

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла
Коцюбинського**

В.С.Гаркушевський, С.Д. Цвілик

**ПОВЕРХНІ: УТВОРЕННЯ ТА ЗАВДАННЯ НА
КРЕСЛЕННІ**

Навчальний посібник

Вінниця 2020

УДК 514.18:744(075.8)

DOI: [https://doi.org/10.31652/514.18:744\(075.8\)-1-130](https://doi.org/10.31652/514.18:744(075.8)-1-130)

Гаркушевський В.С., Цвілик С.Д. Поверхні: утворення та завдання на кресленні: Навчальний посібник. Вінниця: ТОВ «Меркьюрі Поділля», 2020. 130 с.

Рецензенти:

В.Г. Петрук доктор технічних наук, професор Вінницького національного технічного університету;

А.Я. Матвійчук кандидат педагогічних наук, доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Рекомендовано до видання вченою радою факультету математики, фізики і технологій Вінницького державного педагогічного університету імені М.Коцюбинського (протокол №10 від 03 квітня 2020 р.)

У навчальному посібнику викладено зміст теорії і практики розділу «Поверхні: утворення та завдання на кресленні» дисципліни «Нарисна геометрія і креслення», як теоретичної основи галузі проектування і конструювання машин і механізмів, техніки й технологій. Наведено відомості про основні види і способи завдання поверхонь на кресленні, схарактеризовано криві й гранні поверхні. Значної уваги надано опису процесів утворення поверхонь. В посібнику наведено практичні рекомендації щодо здійснення певних побудов на гранних і кривих поверхнях. Особливої уваги надано особливим побудовам розгорток поверхонь: точних, наближених і умовних.

Посібник може бути використаний студентами спеціальностей 014.10 Середня освіта (Трудове навчання та технології) та 015.16 Професійна освіта (Сфера обслуговування).

@ В.С.Гаркушевський, 2020,

@ С.Д. Цвілик, 2020.

ПЕРЕДМОВА

Нарисна геометрія і креслення займає особливе місце серед фундаментальних і технічних дисциплін. Це зумовлено тим, що вони складають основу технічної освіти, сприяють розвитку мислення й пізнавальної активності майбутніх учителів, їхніх творчих здібностей, формуванню спеціальних умінь і навичок графічної діяльності. Курс базується на основах нарисної геометрії, що розробляє методи побудови графічних моделей тривимірного простору на площині. Головною метою навчальної дисципліни є побудова зображень предметів та об'єктів конкретної галузі інженерної діяльності для їхнього наступного виготовлення й ремонту. Нарисна геометрія служить теоретичною базою креслення, що є основою для вивчення й засвоєння циклів фундаментальних і технічних дисциплін.

Предметом навчальної дисципліни є складання та читання креслень (графічних моделей) геометричних образів, що є в основі технічних виробів та креслень самих виробів. Нині великого поширення набуває комп'ютерна графіка, що дозволяє виконувати рисунки за допомогою персональних комп'ютерів. У зв'язку з цим у програмі передбачено вивчення основних, програмних розробок та пристроїв управління програмним комплексом.

В посібнику розглядаються відомості теорії поверхонь (основні поняття і визначення) та наведено практичні рекомендації щодо здійснення певних побудов на гранних і кривих поверхнях. Особливої уваги надано особливим побудовам розгортки поверхонь: точних, наближених і умовних.

Посібник призначений для студентів спеціальностей 014.10 Середня освіта (Трудове навчання та технології), 015.16 Професійна освіта (Сфера обслуговування) закладів вищої освіти, буде корисним для викладачів технічних дисциплін, вчителів трудового навчання та технологій і креслення.

РОЗДІЛ 1. ВИДИ ПОВЕРХОНЬ ТА ЇХНЄ ЗАВДАННЯ НА КРЕСЛЕННЯХ

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

1.1. Загальні відомості

У нарисній геометрії поверхню зручно розглядати кінематично (грецьк. - *кінета* – рух) як множину послідовних положень деякої лінії – твірної поверхні, що переміщується у просторі певним чином.

Ілюстрацією кінематичного способу утворення поверхонь можуть слугувати технологічні процеси обробки матеріалів різальним краєм інструменту (різця, фрези, свердла), результатом яких є наявність на поверхні виробу «відбитку» профілю інструменту (рис.1).

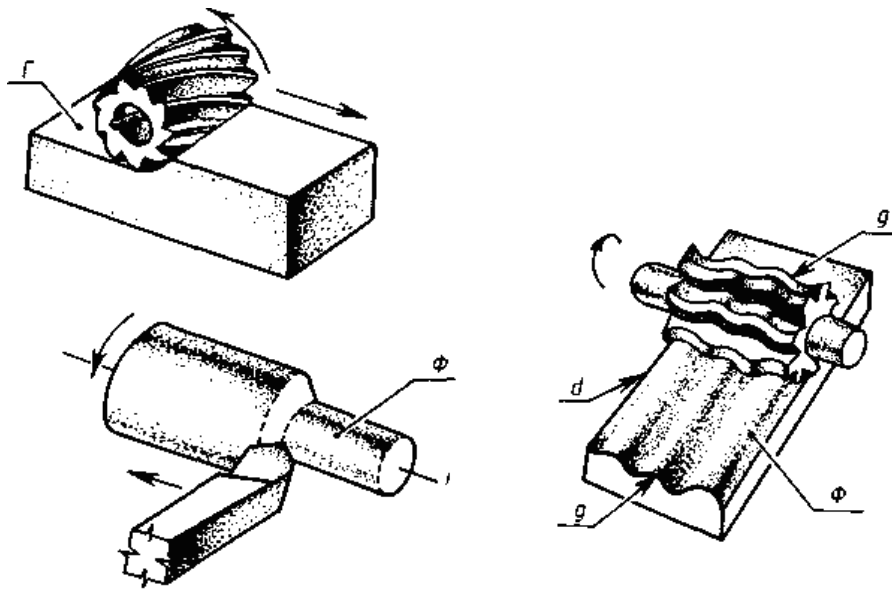


Рис. 1.

Поверхня є абстрактною фігурою, що не має товщини. Поверхня обмежує якийсь геометричне тіло, що складається з конкретного матеріалу - металу, пластмаси, деревини. Поверхня може бути безмежною, але тіло - обмежене. Наприклад, бічною поверхнею циліндра (тіла) слугує циліндрична поверхня; сфера (тіло) обмежене поверхнею сфери тощо.

В інженерній практиці широко застосовується графічне завдання поверхонь та їхнє матеріальне моделювання, наприклад моделі поверхонь матриць і пуансонів.

В аналітичній геометрії поверхню розглядають як неперервну множину точок, координати яких зв'язані в декартовій системі координат рівнянням виду: $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ - багаточлен n -го степеню або трансцендентна функція. У першому випадку поверхня називається алгебраїчною (n -го степеню), у другому - трансцендентною. Впровадження в інженерну практику комп'ютерної техніки обумовило спільне використання графічних та аналітичних способів завдання поверхонь під час проектування технічних форм та їхнього відтворення

на верстатах з числовим програмним керуванням.

За видом твірної поверхні можна поділити на лінійчасті та нелінійчасті. Поверхню називають лінійчастою, якщо її можна утворити рухом прямої лінії g (рис. 2). Поверхню називають нелінійчастою, якщо її не можна утворити переміщенням прямої лінії.

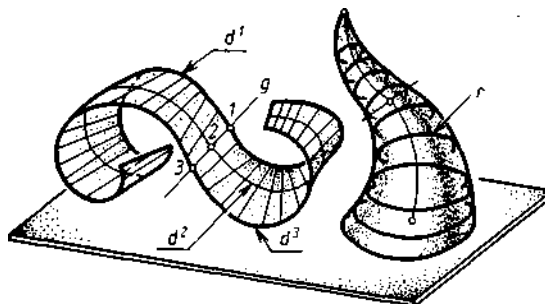


Рис. 2.

Прикладами лінійчастих поверхонь можуть слугувати конічні та циліндричні поверхні; до нелінійчастих поверхонь відносять, наприклад, сферу.

Поверхня вважається циклічною, якщо її твірною може бути коло (рис. 2).

Твірна поверхні в процесі руху може змінювати свою форму. Та сама поверхня може бути утворена переміщенням різних ліній. Залежно від закону руху твірної поверхні поділяють на гвинтові, поверхні обертання, поверхні переносу тощо.

Ознака належності точки до поверхні. Точка належить поверхні, якщо вона розташована на будь-якій лінії цієї поверхні.

1.2. Переріз і каркас поверхні

Перерізом поверхні Φ називають лінію її перетину з площиною T : $m = \Phi \cap T$ (рис. 3). Будь-яку плоску криву поверхні можна розглядати як переріз.

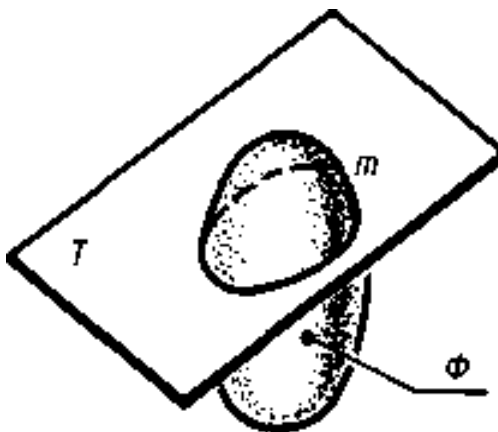


Рис. 3.

Переріз називають нормальним, якщо його площина перпендикулярна до вісі симетрії, до площини симетрії або до певної твірної поверхні.

Каркас поверхні. Упорядковану множину точок або ліній поверхні називають її каркасом: точковим, лінійним тощо. Розрізняють неперервний та дискретний каркаси. У першому випадку множина елементів (точок, ліній) каркаса є неперервною, у другому - визначеною.

На рис. 4 зображено : а) дискретний каркас поверхні, що складається з двох сімейств ліній d і g , що взаємно перетинаються; б) модель каркаса, що складається з повздовжніх та поперечних стрінгерів (брусів) d і g з пазами для їхнього з'єднання при складанні. Якщо каркас обтягнути певним листовим матеріалом, то одержується поверхня, що відповідає цьому каркасу.

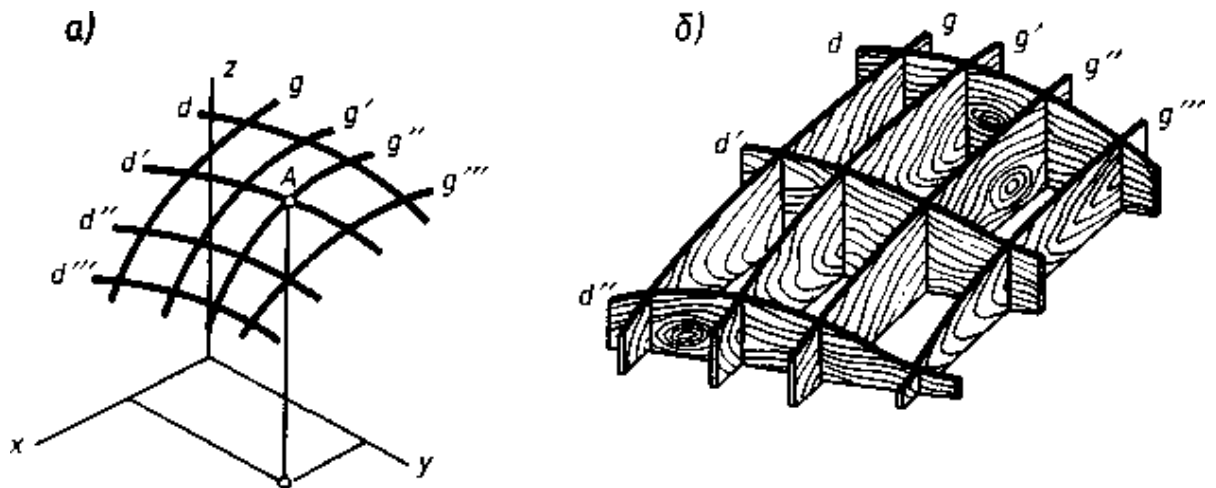


Рис. 4.

1.3. Проекційвальна поверхня

Лінійчаста поверхня T , в якій твірна - пряма g в кожний момент часу паралельна напрямку проєкціювання s , називається проєкційвальною (рис. 5, а).

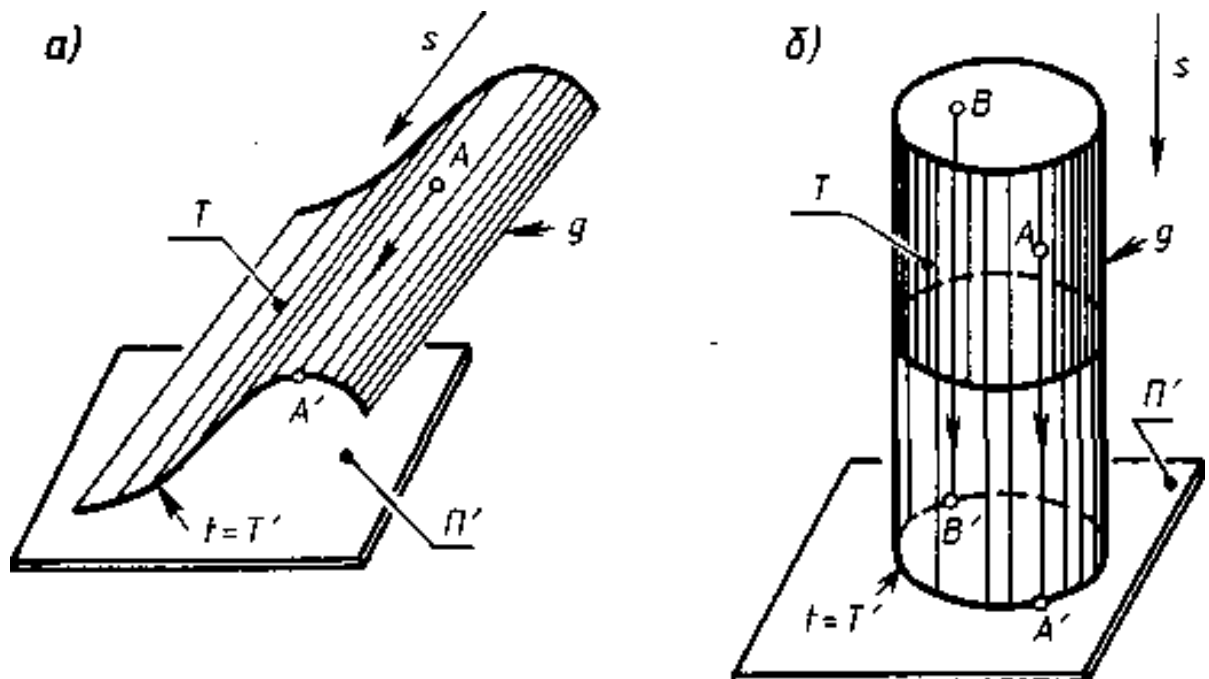


Рис. 5.

В ортогональному проєкціюванні твірна проєкціювальної поверхні T перпендикулярна до площини проєкцій ($g \perp \Pi'$) і сама поверхня T також перпендикулярна до Π' ($T \perp \Pi'$) (рис. 5,б). Розрізняють: горизонтально-проєкціювальну поверхню ($g \perp \Pi_1$), фронтально-проєкціювальну поверхню ($g \perp \Pi_2$) і профільно-проєкціювальну поверхню ($g \perp \Pi_3$).

Проєкцією проєкціювальної поверхні T на відповідну площину проєкцій слугує лінія t . Однойменна проєкція будь-якої точки поверхні T розташовується на лінії t (рис. 5).

1.4. Визначник поверхні

Поверхня вважається заданою на кресленні, якщо відомий закон знаходження й визначення кожної її точки.

Мінімальна інформація, необхідна й достатня для однозначного завдання поверхні у просторі і на кресленні, є визначником поверхні.

Розрізняють дві частини визначника: описову та графічну (як і для кривої лінії). Кожна частина складається з незалежних умов. Наприклад, визначником сфери може бути така інформація:

I частина (описова): йдеться про те, що сфера – це геометричне місце точок, віддалених від заданої точки O (центру сфери) на однакову відстань $R = |OA|$;

II частина (графічна): (рис. 6, а). Дано: епюр точки O ; епюр відрізка $R = |OA|$.

Одна й та ж сама поверхня може мати кілька визначників. В нашому прикладі:

I частина: дана сфера – це поверхня, що утворена обертанням кола m навколо його діаметра BE ($BE = i$);

II частина (рис. 6, б): дано епюр кола m і епюр діаметра BE (BE – це вісь обертання i).

З кількох визначників обирають той, який зручніший у кожному конкретному випадку. Якщо необхідно побудувати горизонтальну проєкцію C_1 точки C , що належить сфері, якщо відома C_2 (рис. 7), то зручно використати визначник сфери, що поданий у другому випадку на рис. 6, б.

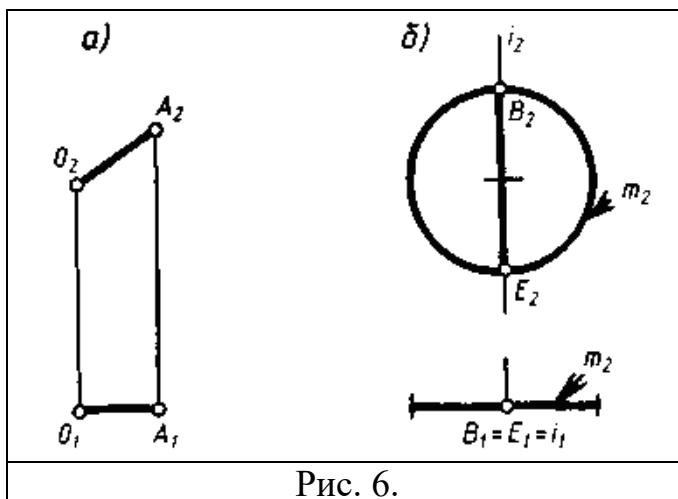


Рис. 6.

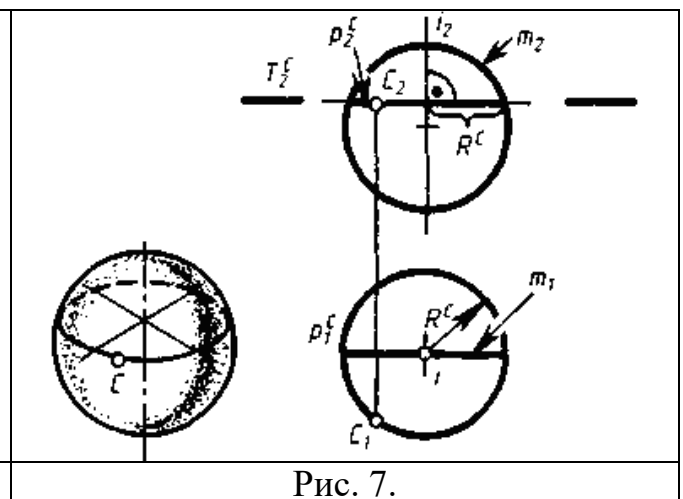


Рис. 7.

У визначенні точки C_1 (рис. 7) використовується закон обертання точки C і кривої m навколо проєкціовальної прямої i ($i \perp \Pi_1$). Паралель p^C , на якій розташована точка C сфери, є колом радіусу R^C , що належить площині T^C і перпендикулярне до вісі i .

Варіанти завдання сфери Φ можна символічно записати таким чином: $\Phi = \{O; R = |OA|\}$ (рис. 6, а); $\Phi = \{i; m\}$ (рис. 6, б); $\Phi = \{A, B, C, E\}$ – як фігура, що визначається своїми чотирма точками. Від одного варіанту завдання (визначника) завжди можна перейти до іншого.

1.5. Обрис поверхні (нарис)

На рис. 8 показано, що при проєкціюванні поверхні Φ на площину проєкцій Π' за напрямом s деякі з проєкціовальних прямих дотикаються поверхні Φ по лінії m і утворюють проєкціовальну циліндричну поверхню T , що огинає задану поверхню Φ . Лінію m називають контурною лінією, а її проєкцію на Π' – лінією m' – обрисом (нарисом, лінією нарису або нарисною лінією) поверхні Φ . На рис. 8 поверхня T умовно вважається прозорою.

Наприклад, при проєкціюванні сфери Φ (рис. 9, а) за напрямом s'' ($s'' \perp \Pi_2$) на площину Π_2 нарисом сфери слугує коло k_2 , а контурною лінією є коло k .

При проєкціюванні сфери Φ (рис. 9, б) за напрямом s' ($s' \perp \Pi_1$) на площину Π_1 нарисом сфери є слугує коло m_1 , а контурною лінією – коло m .

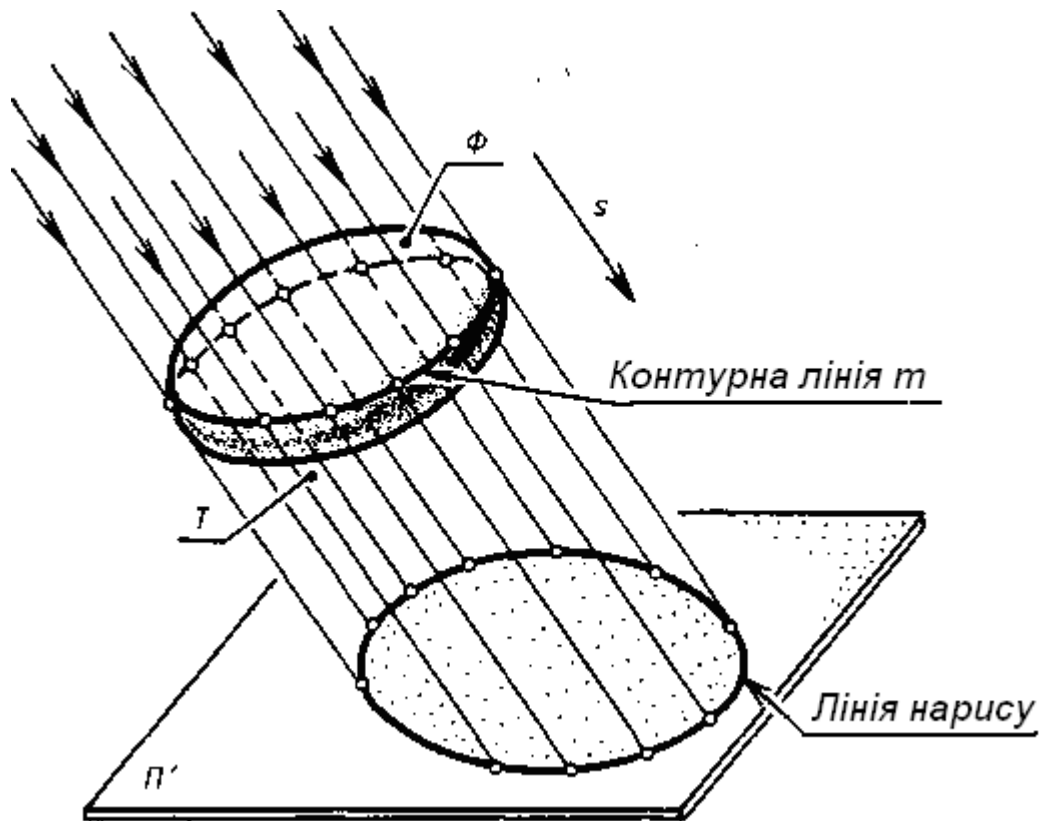


Рис. 8.

