Тетяна Бех, Наталія Захарченко

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ІЗ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Анотація. *У статті розглянуто поняття прикладної задачі і математичної моделі. Проаналізовано метод математичного моделювання як основний метод розв'язування прикладних задач на прикладі задач імовірнісно-статистичного змісту. Розглянуто приклади використання вказаного методу до розв'язування задач.*

Ключові слова: *прикладна задача, математичне моделювання, модель, імовірність, статистика, комбінаторика.*

Постановка проблеми. Мета викладання математики як елементу професійної та передпрофесійної підготовки безпосередньо пов'язана з принципом прикладної спрямованості. Вивчення розділів прикладного характеру, таких як елементи теорії ймовірності та математичної статистики, є одним із основних засобів реалізації прикладної спрямованості вивчення математики. Реалізація прикладної спрямованості при навчанні стохастики можлива у старшій профільній школі, коли перед учителем постає одна з головних задач – показати можливості використання математичного апарату в майбутній професійній діяльності старшокласників.

В якості основного компоненту реалізації прикладної спрямованості навчання елементам теорії ймовірності та математичної статистики в старшій школі в умовах профільної диференціації виступають задачі прикладного характеру.

Мета статті – проаналізувати метод математичного моделювання як основний метод розв'язування прикладних задач на прикладі задач імовірнісно-статистичного змісту.

Виклад основного матеріалу. Прикладна задача стохастики – це задача, «яка виникла в реальній життєвій ситуації (в галузі майбутніх професійних інтересів школярів), для розв'язання якої необхідно залучити ймовірнісно-статистичний апарат» [2, с. 110].

Одним із основних методів розв'язування прикладних задач є метод математичного моделювання. По-суті, вивчення будь-якої теми шкільного курсу математики закінчується побудовою деякої математичної моделі. В науці моделі використовуються для вивчення різних об'єктів (явищ і процесів), для розв'язання різноманітних наукових задач і отримання таким чином якоїсь нової інформації. Тому науковці модель визначають як деякий об'єкт, дослідження якого є засобом для отримання знань про інший об'єкт [5, с. 23]. Через поняття математичної моделі розкривається подвійний зв'язок математики з реальним світом. З одного боку, математика слугує практиці з вивчення й засвоєння об'єктів реального світу, а з іншого – саме життя, практика сприяє подальшому розвитку математики.

Аналіз науково-методичної літератури дозволив нам виділити 4 типи моделей, які використовуються в дослідженнях старшокласників.

1. Безпосередньо математична модель вивчається в основному шкільному курсі математики, постановка цієї моделі дозволяє доступно викласти її учням, а результати математичного моделювання мають наочну, повчальну, змістову і професійну інтерпретацію.

2. Математична модель не вивчається в основному шкільному курсі математики, але існує методика, яка дозволяє зробити її доступною для сприймання учнями того чи іншого профілю. При цьому спеціальні знання, що використовуються при постановці математичної моделі, не вимагають тривалого викладання, а змістова інтерпретація результатів математичного моделювання доступна і повчальна для учнів.

3. Сама математична модель є доступною для учнів, однак її постановка вимагає досить тривалого за часом викладання нематематичних професійних вимог.

4. Математична модель базується на розділах вищої математики, які не дозволяють адаптувати її для викладання учням [7, с. 274].

При вивченні теорії ймовірності та математичної статистики під моделювання реальної ситуації (явища) розуміють заміну дослідження самого явища дослідження деякого іншого явища стохастичної природи. По-суті мова йде про залучення деяких ідей відомого методу статистичного моделювання на елементарному для школярів рівні [7, с. 273].

Розв'язування прикладних задач засобами математичного моделювання складається з трьох етапів:

- формалізація – побудова математичної моделі (фаза математизації0;
- розв'язування внутрішньомодельної математичної задачі (фаза дедукції і розрахунків);
- обґрунтування отриманого розв'язку (фаза інтерпретації) [5, с. 27].

