , де  $|B_k|$  – кількість елементів множини  $B_k$ . Легко перевірити, що

$$\|w\|_{l_k^p} \leq \|w\|_{l_k^\infty}^{\frac{p-2}{p}} \|w\|_k^{\frac{2}{p}}. \quad (1.40)$$

Тоді оскільки  $\|v^k\|_{l^2} \rightarrow 0$ , то нерівності (1.38), (1.39) і (1.40) показують, що

$|B_k| \rightarrow \infty$ . Нехай  $\alpha_0 = \min \left\{ \frac{1}{2} f(\pm t_0)(\pm t_0) - F(\pm t_0) \right\}$ . Тоді з рівності (1.32) та

зауваження 1.1 маємо

$$\begin{aligned} m_k &= \sum_{n \in Q_k} \left( \frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) \geq \sum_{n \in B_k} \left( \frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) \geq \\ &\geq \alpha_0 |B_k| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Одержали суперечність.

Розглянемо другий випадок (умова (b)). Згідно інваріантності рівняння (1.23) відносно дискретних зсувів, кратних  $k$ , можна вважати, що  $x_k = 0$ .

Оскільки  $\|v^k\|_k = 1$ , то можна також вважати, що знайдеться елемент  $v = \{v_n\}$

такий, що  $v_n^k \rightarrow v_n$  для всіх  $n \in \mathbb{Z}$  (переходячи до підпослідовності, якщо потрібно). Крім того, очевидно, що  $v \in l^2$ ,  $\|v\| \leq 1$  і  $|v_0| \geq \delta$ . Отже,  $v \neq 0$ .

Оскільки  $u^k$  —  $k$ -періодичний розв'язок рівняння (1.23), то

$$Lv_n^k - (l - \omega^2)v_n^k = \frac{g(u_n^k)}{\|u^k\|_k}, \quad (1.41)$$

де  $g(t) = f(t) - lt$  і за умовою (ii<sub>3</sub>)  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{g(t)}{t} = 0$ . Якщо  $v_n \neq 0$  для деяких  $n \in \mathbb{Z}$ ,

то  $\|u_n^k\| \rightarrow \infty$ . Переходячи до границі в рівності (1.41) при  $k \rightarrow \infty$ , маємо

$$Lv_n - (l - \omega^2)v_n = 0,$$

тобто  $v \in l^2$  — ненульовий власний вектор оператора  $L$  з власним значенням  $l - \omega^2$ . Але спектр оператора  $L$  в просторі  $l^2$  є абсолютно неперервним. Знову отримали суперечність. Отже, послідовність  $\{\|u^k\|_k\}$  обмежена. Лему доведено.

□

Основним результатом цього пункту є теорема:

**Теорема 1.7.** Нехай виконуються умови  $(i_3) - (iv_3)$ ,  $\omega^2 > t^2 + 4$  та  $\omega^2 - l < t^2 + 4$ . Тоді рівняння (1.23) має нетривіальний розв'язок  $u \in l^2$ . Більше того, якщо функція  $f$  непарна, то рівняння (1.23) має два нетривіальні розв'язки  $\pm u \in l^2$ , один з яких невід'ємний.

*Доведення.* Нехай  $u^k \in l_k^2$  розв'язок рівняння (1.23). Тоді за лемою 1.12 послідовність  $\{\|u^k\|_k\}$  обмежена та  $\{u^k\}$  задовольняє одну з двох умов (a) або (b). В першому випадку нерівність (1.40) означає, що  $\|u^k\|_{l_k^p} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  для будь-якого  $p > 2$ . За умовою  $(i_3)$  для кожного  $\varepsilon > 0$  знайдеться  $C_\varepsilon > 0$  таке, що

$$|f(t)| \leq \varepsilon |t| + C_\varepsilon |t|^{p-1}.$$

Оскільки  $u^k$  –  $k$ -періодичний розв'язок рівняння (1.23), то

$$\omega^2 \|u^k\|_k^2 \leq (L_k u^k + \omega^2 u^k, u^k)_k = \sum_{n \in Q_k} f(u_n^k) u_n^k \leq \varepsilon \|u^k\|_k^2 + C_\varepsilon \|u^k\|_{l_k^p}^p.$$

Поклавши  $\varepsilon = \frac{\omega^2}{2}$ , одержуємо

$$\frac{\omega^2}{2} \|u^k\|_k^2 \leq C_\varepsilon \|u^k\|_{l_k^p}^p \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ . А це суперечить лемі 1.8 і, отже, виконання умови (a) неможливе.

Таким чином, виконується умова (b). Переходячи до підпослідовності і використовуючи інваріантність дискретних зсувів можна вважати, що  $|u_0^k| \geq \delta$  з деяким  $\delta > 0$ . Переходячи знову до підпослідовності, ми також можемо вважати, що існує послідовність  $u = \{u_n\}$  така, що  $u_n^k \rightarrow u_n$  для всіх  $n \in \mathbb{Z}$ . Легко бачити, що  $u \in l^2$  та  $u \neq 0$ . Крім того, для рівняння (1.23) маємо поточкову збіжність і, отже,  $u \in l^2$  – його нетривіальний розв'язок.

Друга частина теореми випливає з теореми 1.6. Теорему доведено.  $\square$

**Зауваження 1.2.** Можна показати, що за виконання умов теореми 1.7,  $m_k \rightarrow \bar{m}$ . Крім того, розв'язок  $u \in l^2$ , одержаний у цій теоремі, є розв'язком задачі мінімізації (1.34), тобто  $J(u) = \bar{m}$ .

**Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона зі степеневими нелінійностями.** Розглянемо більш детально результати статті [39]. У даній статті розглянемо дискретні рівняння типу Клейна-Гордона

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n - f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.42)$$

де  $q_n = q_n(t)$  – узагальнена координата  $n$ -го осцилятора в момент часу  $t$ ,  $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$  – одновимірний дискретний оператор Лапласа.

Будемо вивчати рівняння (1) з нелінійностями вигляду

$$f(r) = d_n |r|^{2p} r, \quad \{d_n\} \subset \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Будемо шукати розв'язки системи (1.42) у вигляді стоячих хвиль

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \quad (1.43)$$

де  $u_n \in \mathbb{R}$  називається амплітудою стоячої хвилі, а  $\omega \in \mathbb{R}$  – частотою.

Підставляючи стоячу хвилю (1.43) в систему (1.42) і враховуючи, що  $|\exp(-i\omega t)| = 1$ , одержимо систему

$$-\Delta u_n - (\omega^2 - m^2)u_n = d_n |u_n|^{2p} u_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.44)$$

Позначимо через  $(Lu)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n$  і розглянемо більш загальну систему

$$(Lu)_n - \omega^2 u_n = d_n |u_n|^{2p} u_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.45)$$

Зауважимо, що оператор  $L$  є обмеженим і самоспряженим у просторі  $l_k^2$ . Його спектр  $\sigma(L)$  має групову структуру, тобто  $\sigma(L)$  є об'єднанням скінченного числа відрізків (див. [30]). Доповнення  $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$  складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються спектральними проміжками. Два з них напівскінченні. Якщо  $N=1$ , то скінченні проміжки не існують. Однак, у

загальному випадку скінченні проміжки існують і найбільш цікавий випадок, коли  $\omega^2$  належить скінченному проміжку.

Всюди далі припускається, що виконується умова  $N$ -періодичності:

( $i_4$ ) існує таке  $N \in \mathbb{N}$ , що коефіцієнти  $a_n, b_n$  і  $d_n$  є  $N$ -періодичними, тобто

$$a_{n+N} = a_n, b_{n+N} = b_n \text{ і } d_{n+N} = d_n.$$

Будемо вивчати стоячі хвилі з  $kN$ -періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка на нескінченності збігається до нуля (локалізовані розв'язки), тобто

$$u_{n+kN} = u_n, \tag{1.46}$$

де  $k$  – фіксоване натуральне число, та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \tag{1.47}$$

відповідно.

З системою (1.45) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2} (Lu - \omega^2 u, u) - \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2},$$

визначений на гільбертовому просторі  $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$  із скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v_n.$$

Нагадаємо, що кожний елемент простору  $l^2$  автоматично задовольняє умову (1.47).

Позначимо через  $l_k^2$  скінченновимірний простір всіх  $kN$ -періодичних послідовностей зі скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{n \in Q_k} u_n v_n$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left( \sum_{n \in Q_k} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[ \frac{kN}{2} \right] \leq n \leq kN - \left[ \frac{kN}{2} \right] - 1 \right\},$$

і  $\left[ \frac{kN}{2} \right]$  – ціла частина  $\frac{kN}{2}$ .

На просторі  $l_k^2$  розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2} (L_k u - \omega^2 u, u)_k - \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in Q_k} d_n u_n^{2p+2},$$

де  $L_k$  – оператор  $L$ , який діє в просторі  $l_k^2$ .

За зроблених припущень функціонали  $J$  та  $J_k$  належать класу, а критичні точки цих функціоналів є розв'язками системи (1.45) з просторів  $l^2$  та  $l_k^2$  відповідно.

Таким чином, система (1.45) є системою рівнянь Ейлера-Лагранжа для функціоналів дії  $J$  та  $J_k$  у відповідних просторах. Ця система завжди має нульовий розв'язок, тому нас цікавлять нетривіальні критичні точки цих функціоналів.