Розрізняють горизонтальну, фронтальну і профільну нарисні лінії. Так, m_1 - горизонтальна, m_2 - фронтальна нарисна лінія сфери Φ (рис. 9, в).

Проекція будь-якої точки поверхні Φ розташовується всередині відповідного нарису поверхні (в окремому випадку - на нарисі).

Якщо лінією контуру поверхні слугує твірна поверхні, то її називають контурною твірною, а її проекцію – обрисною (нарисною) твірною.

При побудові епюру напрям проєкціонування співпадає з напрямом погляду спостерігача. Тому контурна лінія є межею видимості поверхні Φ : та її частина, що розташована перед лінією контуру, видима, інша - невидима (рис. 9). Нарисна лінія розмежовує проєкцію на видиму і невидиму частини.

Точки поверхні, що розташовані на контурній лінії, називаються точками видимості, а їхні проєкції – обрисними (нарисними) точками.

1.6. Епюр поверхні

Епюр поверхні має бути оборотним на наочним. Оборотність креслення поверхні забезпечується завданням проєкцій елементів графічної частини її визначника. Для забезпечення наочності креслення поверхні подають обриси поверхні на площинах проєкцій.

Так, на рис. 10 подано епюр сфери з центром O і радіусом $R = |OA|$, що містить графічну частину визначника та обриси (нарисні) сфери.

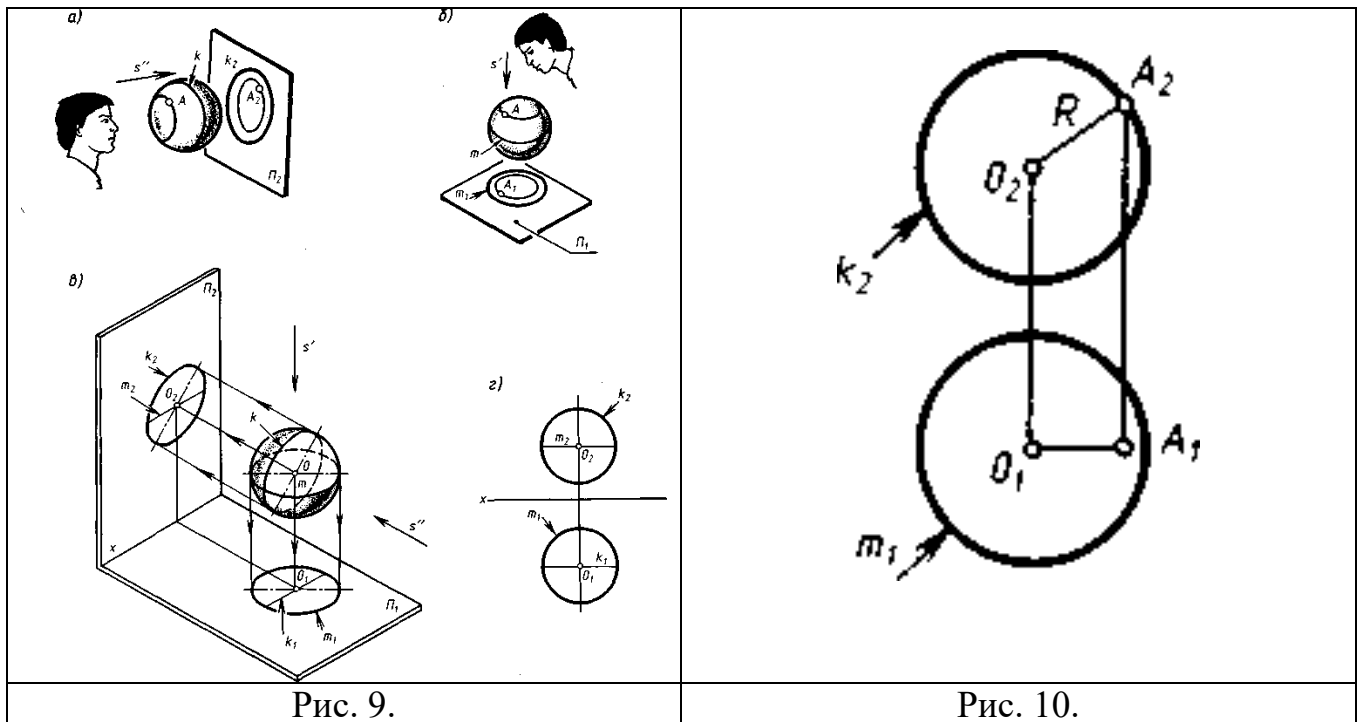


Рис. 9.

Рис. 10.

2. ЛІНІЙЧАСТІ ПОВЕРХНІ З ВЕРШИНОЮ ТА НАПРЯМНОЮ. ТОРСИ

2.1. Визначення і класифікація

Якщо поверхня Φ може бути утворена рухом прямої лінії g (genero (лат.) – творити, створювати, народжувати), що проходить через вершину S – нерухому точку простору і перетинає деяку нерухому лінію d – напрямну (dirigo (лат.) – спрямовувати), то її називають лінійчастою поверхнею з вершиною S і напрямною d .

Геометрична частина визначника таких поверхонь Φ містить вершину S і напрямну d : $\Phi = \{S_1, S_2, d_1, d_2\}$ /

Визначають чотири види лінійчастих поверхонь з вершиною та напрямною:

1. **Конічна** поверхня (рис. 11, а). Вершина S є власною точкою простору, а напрямна d – крива лінія.

2. **Циліндрична** поверхня (рис. 11, б). Вершина S^∞ є невласною точкою простору, а напрямна d – крива лінія.

3. **Пірамідальна** поверхня (рис. 11, в). Відрізняється від конічної тим, що напрямна d – ламана лінія.

4. **Призматична** поверхня (рис. 11, г). Відрізняється від циліндричної тим, що напрямна d – ламана лінія.

Пірамідальна і призматична поверхні відносяться до гранних поверхонь. Гранні поверхні складаються з граней $SAB, SBC, \dots, S^\infty AB, S^\infty BC, \dots$ (рис. 11). Суміжні грані перетинаються по ребрам $SA, SB, \dots, S^\infty A, S^\infty B, \dots$.

Конічна поверхня служить бічною поверхнею конуса (тіла), циліндрична поверхня – циліндра (тіла), пірамідальна і призматична – піраміди і призми тощо.

Твірною лінійчастих поверхонь є пряма g , що є безмежною, тому й поверхні теж безмежні. Але на кресленнях зображують частину поверхні, що може бути обмежена перерізом поверхні, лінією обриву (тонка хвиляста) або будь-якою лінією поверхні.

Конічна та пірамідальна поверхні мають дві поли (порожнини), на які їх поділяє вершина S .

Якщо напрямна d є прямою лінією, то поверхня з вершиною S (S^∞) і напрямною d вироджується у площину.

Якщо пряма лінія g у всіх положеннях дотикається до просторової кривої d , то вона утворює поверхню з ребром повернення, що називається торсом (рис. 12). Ребром повернення служить крива d . Торс визначається завданням ребра повернення d . Лінія поділяє торс на дві поли (порожнини).

Якщо ребро повернення – крива d вироджується у точку S або S^∞ , то торс вироджується у поверхню з вершиною S або S^∞ і напрямною.

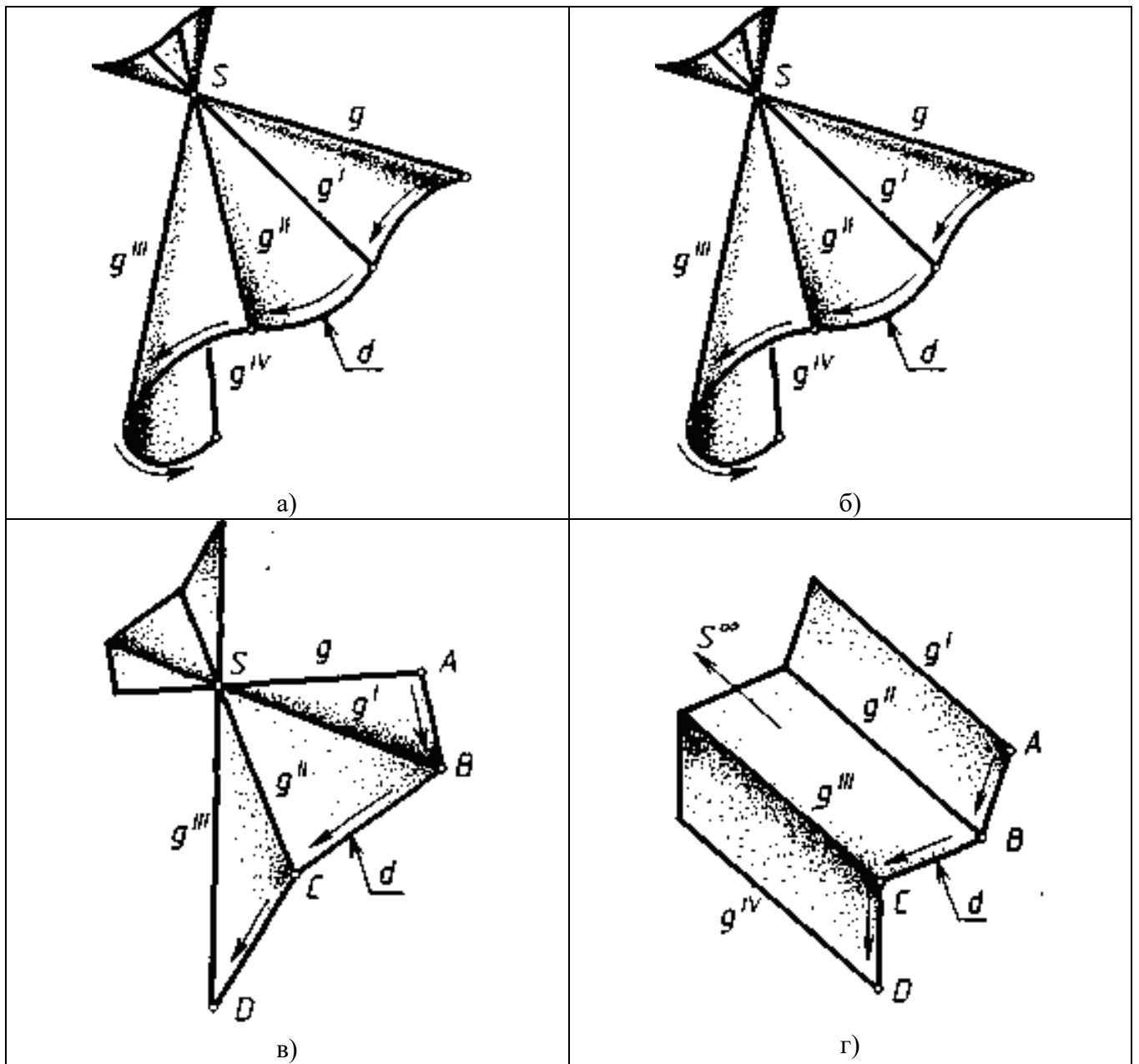


Рис. 11.

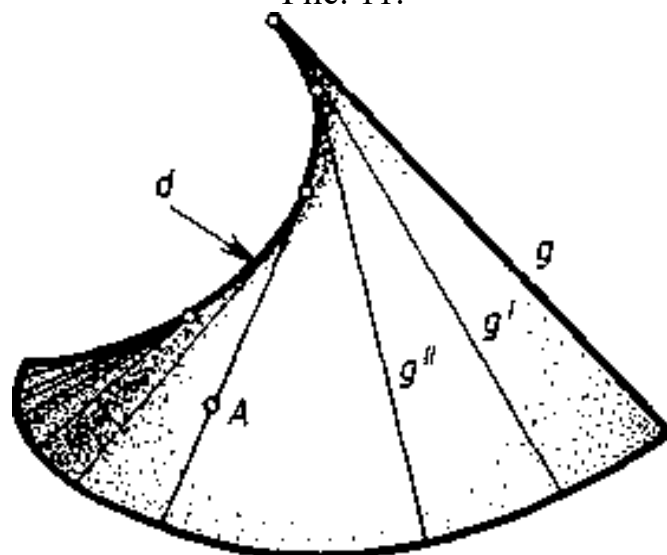


Рис. 12.

2.2. Епюр поверхні. Нарисні твірні

На рис. 13, а зображено епюр геометричної частини визначника конічної поверхні Φ з вершиною S і напрямною d : $\Phi = \{S_1, S_2; d_1, d_2\}$.

Щоб креслення було наочним, його доповнюють зображеннями контурних твірних SA і SB (на Π_2) та SC і SD (на Π_1) (рис. 13,б).

При проєкціюванні конічної поверхні на Π_1 (рис. 13,в) проєкціювальні площини T і T' ($T \perp \Pi_1$; $T' \perp \Pi_1$) дотикаються до поверхні Φ по контурним твірним SC і SD . Горизонтальні проєкції цих твірних – обрисні твірні S_1C_1 і S_1D_1 дотикаються лінії d_1 .

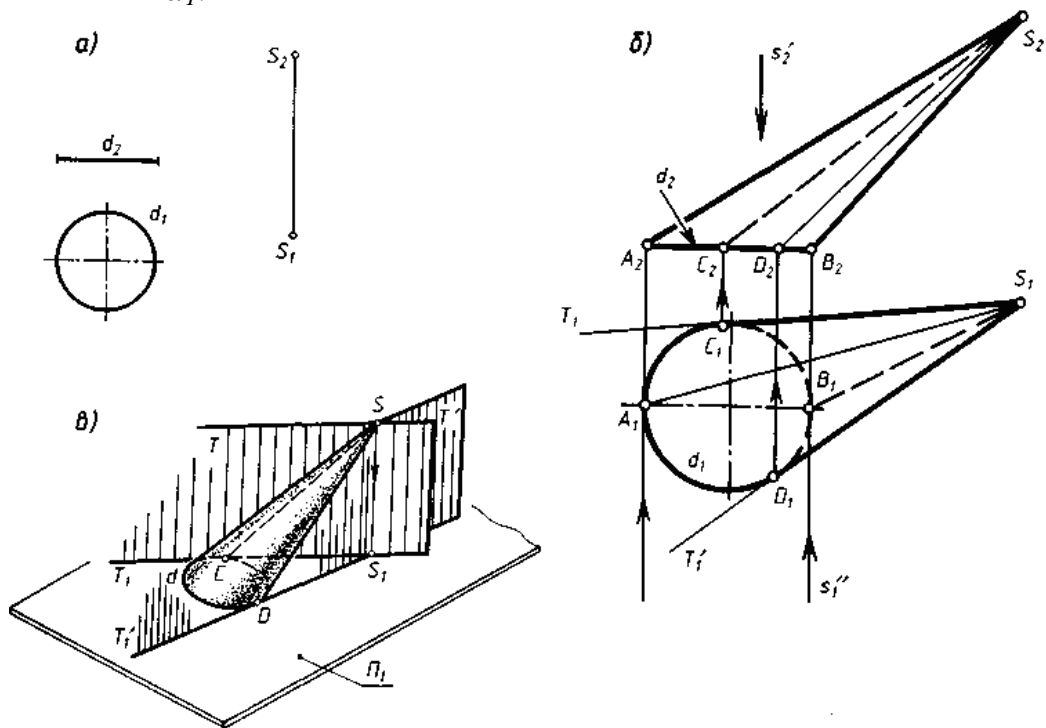


Рис. 13.

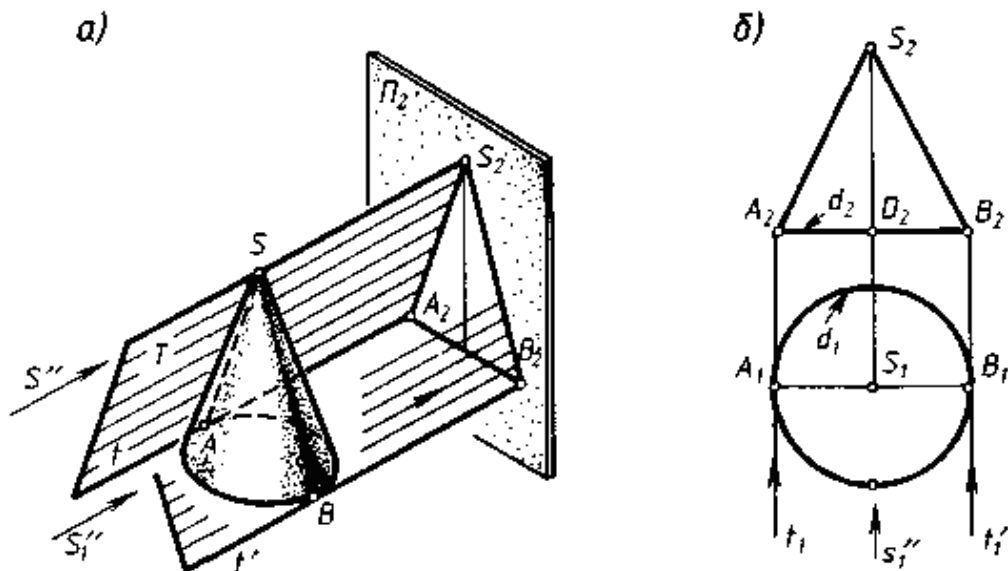


Рис. 14.

Аналогічно обрисні твірні S_2A_2 і S_2B_2 служать дотичними до лінії d_2 .

Для конічної поверхні, що зображена на рис. 14, відсутні нарисні твірні на Π_1 , а є лише нарисні твірні на Π_2 : S_2A_2 і S_2B_2 .

При проєкціюванні на Π_2 (рис. 14, а) всі твірні конічної поверхні, що перетинають напрямну d в межах ділянки А-D-B, видимі на Π_2 ; інші - невидимі. Аналогічно - на рис. 14,б.

При проєкціюванні на Π_1 всі твірні конічної поверхні, що зображено на рис. 14, видимі, а в конічної поверхні на рис. 13 видимі лише ті твірні, що перетинають напрямну d в межах ділянки С-А-D (тобто ті твірні, що розташовані вище контурних твірних SC і SD).

Епюр циліндричної поверхні з вершиною S^∞ і напрямною d подано на рис. 15, а. Горизонтально-проєкціювальні площини T і T' (рис. 15,б) дотикаються циліндричної поверхні (відповідно) по твірним $S^\infty A$ і $S^\infty B$. Обрисними твірними на Обрисними твірними на Π_1 слугують прямі $S^\infty_1A_1$ і $S^\infty_1B_1$. Обрисними твірними на Π_2 (див. епюр) слугують прямі $S^\infty_2A_2$ і $S^\infty_2B_2$, що є дотичними до лінії d_2 , побудованими за напрямом S_2^∞ (S_2^∞ належить s_2).

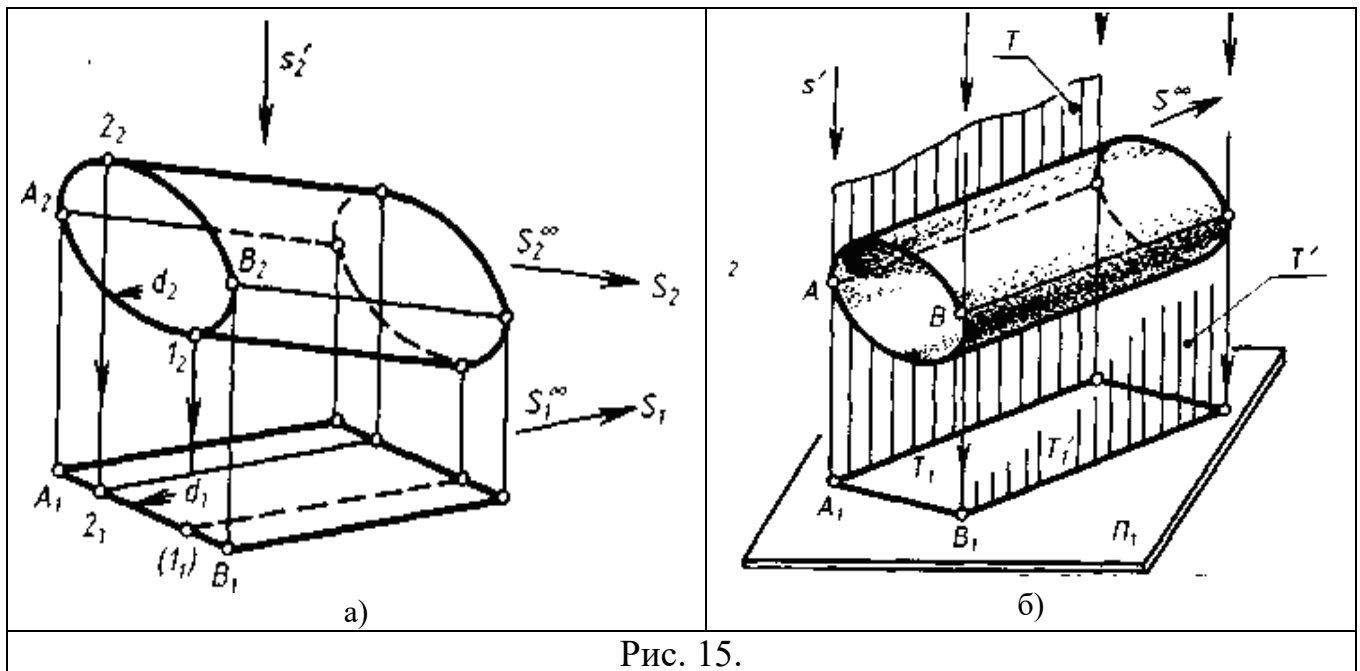


Рис. 15.

Будь-яка твірна циліндричної поверхні, що перетинає напрямну d у межах ділянки А-2-B, видима при проєкціюванні на Π_1 (інші - невидимі); будь-яка твірна, що перетинає напрямну d в межах ділянки 2-B-1, видима при проєкціюванні на Π_2 (інші - невидимі).

Аналогічно вирішуються питання побудови епюру гранної поверхні (рис. , см. рис. 19-20). Обрисними твірними будь-якої гранної поверхні слугують відповідні проєкції її ребер. На епюрах гранних поверхонь зображують усі ребра.

2.3. Епюр точки і лінії, що належать лінійчастій поверхні з вершиною і напрямною. Видимість проєкцій на епюрі

Загальне правило побудови епюру точки, що належить лінійчастій поверхні з вершиною і напрямною, полягає в тому, що необхідно побудувати епюр твірної – прямої лінії g , якій належить ця точка. Пряма g завжди проходить через вершину S (S^∞) і деяку точку напрямної d .

При проєкціюванні на будь-яку площину проєкцій будь-яка точка, що належить видимій твірній, також видима. Якщо твірна невидима, то й точка – невидима.

Епюр будь-якої лінії на поверхні можливо побудувати як епюр певної множини точок, що належать поверхні.

Розглянемо приклади.

Приклад 1 (рис. 16). Дано: епюр конічної поверхні з вершиною S і напрямною d ; F_1, E_1, C_2 , точки F, E і C належать заданій конічній поверхні.

Необхідно: побудувати неvistачаючі проєкції точок F, E і C та визначити їх видимість на епюрі.

Розв'язання виконано за допомогою твірних $SB, S-2$ і $S-1$, на яких знаходяться точки F, E і C . Точки $B, 2$ і 1 розташовані на лінії d . Видимість точок вказана на епюрі.

Приклад 2 (рис. 17). Дано: епюр конічної поверхні з вершиною S і напрямним колом d ; m_2 – фронтальна проєкція лінії m , що належить конічній поверхні (m – замкнена крива).