Зауважимо, що ефективним засобом навчання учнів загальним способам розв'язування прикладних задач є, по-перше, явне виділення усіх трьох етапів при розв'язуванні задач, по-друге, навчання учнів свідомому виконанню кожного з цих етапів розв'язування задач окремо.

Перший етап для школярів є самим складним. Дослідження рівня освіти свідчить, що учні найгірше розв'язують задачі, в яких необхідно математизувати запропоновану життєву ситуацію, тобто виокремити в ситуації проблему, яка розв'язується математичними методами, розробити відповідну їй математичну модель, а потім розмірковувати над її розв'язуванням. Однією з головних причин відсутності відповідних умінь є той факт, що, як правило, учнів знайомлять у школі з математичними поняттями й алгоритмами, а потім за допомогою певного набору задач відпрацьовують уміння й навички застосування даної теми, при цьому учні досить часто не уявляють, у якій галузі науки можна застосувати отримані знання та вміння. Крім того, для переведення задачі з природньої мови на математичну необхідно мати досить високий рівень уміння абстрагувати, що пов'язане з формуванням і розвитком математичного мислення [3, с. 109].

Реалізація першого етапу вимагає багатьох умінь, а саме: вміння виділяти основні фактори, що визначають досліджуване явище (процес); вміння вказати фактори, що призводять до похибки при складанні моделі; вміння обирати математичний апарат для складання моделі [6, с. 38]. При цьому формується своєрідний стиль мислення, характерними рисами якого є [6, с. 70]:

- домінування логічної схеми міркування;
- чітке розмежовування ходу міркувань;
- лаконізм, свідоме прагнення завжди знаходити раціональний, логічний шлях, який призводить до поставленої мети;
- скрупульозна точність символіки.

На першому етапі розв'язування задач засобами математичного моделювання велике значення має «процес переформулювання задачі» [5, с. 72].

Розглянемо приклад переформулювання задачі в процесі її аналізу і розв'язання. Після ознайомлення учнів з основними комбінаторними об'єктами (перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями і без повторень), з правилами суми і добутку, вчитель може запропонувати їм такі задачі.

Задача 1. Деяку колекцію комах розмістили у коробки, кожна з яких мала 10 комірок. У деякі комірки було покладено по одній комасі, а деякі комірки були ще порожні. Будь-які дві коробки цієї колекції відрізняються одна від одної хоча б наявністю чи відсутністю комах в одній і тій самій комірці. Очевидно, що найбільша кількість комах у коробці рівна 10, а найменша – 0 (коробка порожня). Яку максимальну кількість коробок має заготувати колекціонер?

Ця задача дещо незвична, а тому її розв'язок на перший погляд не є очевидним. З метою спростити учням процес пошуку її розв'язку, вчитель пропонує розглянути наступні три задачі.

Задача 2. У приміщенні офісу знаходяться 10 освітлювальних приладів. Скільки існує різних способів освітлення офісу? Два способи освітлення вважаються різним, якщо вони відрізняються станом хоча б одного світильника (горить, не горить). Випадок, коли всі прилади не горять – також спосіб освітлення.

Задача 3. Деяка прямокутна таблиця містить 10 стовпців. У кожній клітинці цієї таблиці поставлено знак «+» чи «—». Довільні два рядки таблиці відрізняються знаком у клітинках, які стоять хоча б в одному і тому ж стовпці. Яку найбільшу кількість рядків має ця таблиця? [1]

Задача 4. Скільки різних десятицифрових чисел можна утворити з цифр 0 і 1? При цьому числа, в запису яких стоять зліва одні нуля (наприклад, 0100011001 або 0000000000), також розглядаються [1].

Після того, як учні уважно вивчили умови кожної задачі, вчитель пропонує їм дати відповідь на так запитання:

1. Про що йде мова в кожній задачі?
2. Що необхідно знайти в кожній задачі?
3. Що спільного в умовах цих задач?
4. Чи можна провести аналогії між даними і невідомими величинами в цих задачах?