Наступна лема дає нижні оцінки для критичних точок і відповідних критичних значень.

**Лема 1.13.** Для будь-яких нетривіальних критичних точок функціоналів  $J$  та  $J_k$  правильні відповідно нерівності

$$\|u\|^2 \geq \varepsilon_0, \quad J(u) \geq \varepsilon,$$

$$\|u\|_k^2 \geq \varepsilon_0, \quad J_k(u) \geq \varepsilon,$$

де  $\varepsilon_0 = 2^{-\frac{1}{2p}} \delta^{\frac{1}{p}} l^{-\frac{1}{p}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-\frac{(8p+1)(p+1)}{2p(2p+1)}} \delta^{\frac{p+1}{p}} l^{-\frac{p+1}{p}} l_0$ ,  $l = \sup\{d_n\}$  і  $l_0 = \inf\{d_n\}$

Ще однією популярною мінімаксною теоремою є теорема про зачеплення.

Нехай  $H$  – гільбертів простір,  $H = Y \oplus Z$ . Нехай також  $\rho > r > 0$  і  $z \in Z$  такий елемент, що  $\|z\| = r$ . Позначимо

$$M := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| \leq \rho, \lambda \geq 0\}$$

і

$$M_0 := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \text{ і } \lambda \geq 0, \text{ або } \|u\| \leq \rho \text{ і } \lambda = 0\},$$

тобто  $M_0$  – межа  $M$  ( $\partial M$ ). Нехай

$$N := \{u \in Z : \|u\| = r\}.$$

Розглянемо  $C^1$ -функціонал  $I$  на  $H$  і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} I(u) > \alpha := \sup_{u \in M_0} I(u).$$

В такому випадку говорять, що функціонал  $I$  задовольняє *геометрію зачеплення*.

Сформулюємо тепер теорему про зачеплення ([23], [28], [32]).

**Теорема 1.8 (про зачеплення).** *Нехай  $I$  – функціонал класу  $C^1$  на гільбертовому просторі  $H$ , який задовольняє умову Пале-Смейла та геометрію зачеплення. Тоді існує така критична точка  $u \in H$  функціоналу  $I$ , що критичне значення*

$$I(u) := b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} I(\gamma(u)) \geq \beta,$$

де  $\Gamma := \{\gamma \in C(M, H) : \gamma|_{M_0} = id\}$ . При цьому

$$I(u) \leq \sup_{u \in M} I(u).$$

Виявляється, що функціонал  $J_k$  задовольняє умови теореми про зачеплення, а отже, має нетривіальні критичні точки, тобто правильна теорема:

**Теорема 1.9.** *Нехай виконується умова  $(i_4)$ ,  $d_n > 0$  для всіх  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega^2 \in (a, b)$  та  $b \neq +\infty$ . Тоді для будь-якого  $k \geq 1$  система (1.45) має нетривіальний  $kN$ -періодичний розв'язок  $u \in l_k^2$ .*

Тепер за допомогою методу періодичних апроксимацій можна довести існування нетривіальних локалізованих розв'язків системи (1.45). Ці розв'язки є критичними точками функціоналу  $J$ . Однак цей функціонал не задовольняє умову Пале–Смейла і тому скористатися в даному випадку теоремою про зачеплення не вийде. Проте критичні точки функціоналу  $J$  можна побудувати за допомогою переходу до границі при  $k \rightarrow \infty$  в критичних точках функціоналу  $J_k$ .

**Теорема 1.10.** *Нехай виконується умова  $(i_4)$ ,  $d_n > 0$  для всіх  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega^2 \in (a, b)$  та  $b \neq +\infty$ . Тоді система (1.45) має нетривіальний розв'язок  $u \in l^2$ .*

*Доведення.* Нехай  $u^{(k)} = (u_n^{(k)}) \in l_k^2$  нетривіальний  $kN$ -періодичний розв'язок рівняння (1.45), який існує за теоремою 1.9.

Зазначимо, що існують  $\delta_0 > 0$  та  $n_k \in \mathbb{Z}$  такі, що

$$|u_{n_k}^{(k)}| \geq \delta_0. \quad (1.48)$$

Справді, у протилежному випадку  $u^{(k)} \rightarrow 0$  в  $l^\infty$ , а отже,  $v^{(k)} = R_k u^{(k)} \rightarrow 0$  в  $l^\infty$ . За теоремою 1,  $\|v^{(k)}\|_{l^2} = \|u^{(k)}\|_k$  обмежена. Далі оскільки

$$\|v\|_{l^p}^p \leq \|v\|_{l^\infty}^{p-2} \|v\|_{l^2}^2, \quad p > 2, \quad (1.49)$$

то  $v^{(k)} \rightarrow 0$  в  $l^p$  для всіх  $p > 2$ . А це означає, що  $\|u^{(k)}\|_{l_k^p} \rightarrow 0$  для всіх  $p > 2$ . Тоді

для відповідного критичного значення  $b_k = J_k(u^{(k)})$  маємо

$$0 < b_k = \frac{1}{4} \sum_{n \in Q_k} d_n (u_n^{(k)})^4 \leq \frac{l}{4} \|u^{(k)}\|_{l_k^4}^4 \rightarrow 0,$$

що суперечить лемі 1.13.

В силу періодичності коефіцієнтів послідовність  $\{u_{n+N}^{(k)}\}$  є також розв'язком рівняння (1.45). Тому можна вважати, що  $0 \leq n_k \leq N-1$ . Однак,

таких значень скінченне число, тому, переходячи до підпослідовності (по  $k$ ), можемо вважати, що всі ці номери співпадають, тобто  $n_k = n_0$ .

В силу обмеженості  $\{u^{(k)}\}$ , переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), маємо  $u_n^{(k)} \rightarrow u_n$  при  $k \rightarrow \infty$  (для всіх  $n \in \mathbb{Z}$ ). Крім того, за нерівністю (1.48),

$$|u_{n_0}| \geq \delta_0,$$

а отже,  $u = \{u_n\}$  ненульова послідовність. Використовуючи граничний перехід, неважко показати, що  $u = \{u_n\}$  є розв'язком рівняння (1.45).

Залишається показати, що  $u = \{u_n\} \in l^2$ . Справді, оскільки для будь-яких фіксованих  $\tilde{n} \in \mathbb{Z}$  і достатньо великого  $k$

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} |u_n^{(k)}|^2 \leq \|u^{(k)}\|_k^2 \leq C^2, \quad (1.50)$$

то переходячи в (1.50) до границі при  $k \rightarrow \infty$ , одержуємо

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} |u_n|^2 \leq C^2.$$

В силу довільності  $\tilde{n}$ , маємо, що  $u \in l^2$ . Теорему доведено.  $\square$

Зауважимо, що якщо  $b = +\infty$ , то рівняння (1.45) має тільки тривіальний розв'язок.

Оскільки спектр оператора  $-\Delta + m^2$  є відрізком  $[m^2, 4 + m^2]$ , то з теореми 1.9 одержуємо наслідок:

**Наслідок 1.1.** Нехай  $d_n > 0$  для всіх  $n \in \mathbb{Z}$  та  $\omega^2 < m^2$ . Тоді система (1.44) має нетривіальний розв'язок  $u \in l^2$ .

#### Список використаних джерел

1. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
2. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P. 75–87.

3. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Український математичний вісник*. 2021. Т. 18, № 4. С. 466-478.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Український математичний вісник*. 2022. Т. 19, № 4. С. 450-461.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Український математичний вісник*. 2020. Т. 17, № 3. С. 301-312.
6. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
7. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 260, № 5 (February). P. 619-629.
8. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, № 3 (February). P. 397-406.
9. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, № 4 (January). P. 453-462.
10. Berestycki H., Capuzzo-Dolcetta I., Nirenberg L. Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems. *Nonlin. Diff. Eq. And Appl.* 1995. Vol. 2. P. 553–572.
11. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen.* 2006. Vol. 39. P. 4955–4984.
12. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional hexagonal Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen.* 2007. Vol. 40. P. 1239–1264.
13. Drabek P., Milota J. *Methods of nonlinear analysis. Applications to differential equations.* Basel: Birkhäuser, 2007. 568 p.
14. Fermi E., Pasta J., Ulam S., Tsingou M. Studies of nonlinear problems. *Los Alamos Sci. Lab. Rept.* LA-1940. 1955. Reprinted in *Lect. Appl. Math.* 1974. Vol. 15. 156 p.
15. Friesecke G., Wattis J. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Comm. Math. Phys.* 1994. Vol. 161 (2). P. 391-418.
16. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 2013. Vol. 33, №6. P. 2389-2401.
17. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439–464.
18. Kreiner C. F., Zimmer J. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine–Gordon equation with linear pair interaction. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2009. Vol. 25, № 3 (November). P. 915–931.
19. Lions P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*. 1984. Vol. 1. P. 223-238.
20. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 205-211.
21. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*, 2006. Vol. 19. P. 27–40.
22. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Schrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*. 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.