Необхідно: побудувати m_1 – горизонтальну проєкцію лінії m .

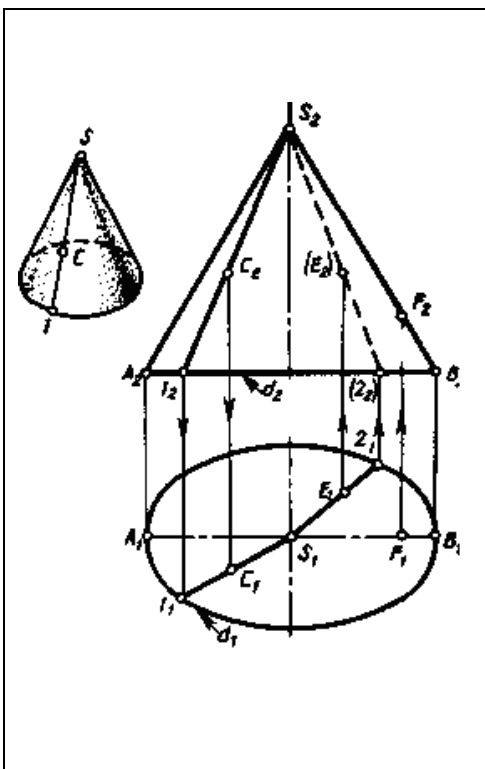


Рис. 16

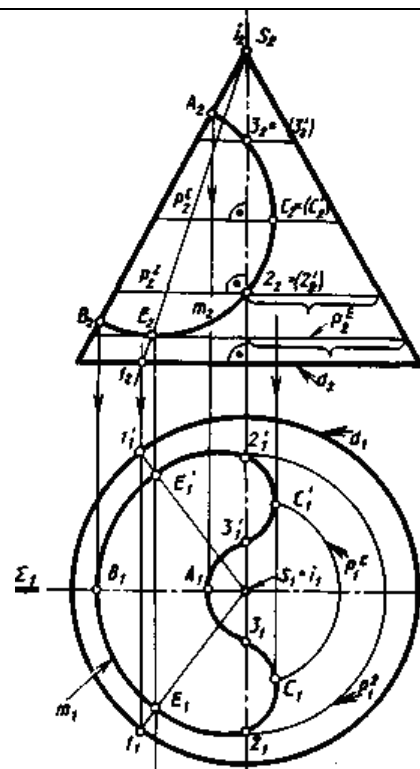


Рис. 17

Розв'язання: $m_1 = \{A_1; 3_1; C_1; 2_1; E_1; B_1; E_1'; \dots\}$.

Будуємо горизонтальні проєкції точок $A, 3, C, 2, E, B, \dots$, використовуючи їхню належність відповідним твірним конічної поверхні - прямим g^A, g^3, g^C, \dots . Побудову проєкцій точок можливо здійснювати інакше: використовуючи належність точок відповідним перерізам - колам p^A, p^3, p^C, \dots (подібним даному перерізу - колу d). Лінія m симетрична відносно площини Σ (i належить Σ ; $\Sigma \parallel \Pi_2$); її опорними точками є точки A і B, E і E', C і C' .

Приклад 3 (рис. 18). Побудувати неvistачаючі проєкції точок E, F, L, K, M і N , що належать циліндричній поверхні з вершиною S і напрямною - колом d .

Дано проєкції: $E_2, F_1, M_1, K_1, L_1, N_1$.

Розв'язання: Для побудови неvistачаючих проєкцій точок використаємо умову належності точки до поверхні, коли вона належить лінії цієї поверхні. Побудуємо множину твірних ліній похилого циліндра відповідно паралельних обрисним твірним на проєкціях як таких, що перетинають напрямне коло. Наприклад, E_2 належить $S_2^\infty A_2 \Rightarrow E$ належить $S^\infty A \Rightarrow E_1$ належить $S_1^\infty A_1$.

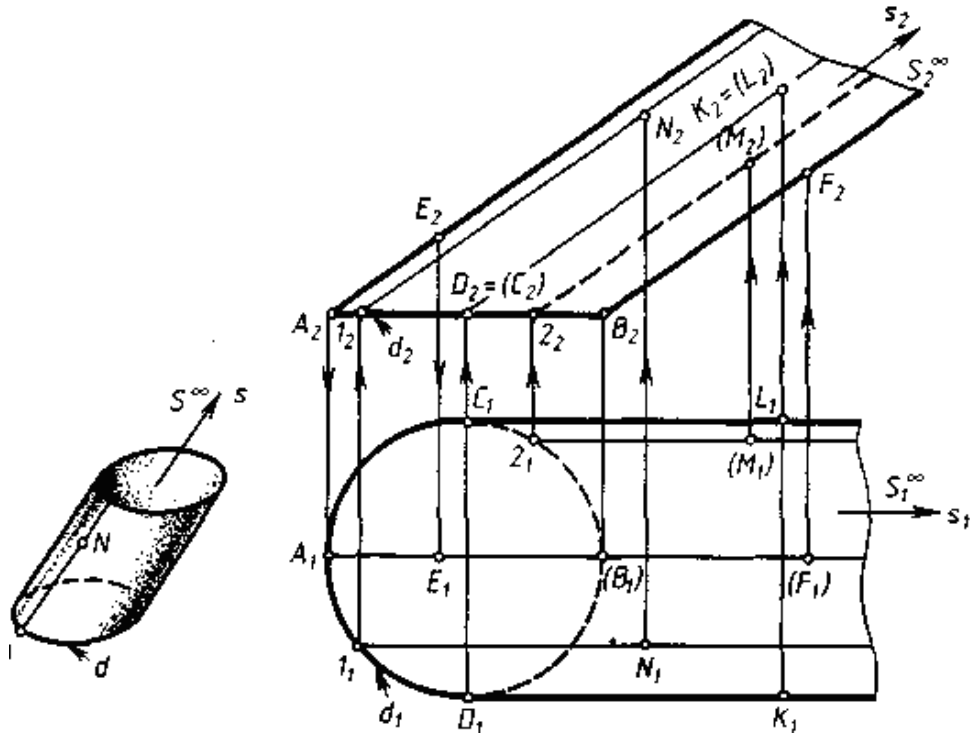


Рис. 18.

Аналогічно знаходимо інші точки. Видимість проєкцій точок вказана на епюрі.

На рис. 19-20 подано побудову неvistачаючих проєкцій точок, що розташовані на бічних поверхнях піраміди і призми відповідно. Будь-яку точку на пірамідальній поверхні можливо побудувати так само, як на конічній (рис. 16); а будь-яку точку на призматичній поверхні можливо знайти за аналогією до циліндричної (рис. 18).

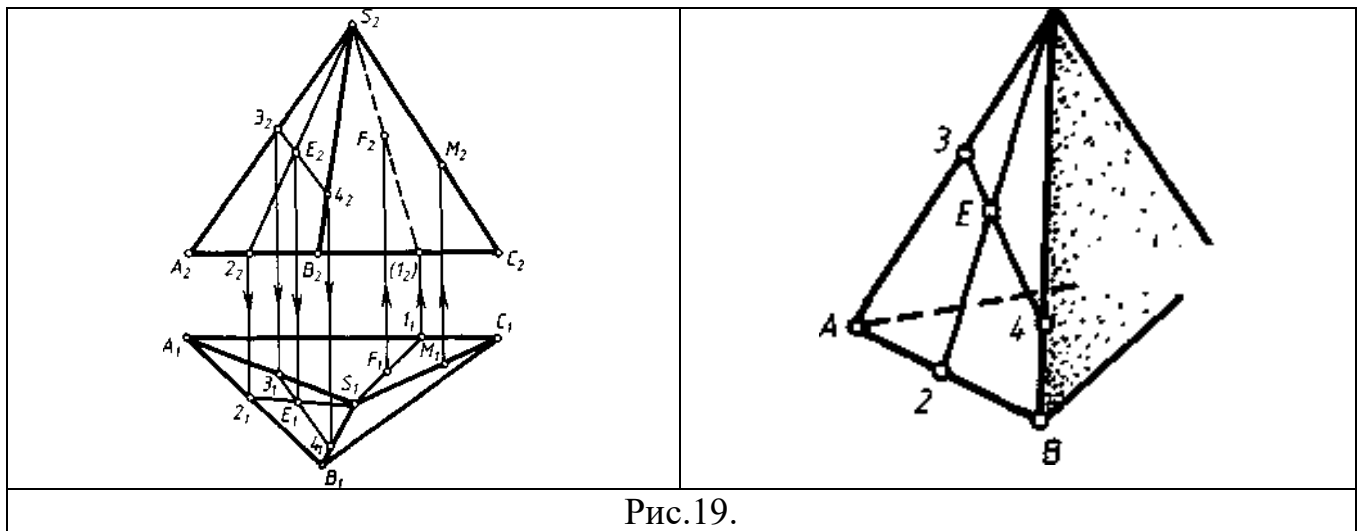


Рис.19.

Побудову точок на гранних поверхнях можливо здійснювати інакше: за належністю точки тій грані, на якій вона розташована. Так, наприклад, побудована точка E , що належить довільній прямій 3-4 грані SAB піраміди $SABC$, що зображена на рис. 19.

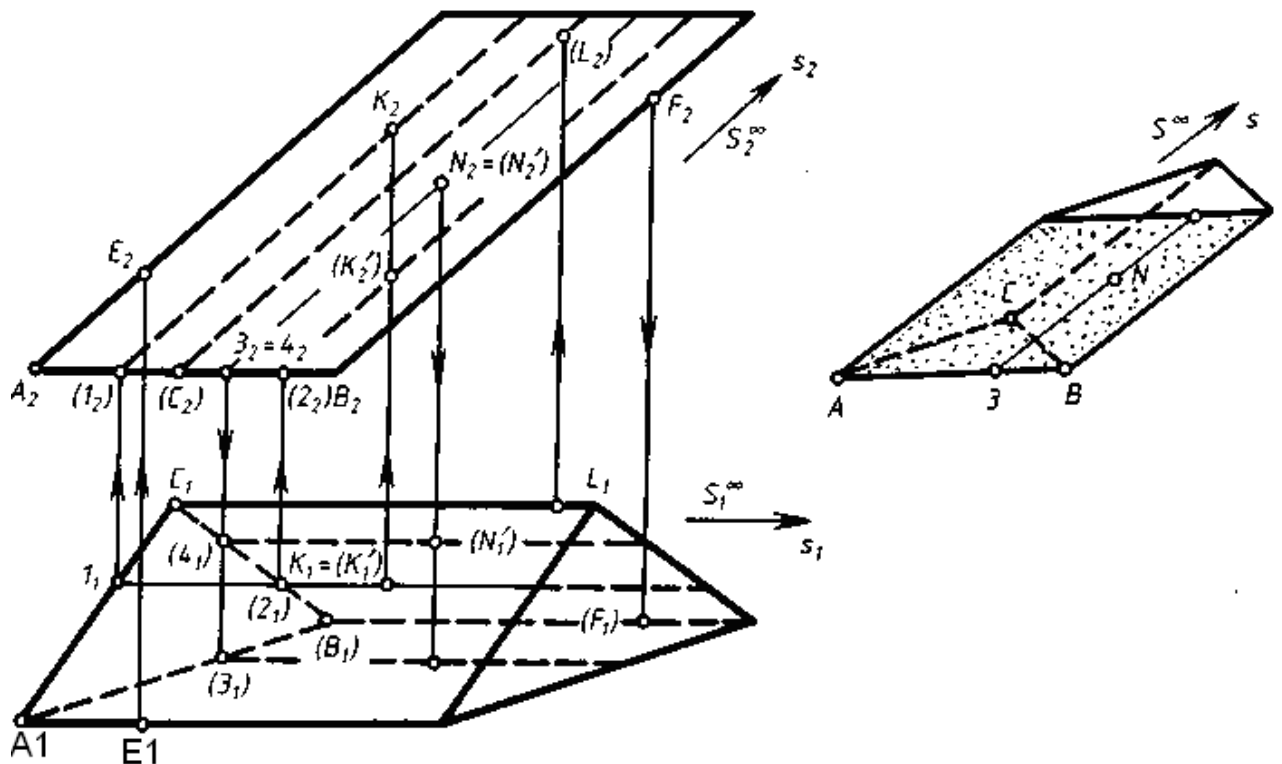


Рис. 20.

При проєкціюванні на будь-яку площину проєкцій точка є видимою, якщо вона розташована на видимій грані.

Розглянуті поверхні мають широке застосування в техніці. На рис. 21 подано приклади використання цих поверхонь в деталях технічних форм: колеса зубчасті, шпонки, гайки, пружини, різноманітні шаблони, рукоятки інструменту, трубопроводи тощо.

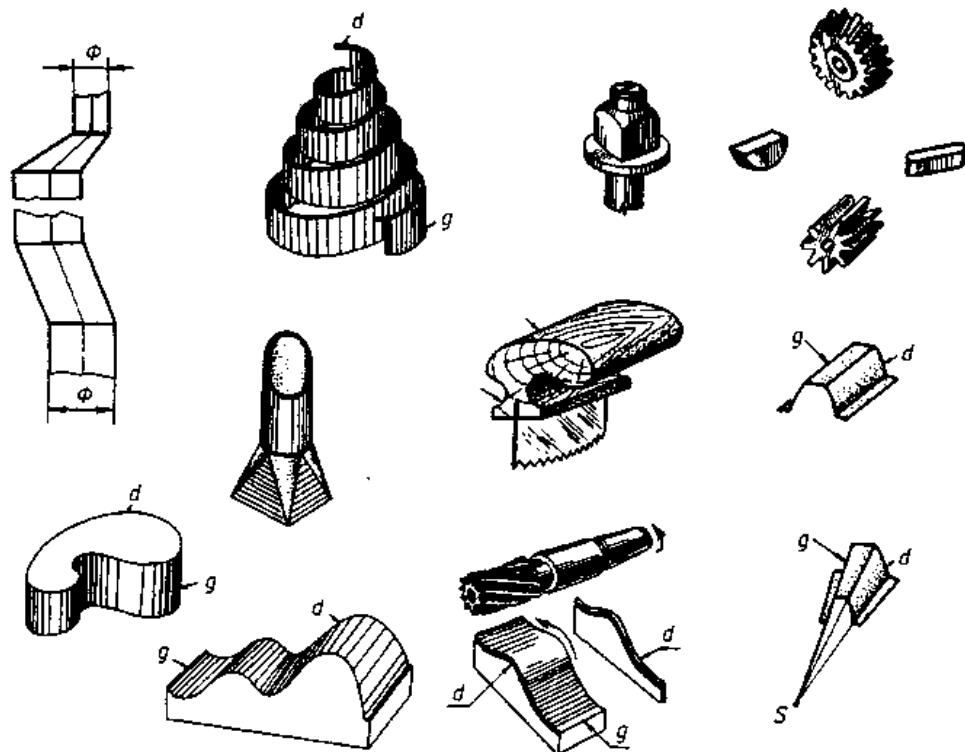


Рис. 21.

3. ЛІНІЙЧАСТІ ПОВЕРХНІ З ТРЬОМА НАПРЯМНИМИ. ЛІНІЙЧАСТІ ПОВЕРХНІ З ДВОМА НАПРЯМНИМИ І ПЛОЩИНОЮ ПАРАЛЕЛІЗМУ

3.1. Визначення і класифікація

У загальному випадку лінійчасту поверхню Φ можливо утворити переміщенням прямої g по трьом напрямним – лініям d^1, d^2, d^3 (рис. 22).

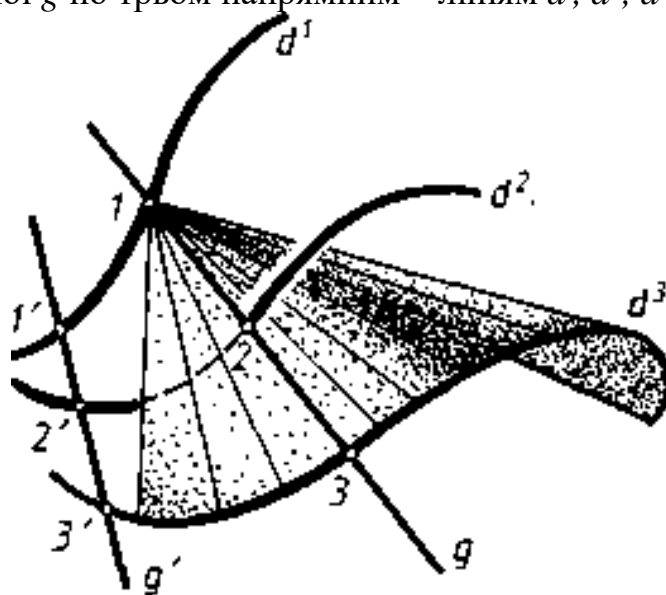


Рис. 22.

Якщо на лінії d^1 взяти довільну точку 1 і, узявши її за вершину конічної поверхні T з напрямною d^3 , знайти точку перетину поверхні T з лінією $d^2 (2=T \cap d^2)$, то три точки 1, 2 і 3 ($3 = 1-2 \cap d^3$), однозначно визначають пряму g – твірну лінійчастої поверхні Φ . Аналогічно можливо знайти будь-яке положення твірної $g : g', g'', \dots$.

Приклад лінійчастої поверхні з трьома напрямними (кривими d^1, d^2, d^3) наведено на рис. 2.

Якщо напрямними d є прямі лінії, то твірна g описує лінійчастий (однопожнинний) гіперболоїд.

Якщо одна з напрямних (наприклад, d^3) вироджується у невласну пряму, то твірна g описує лінійчасту поверхню з двома напрямними і площиною паралелізму. Твірна g у такій поверхні у кожному положенні паралельна деякій площині Γ , що називається площиною паралелізму.

Лінійчасті поверхні з двома напрямними і площиною паралелізму називають поверхнями Каталана (ім'я бельгійського математика, який вивчав властивості цих поверхонь). Розрізняють три види таких поверхонь:

1. **Циліндроїд** (рис. 23). Обидві напрямні d і d' – криві лінії; Γ – площина паралелізму: $g' \parallel \Gamma, g'' \parallel \Gamma, \dots$.

2. **Коноїд** (рис. 24). Одна напрямна d – пряма лінія, друга напрямна d' – крива. На рис. 24 площиною паралелізму слугує площина Π_1 : $g \parallel \Pi_1; g'' \parallel \Pi_1, \dots$. Коноїд називають прямим, якщо $d \perp \Gamma$ (рис. 171).

3. **Коса площина** (рис. 26). Обидві напрямні d і d' – прямі лінії; $\Gamma \perp \Pi_1$. На рис. 26,б подано епюр косої площини. Каркас косої площини можливо скласти з двох сімейств кривих ліній: гіпербол і парабол, тому таку поверхню називають також гіперболічним параболоїдом. За зовнішнім виглядом вона нагадує сідло.

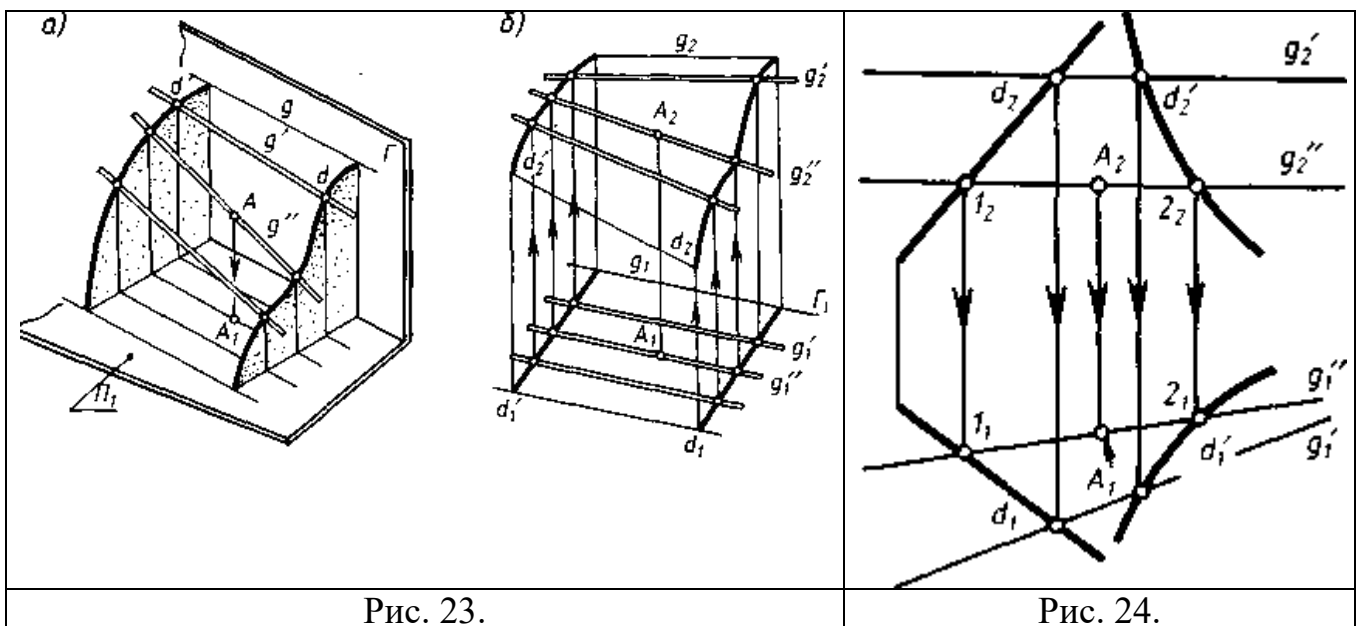


Рис. 23.

Рис. 24.

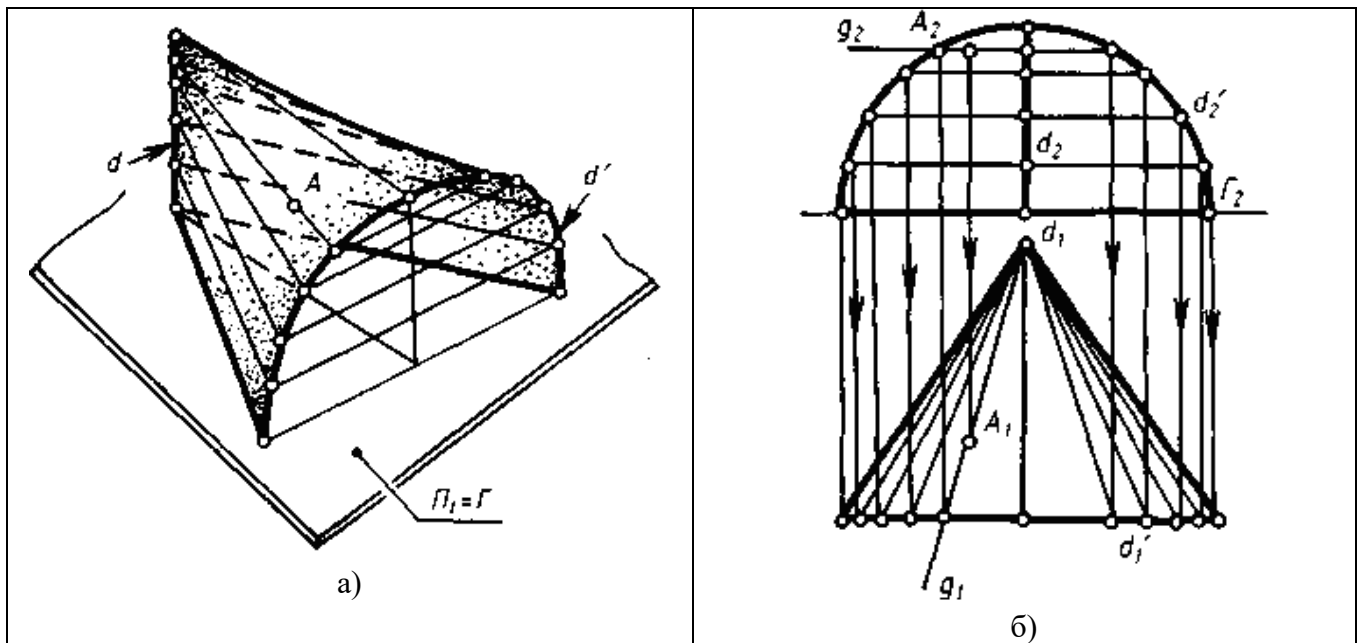


Рис. 25.