В результаті аналізу умов задач 2 – 4 учні роблять висновок про те, що, незважаючи на те, що ситуації, описані в усіх чотирьох задачах різні, їх усіх об'єднує таке: кожна з них є переформулюванням задачі 1. Наприклад, якщо порівняти умови задач 1 і 2, то можна помітити, що кожній комірці коробки ставиться у відповідність деякий освітлювальний прилад, тоді наявність чи відсутність у комірці комахи відповідає вимкнений чи увімкнений прилад. Якщо кожен освітлювальний прилад (комірка коробки) зобразити у вигляді квадрата, а стан (горить) позначати знаком «+» (комаха в комірці), і знаком «—» в протилежному випадку, то кожному способу освітлення офісу (кожній коробці) буде відповідати рядок із 10 квадратиків зі знаками «+» чи «—» — умова задачі 3. Якщо ж тепер розглянути кожен рядок таблиці, про яку йдеться в задачі 3, як десятицифрове число, складене з цифр 0 і 1 (1 відповідає знаку « + » у клітинці, а 0 — знаку « — »), то ми отримаємо задачу 4, розв'язання якої є більш очевидним для учнів.

Так, на кожному місці (з десяти) в запису десятицифрового числа можуть стояти лише дві цифри 0 і 1, тому за правилом добутку отримаємо:

$$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^{10}=1024..$$

Можна також застосувати формулу розміщення з повтореннями:

$$\widetilde{A}_2^{10}=2^{10}=1024\,.$$

Тому загальне число коробок у задачі 1, число способів освітлення офісу в задачі 2 і кількість рядків у таблиці із задачі 3 рівне 1024.

Отже, учні роблять висновок про те, що задачі 2 – 4 були отримані із задачі 1 за допомогою її переформулювання. Таким чином учитель підводить учнів до поняття моделі (кожна із задач 2 – 4 є моделлю задачі 1) і знайомить їх із процесом моделювання (переформулювання задачі 1 послідовно у задачі 2 – 4 є способом її моделювання).

Другий етап розв'язування прикладних задач засобами математичного моделювання передбачає такі навчальні дії учнів:

- виділення основних характеристик задачі;

- переведення задачі з природньої мови на математичну перетворенням її умови, з метою виявлення в ній основного відношення;

- моделювання виділеного відношення у предметній, графічній або буквеній формі;

- перетворення моделі для вивчення властивостей відношення;

- складання часткових задач, які розв'язуються загальним способам.

Важливим на другому етапі математичного моделювання є вправне планування процесу розв'язування сформульованої математичної задачі, виділення в ньому складових задач, уміння аналізувати й уточнювати складену модель, переходити від однієї моделі до іншої й обирати у кожному конкретному випадку найраціональніший й оптимальний розв'язок задачі.

З практики відомо, що після розв'язання задачі учні мають зробити перевірку своєї відповіді для доведення того, що вона задовольняє умові і вимогам задачі. В тому на третьому етапі головне – вміння грамотно перевести результат розв'язування математичної задачі на мову початкової задачі. Принципово важливим є також встановлення відповідності побудованої моделі структурі задачі. Випадки невідповідності можуть слугувати основою для розуміння і пояснення неправильності, як вибраного шляху розв'язування задачі, так і отриманої відповіді.

І. Шапіро стверджує, що «Важливе значення на цьому етапі має володіння методами перевірки розв'язку практичної задачі, вміння розповсюдити знайдений розв'язок на розв'язання інших практичних задач, оцінити підсумковий ступінь точності отриманих результатів і з'ясувати її вплив на коректність розв'язання задачі» [6, с. 39].

Зазначимо також, що навчання розв'язуванню задач за допомогою математичного моделювання активізує мисленнєву діяльність учнів, допомагає їм зрозуміти задачу, самостійно знайти раціональний шлях її розв'язання, встановити доцільний спосіб перевірки, визначити умови, за яких задача має (чи не має) розв'язку. Робота з моделлю дозволяє учням краще прослідкувати залежності між даними і невідомими величинами, оцінити задачу в цілому, а вчителю – продемонструвати різні варіанти розв'язків і, порівнявши їх, узагальнити теоретичні знання.