23. Pankov A. *Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices*. London – Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
24. Pankov A. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam chains with nonlocal interaction. *Disr. Cont. Dyn. Syst. Ser. S*. 2019. Vol. 12, № 7 (November). P. 2097–2113.
25. Pankov A., Pflüger K. Traveling waves in lattice dynamical systems. *Math. Meth. Appl. Sci*. 2000. Vol. 23. P.1223–1235.
26. Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A*, 2008. Vol. 464. P. 3219–3236.
27. Pankov A., Rothos V. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam lattices with saturable nonlinearities. *Discr. Cont. Dyn. Syst.* 2011. Vol. 30, № 3 (July). P. 835–840.
28. Rabinowitz P. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. Providence, R. I. : American Math. Soc. 1986. 100 p.
29. Smets D., Willem M. Solitary waves with prescribed speed on infinite lattices. *J. Funct. Anal.* 1997. Vol. 149. P. 266-275.
30. Teschl G. *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*. Providence, R. I. : American Math. Soc. 2000. 251 p.
31. Toda M. *Theory of nonlinear lattices*. Berlin: Springer–Verlag, 1989. 225 p.
32. Willem M. *Minimax theorems*. Boston: Birkhäuser Boston Inc. 1996. 162 p.
33. Xiang Y., Wattis J. A. D., Susanto H., Cummings L. J. Discrete breathers in a two-dimensional spring-mass lattice. *J. Phys. A: Math. And Theor.* 2009. Vol. 42. P. 1–26.
34. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of “solutions” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 15. P. 240-243.
35. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. *Математичні студії*. 2006. Т. 26, № 2. С. 140–153.
36. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії*. 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.
37. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінґера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2017. Вип. 16. С. 21-29.
38. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінґера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії*, 2010. Т. 33, №1. С. 78–84.
39. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона зі степеневими нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія: математика та інформатика. 2021. Том 39, № 2. С. 7-21.
40. Бак С. Н., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник*, 2010. Т. 7, №2. С. 154–175.
41. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці : дис. ... докт. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
42. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона із насичуваними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. 2021. Вип. 22. С. 5-19.

## 1.2. Асимптотичні розв'язки зчисленної системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами

*Ковтонюк М. М.*

На перших історичних етапах вивчення диференціальних рівнянь основною метою вчених було отримання точного розв'язку. Однак виявилось, що подати розв'язки через елементарні функції можливо лише у деяких випадках. Тому постало питання про способи побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь, наприклад у вигляді рядів, які рівномірно збігаються, або асимптотичних рядів.

Асимптотичні методи в інтегруванні диференціальних рівнянь використовували ще у 19 ст. учені Ж. Ліувіль, Ж. Фур'є, Ж. Штурм. Виявилось, що асимптотичні методи особливо ефективні при інтегруванні диференціальних рівнянь, у яких коефіцієнти є функціями так званого «повільного» часу  $\tau = \varepsilon t$ , де  $\varepsilon$  – деякий малий параметр. Ці рівняння називаються рівняннями з повільно змінними коефіцієнтами.

У 1807 р. Ж. Фур'є запропонував оригінальний метод розв'язування диференціальних рівнянь із частинними похідними, що приводить до звичайних диференціальних рівнянь з параметром, тому при його застосуванні виникають дві основні задачі: знаходження розв'язків (фундаментальних функцій) отриманих диференціальних рівнянь; розклад довільної функції в ряд за фундаментальними функціями. Обидві задачі в окремих випадках були розв'язані самим Ж. Фур'є.

Велику роль у розвитку асимптотичного подання розв'язків диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь відіграли праці учених Дж. Локка, К. Спарре, Р. Фаулера, В. Стеклова, Г. Біркгофа, Я. Тамаркіна, Л. Шлезінгера, В. Пугачова.

Істотні результати були отримані Н. Боголюбовим, В. Вазовим, Н. Криловим, Р. Лангер, Ю. Митропольським, Л. Чезарі [1, 4, 5, 6], які поклали початок новим асимптотичним методам у нелінійній механіці.

Базуючись на методах Н. Крилова і Н. Боголюбова український вчений Ю. Митропольський створив свій метод [12], який дозволив досліджувати нестационарні коливні процеси в системах із однією і багатьма ступенями вільності.

Багато відомих українських і зарубіжних математиків присвятили свої роботи знаходженню асимптотики за параметром при розв'язуванні диференціальних рівнянь, зокрема: К. Валєєв, А. Васильєва, В.Євтухов [7-8], І. Конет, Н.Кузьма [11], Л. Ніколенко, М. Перестюк, А.Самойленко [15], М.Сотніченко, А. Тихонов, М. Федорюк, С. Фещенко, М. Шкіль, В. Яковець та інші.

Систематичне вивчення диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами починається з 50-х роках ХХ ст, у цей період публікуються роботи С. Фещенко [18-20], які поклали початок вивченню цих рівнянь.

Було запропоновано метод асимптотичного подання розв'язків неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, у якому коефіцієнти є функціями так званого «повільного» часу  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\varepsilon > 0$  – малий параметр.

Результати С. Фещенко були використані О. Горошко, А. Кніжним, Г. Савіним, В. Шавелло та іншими вченими для знаходження наближених розв'язків диференціального рівняння у прикладних задачах теоретичної фізики.

У 1955 р. С. Фещенко [18] доводить важливі теореми, які відносяться до розщеплення скінченної системи лінійних диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x, \quad (1.51)$$

де  $x$  –  $n$ -вимірний вектор,  $A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau)$ , часу  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\varepsilon > 0$  – малий параметр.

Випадок, коли серед коренів характеристичного рівняння неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(\tau, \varepsilon)}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x(\tau, \varepsilon) + f(\tau, \varepsilon)e^{i\theta(a, \varepsilon)}, \quad (1.52)$$

де  $A(\tau, \varepsilon)$  – квадратна матриця порядку  $n$ ,  $f(\tau, \varepsilon)$  –  $n$ -вимірний вектор, які допускають асимптотичний розклад

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A^{(s)}(\tau), \quad f(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f^{(s)}(\tau),$$

де  $0 \leq \tau = \varepsilon t \leq L$ ,  $\varepsilon > 0$  – малий параметр, з'являються корені довільної кратності з кратними елементарними дільниками, досліджував український учений М. Шкіль [22-24]. Розроблені у цих роботах асимптотичні методи дозволили провести дослідження випадку кратних коренів як для однорідних, так і для неоднорідних систем диференціальних рівнянь вигляду (1.52). При цьому розглянуто так званий «резонансний» випадок, коли функція  $iv(\tau)$

$\left( v(\tau) = \frac{d\theta(\tau, \varepsilon)}{dt} \right)$  при деяких  $\tau \in [0, L]$  співпадає з одним із кратних коренів

характеристичного рівняння

$$\det \|A^{(0)}(\tau) - \lambda E\| = 0.$$

Цікавою є задача дослідження розв'язків у випадку зчислених систем диференціальних рівнянь, оскільки останні застосовуються у розв'язуванні граничних задач математичної фізики. Зчисленні системи диференціальних рівнянь інтенсивно розвиваються у 50-70-х роках 20 ст. у роботах А. Тихонова і К. Персидського [13, 14], К. Валєєва [2, 3], В. Харасахала [21], зокрема формулюється і доводиться теорема існування розв'язку таких систем. Також їхня теорія розповсюджується на зчисленні системи диференціальних рівнянь,

праві частини яких, крім шуканих функцій, містять ще й змінні параметри вигляду

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_1, x_2, \dots, \mu), \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.53)$$

Ідеї А. Тихонова та К. Персидського полягають у тому, що деяка зчисленна система диференціальних рівнянь виду (1.53) «укорочується», тобто відкидаються по кількості функції, а також по кількості рівняння.

Потім розглядається «укорочена» система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f_i(\tau, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0, \mu),$$

яка отримується із системи (1.53), якщо прирівняти до нуля всі шукані функції, починаючи з  $n + 1$ -шої.

А до «укороченої» системи лінійних диференціальних рівнянь можна застосувати теорію, розроблену в працях С. Фещенка, М. Шкіля, М. Конета та інших учених. Зчисленні системи диференціальних рівнянь вигляду (1.51) досліджувалися у роботах М. Ковтонюк [9, 10].

Зазначимо, що побудова формальних розв'язків і дослідження їх асимптотичної поведінки для зчисленних систем диференціальних рівнянь (ЗСДР) суттєво відрізняється від побудови асимптотичного розв'язку систем диференціальних рівнянь в  $n$ -вимірному просторі того ж вигляду [9, 10]. Це пояснюється тим, що:

1. Для ЗСДР необхідно завжди досліджувати збіжність рядів і належність побудованих векторів до вибраного простору, чого не потрібно робити у випадку систем диференціальних рівнянь в  $n$ -вимірному просторі.

2. Для існування розв'язків скінченної системи вигляду (1.52) достатньо вимагати нескінченної диференційовності матриць  $A_s(\tau)$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  У випадку ЗСДР необхідно дотримання додаткових умов: ряди

$\frac{d^s a_j(\tau, \varepsilon)}{d\tau^s} = \sum_{j=1} \frac{d^s |a_{ij}(\tau, \varepsilon)|}{d\tau^s}$  мають бути рівномірно збіжними  $\forall \tau \in [0, L]$ ,

$s = 0, 1, 2, \dots, k$ , де  $k$  – достатньо велике число і, крім того,  $\left| \frac{d^s a_j(\tau, \varepsilon)}{d\tau^s} \right| \leq \gamma_s$ ,

$\forall j = 0, 1, 2, \dots$

3. При дослідженні нескінченної системи алгебраїчних рівнянь зустрічаються проблеми існування, які не мають аналогів у теорії скінченних систем. Наприклад, якщо розглянути дві нескінченні матриці  $A$  і  $B$ , то їх добуток може не існувати, оскільки ряди  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} b_{ki}$  можуть бути розбіжними для всіх або для деяких значень  $j$  та  $i$ .