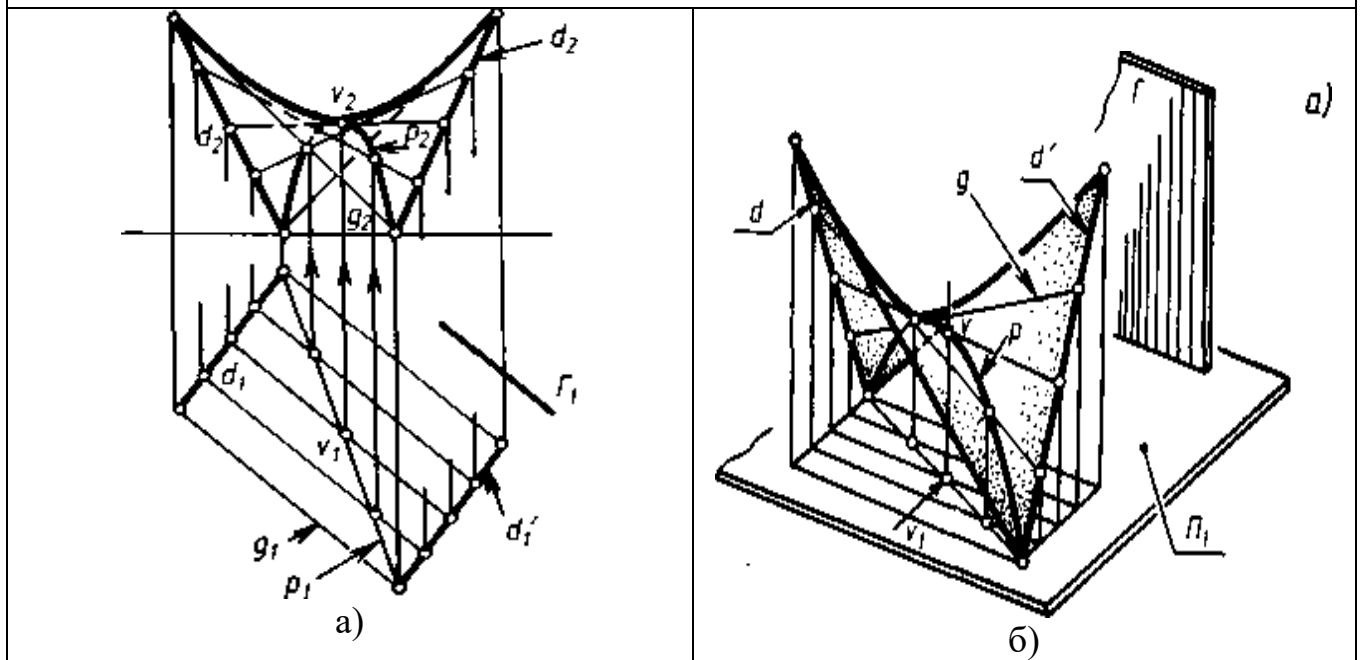


Рис. 26.

3.2. Епюр поверхні. Епюр точки і лінії, що належить поверхні Каталана

Графічна частина визначника поверхні Каталана складається з епюру двох напрямних $d = \{d_1; d_2\}$ і $d' = \{d_1'; d_2'\}$ і площини паралелізму Γ . Якщо доцільно, креслення доповнюють обрисними лініями.

Якщо точка A належить поверхні Каталана, то її проєкції розташовані на однойменних проєкціях твірної даної поверхні (рис. 23,24): $A_1 \in g_1^A, A_2 \in g_2^A$.

Розглянемо приклад побудови неvistачаючої проєкції F_2 точки F , що розташована на циліндроїді з напрямними - колами d і d' і площиною паралелізму Γ ($\Gamma \parallel \Pi_2$). Відомо проєкцію F_1 (рис. 27).

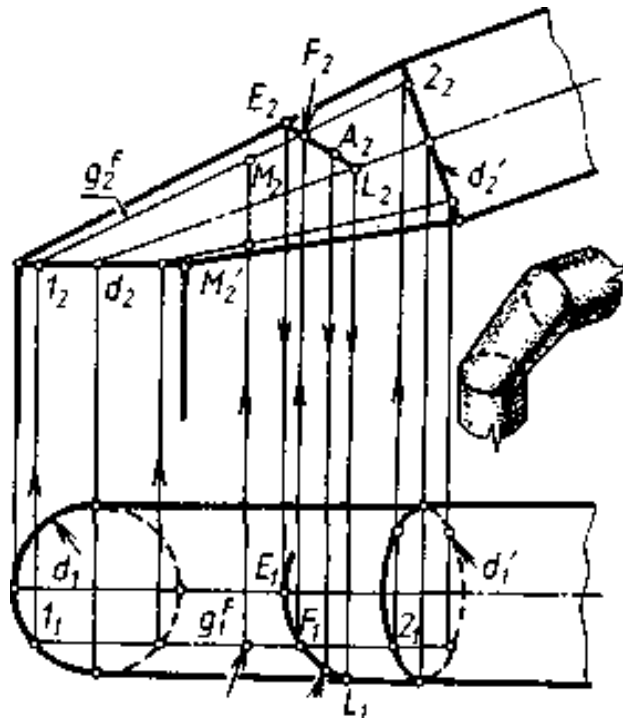


Рис. 27.

Спочатку будуюмо горизонтальну проекцію твірної g^F , на якій розташована точка F : $g_1^F \subset F_1$; $g^F \subset F_2$. Далі знаходимо на епюрі точки 1 і 2 , в яких твірна g^F перетинає напрямні кола. Після цього будується пряма $g_2^F = \{1_2 - 2_2\}$ і за допомогою лінії проекційного зв'язку фіксується на ній шукана точка F_2 .

Нехай на цьому циліндроїді розташована точка A . Відомо проекцію A_2 . Необхідно знайти A_1 . У цьому випадку задача розв'язується наближено: спочатку будується епюр дуги будь-якої лінії циліндроїда, на якій розташована точка A , наприклад, FL ($F_2L_2 \subset A_2$). Дуга обирається поблизу точки A . Після визначення F_1L_1 , будується A_1 .

На рис. 26 подано приклад побудови лінії p – перерізу косої площини. В аналітичній геометрії доводиться, що крива p є параболою.

Якщо площиною паралелізму поверхні Каталана слугує певна площина проєкцій (Π_1 , Π_2 або Π_3), то твірними такої поверхні є її лінії рівня (горизонталі, фронталі або профільні прямі).

Поверхні Каталана мають широке розповсюдження в архітектурі та будівництві. Їх використовують в літакобудуванні, автомобілебудуванні, в технічному та художньому моделюванні і конструюванні.

4. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

4.1. Визначення і класифікація

Поверхня, що визначається рівнянням другого степеню у просторовій декартовій системі координат, називається поверхнею другого порядку.

Загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Jz + K = 0 \quad (I).$$

Будь-який переріз поверхні другого порядку (за виключенням вироджених випадків) є кривою другого порядку.

Перерізи, розташовані в площинах симетрії поверхні, називаються головними. Багато поверхонь другого порядку йменуються за іменем своїх головних і нормальних перерізів.

Якщо поверхня має вісь симетрії, то вісь перетинає поверхню в точці (власній чи невластній), що йменується вершиною поверхні.

Якщо перерізом поверхні другого порядку, що перпендикулярний до вісі симетрії, слугує коло, то маємо справу з поверхнею обертання.

Перерізи поверхонь другого порядку, розташовані к паралельних площинах, називають паралельними; вони є подібними фігурами.

До лінійчастих поверхонь другого порядку відносять: конічну і циліндричну, їхніми напрямними можуть бути будь-які криві другого порядку (рис. 28), однопорожнинний гіперболоїд (рис. 29,а і рівняння (2)), гіперболічний параболоїд (рис. 29,б і рівняння (3)).

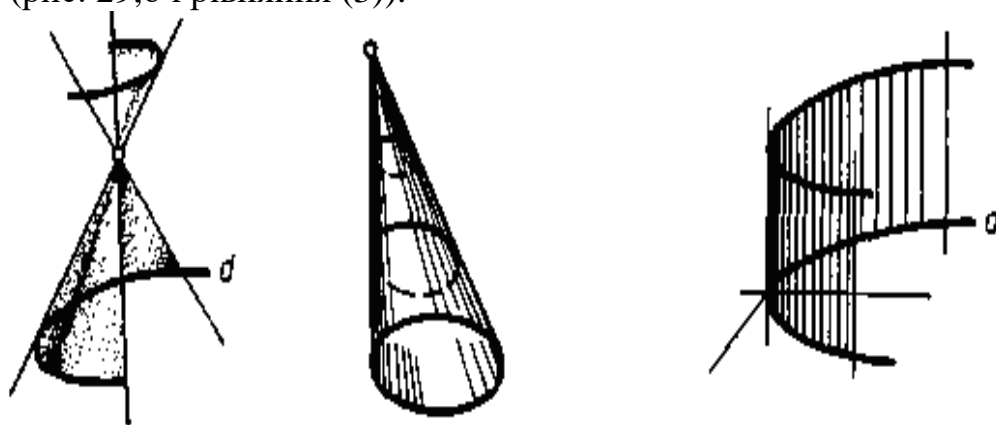


Рис. 28.

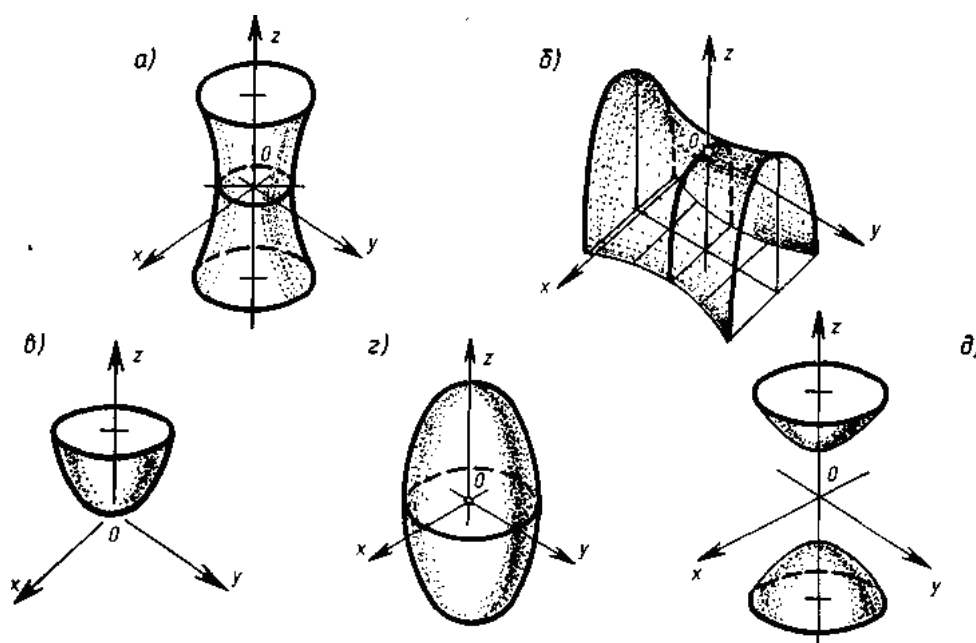


Рис.29.

Інші поверхні другого порядку - нелінійчасті: еліптичний параболоїд (рис. 29, в і рівняння (4)), трьохосний еліпсоїд (рис. 29,г і рівняння (5)), двопорожнинний гіперболоїд (рис. 29, д і рівняння (6)).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad (2)$$

$$-\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z; \quad (3)$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z; \quad (4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad (5)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (6)$$

Циліндричні і конічні поверхні другого порядку мають хоча б одну площину симетрії. Параболоїди мають дві площини симетрії. Еліпсоїд і гіперболоїди мають три площини симетрії і мають центральну симетрію (точка O - центр симетрії).

4.2. Епюр точки, що належить поверхні другого порядку

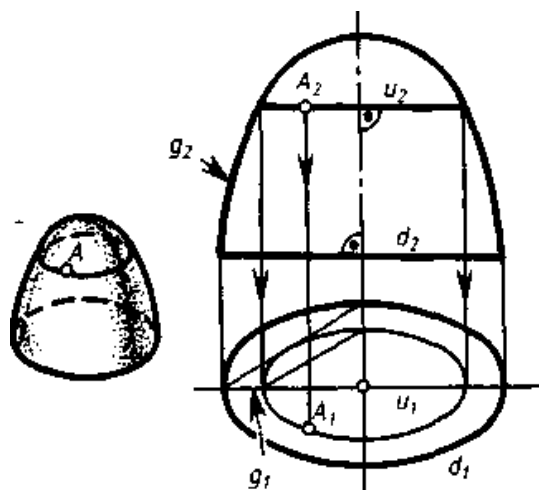


Рис. 30.

Наприклад, на епюрі задано еліптичний параболоїд (рис. 30). Головним перерізом параболоїда слугує парабола g ; еліпс d є нормальним перерізом поверхні.

Необхідно побудувати горизонтальну проекцію A_1 точки A , що розташована

на поверхні, якщо відома її фронтальна проекція - точка A_2 .

Розв'язання здійснюємо за допомогою нормального перерізу u ($u_2 \subset A_2$), паралельного заданому перерізу d і, відповідно, подібного йому. Еліпс u_1 подібний еліпсу d_1 і подібно розташований відносно нього. Побудуємо u_1 і за допомогою лінії проєкційного зв'язку визначаємо A_1 : $A \subset u \Rightarrow A_1 \subset u_1$. Цю задачу можливо розв'язати точно за допомогою тотожних перетворень.

5. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

5.1. Основні поняття та визначення

Поверхнею обертання йменують поверхню, що утворюється певною лінією – твірною g при її обертанні навколо нерухомої прямої – вісі обертання i (рис. 31).

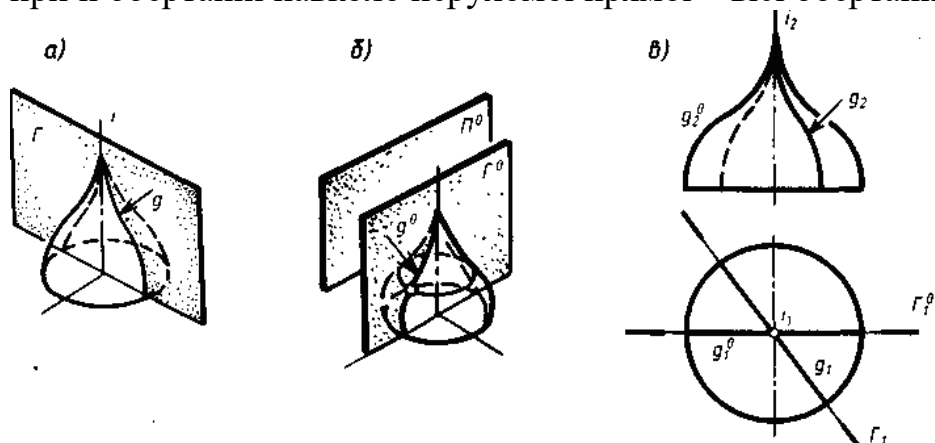


Рис. 31.

Дві лінії – твірна g і вісь i складають геометричну частину визначника будь-якої поверхні обертання. Твірною g може бути як пряма, так і крива лінія – плоска чи просторова. Зазвичай на комплексному кресленні вісь i розташовують перпендикулярно до однієї з основних площин проєкцій.

Будь-яка осьова площина Γ , що проходить через вісь i , перетинає поверхню обертання по меридіану g (рис. 31, а). Усі меридіани поверхні обертання конгруентні; кожний меридіан поділяється віссю на дві симетричні відносно вісі лінії - напівмеридіани.

Меридіан g° , розташований в осьовій площині Γ° , що паралельна площині проєкцій, називають головним (рис. 31, б, в) Якщо $\Gamma^\circ \parallel \Pi_2$, то меридіан g° проєкціюється на Π_2 без спотворення свого вигляду: $g_2^\circ \sim g^\circ$; якщо $\Gamma^\circ \parallel \Pi_3$, то $g_3^\circ \sim g^\circ$.

Кожна точка твірної g переміщується по колу, що має назву паралелі поверхні; коло-паралель p проєкціюється без спотворення на ту площину проєкцій, до якої перпендикулярна вісь i , на інші основні площини проєкцій воно проєкціюється у вигляді відрізків прямих, що перпендикулярні до однойменних проєкцій вісі i . Площина T кожної паралелі p перпендикулярна до вісі i .

На рис. 32,а показано поверхню обертання з віссю i ($i \perp \Pi_3$) і головним меридіаном g° . Усі паралелі цієї поверхні проєкціюються без спотворення на Π_3 .

Так, паралель p^A , на якій розташована точка A , проєкціюється на Π_3 у вигляді кола p^A_3 , з центром у точці i_3 і радіусом R^A .

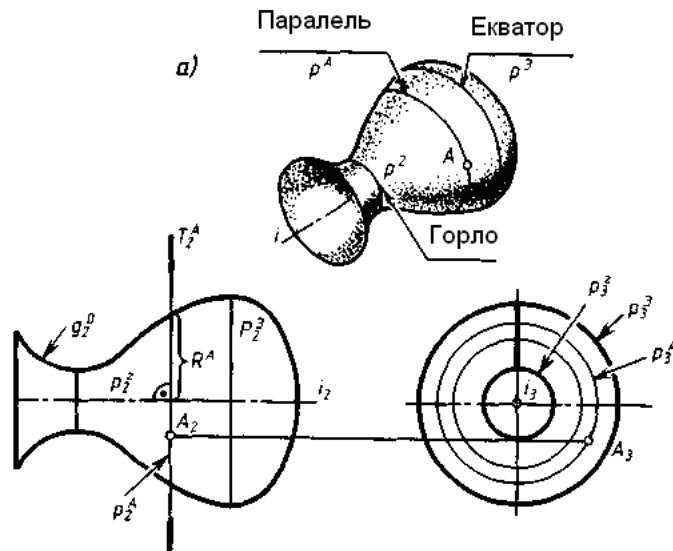


Рис. 32.

У цьому прикладі для визначення величини радіуса R^A треба:

- 1) через точку A_2 провести пряму $T_2^A \perp i_2$;
- 2) відмітити точки, в яких ця пряма перетинає лінію g_2^o і i_2 ; відстань між цими точками є R^A .

Аналогічно визначається величина радіуса будь-якої паралелі усякої поверхні обертання; якщо $i \perp \Pi_1$, то $T_2 \perp i_2$; якщо $i \perp \Pi_2$, то $T_1 \perp i_1$.

Паралелі і меридіани поверхні обертання утворюють її неперервний каркас. Через кожну точку поверхні можливо провести паралель і меридіан.

Проекції будь-якої точки поверхні обертання розташовуються на однойменних проєкціях відповідних їм паралелі і меридіану. Так, на рис. 32, б: $A \in p^A \Rightarrow A_2 \in p_2^A$ і $A_3 \in p_3^A$. Аналогічно, якщо $A \in g$, то $A_2 \in g_2$ і $A_1 \in g_1$.

Серед множини паралелей поверхні виокремлюють контурні – екватор (p^e) і горло (p^f) (шийку) (рис. 32). Серед усіх паралелей екватор має найбільший, а горло – найменший радіус.

Вершиною поверхні обертання іменують точку її перетинку з віссю i . Будь-яка лінія a , розташована на поверхні обертання, утворює цю поверхню при обертанні навколо вісі i (рис. 33).

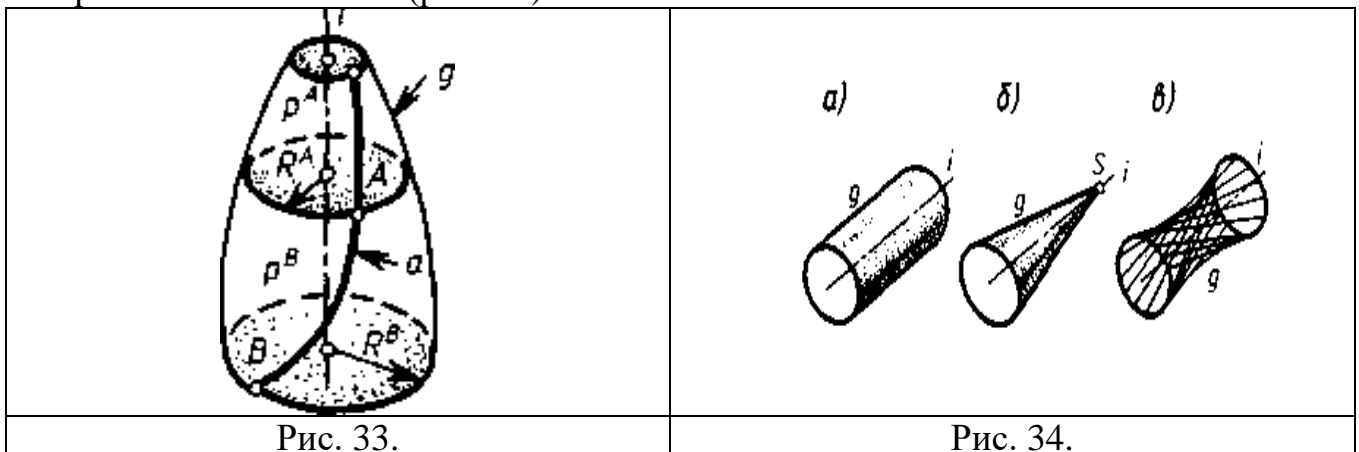


Рис. 33.

Рис. 34.

5.2. Класифікація поверхонь обертання

У техніці і будівництві найчастіше використовуються поверхні обертання другого порядку (як лінійчасті, так і нелінійчасті) тощо.

До лінійчастих поверхонь обертання відносяться циліндричні ($g \parallel i$), конічні ($g \cap i = S$) і однопорожнинний гіперболоїд обертання ($g \perp i$) (рис. 34, а, б, в відповідно). Однопорожнинний гіперболоїд можна одержати і в результаті обертання гіперболи.

На рис. 35, а подано епюр геометричної частини визначника одно порошнинного гіперболоїда - вісь i і мимобіжна до неї пряма g . Поверхня має горло, радіус якого дорівнює мінімальній відстані від осі до прямої g : $R^T = |i_1 A_1|$; $i_1 A_1 \perp i_1 g_1$.

На рис. 35, б подано епюр послідовних положень прямої g ; фронтальним нарисом поверхні слугує гіпербола – вона огинає фронтальні проєкції різних положень g .