Аналіз існуючих методик навчання теорії ймовірності та математичної статистики, а також підручників і збірників імовірнісних задач для школярів, показав, що задачі «чисто» математичного змісту явно переважають над задачами з практичним змістом, крім того, при добірці задач майже не використовуються міжпредметні зв'язки.

Розглянемо задачу міжпредметного характеру, за допомогою якої продемонструємо можливість використання елементів теорії ймовірності при розв'язуванні хімічних задач [7, с. 275].

Задача. Чи можливе утворення солі сульфату натрію (Na_2SO_4) в результаті взаємодії 980 гр. сірчаної кислоти (H_2SO_4) із 800 гр. гідроксиду натрію ($NaOH$)?

Розв'язування.

1. Побудова математичної моделі.

Розглянемо подію А – «утворення солі сульфату натрію Na_2SO_4». Для знаходження ймовірності цієї події необхідно скористатися формулою геометричної ймовірності, а саме:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

де $\mu(A)$ і $\mu(\Omega)$ - лебегові міри, відповідно, події *A* і простору усіх елементарних наслідків даного випробування Ω.

У даній задачі мірою $\mu(A)$ є маса сульфату натрію, а мірою $\mu(\Omega)$ - маса всього розчину, що отримується в результаті взаємодії вказаних речовин. Складемо рівняння реакції і за ним визначимо маси цих речовин.

$$Na_2SO_4 + 2\ NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + 2\ H_2O,$$

тоді

$$m(Na_2SO_4) = \frac{m(H_2SO_4) \cdot \mu(Na_2SO_4)}{\mu(H_2SO_4)}.$$

За формулою геометричної ймовірності будемо мати:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{m(Ha_2SO_4)}{m(H_2SO_4) + m(NaOH)},$$

це і є математична модель даної хімічної задачі.

2. Отримання математичних результатів.

Підставляємо отримані значення мас у вказані формули (враховуючи, що для води 1*мл*=1*гр*):

$$m(Na_2SO_4) = \frac{980 \cdot 142}{98} = 580.$$

Тоді будемо мати:

$$P(A) = \frac{580}{980 + 800} = \frac{580}{1780} = 0{,}3258.$$

3. Інтерпретація отриманих результатів.

При переведенні результату, отриманого в ході математичних обчислень, в реальні умови учні роблять висновок про те, що ймовірність утворення солі сульфату натрію (Na_2SO_4) при взаємодії 980 гр. сірчаної кислоти (H_2SO_4) із 800 гр. гідроксиду натрію (NaOH) рівна 0,3258. А це означає, що ми не можемо стверджувати, що сіль буде утворена.

Даний приклад демонструє той факт, що ініціатива і творчість учнів розвиваються при виконанні завдань, які мають різні способи розв'язування. При цьому їхній творчий потенціал проявляється тоді, коли вони разом із традиційними методами розв'язання даної задачі з опорою на знання з профільного предмету (в даному випадку мова йде про розв'язування задачі з хімії), використовують імовірнісний підхід.

Висновки. Систематичне знайомство з математичними моделями, які використовуються в дослідженнях із галузі майбутніх професійних інтересів учнів, дозволяє реалізувати всі три основні мети викладанні математики. А реалізація прикладної спрямованості навчання теорії ймовірності і математичної статистики засобами включення в процес навчання прикладів і задач прикладного характеру сприяє формуванню і розвитку ймовірнісного мислення та ймовірнісно-статистичних уявлень школярів, викликає інтерес до математики і є важливим засобом мотивації учнів до її вивчення.