У цьому випадку дистрибутивний закон  $A(B + C) = AB + AC$  має місце в тому розумінні, що якщо  $AB$  і  $AC$  існують, то існує і  $A(B + C)$ , що дорівнює  $AB + AC$ . Але  $A(B + C)$  може існувати в той же час, коли  $AB$  і  $AC$  не існують.

4. У теорії скінченних матриць головну роль відіграють визначники, а в теорії нескінченних матриць їх значення в значній мірі втрачається.

Викладемо деякі, необхідні надалі, відомості з теорії функцій і теорії матриць. Розглянемо множину функцій  $\{f_n(t)\}$ , визначених на відрізку  $[\alpha, \beta]$ .

**Означення 1.1.** Множина функцій  $f_n(t)$  називається рівномірно обмеженою на відрізку  $[\alpha, \beta]$ , якщо існує таке додатне число  $L$ , що для будь-якого  $t \in [\alpha, \beta]$  має місце нерівність  $|f_n(t)| \leq L$ , правильна для всіх функцій множини  $\{f_n(t)\}$ .

**Означення 1.2.** Множина функцій  $f_n(t)$  називається одностайно неперервною на відрізку  $[\alpha, \beta]$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  таке, що  $\forall t', t'' \in [\alpha, \beta]$ , які задовольняють нерівність  $|t' - t''| < \delta$ , має місце

нерівність  $|f_n(t') - f_n(t'')| < \varepsilon$ , що виконується відразу для всіх функцій множини  $\{f_n(t)\}$ .

Розглянемо множину всіх однотайно неперервних і рівномірно обмежених функціональних послідовностей  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots)$ ,  $t$  – дійсна змінна, ( $t \in [\alpha, \beta]$ ). Поклавши  $d(x(t), y(t)) = \sup_k |x_k(t) - y_k(t)|$ , ми одержимо метричний простір, який позначимо через  $m$ , норма  $\|x(t)\| := \sup_k |x_k(t)|$ . Доведено, що цей простір  $m$  рівномірно обмежених і однотайно неперервних функціональних послідовностей є лінійним, повним і нормованим, тобто банаховим простором [10].

Нехай  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{\infty}$  – нескінченна матриця. Норму її позначимо через  $\|A\|$  і будемо розуміти число  $\|A\| := \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|$ , норму вектора  $b$  визначимо  $\|b\| := \sup_k |b_k|$ .

Для зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{kj}(t) \cdot x_j(t), \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1.54)$$

де  $t$  – незалежна змінна ( $t \geq 0$ ),  $P_{kj} = P_{kj}(t)$  – дійсні або комплексні функції від  $t$ , нагадаємо деякі означення і теореми існування, виходячи з робіт К. П. Персидського [13, 14].

**Означення 1.3.** Зчисленну систему функцій

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots \quad (1.55)$$

будемо називати обмеженою на проміжку  $t \geq 0$ , якщо існує таке число  $l < +\infty$ , для якого виконується умова

$$\|x(t)\| = \sup_k \{|x_k(t)|\} \leq l, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.56)$$

**Означення 1.4.** Систему функцій (1.55) будемо називати розв'язком системи рівнянь (1.54), що проходить через точку  $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$ , якщо  $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots$  і якщо  $\frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{kj}(t) \cdot x_j(t), (k=1, 2, \dots)$  при всіх значеннях  $t \geq 0$ , причому, якщо система функцій (1.55) обмежена, то цей розв'язок будемо називати обмеженим.

Якщо функції  $P_{kj}(t)$  неперервні й на проміжку  $t \geq 0$  задовольняють умовам

$$\sum_{j=1}^{\infty} |P_{kj}(t)| \leq \alpha(t), (k=1, 2, \dots), \quad (1.56)$$

де  $\alpha(t)$  – деяка неперервна при всіх  $t \geq 0$  функція, то має місце теорема:

**Теорема 1.** Якщо праві частини системи лінійних диференціальних рівнянь (1.54) задовольняють умовам (1.56), то через кожну точку  $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$  області  $D$ ;

$$t \in [\alpha, \beta], \|x\| = \sup_k \{|x_k(t)|\}, (k=1, 2, \dots) \quad (1.57)$$

проходить єдиний розв'язок  $x_k = x_k(t), (k=1, 2, \dots)$  системи (1.56). Цей розв'язок буде обмеженим, одностайно неперервним і визначеним  $\forall t \in [\alpha, \beta]$ .

Системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами розглядалися в роботах [25]. Зокрема, для систем виду

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x, \quad t \in [0; T] \quad (1.58)$$

у просторі  $R^n$  побудована фундаментальна система розв'язків, коли головна матриця  $A_0(t)$  має прості власні значення, одне кратне власне значення. Крім того, для таких систем застосовано просторовий аналог систем лінійних диференціальних рівнянь з повільно- змінними коефіцієнтами, які залежать від двох малих параметрів виду

$$\frac{dx(\sigma, \varepsilon, \mu)}{dz} = A(\sigma, \varepsilon, \mu)x(\sigma, \varepsilon, \mu),$$

де  $\sigma = \varepsilon^m \mu^p z$ ,  $m, p \in Z$  на системи меншої розмірності у випадку декількох груп коренів характеристичного рівняння. Аналогічні задачі у нескінченномірних просторах не розглядались.

Ми розглянемо зчисленні системи лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами вигляду (1.58) у просторі  $m$  рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей.

*Мета дослідження:* 1) визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами вигляду (1.58) має розв'язок; 2) побудувати формальний розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь (1.58) у випадках, коли головна матриця має простий дискретний спектр або є нескінченною клітиною Жордана; 3) довести асимптотичний характер побудованих розв'язків.

Отож розглянемо у нескінченномірному просторі  $m$  рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей систему рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = A(\tau, \mu)x, \quad (1.59)$$

де  $A(\tau, \mu) = \|a_{jk}(\tau, \mu)\|_1^\infty$  - дійсна нескінченна матриця, елементами якої є функції  $a_{jk}(\tau, \mu)$  дійсної змінної  $\tau \in [0; T]$ ,  $x(\tau, \varepsilon, \mu)$  - нескінченномірний шуканий вектор,  $\varepsilon, \mu > 0$  - малі дійсні параметри, для якої виконуються такі умови ( $\tau = \varepsilon \cdot t$ ):

1) матриця  $A(\tau, \mu)$  має на відрізку  $[0; T]$  рівномірне асимптотичне розвинення за степенями параметра  $\mu$ :

$$A(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k(\tau);$$

2) матриці  $A_k(\tau), k = 1, 2, \dots$  - нескінченно диференційовні на відрізку  $[0; T]$ ;

3) головна матриця  $A_0(\tau)$  діагональна:

$$A_0(\tau) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\tau) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2(\tau) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3(\tau) & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix},$$

причому функції  $\lambda_i(\tau), i = 1, 2, \dots$  залишаються простими (простий дискретний спектр), тобто  $\forall \tau \in [0; T]$ :

$$\lambda_i(\tau) \neq \lambda_j(\tau), i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, |\lambda_i(\tau) - \lambda_j(\tau)| \geq d, j = 2, 3, \dots;$$

4) функції  $\frac{d^k a_j(\tau, \mu)}{d\tau^k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_{jm}(\tau, \mu)|}{d\tau^k}, k = 0, 1, 2, \dots$  неперервні і рівномірно

обмежені на  $[0; T]$ :

$$\frac{d^k a_j(\tau, \mu)}{d\tau^k} \leq \gamma_k \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Зазначимо, що такого типу задачі досить детально вивчені для скінченних і зчисленних систем, які сингулярно залежать від одного малого параметра, а саме, коли  $\mu = \varepsilon$  [10, 16, 17, 22]. Системи з двома незалежними параметрами, незважаючи на їх практичне значення, досліджувалися менше і в скінченномірному просторі [24, 25].

Ми розглянемо аналогічну задачу у нескінченномірному просторі.