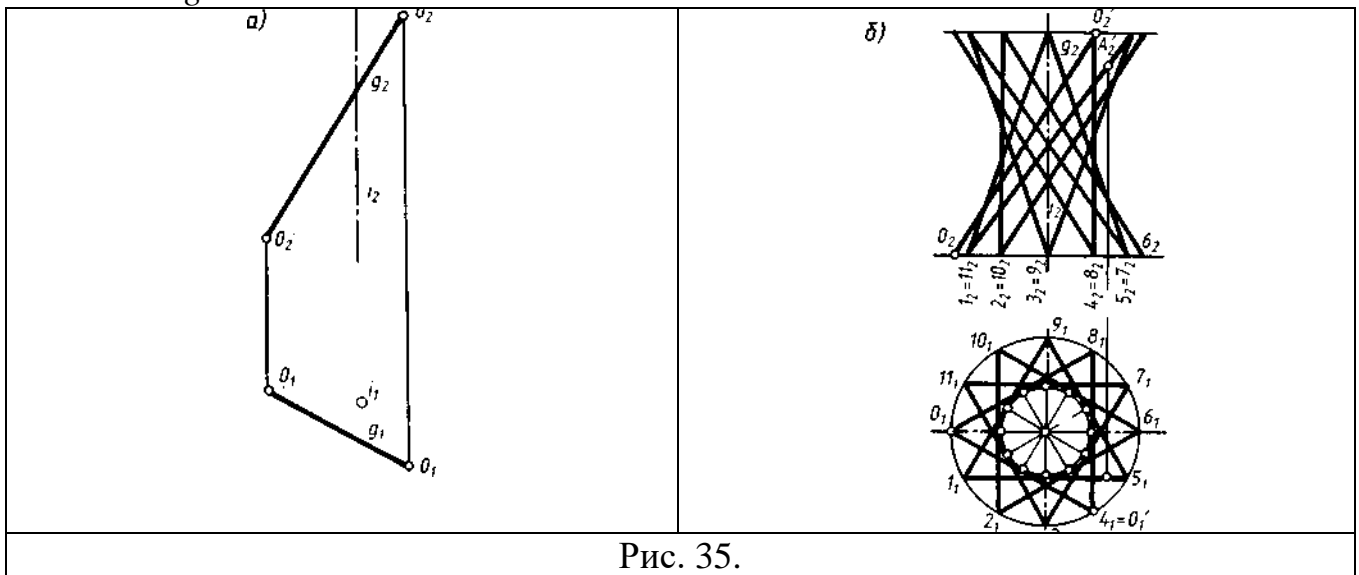


Рис. 35.

Поверхня одно порошнинного гіперболоїда обертання описується рівнянням:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Це рівняння окремий випадок рівняння (2).

Будь-яка коніка, обертаючись навколо власної вісі, описує поверхню обертання другого порядку. До нелінійчастих поверхонь другого порядку відносяться: сфера, еліпсоїд обертання, параболоїд обертання і двохпорожнинний гіперболоїд обертання.

Рівняння сфери з центром у початку координат має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Це рівняння – окремий випадок рівняння (5) (п. 4.1).

Якщо коло обертається навколо вісі i , що розташована у площині цього кола і не проходить через його центр O , то це коло опише тор. Тор є поверхнею четвертого порядку.

На рис. 36 і 37 показано тор, що утворений колом r , в якого: центр - точка O ; радіус R ; відстань від точки O до вісі i - R' .

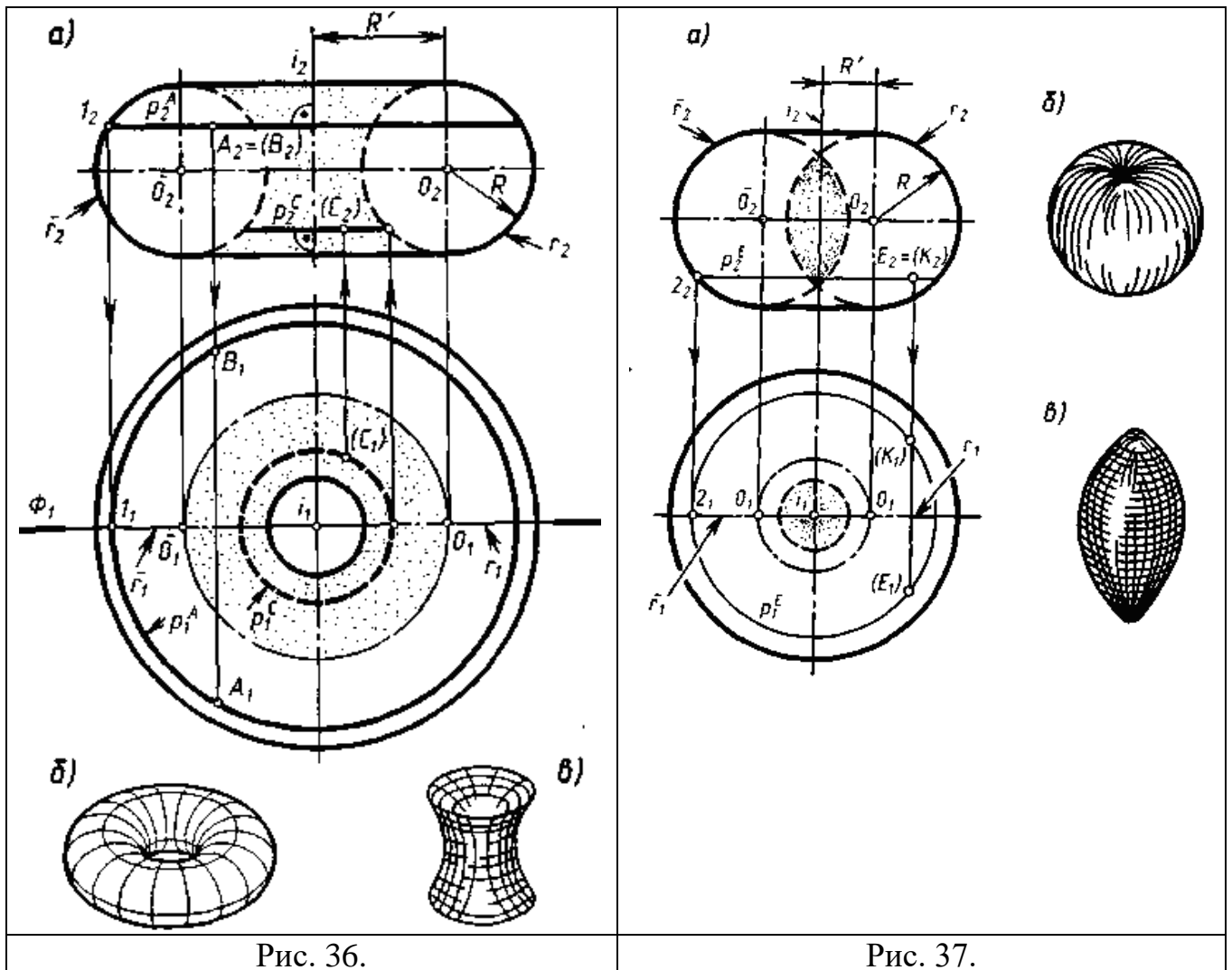


Рис. 36.

Рис. 37.

Є такі види торів:

1. Відкритий тор (або тор-кільце), якщо $R' > R$ (рис. 36). У відкритого тора розрізняють внутрішню частину - глобод (рис. 36, в) і зовнішню. На зовнішній частині розташовані точки I, A, B ; на внутрішній - точка C .

2. Закритий тор, якщо $R' < R$ (рис. 37). Закриті тори можуть утворювати різні форми: тор-«яблуко» (рис. 37, б), тор-«лимон» або тор-«веретено» (рис. 37, в).

Довільна пряма перетинає тор у чотирьох точках. На виробництві при виготовленні деталей нелінійчасті поверхні обертання відносять до фасонних поверхонь.

5.3. Епюр точки і лінії, що розташовані на поверхнях обертання

Епюр точок, що розташовані на поверхні обертання, будують за належністю точок відповідним меридіанам і паралелям заданої поверхні, з урахуванням їх видимості на епюрі.

Так, на рис. 36 і 37 подано побудову епюрів точок, розташованих на поверхні тора; меридіаном тора є коло. Аналогічно побудовані епюри точок сфери (рис. 38), що утворена обертанням кола g навколо вісі i :

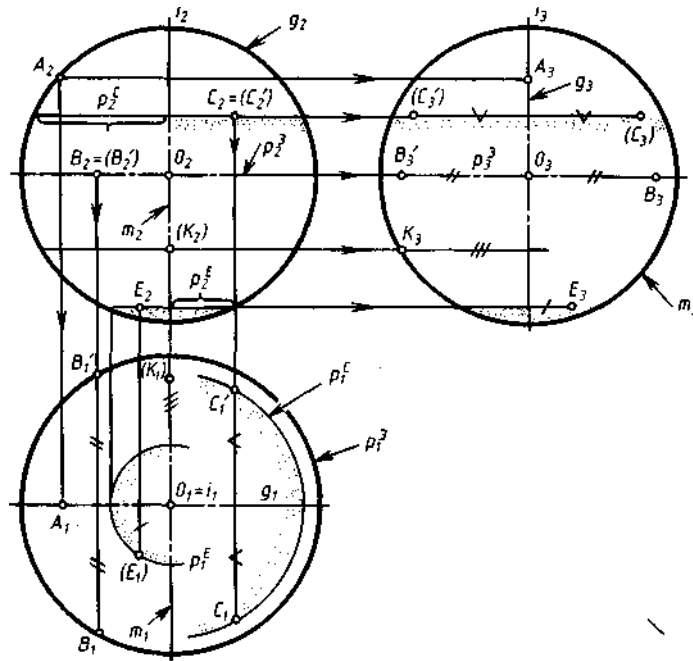


Рис. 38.

Профільні проекції точок сфери будуються за проекційними законами побудови третьої (профільної) проекції.

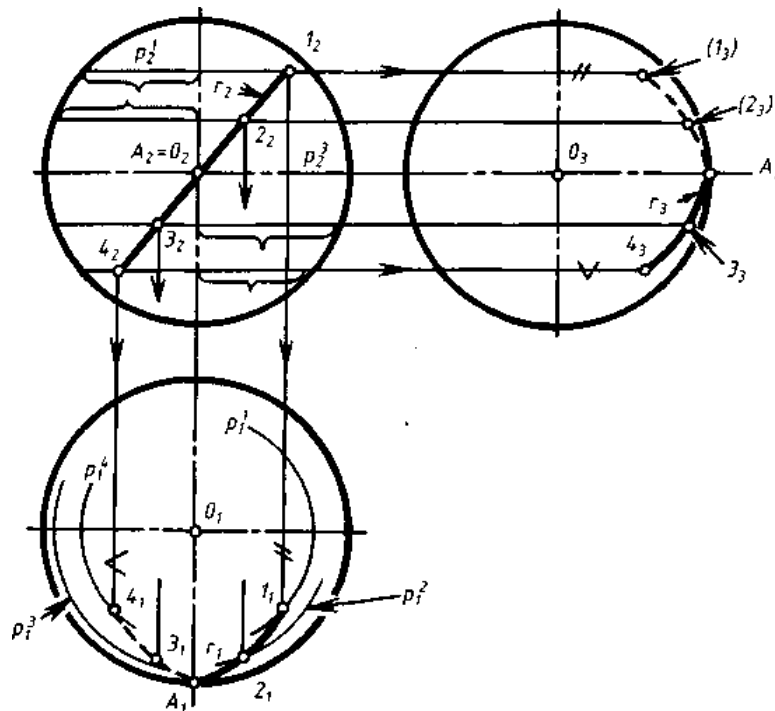


Рис. 39.

На рис. 39 показано побудову горизонтальної і профільної проекції плоскої кривої r , розташованій на сфері. Дано: проекція r_2 . Сама крива r - дуга кола, а її проекції r_1 і r_3 - дуги еліпсів. Виокремлюючи на лінії r певну множину точок ($1, 2, A, 3$ і 4), будемо відомим способом шукані проекції цих точок і, з'єднуючи їх у

порядку чергування паралелей p сфери плавною кривою, одержуємо лінії r_1 і r_3 . Видимість лінії r змінюється у точці A при проєкціюванні її на Π_1 і на Π_3 .

На рис. 40 зображено визначник конічної поверхні обертання $\Phi: i = \{i_1; i_2; i_3\}$; $g = \{g_1; g_2\}$. Дано також фронтальні проєкції точок $A, B (B')$ і $C (C')$ цієї поверхні. Необхідно побудувати горизонтальну і профільну проєкції точок.

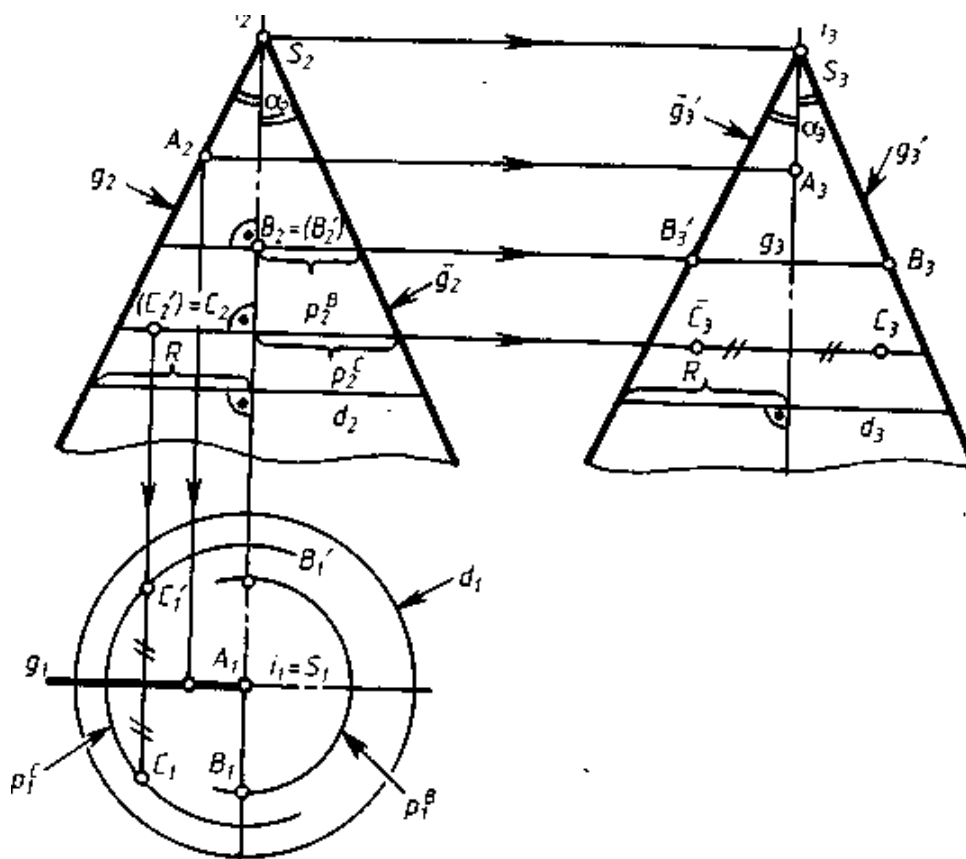


Рис. 40.

Спочатку будуємо обрисні твірні поверхні на Π_2 (пряму g_2) і на Π_3 (прямі g_3 і g_3'). Це можна виконати по-різному:

- а) використати будь-який нормальний переріз поверхні Φ , наприклад, коло d ($d_2 \perp i_2$; радіус - R ; $d_3 \perp i_3$; $d_1 \approx d$);
- б) відмітити точки S_2 і S_3 , побудувати в них (як у вершинах) кути;
- в) за допомогою сфери, вписаної в конічну поверхню обертання.

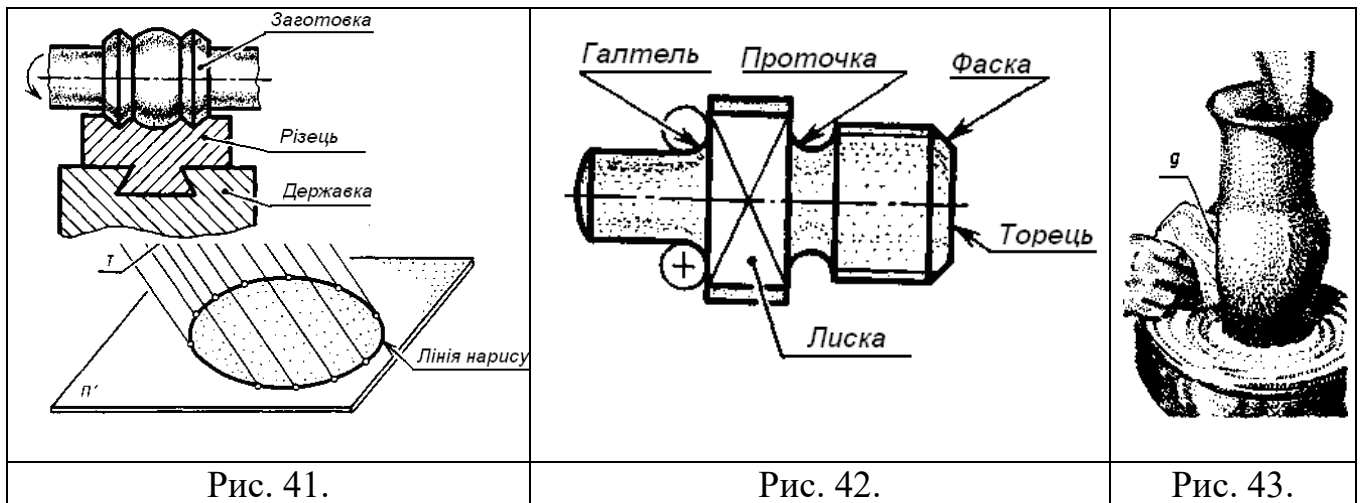
Далі знаходимо неvistачаючі проєкції точок за їхньою належністю відповідним прямим або колам поверхні Φ : $A \in g \Rightarrow A_1 \in g_1, A_3 \in g_3; \dots$ тощо.

Вище розглядалась побудова горизонтальної проєкції просторової кривої лінії m , що належить конічній поверхні обертання (рис. 17).

5.4. Застосування поверхонь обертання

Широке застосування поверхонь обертання у машинобудуванні, будівництві, архітектурі, мистецтві, побуті пояснюється простотою їхнього формоутворення: багато з них обробляються на верстатах при відносному обертальному русі різального або формуючого інструменту і виробу. На рис. 41

наведено схему обробки деталі обертання на токарному верстаті. Багато виробів є тілами обертання: кульки у підшипниках, вісі, вали, різбові деталі, шайби, штифти, заглушки, фрези-шарошки, круглі фасонні напилки, абразивні фасонні головки.



Багато конструктивних елементів технічних деталей обмежені поверхнями обертання: бурти, гнізда, отвори, галтелі, проточки, фаски (рис. 42).

З давніх часів і до сьогодні обертання гончарного круга використовують майстри для одержання красивих, зручних та зручних форм з глини, шамоту, порцеляни. На рис. 43 показано схему формування виробу з м'яких матеріалів (глина, пластилін, м'який гіпс) за допомогою шаблону у вигляді пластини з потрібним контуром - твірної g ; виріб обертається навколо нерухомої вісі (цей прийом використовують у художньому та технічному конструюванні для одержання макетів і моделей).

У техніці широко застосовують лінійчасті поверхні обертання. Наприклад, у будівельній техніці часто використовують однопорожнинний гіперболоїд і гіперболічний параболоїд (косу площину), що мають дві множини прямолінійних твірних.

Одна з перших ідей використання однопорожнинного гіперболоїда обертання належить інженеру В.Г. Шухову (1853-1939). Технологічність конструкції у поєднанні з вишуканою формою забезпечили розповсюдження його башти у вигляді радіоширок, маяків, водонапірних башт, опор для ліній електропередач.

Корпуси багатьох космічних апаратів мають форму поверхонь обертання. Звукові приймачі, радіотелескопи, прожектори і фари автомобілів мають форму параболоїдів обертання, в них використовується фокальна властивість параболи: якщо у фокусі параболи помістити джерело світла, то світлові промені, відбиваючись від дзеркальної параболи, будуть розповсюджуватися паралельними пучками. Нині поверхні обертання вивчаються та застосовуються інженерами-конструкторами, художниками, архітекторами, будівельниками, фізиками, астрономами й іншими спеціалістами.

6. ГВИНТОВІ ПОВЕРХНІ І ГВИНТИ

6.1. Основні поняття і визначення

Гвинтовою поверхнею називається поверхня, що утворюється певною лінією, яка здійснює гвинтовий рух.

Гвинтовим рухом називають складний рух, що є результатом двох одночасних рухів: обертального і поступального. При цьому обертання відбувається навколо вісі гвинта i , а поступальний рух – уздовж вісі i .

Якщо відношення швидкостей цих рухів є величиною постійною, то утворюється поверхня з постійним кроком, якщо ні – утворюється поверхня із змінним кроком.

Ходом гвинтової поверхні є лінійне переміщення Ph твірної (лінії g) за один оберт (рис. 44). Кожна точка твірної g описує при її русі гвинтові лінії w – напрямні поверхні. Перерізи поверхні площинами, що проходять через вісь i , називаються меридіанами, а перерізи площинами, що перпендикулярні вісі i , – нормальними перерізами.

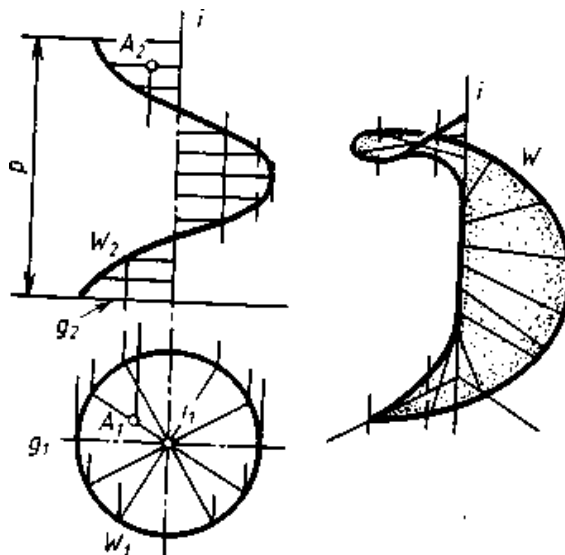


Рис. 44.

Гвинтова поверхня, здійснюючи гвинтовий рух, переміщується уздовж самої себе. Каркас гвинтових поверхонь складається з двох множин ліній: напрямних w (гвинтових ліній) і твірних g (рис. 44).

6.2. Гелікоїди

Якщо напрямною гвинтової поверхні служить геліса w (циліндрична гвинтова лінія постійного кроку), а твірною – пряма лінія g , то гвинтову поверхню називають гелікоїдом. Гелікоїд буває прямий, якщо $g \perp i$, і похилий, якщо ця умова не виконується.

Приклад прямого гелікоїда з твірною g , що перетинає вісь i та гелісу w у всіх положеннях, подано на рис. 44 (зображена одна з двох порожнин). Цей гелікоїд називають ще й гвинтовим коноїдом (площина паралелізму

перпендикулярна до вісі, а лінії i і w - напрямні).

Похилий гелікоїд з твірною g , що перетинає вісь і гелісу, має твірні, що перетинають вісь під певним (постійним) кутом, показаний на рис. 45. Твірна g у кожному своєму положенні паралельна твірній поверхні конуса обертання з тією ж віссю i . Цей конус є напрямним. Нормальним перерізом похилого гелікоїда є спіраль Архімеда. Гелікоїд називають закритим (рис. 45), якщо твірна перетинає вісь, і відкритим, якщо прямі i і g є мимобіжними.