Список використаних джерел

1. Захарченко Н.В. Теорія ймовітності та математична статистика. Навч.посібник. Вінниця: ФОП Рогальська І.О. 2019. 162 с.
2. Розуменко А.О., Розуменко А.М. Прикладні задачі як засіб ймовірнісного мислення учнів. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 2(16). С. 107-111с.
3. Сухорукова Е.В. Прикладные задачи как средство формирования математического мышления учашихся: дис… канд. пед. наук: 13.00.02. М., 1997. 207 с.
4. Фирсов В.В. О прикладной ориентации курса математики. Математика в школе. 2006. №7. С. 2 -13.
5. Фридман Л.М. Наглядность и моделирование в обучении. М.: Знание, 1984. 80 с.
6. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: кн. для учителя. М.: Просвещение. 1990, 96 с.
7. Ширшова Т.А., Полякова Т.А. Решение прикладных вероятностно-статистических задач методом математического моделирования. Омский научный вестник. 2012. №4 (111). С. 273-276.

METHODS FOR SOLVING APPLIED PROBLEMS IN PROBABILITY THEORY BY MATHEMATICAL MODELING

Abstract. *The concept of applied problem and mathematical model is considered in the article. The method of mathematical modeling as the main method of solving applied problems on the example of problems of probabilistic and statistical content is analyzed. Examples of using this method to solve problems are considered.*

Keywords*: applied problem, mathematical modeling, model, probability, statistics, combinatorics.*

Віталіна Бияковська

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ ПОШУКУ ПІДРЯДКА В РЯДКУ

Анотація*:* *Стаття присвячена розгляду питання пошуку алгоритмів підрядка в рядку реалізовуючи в програмному середовищі . Алгоритм пошуку можна реалізовувати за допомогою алгоритмів послідовного(прямого) пошуку, алгоритм Рабіна – Карпа, Кнута-Моріса-Пратта, а також Бойера–Мура. Перевірка на швидкість і час виконання алгоритмів, а також програмна реалізація алгоритмів з використанням різних функцій.*

Ключові слова*:* *алгоритм послідовного(прямого) пошуку, алгоритм Рабіна-Карпа, алгоритм Кнута-Моріса-Пратта, алгоритм Бойера–Мура, хеш-функція, префікс-функція.*

Актуальність проблеми. Алгоритми пошуку підрядка в рядку є актуальним на сьогоднішній день тому, що ми неодноразово працювати з текстом, наприклад пошук знаходження інформації в інтернеті, а також з текстовими редакторами MS Word, а для того, щоб знайти схожі слова у тексті використовуємо функцію, яка є значно ефективнішою в редагуванні та виправленні документів та пошуку необхідної інформації. Алгоритми пошуку дуже важливі, хоча вони різні, залежно від типу оброблених даних та їх реалізації в програмах, ми враховуємо час пошуку, кількість використаних операцій сортування масиву даних, а потім виконуємо пошук з використанням одного із методів пошуку підрядка. Ми розглядаємо різні алгоритми при виконанні пошуку на основі конкретних завдань та їх вирішенні.

Метою цієї статті є дослідження різних алгоритмів пошуку підрядка в рядку реалізовуючи їх в програмних середовищах, а також розв'язання проблем пов'язаних з пошуком.

Об'єктом дослідження в цій статті є алгоритми опрацювання рядкових даних, а **предметом дослідження** – алгоритми пошуку підрядків у рядках.

Для досягнення сформульованої мети необхідно виконати наступні **завдання**:

- розглянути та проаналізувати алгоритми пошуку підрядка в рядку;
- розглянути програмні реалізації алгоритмів пошуку підрядка в рядку;
- проаналізувати час виконання алгоритмів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемою програмної реалізації алгоритмів пошуку підрядка в рядку займалися: Коул, Апостоліко, Данкарло, Крошемур, Колуссі та інші, які розробили найбільш ефективні рішення в термінах кількості порівняння символів. Алгоритм Бойера-Мура у роботі Коула показав, що на неперіодичних шаблонах за повний прохід по рядку алгоритм зробить не більше трьох порівнянь.

Алгоритм знаходження пошуку підрядка в рядку реалізовується за допомогою наступних алгоритмів.

Алгоритм послідовного (прямого) пошуку полягає в по символьному порівнянні рядка X=x[1]..x[n] з підрядком Y=y[1]..y[m], де довжина рядка є функція **Length(X):=n** ,а довжина підрядка **Length(Y):=m**, причому $0<m\leq n$. На першому етапі реалізації