Частинні розв'язки системи (1.59) шукатимемо у вигляді:

$$x(\tau, \varepsilon, \mu) = u(\tau, \varepsilon, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda_1(\sigma) d\sigma\right), \quad (1.60)$$

де  $u(\tau, \varepsilon, \mu)$  - невідомий нескінченно мірний вектор, який можна подати у вигляді рівномірного асимптотичного розкладу

$$u(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r u_r(\tau, \varepsilon), \quad u_r(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_{rs}(\tau). \quad (1.61)$$

Знаходження розв'язку буде полягати у побудові алгоритму, за яким можна знайти невідомі члени розкладу (1.61). Підставимо вектор (1.60)–(1.61) у систему (1.59) і, врахувавши, що

$$\frac{dx(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} = \frac{du(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d(\sigma)\right) + u(\tau, \varepsilon, \mu) \frac{1}{\varepsilon} \lambda_1(\tau) \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d(\sigma),$$

отримаємо тотожність:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left( \frac{du(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d(\sigma)\right) + u(\tau, \varepsilon, \mu) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \lambda_1(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d(\sigma)\right) \right) = \\ & = A(\tau, \mu) \cdot u(\tau, \varepsilon, \mu) \exp\left(\int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d(\sigma)\right). \end{aligned}$$

Винесемо у лівій частині рівності за дужки множник  $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d(\sigma)\right)$  і

скоротимо на нього, отримаємо:

$$\varepsilon u'(\tau, \varepsilon, \mu) + \lambda_1(\tau) u(\tau, \varepsilon, \mu) = A(\tau, \mu) u(\tau, \varepsilon, \mu),$$

або

$$\begin{aligned} & \varepsilon(u'_0(\tau, \varepsilon) + \mu u'_1(\tau, \varepsilon) + \mu^2 u'_2(\tau, \varepsilon) + \dots) + \lambda_1(\tau)(u_0(\tau, \varepsilon) + \mu u_1(\tau, \varepsilon) + \mu^2 u_2(\tau, \varepsilon) + \dots) = \\ & = (A_0(\tau) + \mu A_1(\tau) + \mu^2 A_2(\tau) + \dots)(u_0(\tau, \varepsilon) + \mu u_1(\tau, \varepsilon) + \mu^2 u_2(\tau, \varepsilon) + \dots). \end{aligned}$$

В останньому співвідношенні прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях  $\mu$ :

$$\mu_0: A_0(\tau) u_0(\tau, \varepsilon) - \lambda_1(\tau) u_0(\tau, \varepsilon) = \varepsilon u'_0(\tau, \varepsilon);$$

$$\mu^r: A_0(\tau) u_r(\tau, \varepsilon) - \lambda_1(\tau) u_r(\tau, \varepsilon) = \varepsilon u'_r(\tau, \varepsilon) - \sum_{j=1}^r A_j(\tau) u_{r-j}(\tau, \varepsilon), r = 1, 2, \dots$$

і, враховуючи дистрибутивний закон для нескінченних матриць, отримаємо рекурентні співвідношення

$$(A_0(\tau) - \lambda_1(\tau) E_\infty) u_0(\tau, \varepsilon) = \varepsilon u'_0(\tau, \varepsilon) \quad (1.62)$$

$$(A_0(\tau) - \lambda_1(\tau) E_\infty) u_r(\tau, \varepsilon) = \varepsilon u'_r(\tau, \varepsilon) - \sum_{j=1}^r A_j(\tau) u_{r-j}(\tau, \varepsilon) \quad (1.63)$$

Тепер у рівняннях (1.62) – (1.63) будемо прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях малого параметра  $\varepsilon$ . Зокрема з рівняння (1.62) отримаємо:

$$\varepsilon^0 : (A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty)u_{00}(\tau) = 0_\infty, \quad (1.64)$$

$$\varepsilon^s : (A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty)u_{0s}(\tau) = u'_{0,s-1}(\tau). \quad (1.65)$$

У рівнянні (1.64) перейдемо до координатної форми запису:

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{00,j}(\tau) = 0,$$

Звідки бачимо, що  $u_{00,j}(\tau) = 0, j = 2, 3, \dots$ , а перший компонент вектор-функції  $u_{00}(\tau)$  поки що невизначений. У рівнянні (1.65) покладемо  $s = 1$ , тоді

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{01,j}(\tau) = u'_{00,j}(\tau),$$

причому

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{01,j}(\tau) = 0, j = 2, 3, \dots,$$

тому  $u_{01,j}(\tau) = 0, j = 2, 3, \dots$ , а якщо  $j = 1$ , то  $0 = u'_{00,1}(\tau)$ , звідки  $u'_{00,1}(\tau) = const$ , покладемо її рівною 1. Тепер вектор  $u_{00}(\tau)$  стає визначеним, а перший компонент вектора  $u_{01,1}(\tau)$  поки що невизначений.

Розглянемо рівняння (1.65) при  $s = 2$ :

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{02,j}(\tau) = u'_{01,j}(\tau), j = 1, 2, \dots,$$

тому знову ж таки  $u_{02,j}(\tau) = 0, j = 2, 3, \dots$ , а якщо  $j = 1$ , то  $0 = u'_{01,1}(\tau)$ , звідки  $u_{01,1}(\tau) = 1$ . Використовуючи метод математичної індукції можна довести, що вектори  $u_{0s}(\tau), s = 0, 1, 2, \dots$  матимуть вигляд:

$$u_{0s}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, s = 0, 1, 2, \dots \quad (1.66)$$

Тобто вектор  $u_0(\tau, \varepsilon)$  набере вигляду:

$$u_{0_s}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \varepsilon^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Розглянемо тепер другу частину рекурентних співвідношень (1.63), їх ми використаємо для визначення невідомих вектор – функцій  $u_r(\tau, \varepsilon), r = 1, 2, \dots$

Нехай  $r = 1$ , тоді:

$$(A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty)u_1(\tau, \varepsilon) = \varepsilon u'_1(\tau, \varepsilon) - A_1(\tau)u_0(\tau, \varepsilon),$$

де знову ж таки прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon^0 : (A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty)u_{10}(\tau) = -A(\tau)u_{00}(\tau), \quad (1.67)$$

$$\varepsilon^s : (A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty)u_{1_s}(\tau) = u'_{1,s-1}(\tau) - A(\tau)u_{01}(\tau), s = 1, 2, \dots \quad (1.68)$$

У рівнянні (1.67) перейдемо до координатної форми запису

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{10,j}(\tau) = -a_{j1}^{(1)}(\tau), j = 1, 2, \dots,$$

звідки видно, що

$$u_{10,j}(\tau) = -\frac{a_{j1}^{(1)}(\tau)}{\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)}, j = 2, 3, \dots,$$

а якщо  $j = 1$ , то  $0 \cdot u_{10,1}(\tau) = a_{11}^{(1)}(\tau)$ , звідки  $a_{11}^{(1)}(\tau) = 0$ , а перший компонент  $u_{10,1}(\tau)$  вектора  $u_{10}(\tau)$  залишається поки що невизначеним.

Нехай  $s = 1$ , тоді з рекурентних співвідношень (1.68) отримаємо:

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{11,j}(\tau) = u'_{10,j}(\tau) - a_{j1}^{(1)}(\tau), j = 1, 2, \dots,$$

або

$$u_{11,j}(\tau) = -\frac{u_{10,j}(\tau) - a_{j1}^{(1)}(\tau)}{\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)}, j = 2, 3, \dots,$$

$$u'_{10,1}(\tau) = a_{11}^{(1)}(\tau),$$

$$u_{10,1}(\tau) = \int_0^{\tau} a_{11}^{(1)}(\sigma) d\sigma$$

Отже, вектор – функція  $u_{10}(\tau)$  набирає такого вигляду:

$$u_{10}(\tau) = \begin{bmatrix} \int_0^{\tau} a_{11}^{(1)}(\sigma) d\sigma \\ -\frac{a_{21}^{(1)}(\tau)}{\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)}, \\ -\frac{a_{31}^{(1)}(\tau)}{\lambda_3(\tau) - \lambda_1(\tau)}, \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

Покажемо, що вектор  $u_{10}(\tau)$  є елементом простору  $m$ . Дійсно, згідно з умовами 3)-4), накладеними на коефіцієнти системи (1.69), отримаємо

$$|u_{10,j}(\tau)| = \left| \frac{-a_{j1}(\tau)}{\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)} \right| \leq \frac{\gamma_0}{d}, j = 2, 3, \dots, |u_{10,1}(\tau)| \leq \gamma_0 T, \quad K = \max \left\{ \frac{\gamma_0}{d}; \gamma_0 T \right\},$$

тому функціональна послідовність  $\{u_{1s,j}(\tau)\}, j = 1, 2, \dots$  є рівномірно збіжною на  $[0; T]$ .

Вектори  $u_{1s}(\tau)$  згідно з умовами 1)-2), накладеними на коефіцієнти системи (1.69), мають неперервні похідні по  $\tau$  достатньо великих порядків. Функціональні послідовності  $\{u_{1s,j}(\tau)\}$  також одностайно – неперервні на відрізку  $[0; T]$ . Дійсно, використовуючи теорему Лагранжа (теорему про середнє) і умови 3) - 4) отримаємо:

$$\begin{aligned} |u_{1s,j}(\tau_2) - u_{1s,j}(\tau_1)| &= \left| \frac{-a_{j1}^{(1)}(\tau_2)}{\lambda_j(\tau_2) - \lambda_1(\tau_1)} - \frac{-a_{j1}^{(1)}(\tau_1)}{\lambda_j(\tau_1) - \lambda_1(\tau_1)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{d^2} \left| a_{j1}^{(1)}(\tau_2) \lambda_j(\tau_1) - \lambda_1(\tau_1) - a_{j1}^{(1)}(\tau_1) \lambda_j(\tau_2) - \lambda_1(\tau_2) \right| = \\ &= \frac{1}{d^2} \left| -a_{j1}^{(1)}(\tau_2) (\lambda_j(\tau_2) - \lambda_j(\tau_1)) + \lambda_j(\tau_2) (a_{j1}^{(1)}(\tau_2) - a_{j1}^{(1)}(\tau_1)) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +a_{j_1}^{(1)}(\tau_2)(\lambda_1(\tau_2) - \lambda_1(\tau_1)) - \lambda_1(\tau_2)(a_{j_1}^{(1)}(\tau_2) - a_{j_1}^{(1)}(\tau_1)) \mid \leq \\
 & \leq \frac{\gamma_0}{d^2} \left( \left| \lambda_j'(\theta_1) \right| + \left| a_{j_1}^{(1)}(\theta_2) \right| + \left| \lambda_1'(\theta_3) \right| + \left| a_{j_1}^{(1)}(\theta_4) \right| \right) \left| \tau_2 - \tau_1 \right| \leq \\
 & \leq \frac{4\gamma_0\gamma_1}{d^2} \cdot \left| \tau_2 - \tau_1 \right|, \tau \leq \theta_i \leq \tau_2, i = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

Отже, послідовність функцій  $\{u_{1s,j}(\tau)\}, j \geq 1$  задовольняє умові Ліпшиця зі сталою  $\lambda = \frac{4\gamma_0\gamma_1}{d^2}$ . А тому, за наслідком з теореми Арцела-Асколі випливає, що така функціональна послідовність є одностайно неперервною.