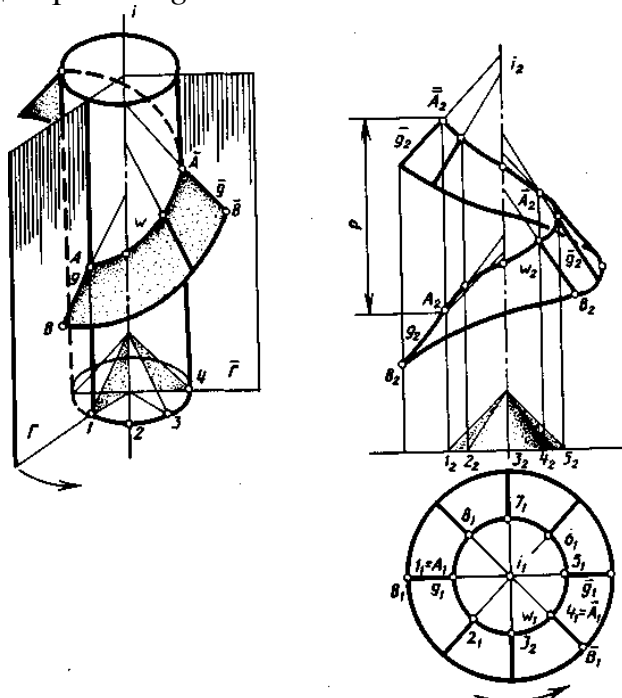


Рис. 45.

Гвинтові поверхні можуть мати твірними лініями плоскі криві. На рис. 46 подано приклад гвинтової поверхні з криволінійною твірною та напрямною гвинтовою лінією.

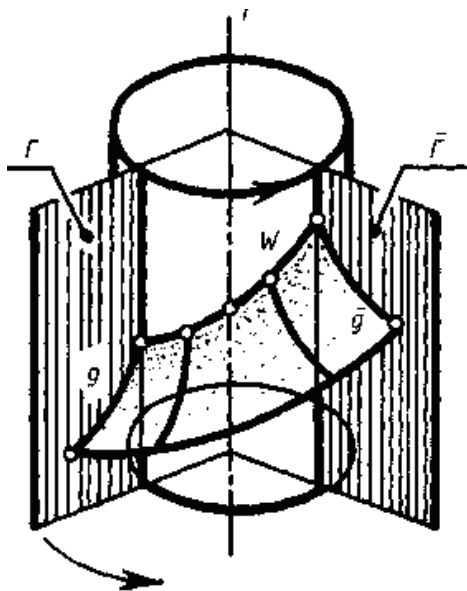


Рис. 46.

6.3. Гвинти та гвинтові виступи. Різьба

Якщо до поверхні прямого кругового циліндра дотикається з однієї сторони плоска фігура так, що її площина проходить через вісь циліндра (рис. 47), то результатом гвинтового руху фігури є гвинтовий виступ (площина фігури у кожному положенні проходить через вісь i). Фігура, що утворює гвинтовий виступ, називається профілем різьби, а гвинтовий виступ – різьбою гвинта. Циліндр з гвинтовим виступом називають циліндричним гвинтом.

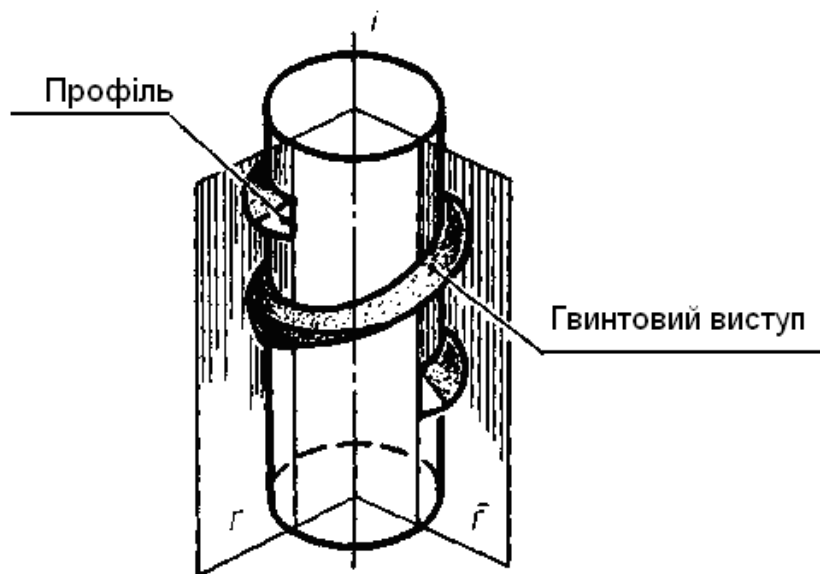


Рис. 47.

Різьба може мати трикутний, прямокутний, трапецієвидний та круглий профіль. Гвинти трикутного профілю використовують у кріпильних різьбах (метричних, дюймових, трубних).

Гвинти бувають з правою і лівою різьбою (залежно від напрямку гвинтових ліній), одноходові і багатходові (залежно від кількості твірних профілів).

Застосування гвинтових поверхонь. У машинобудуванні широко застосовуються гелікоїди: кріпильні деталі (болти, шпильки, гвинти, гайки), ходові, вантажні, підйомні гвинти, гвинти-черв'яки, гвинти-шнеки. Гелікоїди застосовуються у мистецтві, дизайні, скульптурі, архітектурі, будівництві (сходи, апарелі - спуски).

Гвинтові поверхні використовуються у конструюванні лопаток турбін і вентиляторів, пружин, свердел, робочих органів судових двигунів тощо.

7. ПОВЕРХНІ КАРКАСНІ, ЦИКЛІЧНІ І ПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСУ

7.1. Поверхні, що задаються каркасом

Існують поверхні, які зручно завдавати дискретною (обмеженою) множиною ліній рівня, що утворюють каркас цих поверхонь. Такі поверхні

іменують каркасними (графічними або топографічними). Зазвичай до каркасних відносять складні поверхні, закон утворення яких важко сформулювати.

Каркасні поверхні розповсюджені у будівельній та військовій сфері, у топографії і машинобудуванні (при виготовленні виробів складних форм), в авто-, авіа-, судномодельованні (рис. 48), у технічному дизайні тощо. Каркасні поверхні зручно застосовувати при виготовленні моделей (різних складних форм) з матеріалу однакової товщини - дошки, фанерний шпон, пластик (рис. 49).

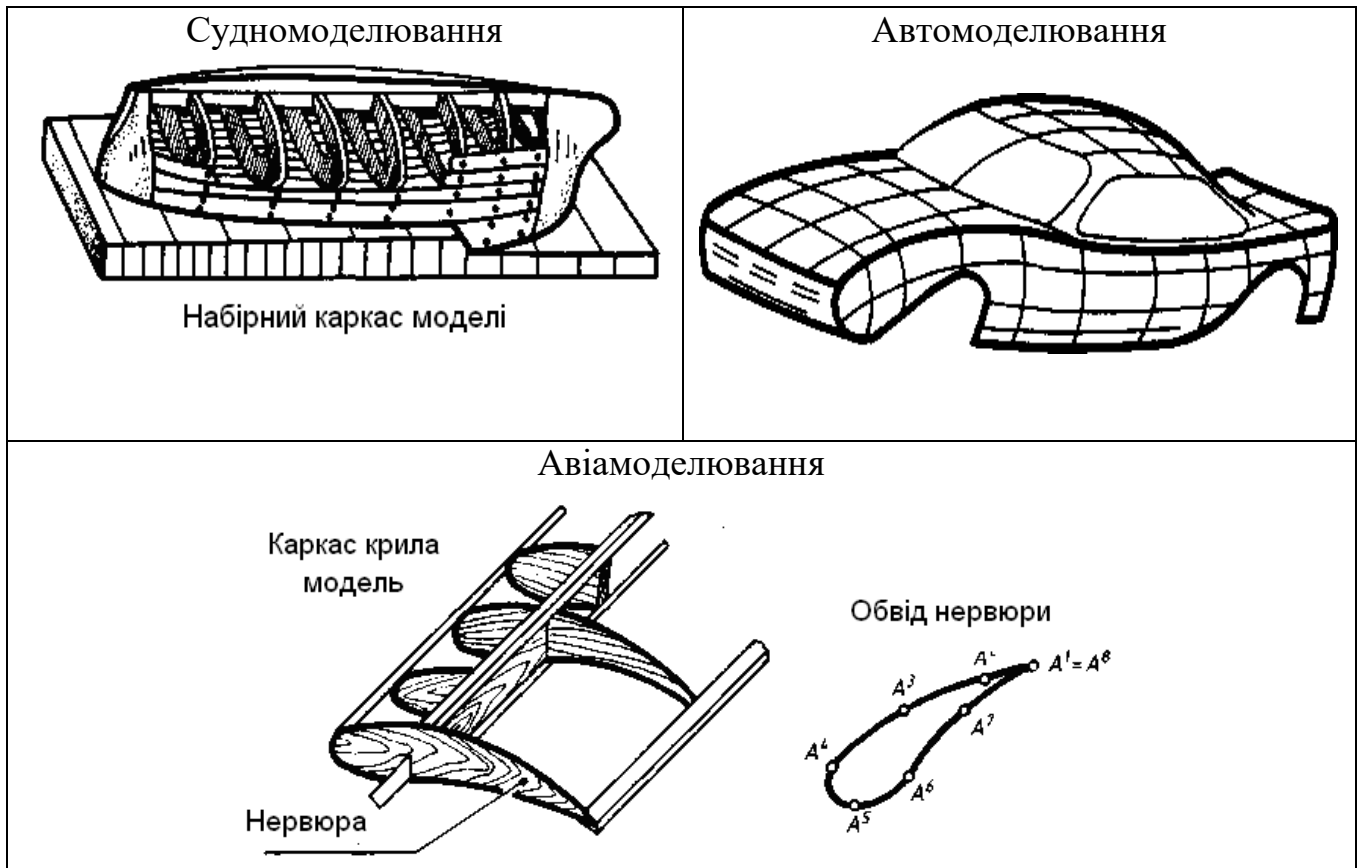


Рис. 48.

Якщо поверхню можна уявити у вигляді неперервної множини ліній рівня, то її називають неперервно-топографічною (неперервно-каркасною).

Креслення каркасу поверхні іноді зручно зображати у проекціях з числовими відмітками, наприклад, креслення земної (топографічної) поверхні, що слугує типовим представником каркасних поверхонь; її зазвичай завдають множиною горизонталей і доповнюють профілями - профільними лініями рівня.

Іноді будується креслення каркасу поверхні на основі матеріальної моделі поверхні. У такому випадку на моделі розмічають лінії каркасу за допомогою розміточних інструментів, а потім вимірюють координати точок на цих лініях за допомогою рейсмусів (рис. 50). Каркасна поверхня задає однозначно лише ті точки, що належать лініям каркасу; інші точки будуються наближено. На ранніх етапах розвитку авіації, суднобудування і кораблебудування використовували каркасні поверхні, що математично не задані. Нині використовують математично задані неперервно-топографічні поверхні, що однозначно описуються

рівняннями: $F(x,y,z) = 0$. Лінії рівня виражаються тією ж функцією, за умови, що $z = \text{const}$ (для горизонталей); $x = \text{const}$ (для профілей); $y = \text{const}$ (для фронталей).

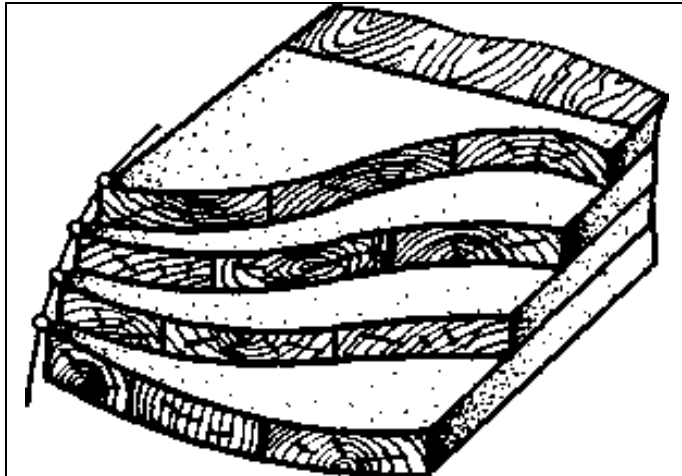


Рис. 49.

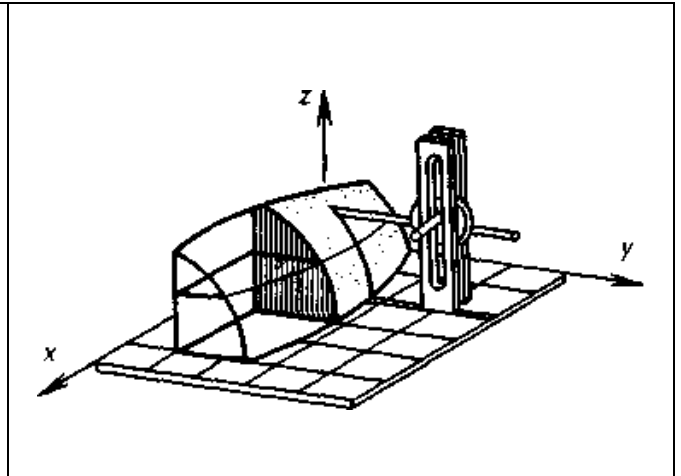


Рис. 50.

До каркасних відносять різальні поверхні багатьох інструментів, наприклад, стамесок для різьби по дереву (клюкарзи, церазки, ложкорізи); каркасом зручно задавати поверхні рукояток під пальці багатьох інструментів.

7.2. Поверхні паралельного переносу

Поверхнею паралельного переносу називають поверхню, утворену таким переміщенням плоскої кривої (твірної g уздовж напрямної d), за якого крива g зберігає паралельність відносно свого початкового положення (рис. 51).

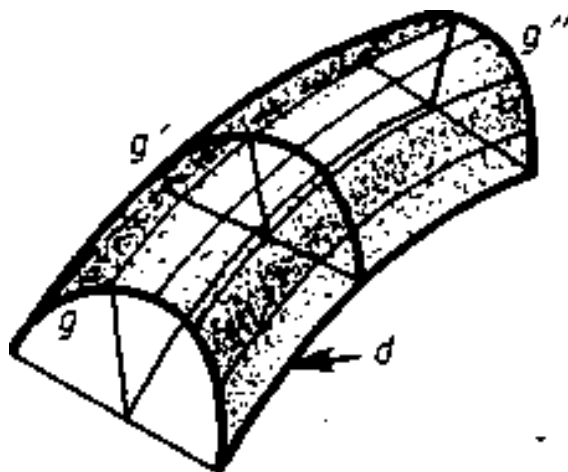


Рис. 51.

Прикладом поверхні паралельного переносу в машинобудуванні є поверхня, що нарізує фреза з профілем g , що переміщується по копіру з контуром d (рис. 21 – нижній ряд). Ці поверхні застосовуються в архітектурі і будівництві.

7.3. Циклічні поверхні

Циклічні поверхні утворюються неперервним переміщенням кола r постійного та змінного радіусу. Центр кола рухається по напрямній d (рис. 52, а).

Поверхню називають каналною, якщо площина кола у кожному своєму положенні перпендикулярна до напрямної d (рис. 52, б, в). Усі поверхні обертання можна розглядати як каналні з напрямною - віссю i . Канальну поверхню називають трубчастою, якщо вона утворена колом постійного радіусу (рис. 52, г).

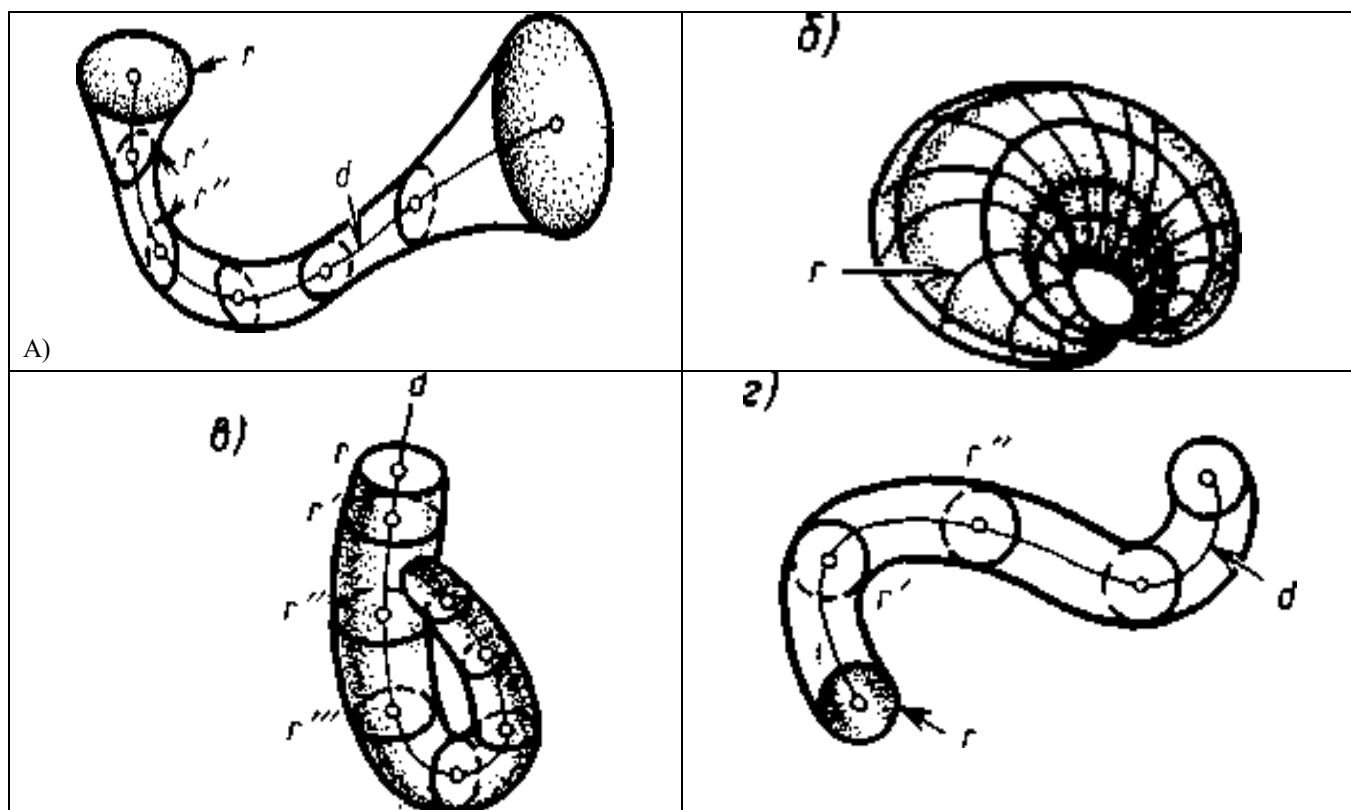


Рис. 52.

Тор можливо розглядати як трубчасту поверхню. Трубчаста поверхня з прямолінійною напрямною є циліндричною поверхнею обертання.

Прикладом гвинтової трубчастої поверхні з напрямною - гвинтовою лінією слугують поверхні пружин (циліндричної і конічної).

8. БАГАТОГРАННИКИ

8.1. Загальні відомості

Поверхня, що утворена частинами площин, що перетинаються - гранями, називається гранною (або багатогранною). Багатогранник є тілом, що обмежене з усіх боків плоскими багатокутниками. Сукупність усіх ребер багатогранника утворює його сітку (гратку). Деякі види багатогранників - піраміду і призму нами схарактеризовано вище.

Крім пірамід і призм, значний інтерес мають правильні опуклі багатогранники - тіла Платона, усі грані в яких є рівними (конгруентними)

правильними багатокутниками (рис. 53).

Цих тіл є п'ять: тетраедр, октаедр, ікосаедр - 4, 8, 20 правильних трикутників; гексаедр (куб) - 6 квадратів; додекаедр - 12 правильних п'ятикутників.

Крім правильних випуклих багатогранників, існують і правильні опукло-ввігнуті - зірчасті багатогранники (рис. 54).

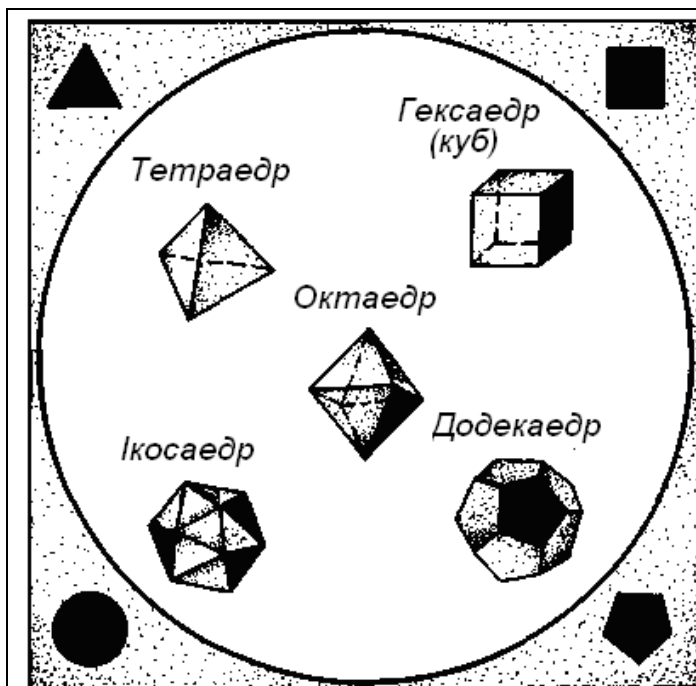


Рис. 53.



Рис. 54.

В опуклого багатогранника число граней плюс число вершин мінус число ребер дорівнює двом: $\Gamma + B - P = 2$ (табл. 1).

Таблиця 1

Вид багатогранника	Γ	B	P	$\Gamma + B - P$
Тетраедр	4	4	6	2
Куб (гексаедр)	6	8	12	2
Октаедр	8	6	12	2
Ікосаедр	20	12	30	2
Додекаедр	12	20	30	2
П'ятикутна піраміда	6	6	10	2
Трикутна призма	5	6	9	2

*Недра (грецьк.) - основа, поверхня, сторона.

Креслення багатогранника складається з креслення його вершин і ребер, тобто креслення його сітки (гратки) (рис. 55).