Нехай  $r = 2$ , тоді

$$(A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty)u_2(\tau, \varepsilon) = \varepsilon u_2'(\tau, \varepsilon) - A_1(\tau)u_1(\tau, \varepsilon) - A_2(\tau)u_0(\tau, \varepsilon).$$

Продовжуючи міркування аналогічним чином, можна визначити всі останні вектори  $u_r(\tau, \varepsilon)$ , довести їх диференційовність по  $\tau \in [0; T]$ . Таким чином, буде побудований формальний розв'язок рівняння (1.60). Тобто нами доведена теорема:

*Теорема 2. Якщо виконуються умови 1)–4), то зчисленна система диференціальних рівнянь (1.69) має формальний частинний розв'язок*

$$x(\tau, \varepsilon, \mu) = u(\tau, \varepsilon, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d\sigma\right),$$

де нескінченний вектор  $u(\tau, \varepsilon, \mu)$  визначається у вигляді формального степеневого ряду (1.61).

*Зауваження.* Аналогічно можна побудувати формальний частинний розв'язок, який відповідає іншим власним значенням  $\lambda_j(\tau), j = 2, 3, \dots$  головної частини  $A_0(\tau)$  матриці  $A(\tau, \mu)$ .

*Приклад.* Розглянемо зчисленну систему диференціальних рівнянь у просторі  $m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{dx_1}{d\tau} = -\frac{x_1}{2} + \mu \sin \tau x_2 + \mu \sin \tau x_3 \\ \varepsilon \frac{dx_k}{d\tau} = -\frac{x_k}{k \cdot 2^k} + \mu \sin \tau x_{k-1} + \mu \cos 2\tau x_k + \mu \sin \tau x_{k+1} \end{array} \right. \quad (1.70)$$

$k=2, 3, 4, \dots$ , де  $\tau \in [0; T]$  – незалежна змінна. Дана система диференціальних рівнянь задовольняє умови теореми 2. Дійсно, для матриці  $A(\tau, \mu)$  правильний розклад в ряд за степенями  $\mu$ , який у даному випадку вироджується у скінченну суму

$$A(\tau, \mu) = A_0(\tau) + \mu A_1(\tau) + \mu^2 A_2(\tau),$$

де

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{2 \cdot 2^2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3 \cdot 2^3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4 \cdot 2^4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$A_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & \sin \tau & \sin \tau & 0 & \dots \\ \sin \tau & \cos 2\tau & \sin \tau & 0 & \dots \\ 0 & \sin \tau & \cos 2\tau & \sin \tau & \dots \\ 0 & 0 & \sin \tau & \cos 2\tau & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

і цей розклад є асимптотичним:  $\left\| A(\tau, \mu) - \sum_{s=0}^m \mu^s A_s(\tau) \right\| \leq C \mu^{m+1}, m = 0, 1.$

Головна частина матриці  $A(\tau, \mu)$  має простий точковий дискретний спектр,

причому  $\lambda_k \neq \lambda_m \quad \forall k \neq m, \quad k, m = 1, 2, \dots, |\lambda_k - \lambda_1| \geq \frac{3}{8} \quad \forall k = 2, 3, 4, \dots$  Похідні

довільного порядку від сум, складені по рядках матриць  $A_1(\tau)$  і  $A_2(\tau)$ , неперервні на відрізку  $[0; T]$ :

$$A_1(\tau): a_j(\tau) \leq 2, \quad \frac{d^k a_j(\tau)}{d\tau^k} \leq 1 + 2^k, k = 1, 2, \dots$$

Тому формальний частинний розв'язок системи (1.70) можна подати у вигляді ряду за степенями параметрів  $\varepsilon$  і  $\mu$

$$u(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r u_r(\tau, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \left( \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_{rs}(\tau) \right) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mu^r \varepsilon^s u_{rs}(\tau),$$

а вектори  $u_{rs}(\tau)$  мають вигляд:

$$u_{00} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, u_{0k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots, \quad u_{1k}(\tau) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin 2\tau \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, k = 0, 1, \dots$$

$$u_{2k}(\tau) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \cos 4\tau \\ -\frac{3}{8} \sin \tau \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, k = 0, 1, \dots, \quad u_{3k}(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{96} \sin 6\tau + \frac{1}{16} \sin 2\tau - \frac{6}{16} \tau \\ -\cos \tau - \frac{3}{8} \sin \tau \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли головна матриця  $A_0(\tau)$  у розкладі

$$A(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k(\tau);$$

є нескінченною клітиною Жордана, тобто:

$$A_0(\tau) = \begin{pmatrix} \lambda(\tau) & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda(\tau) & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda(\tau) & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.71)$$

де  $\lambda(\tau)$  неперервна на відрізку  $[0; T]$  функція.

У цьому випадку можна побудувати точний розв'язок системи (1.59), а саме має місце теорема:

*Теорема 3. Якщо виконуються умови 1) – 2), 4), накладені на коефіцієнти системи (1.59), умова (1.71), тоді існує розв'язок системи (1.59), який можна подати у вигляді*

$$x(\tau, \varepsilon, \mu) = u(\tau, \varepsilon, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda(\sigma) d\sigma\right), \quad (1.72)$$

де  $u(\tau, \varepsilon, \mu)$  - нескінченний вектор, який задовольняє рівняння

$$\varepsilon \frac{du}{d\tau} = \tilde{A}(\tau, \mu)u, \quad (1.73)$$

$$\tilde{A}(\tau, \mu) = \mu \sum_{s=1}^{\infty} \mu^{s-1} A_s(\tau) = \mu \tilde{\tilde{A}}(\tau, \mu) \quad (1.74)$$

*Доведення.* Згідно з умовами 1) – 2), 4) у просторі  $m$  рівномірно обмежених і одностайно – неперервних функціональних послідовностей існує обмежений точний розв'язок нескінченної системи [5].

Підставимо вектор  $x(\tau, \varepsilon, \mu)$ , який визначається співвідношенням (1.72) у систему (1.59), отримаємо

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{du(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda(\sigma) d\sigma\right) + \varepsilon u(\tau, \varepsilon, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda(\sigma) d\sigma\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \lambda(\tau) = \\ & = \left( A_0(\tau) + \mu \sum_{s=1}^{\infty} \mu^{s-1} A_s(\tau) \right) u(\tau, \varepsilon, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda(\sigma) d\sigma\right), \end{aligned}$$

або, після зведення подібних членів, маємо

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda(\sigma) d\sigma\right) \left( \varepsilon \frac{du(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} - A(\tau, \mu)u(\tau, \varepsilon, \mu) + \lambda(\tau)u(\tau, \varepsilon, \mu) \right) = 0.$$

Оскільки, згідно умови (1.73), виконується

$$\varepsilon \frac{du}{d\tau} = \tilde{A}(\tau, \mu)u,$$

то остання рівність є тотожністю. Таким чином, доведено, що вектор (1.72) є розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь (1.59) з умовою (1.71).

Повернемося до умови (1.73), запишемо це рівняння в інтегральній формі

$$u(\tau, \varepsilon, \mu) = u_0 + \int_0^\tau \varepsilon^{-1} \tilde{A}(\tau_1, \mu) d\tau_1, \quad (1.75)$$

де  $u_0 = u(0, \varepsilon, \mu)$  - довільний вектор зі сталими елементами, який належить простору  $\bar{m}$ . Інтегральне рівняння (1.75) будемо розв'язувати методом послідовних наближень. Для цього покладемо:

$$\begin{aligned} u^{(0)}(\tau, \varepsilon, \mu) &= u_0, \\ u^{(1)}(\tau, \varepsilon, \mu) &= u_0 + \int_0^\tau \varepsilon^{-1} \tilde{A}(\tau_1, \mu) u^{(0)} d\tau_1, \\ &\dots\dots\dots \\ u^{(k+1)}(\tau, \varepsilon, \mu) &= u_0 + \int_0^\tau \varepsilon^{-1} \tilde{A}(\tau_1, \mu) u^{(k)}(\tau_1, \varepsilon, \mu) d\tau_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.76)$$

Покажемо, що послідовність  $\{u^{(k)}(\tau, \varepsilon, \mu)\}$  векторних функцій  $u^{(k)}(\tau, \varepsilon, \mu)$  рівномірно збіжна по  $\tau$  до деякої векторної функції  $u(\tau, \varepsilon, \mu)$  на відрізку  $[0; T]$ .