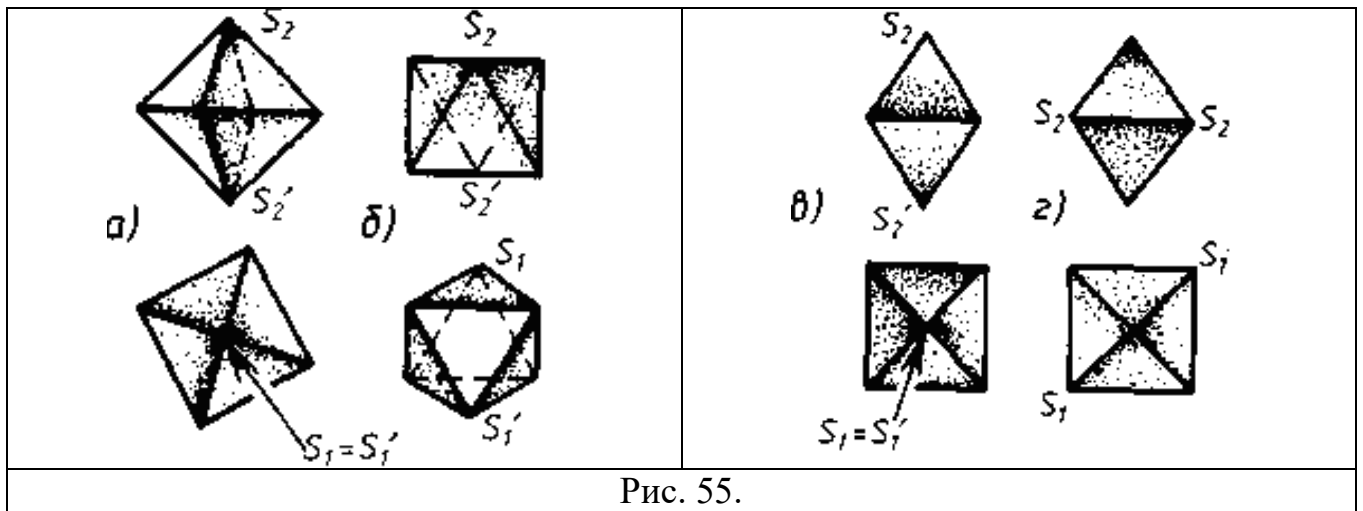


Рис. 55.

При побудові креслення багатогранника варто враховувати положення його вершин і ребер відносно площин проєкцій. На рис. 55 подано креслення одного й того ж октаедра, але орієнтованого по різному відносно площин проєкцій. Зображення на рис. 55, в і г не відрізняються одне від другого, хоча вони побудовані для різних положень октаедра (для зручності читання креслень подано позначення двох вершин октаедра).

На відміну від гранних усі інші поверхні відносять до кривих.

8.2. Багатогранники у природі. Використання багатогранників

У природі багато речовин мають кристалічну будову у вигляді багатогранників: кристали кам'яної солі і цукру мають форму куба; кристали алмазу - октаедра; кристали кварцу (гірський кришталь, аметист, жовтий і димчастий кварци - раухтопази) мають форму шестигранної призми-олівця (рис. 56, а); кристали берилу (смарагда) - шестигранної призми (рис. 56, б). Кристали ростуть геометрично точними багатогранниками лише у сприятливих умовах.

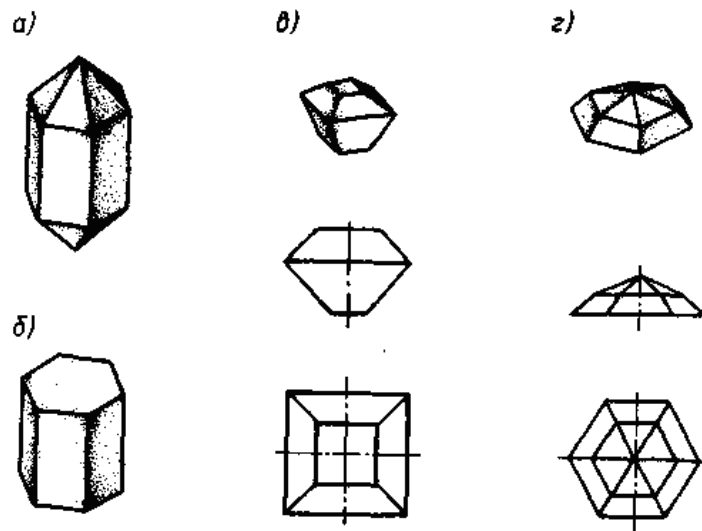


Рис. 56.

З давніх часів форми багатогранників приваблювали увагу людини. Наприклад, багато видів огранювання дорогоцінних каменів є багатогранниками:

на рис. 56, в показано огранювання «алмазна таблиця», а на рис. 56,г - «антверпенська троянда» - самі прості види огранювання. Ці форми можна отримати й у шкільній майстерні, якщо є верстат для обробки каменю.

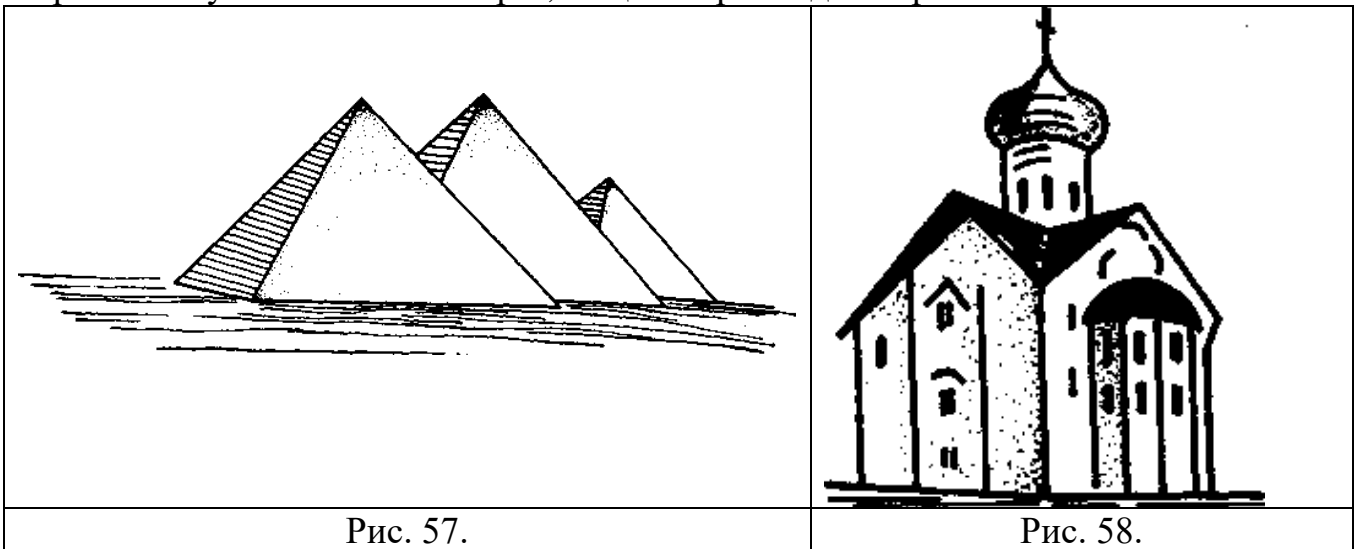


Рис. 57.

Рис. 58.

Багатогранники, як найпростіші і привабливі просторові форми, застосовувались в давні часи: знамениті єгипетські піраміди (рис. 57); башти, храми, замки (рис. 58) тощо.

Форми багатогранників використовують в сучасній архітектурі, техніці, оптичній техніці в машинобудуванні. На рис. 59 подано приклади різних виробів з деревини і металу, форму яких утворюють поверхні багатогранників. В дослідницькій роботі та інженерній справі складні геометричні форми часто замінюють (апроксимують) близькими за формою поверхнями багатогранників.

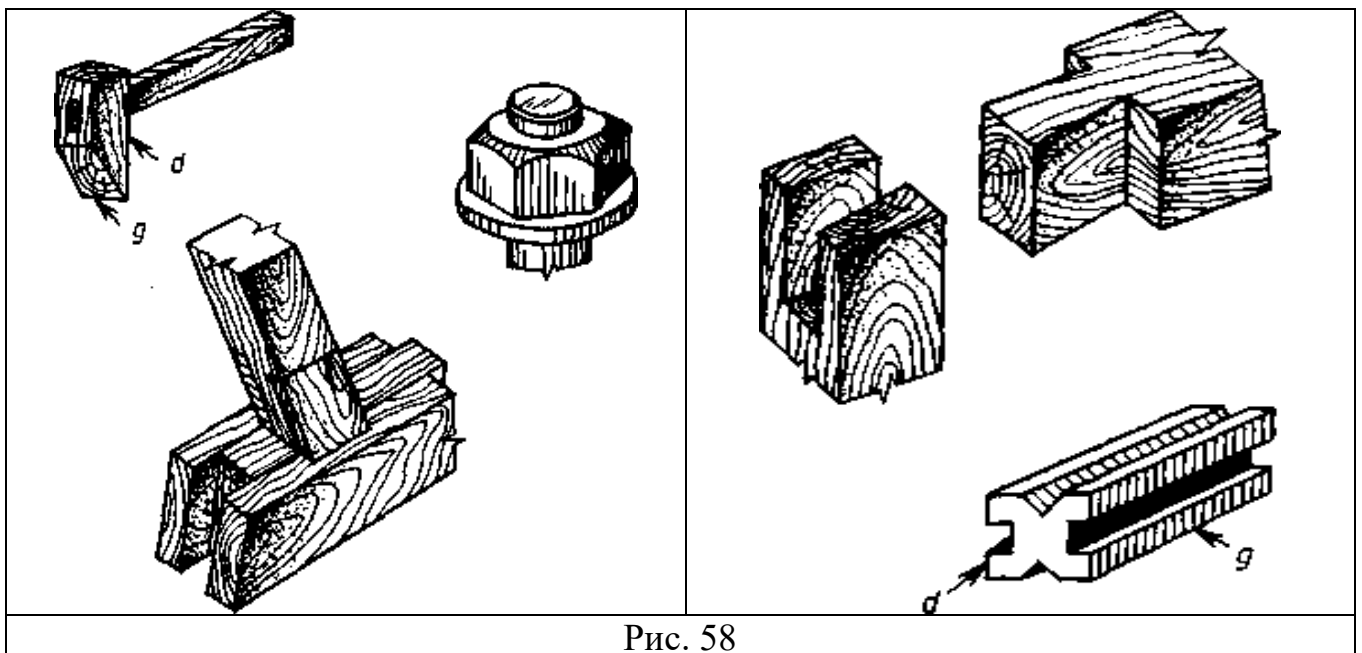


Рис. 58

9. ЛІНІЇ НА ПОВЕРХНІ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ І ЛІНІЙ. ПОБУДОВА ПЛОЩИНИ, ЩО ДОТИЧНА ДО ПОВЕРХНІ

9.1. Лінії на поверхні. Конічні перерізи - коніки

Конічними перерізами - коніками, називають криві другого порядку: еліпс (коло), параболу, гіперболу та їхні вироджені випадки - точку, «подвійну» пряму і дві прямі, що перетинаються (або паралельні).

Коніку будь-якого виду можливо побудувати на конічній поверхні, напрямною якої слугує коло або еліпс (на рис. 59-61 площини конік перпендикулярні до Π_2).

Ці криві вивчались геометрами Давньої Греції. Так, Архімед (287-212 рр. до н. е.) присвятив конічним перерізам твір (прикро, але він не дійшов до сучасності), а Аполлоній (260-170 рр. до н. е.) вивчав математику в Александрії, продовжив дослідження параболи, еліпса і гіперболи та написав класичну працю «Конічні перерізи».

Якщо площина коніки перетинає усі твірні конічної поверхні (рис. 59, а, б), то конікою слугує замкнена крива другого порядку - еліпс m (в окремому випадку - коло). Будь-яка площина Γ , що паралельна площині такої коніки і проходить через вершину S (рис. 59, б, в), перетинає конічну поверхню по точці S (вироджений випадок).

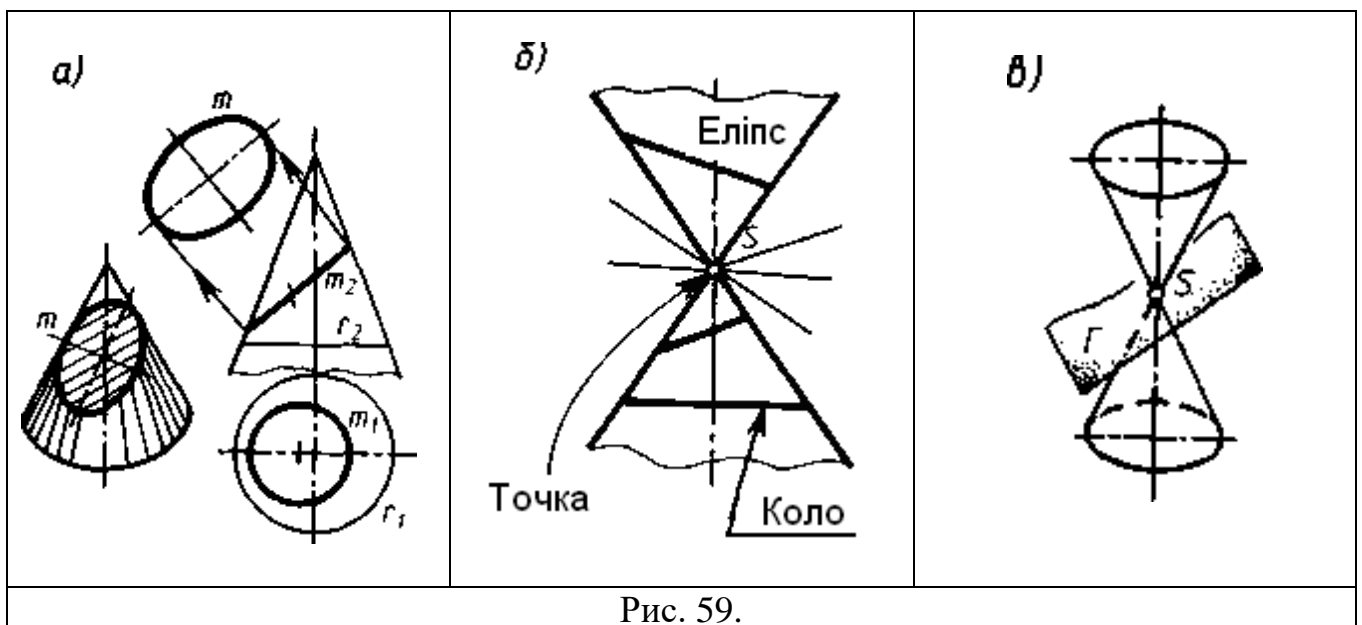


Рис. 59.

Якщо площина коніки паралельна одній твірній конічної поверхні, то конікою є параболу m (рис. 60, а, б). Будь-яка площина Γ , що дотикається до конічної поверхні по твірній (рис. 60, б, в), містить «подвійну» пряму (пару співпадаючих твірних) – вироджений випадок параболи.

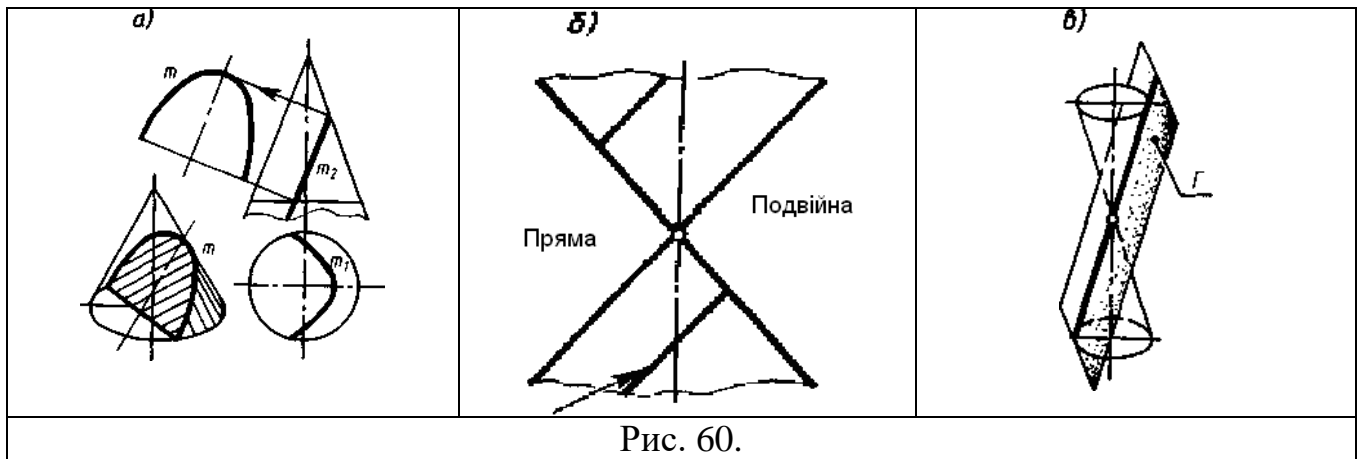


Рис. 60.

Якщо площина коніки паралельна двом твірним конічної поверхні, то конікою служить гіпербола (рис. 61, а, б). Виродженим видом гіперболи є дві прямі, що перетинаються - твірні, по яким площина Γ , що проходить через вершину S , перетинає конічну поверхню (рис. 61, б, в).

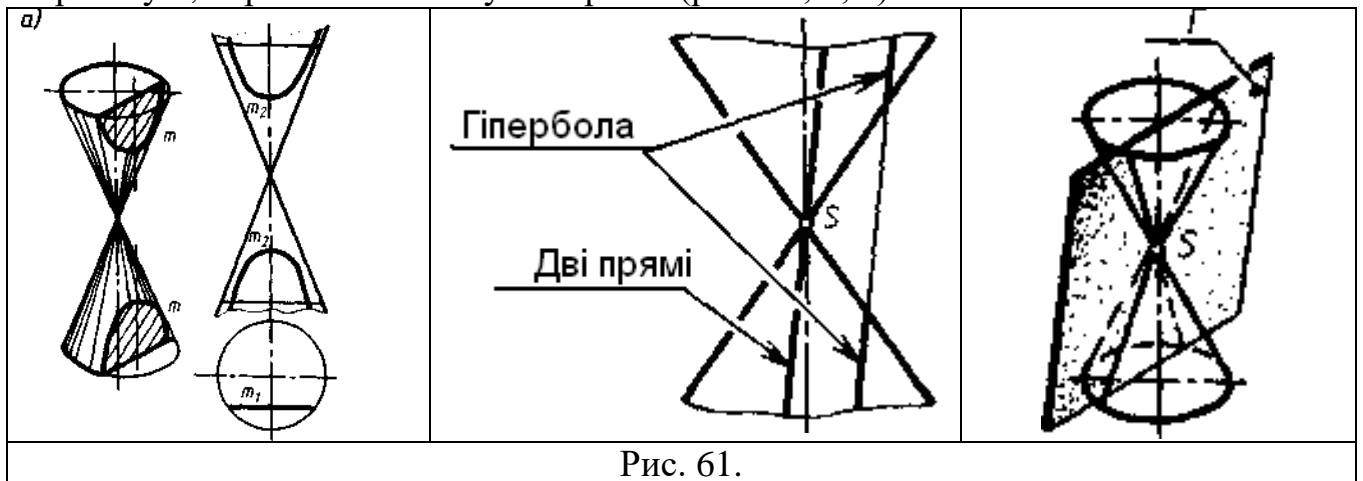


Рис. 61.

Кожна поверхня другого порядку містить певні види конік. Наприклад, будь-яким перерізом сфери є коло r (рис. 62); перерізами циліндричної поверхні обертання можуть бути еліпс m (окремий випадок - коло r) або дві паралельні прямі - твірні a і b (рис. 62).

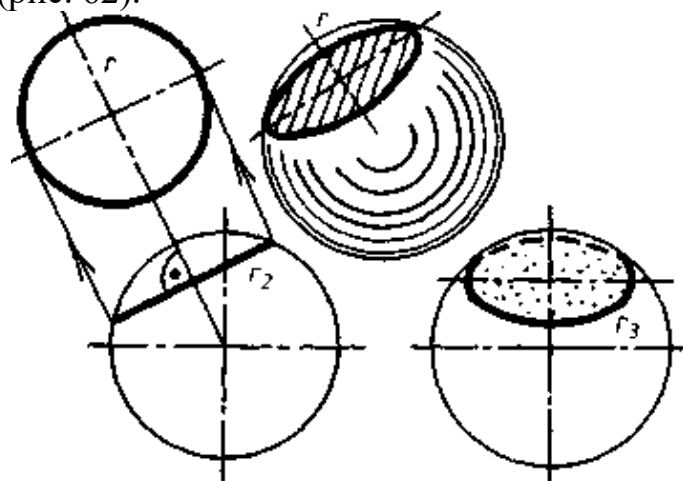


Рис. 62.

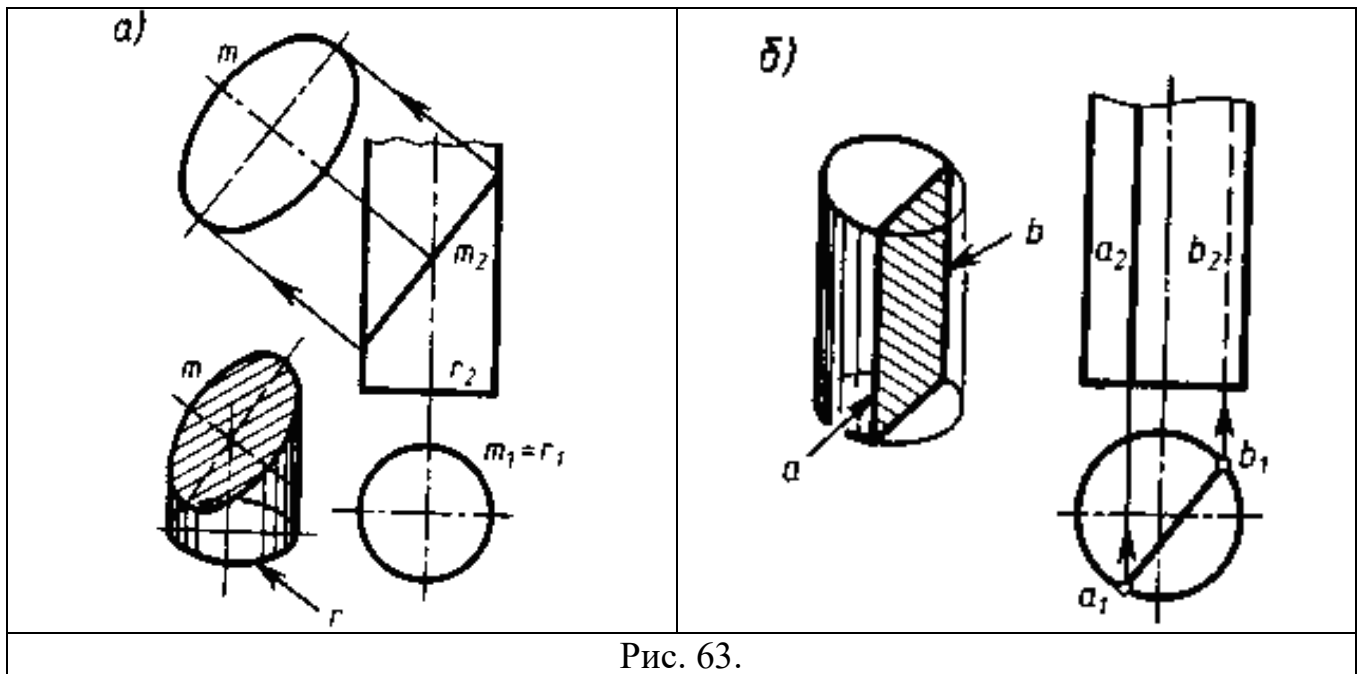


Рис. 63.

9.2. Проекційні властивості конік

Для розв'язання задач методами нарисної геометрії іноді зручно, коли проекціями ліній слугують точні лінії – прямі чи кола. Наведемо приклади побудови таких конік, що проекціюються на площини проєкцій у вигляді точних ліній. На рис. 64, а, б подано знаходження таких еліпсів a і b (розташованих на циліндричній та конічній поверхнях обертання), горизонтальні проєкції яких є колами a_1 і b_1 , а фронтальні проєкції – відрізки прямих.