Дослідимо на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_0 + (u^{(n)}(\tau, \varepsilon, \mu) - u^{(n-1)}(\tau, \varepsilon, \mu))), \quad (1.77)$$

враховуючи (1.76), загальний член ряду (1.77) має вигляд

$$\begin{aligned}
 u^{(n)}(\tau, \varepsilon, \mu) &= u_0 + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \tilde{A}(\tau_1, \mu) u^{(n-1)}(\tau_1, \varepsilon, \mu) d\tau_1 = \\
 &= u_0 + \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \tilde{A}(\tau_1, \mu) u_0 d\tau_1 + \frac{\mu^n}{\varepsilon} \int_0^\tau \tilde{A}(\tau_1, \mu) \int_0^{\tau_1} \tilde{A}(\tau_2, \mu) \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} \tilde{A}(\tau_n, \mu) u_0 d\tau_n \cdots d\tau_2 d\tau_1
 \end{aligned} \tag{1.78}$$

а норми матриць  $\tilde{A}(\tau, \mu)$  і вектора  $u_0$  на відрізку  $[0; T]$  задовольняють нерівностям

$$\left\| \tilde{A}(\tau, \mu) \right\| \leq \gamma, \quad \|u_0\| \leq a \tag{1.79}$$

Використовуючи (1.78), (1.79), отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}
 \|u^{(n)}(\tau, \varepsilon, \mu) - u^{(n-1)}(\tau, \varepsilon, \mu)\| &\leq \left( \alpha + \frac{\mu}{\varepsilon} \alpha \gamma T + \frac{\mu^2}{\varepsilon} \alpha \gamma^2 \frac{T^2}{2!} + \dots + \frac{\mu^{n-1}}{\varepsilon} \alpha \gamma^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\mu^n}{\varepsilon} \alpha \gamma \frac{T^n}{n!} \right) - \\
 &- \left( \alpha + \frac{\mu}{\varepsilon} \alpha \gamma T + \frac{\mu^2}{\varepsilon} \alpha \gamma^2 \frac{T^2}{2!} + \dots + \frac{\mu^{n-1}}{\varepsilon} \alpha \gamma^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \right) = \frac{\mu^n}{\varepsilon} \alpha \gamma^n \frac{T^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Звідки випливає, що для ряду (1.77) можна побудувати мажорантний збіжний ряд

$$\alpha \left( 1 + \frac{\mu}{\varepsilon} \gamma T + \frac{\mu^2}{\varepsilon} \gamma^2 \frac{T^2}{2!} + \dots + \frac{\mu^n}{\varepsilon} \gamma^n \frac{T^n}{n!} + \dots \right).$$

На основі теореми Вейерштрасса функціональний ряд (1.77) збіжний рівномірно по  $\tau \in [0; T]$  і сума цього ряду  $u(\tau, \varepsilon, \mu)$  неперервна по  $\tau$ . Тому у співвідношенні

$$u^{(k+1)}(\tau, \varepsilon, \mu) = u_0 + \int_0^\tau \frac{1}{\varepsilon} \tilde{A}(\tau_1, \mu) u^{(k)}(\tau_1, \varepsilon, \mu) d\tau_1$$

можна перейти до границі під знаком інтеграла так, що гранична функція  $u(\tau, \varepsilon, \mu)$  задовольняє інтегральному рівнянню (1.75). Теорема доведена.

Згідно умов для матриці  $\tilde{A}(\tau, \mu)$  запишемо асимптотичну формулу

$$\tilde{A}(\tau, \mu) = \sum_{s=1}^m \mu^{s-1} A_s(\tau) + O(\mu^m). \tag{1.80}$$

тоді для послідовних наближень можна отримати оцінку

$$u^{(k)}(\tau, \varepsilon, \mu) = u_0 + v_m^{(k)}(\tau, \varepsilon, \mu) + O\left(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\right), \quad (1.81)$$

де  $v_m^{(k)}(\tau, \varepsilon, \mu)$  відомі векторні функції, які визначаються з рівнянь (1.76):

$$\begin{aligned} u^{(k)}(\tau, \varepsilon, \mu) &= u_0 + \int_0^\tau \frac{\mu}{\varepsilon} \left( \sum_{s=1}^m \mu^{s-1} A_s(\tau_1) + O(\mu^m) \right) u^{(k-1)}(\tau_1, \varepsilon, \mu) d\tau_1 = \\ &= u_0 + \frac{\mu}{\varepsilon} \int_0^\tau \sum_{s=1}^m \mu^{s-1} A_s(\tau_1) u^{(k-1)}(\tau_1, \varepsilon, \mu) d\tau_1 + O\left(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\right) = u_0 + v_m^{(k)}(\tau, \varepsilon, \mu) + O\left(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що співвідношення  $\frac{\mu}{\varepsilon}$  не може бути у даному випадку нескінченно – малою величиною при  $\mu \rightarrow 0$  і  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отже, асимптотична формула для розв'язку системи диференціальних рівнянь набирає вигляду:

$$x(\tau, \varepsilon, \mu) = \left( u_0 + v_m^{(k)}(\tau, \varepsilon, \mu) + O\left(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\right) \right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda(\tau_1) d\tau_1\right).$$

Доведемо, що побудовані раніше формальні розв'язки (1.60) – (1.61) при певних умовах мають асимптотичний характер у тому розумінні, що якщо обірвати відповідні ряди  $u(\tau, \varepsilon, \mu)$  на якомусь  $m$ -му члені

$$u_m(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{r=0}^m \mu^r u_r(\tau, \mu) = \sum_{r=0}^m \mu^r \sum_{s=0}^m \varepsilon^s u_{rs}(\tau) = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^m \mu^r \varepsilon^s u_{rs}(\tau) \quad (1.82)$$

і з отриманих таким чином часткових сум побудувати вектор  $x_m(\tau, \varepsilon, \mu)$  ( $m$ -е наближення)

$$x_m(\tau, \varepsilon, \mu) = u_m(\tau, \varepsilon, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda(\sigma) d\sigma\right), \quad (1.83)$$

то цей вектор при фіксованому  $m$  і при  $\mu \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$  прямує до точного розв'язку системи (1.59). Тобто має місце теорема:

*Теорема 4. Якщо виконуються умови теореми 2 і:*

5. Існують сталі  $r_1$  і  $r_2$  такі, що

$$\left\| \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \sum_{r=0}^m \mu^r A_r(\sigma) d\sigma \right) \right\| \leq r_1 e^{r_2 \tau}, \quad \tau \in [0; T],$$

6.  $\operatorname{Re} \lambda_1(\tau) \leq 0$ ,

7.  $\|x(\tau, \varepsilon, \mu) - x_m(\tau, \varepsilon, \mu)\| = 0$  при  $\tau = 0$ , то  $\forall \tau \in [0; T], \mu \in (0; \mu_0]$ ,

$\varepsilon \in (0; \varepsilon_0], \dots \frac{\mu}{\varepsilon}$  не є нескінченно малою величиною при  $\mu \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$  можна

вказати таку сталу  $C$ , що має місце нерівність

$$\|x(\tau, \varepsilon, \mu) - x_m(\tau, \varepsilon, \mu)\| \leq C \frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}.$$

*Доведення.* Покажемо спочатку, що  $m$ -те наближення задовольняє системі (1.59) з точністю до величин порядку  $O(\mu^{m+1})$ . Оскільки для вектора  $u_m(\tau, \varepsilon, \mu)$  виконується умова (1.71), то

$$\begin{aligned} x(\tau, \varepsilon, \mu) &= x_m(\tau, \varepsilon, \mu) + \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^r \varepsilon^s u_{rs}(\tau) \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d\sigma \right) = \\ &= x_m(\tau, \varepsilon, \mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s u_{rs}(\tau) \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d\sigma \right), \end{aligned}$$

$$A(\tau, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r A_r(\tau) + \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^r A_r(\tau) = A(\tau, \mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} A_r(\tau),$$

Підставимо такі подання вектора  $x(\tau, \varepsilon, \mu)$  і  $A(\tau, \mu)$  в систему (1.59),

маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_m(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} + \varepsilon \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s u'_{rs}(\tau) \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d\sigma \right) + \\ + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s \lambda_1(\tau) u_{rs}(\tau) \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d\sigma \right) = \\ = \left( A(\tau, \mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} A_r(\tau) \right). \end{aligned}$$

$$\cdot \left( x_m(\tau, \varepsilon, \mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s \lambda_1(\tau) u_{rs}(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda_1(\sigma) d\sigma\right) \right),$$

або

$$\varepsilon \frac{dx_m(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} = A_m(\tau, \mu) x_m(\tau, \varepsilon, \mu) + \mu^{m+1} f(\tau, \varepsilon, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda_1(\sigma) d\sigma\right), \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned} f(\tau, \varepsilon, \mu) = & \left( \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} A_r(\tau) \right) u_m(\tau, \varepsilon, \mu) + A_m(\tau, \mu) \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s u_{rs}(\tau) - \\ & - \varepsilon \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s u'_{rs}(\tau) - \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s \lambda_1(\tau) u_{rs}(\tau), \end{aligned} \quad (1.85)$$

Вектор  $f(\tau, \varepsilon, \mu)$  рівномірно обмежений по  $\tau$  на відрізку  $[0; T]$  як сума векторів  $A_s(\tau) u_{rs}(\tau), u'_{rs}(\tau), u_{rs}(\tau)$ , які належать простору  $m$  (як видно з 10).

З рівності (1.85) видно, що вектор  $\mu^{m+1} f(\tau, \varepsilon, \mu)$  має порядок малості  $O(\mu^{m+1})$ .

Розглянемо вектор

$$y(\tau, \varepsilon, \mu) = x(\tau, \varepsilon, \mu) - x_m(\tau, \varepsilon, \mu), \quad (1.86)$$

згідно умови 7 теореми 4 значення вектора  $y(\tau, \varepsilon, \mu)$  у точці  $\tau = 0$  дорівнює нульовому вектору

$$y(0, \varepsilon, \mu) = 0.$$

Використовуючи (1.85), систему (1.59) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{dx(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} - \varepsilon \frac{dx_m(\tau, \varepsilon, \mu)}{d\tau} = \\ & = A(\tau, \mu) x(\tau, \varepsilon, \mu) - A_m(\tau, \mu) x_m(\tau, \varepsilon, \mu) + \mu^{m+1} f(\tau, \varepsilon, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda_1(\sigma) d\sigma\right). \end{aligned}$$

Вектори  $A(\tau, \mu)x_m(\tau, \varepsilon, \mu) - A_m(\tau, \mu)x_m(\tau, \varepsilon, \mu)$  є елементами простору  $m$ , оскільки згідно з умовами теореми 2 і означенням норм вектора і матриці, маємо

$$\begin{aligned} \|A(\tau, \mu)x_m(\tau, \varepsilon, \mu)\| &\leq \|A(\tau, \mu)\| \cdot \|x_m(\tau, \varepsilon, \mu)\| = \gamma_0 \cdot \sup \{ |x_{mj}(\tau, \varepsilon, \mu)| \} = \\ &= \sup \{ \gamma_0 |x_{mj}(\tau, \varepsilon, \mu)| \} \end{aligned}$$

Використаємо дистрибутивний закон для нескінченних матриць, тоді вектор  $y(\tau, \varepsilon, \mu)$  задовольняє такій системі диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{d\tau} &= A(\tau, \mu)y(\tau, \varepsilon, \mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} A_r(\tau) \cdot x_m(\tau, \varepsilon, \mu) + \\ &+ \mu^{m+1} f(\tau, \varepsilon, \mu) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda_1(\sigma) d\sigma\right). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Замінімо систему диференціальних рівнянь (1.87) еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} y(\tau, \varepsilon, \mu) &= \int_0^{\tau} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \sum_{r=0}^m \mu^r A_r(\tau_1) d\tau_1\right) \tilde{A}(\tau_2, \mu) y(\tau_2, \varepsilon, \mu) d\tau_2 + \\ &+ \frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \sum_{r=0}^m \mu^r A_r(\tau_1) d\tau_1\right) \Phi(\tau_2, \varepsilon, \mu) d\tau_2, \end{aligned} \quad (1.88)$$

де через  $\tilde{A}(\tau, \mu)$  позначена нескінченна матриця і нескінченний вектор виду:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\tau, \mu) &= \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} A_r(\tau), \\ \hat{O}(\tau, \varepsilon, \mu) &= \left( \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} A_r(\tau) u_m(\tau, \varepsilon, \mu) + f(\tau, \varepsilon, \mu) \right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda_1(\sigma) d\sigma\right), \end{aligned}$$

які також є елементами простору  $m$ . Тоді норма вектора  $y(\tau, \varepsilon, \mu)$  задовольняє такій нерівності:

$$\|y(\tau, \varepsilon, \mu)\| \leq \int_0^{\tau} \left\| \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \sum_{r=0}^m \mu^r A_r(\tau_1) d\tau_1\right) \right\| \cdot \|\tilde{A}(\tau_2, \mu)\| \cdot \|y(\tau_2, \varepsilon, \mu)\| d\tau_2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon} \int_0^\tau \left\| \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \sum_{r=0}^m \mu^r A_r(\tau_1) d\tau_1 \right) \right\| \cdot \|\Phi(\tau_2, \varepsilon, \mu)\| d\tau_2; \\
 \|y(\tau, \varepsilon, \mu)\| & \leq r_1 e^{r_2 T} M_1 \int_0^\tau \|y(\tau_2, \varepsilon, \mu)\| d\tau_2 + \frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon} r_1 e^{r_2 T} M_2 T, \\
 \|y(\tau, \varepsilon, \mu)\| & \leq \frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon} C.
 \end{aligned}$$

Тоді  $\|x(\tau, \varepsilon, \mu) - x_m(\tau, \varepsilon, \mu)\| \leq \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \mu^m \cdot C$ ,  $C = \text{const}$ . Теорема доведена.

Отже, у даному дослідженні нами показано особливості розв'язування зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами у просторі одностайно неперервних і рівномірно обмежених функціональних послідовностей; досліджено зчисленні системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами у випадках простого спектру головної матриці системи (1.59) і нескінченної клітини Жордана; побудовано формальні розв'язки і встановлено їх асимптотичний характер.

Використані методи дослідження: аналіз наявної літератури, порівняння результатів досліджень, проведених іншими науковцями, їх узагальнення і конкретизація для розв'язання математичної задачі. Серед математичних методів розв'язування диференціальних рівнянь використано наближені методи: послідовних наближень і асимптотичні.

*Перспективи досліджень.* Для зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами важливо продовжити дослідження побудови формальних розв'язків та їх асимптотичного характеру у випадку кратного дискретного спектру головної матриці у просторі рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей.

Ще один напрямок розвитку теорії зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами: побудова

асимптотичних розв'язків зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь шляхом «укорочення».

**Список використаних джерел**

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / за ред. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. М.: Наука, 1974. 504 с.
2. Валеев К. Г. Бесконечные системы дифференциальных уравнений / за ред. К. Г. Валеев, О. А. Жаутиков. Алма-Ата: Наука, 1974. 413 с.
3. Валеев К. Г. Применение метода малого параметра при исследовании устойчивости решений системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / за ред. К. Г. Валеев, Т. С. Султанбеков. К.: Институт нар. хоз-ва, 1987. 11 с.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
5. Wasow W. Linear turning point theory. New York: Springer, 1985. 243 p.
6. Перестюк М.О., О.В.Капустян О.В., Фекета П.В., Касімова Н.В. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь: навч. посіб. Київ: Київський університет, 2015. 125 с.
7. Евтухов В. М. Асимптотическое интегрирование некоторых классов систем линейных дифференциальных уравнений. Нелинейные колебания. 2000. Т. 3, № 3. С. 334-357.
8. Евтухов В. М. Некоторые вопросы асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка. *Укр. мат. ж.* 2002. Т. 54, № 1. С. 20 - 42.
9. Ковтонюк М.М. Асимптотическое поведение решения одной бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.* 1983. Т.35. С.630-636.
10. Ковтонюк М.М. О построении формального решения бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной дробного ранга. *Приближенные методы математического анализа*. К.: 1982. С.72-79.
11. Кузьма Н. Г. Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися и осциллирующими коэффициентами. *Укр. мат. журн.* 1990. Т. 40, № 5. С. 642 – 644.
12. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы математической физики / за ред. Ю. А. Митропольский. К. : Вища школа, 1988. С. 256 – 263.
13. Персидский К. П. О спектре характеристических чисел. *ПММ*. 1950. Т.14, вып.5. С. 3 – 18.
14. Персидский К. П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений. *Известия АН Казах. ССР, сер. мат. и мех.*, 1948. Вып. 2. С. 2 – 35.
15. Самойленко А.М., Ключник І.Г. Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. *Нелінійні коливання*. 2009. Т.12, № 2. С. 208-234.
16. Сотниченко Н. А., Кузьма Н. Г. Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися и осциллирующими коэффициентами. К.: Киев, инж. строит, ин-т, 1991. 30 с.

17. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. Об асимптотическом решении для дифференциального уравнения в банаховом пространстве при наличии конечной системы кратных собственных значений. *Укр. мат. журн.*, 1976, т. 28, 5. С.655-663.
18. Фещенко С. Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.* 1955. Т. 7, С. 163 – 179.
19. Фещенко С. Ф. Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. К.: Наукова думка, 1966. 252 с.
20. Фещенко С. Ф., Н. И. Шкиль, Ю. П. Пидченко, Н. А. Сотниченко. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / за ред. С. Ф. Фещенко. К.: Наукова думка, 1981. 292 с.
21. Харасахал В. Х. О фундаментальных решениях сетных систем дифференциальных уравнений. *Известия АН Казах. ССР, сер. мат. и мех.* 1950. Вып. 4. С. 98 – 108.
22. Шкиль Н.И., Завизион Г.В. Асимптотическое представление решений системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной при наличии точки поворота. Доклады АН УССР, сер. А, 1988, 9. С. 21–25.
23. Шкиль Н. И. Системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. К.: Наукова думка, 1966. 252 с.
24. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. К. : Вища школа, 1971. 226 с.
25. Яковець В.П. Асимптотика общего решения линейной сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами. Дифференциальные уравнения, 1993, 29. №2. С.256–266.