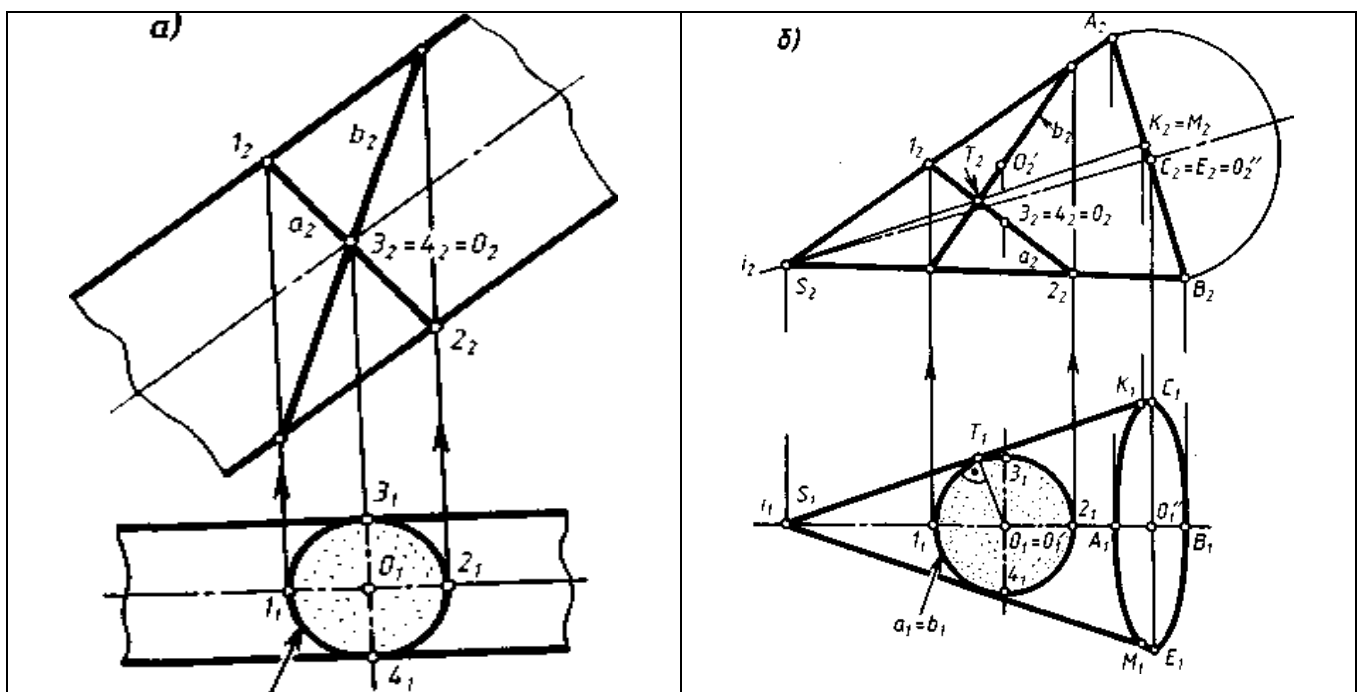


Рис. 64.

Побудову починаємо з проведення кола $a_1=b_1$, вписаного у нарис заданої поверхні на Π_1 . Наступні операції зрозумілі з розгляду креслень.

Відомою є гарна властивість конік, розташованих на нелінійчастих поверхнях обертання другого порядку: якщо коніку m спроекціювати з центра $S(S')$ на площину Π' , перпендикулярну до прямої SS' , то одержимо коло r - як допоміжну проекцію коніки m (рис. 65, а, б); точками S і S' слугують протилежні вершини поверхні обертання. Вершиною може бути як власна, так і невласна точка, наприклад: у параболоїда обертання (рис. 65, в) одна вершина - власна точка S , а друга - невласна S^∞ , тобто $m \rightarrow m'$; коло m' - допоміжна проекція еліпса m .

Приклад з параболоїдом свідчить, що ортогональною проекцією будь-якого перерізу параболоїда обертання на площину, що перпендикулярна його вісі, слугує коло.

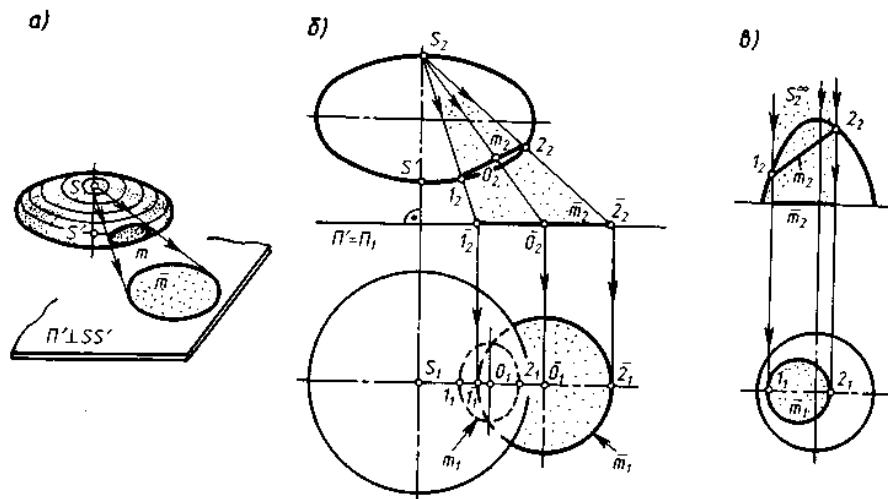


Рис. 65.

9.3. Лінії зрізу

Будь-який переріз m поверхні обертання називають лінією зрізу, якщо його площина паралельна вісі обертання i (рис. 66). Наприклад, лініями зрізу конічної поверхні обертання слугують гіперболи, лініями зрізу циліндричної поверхні обертання - прямі, а лініями зрізу тора - криві четвертого порядку (рис. 67). Так, на рис. 214 показано лінії зрізу на торі, що є овалами Кассіні: а - еліпсоподібний (але не еліпс!) овал; б - овал з «талією»; с - лемніската Бернуллі («лемніската» у перекладі з грецької означає «пов'язка», «стрічка»).

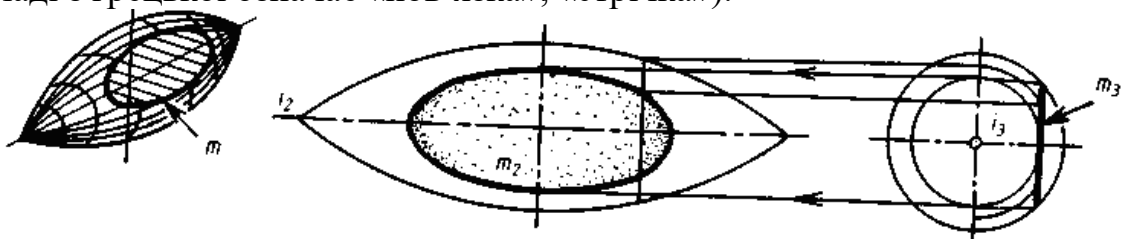


Рис. 66.

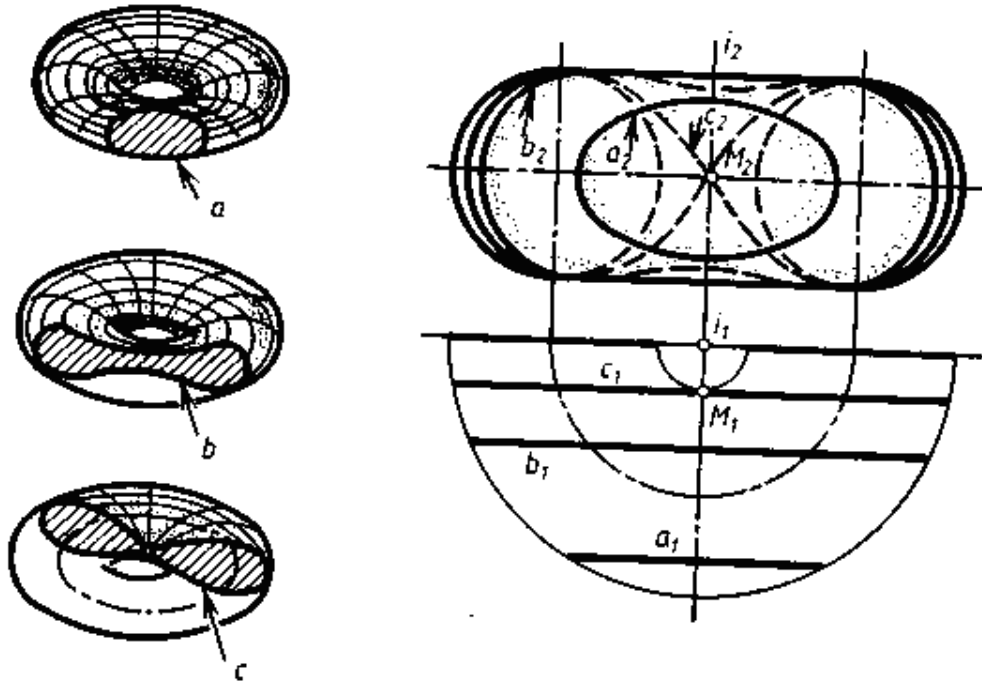


Рис. 67.

9.4. Лінії на гвинтовій поверхні

Із закону утворення як прямого (рис. 44), так і похилого гелікоїда (рис. 68) визначається:

1) Якщо площина перерізу проходить через вісь i , то перерізом є пряма лінія – твірна g ;

2) нормальним перерізом прямого гелікоїда слугує пряма - твірна g ; похилого - спіраль Архімеда m .

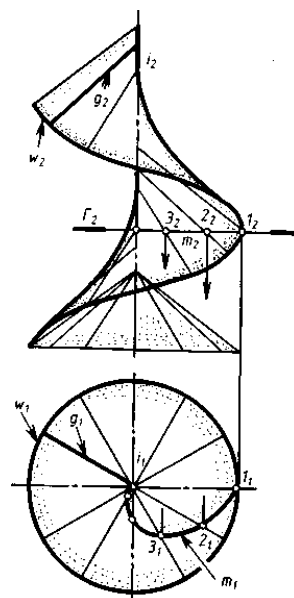


Рис. 68.

Кожна гвинтова поверхня містить множину геліс w із спільною віссю i .

9.5. Деякі особливі лінії поверхонь

Лінії рівня. Лініями рівня поверхонь слугують: горизонталі ($z = \text{const}$), фронталі ($y = \text{const}$) і профільні лінії ($x = \text{const}$). Лінії рівня застосовуються при конструюванні та зображенні каркасних поверхонь.

Лінії нахилу (найбільшого скату) – лінії поверхні, перпендикулярні до ліній рівня; вони складають найбільший кут з відповідною площиною проєкцій. Наприклад, у будь-якої поверхні обертання з вертикальною віссю лініями нахилу слугують меридіани.

Лінії рівного нахилу. Дотичні до цієї лінії, побудовані в кожній її точці, складають з площиною проєкцій постійний кут. Наприклад, в лінійчастих поверхнях з вершиною та напрямною лінією рівного нахилу слугує будь-яка твірна – пряма лінія; в циліндричній поверхні обертання лінією рівного нахилу слугує також і її геліса. Ці лінії використовують у проектуванні автомобільних та залізничних магістралей.

Найкоротші (геодезичні) лінії з'єднують дві точки поверхні найкоротшим шляхом. Найкоротшою лінією на циліндричній поверхні обертання є геліса; на сфері - коло, площина якого проходить через центр сфери. Цю лінію називають також брахістодою (від грецького слова «найкоротша») або ортодромією (від грецького слова - «біжуча прямо»). Ортодромічні траси розповсюджені в авіації, мореплаванні і космічній навігації (траси польоту супутників).

Локсодроми («біжучі косо») - лінії, що належать поверхні обертання і перетинають усі меридіани цієї поверхні под постійним кутом. Локсодрому зручно будувати за допомогою розгортки поверхні.

Важливою є сферична локсодрома - спіраль на сфері. Корабель (чи літак), рухаючись на великих відстанях по морю (чи повітря), тримається постійного курсу, траєкторією його руху є сферична локсодрома.

9.6. Взаємне розташування поверхонь і ліній. Побудова площини, дотичної до поверхні

Взаємне положення лінії і поверхні. Лінія може перетинати поверхню, належати поверхні, дотикатися поверхні або не мати з нею жодної спільної точки. На рис. 69 показано, що граничним положенням прямої a , що перетинає поверхню в точках A і B , слугує дотична t . При цьому точки A і B , рухаючись назустріч одна одній, співпадають у точці дотику M .

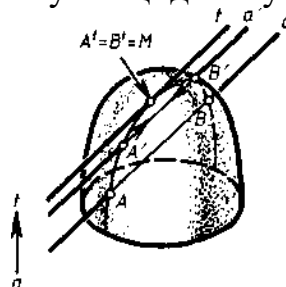


Рис. 69.

Взаємне положення двох поверхонь. Дві поверхні можуть не мати спільних точок; дві поверхні можуть перетинатися або дотикатись одна до одної.

Елементами взаємного дотику поверхонь можуть бути точки (одна чи кілька) і лінії - як прямі, так і криві (рис. 70). Поверхні, дотичні в точці (точках) або по лініям, можуть перетинатись по різним кривим (рис. 70,в).

Дотик поверхонь часто використовують у техніці, наприклад, у фрикційних, пасових та зубчастих передачах (рис. 71), в кулькових підшипниках, при русі по рельсам коліс вагонів тощо.

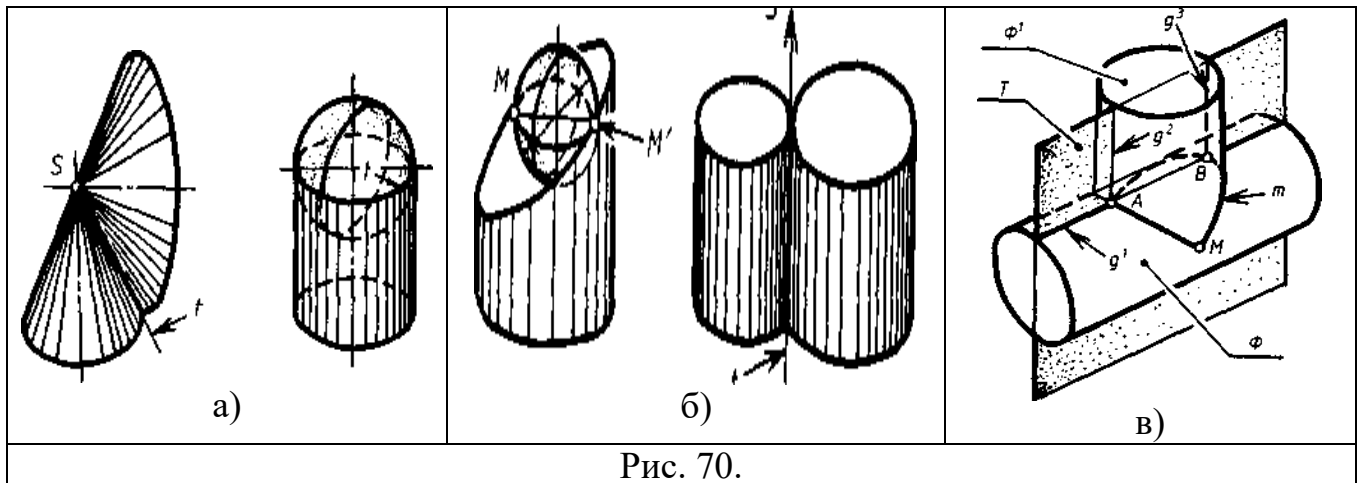


Рис. 70.

Вид взаємного розташування поверхонь (площин) можливо встановити за комплексним кресленням одразу без додаткових побудов лише в окремих випадках (наприклад, якщо одна з поверхонь проєкціувальна). У загальному випадку для цього використовують допоміжні поверхні (площини) Т. Якщо поверхні Φ і Φ^1 пересикаються (рис. 70), то завжди можна обрати таку поверхню (площину) Т, що перетинатиме задані поверхні по певним лініям. Так, на рис. 70: $T \cap \Phi = g^1$; $T \cap \Phi^1 = g^2$ (g^3); $A = g^1 \cap g^2$; $B = g^1 \cap g^3$; $A \subset m \supset B$; $m = \Phi \cap \Phi^1$.

Якщо таку допоміжну поверхню (площину) підібрати неможливо, то поверхні (площини) не перетинаються.

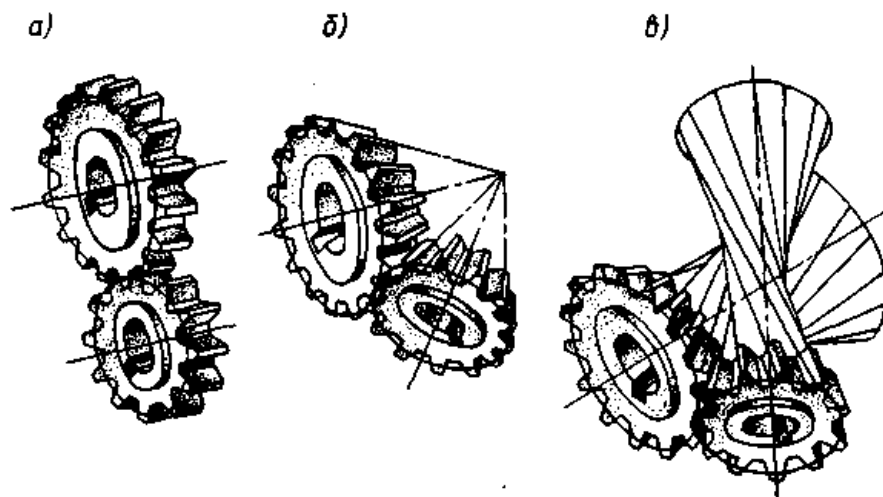


Рис. 71.

Площина дотична до поверхні. У диференціальній геометрії доводиться, що площина T , дотична до поверхні Φ у звичайній точці M (рис. 72), є множиною прямих, дотичних до різних кривих поверхні, що проходять через дану точку M : $T \supset t \{t', t'', \dots\}$.

У звичайній точці поверхні може бути побудована лише одна визначена дотична площина. В особливих точках вона або не визначена, або не єдина, наприклад, вершина конічної поверхні, будь-яка точка ребра повернення в торсах тощо. Пряма n , що проходить через дану точку M поверхні Φ перпендикулярно дотичній площині T , називається нормаллю поверхні.

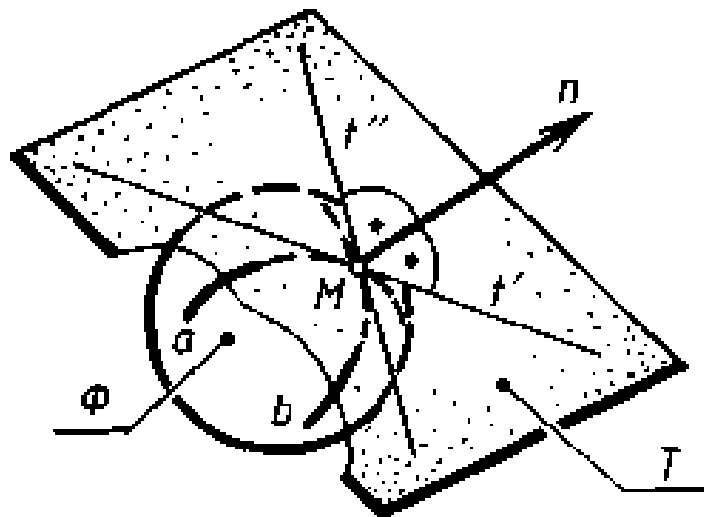
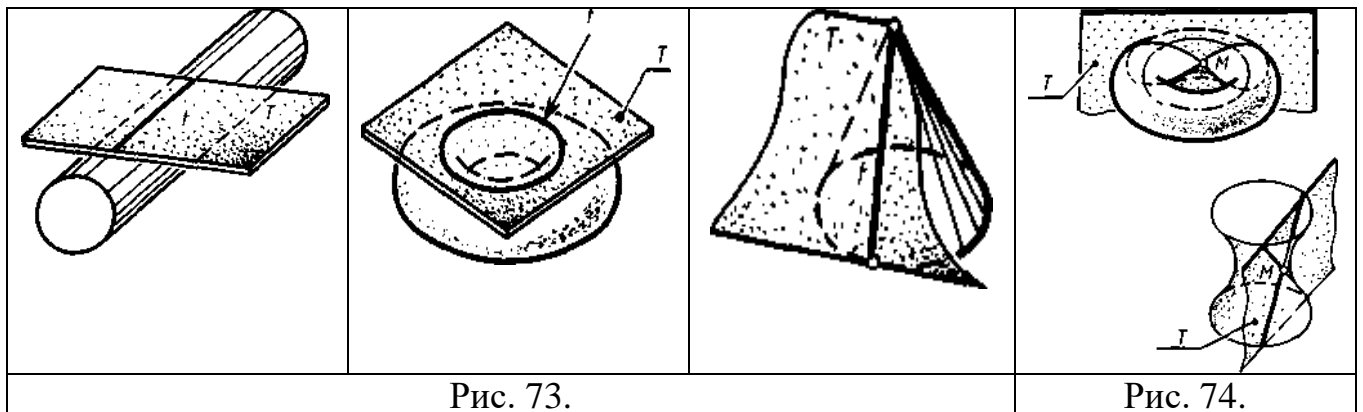


Рис. 72.

Для побудови дотичної площини у даній точці достатньо провести через цю точку дві прямі t' і t'' , кожна з яких дотикається ліній поверхні a і b (рис. 72). Якщо відома нормаль у даній точці, то два перпендикуляри до неї визначають дотичну площину.



Наведемо приклади різних випадків взаємного розташування поверхні і дотичної до неї площини:

1. Дотична площина і поверхня мають єдину спільну точку - точку дотику (рис. 220).
2. Площина дотикається до поверхні по лінії t – прямій чи кривій (рис. 73).

3. Площина дотична до поверхні в єдиній точці M (рис. 74), перетинає її по кривій (тор) чи по двом прямим (одно порожнинний гіперболоїд обертання).

Побудова площини, дотичної до поверхні.

Приклад 1 (рис. 75). Побудувати площину T , дотичну до сфери у точці M .

Розв'язання. Відомо, що радіус сфери, пробудований у точці дотику, є нормаллю сфери. Тому завдання побудови площини, дотичної до сфери, зводиться до побудови площини T , перпендикулярної до радіусу сфери $OM = n$ і проходить через точку M .

Цю площину просто побудувати, використовуючи лінії рівня h і f :

$$h \perp OM (h_1 \perp n_1); f \perp OM (f_2 \perp n_2) \Rightarrow T \perp n, T = \{ h \cap f \}.$$

Приклад 2 (рис. 76). Через точку A провести площину T , що дотична до конічної поверхні обертання. Точка A розташована поза поверхнею. Точка S - вершина конічної поверхні з напрямною – колом $d, d \subset \Pi^d$.

Розв'язання. Площина T дотикається конічній поверхні по твірній t , що проходить через дві точки - S і E . У точці E пряма b площини T , розташована у площині Π^d , дотикається кола d . Тому, щоб знайти точку E , треба:

1) знайти точку B - слід прямої SA на площині Π^d : $B = \Pi^d \cap SA$;

2) через точку B провести пряму b , дотичну до лінії d . Задача має два розв'язки: $T = \{A, S, E\}$ і $T' = \{A, S, E'\}$.

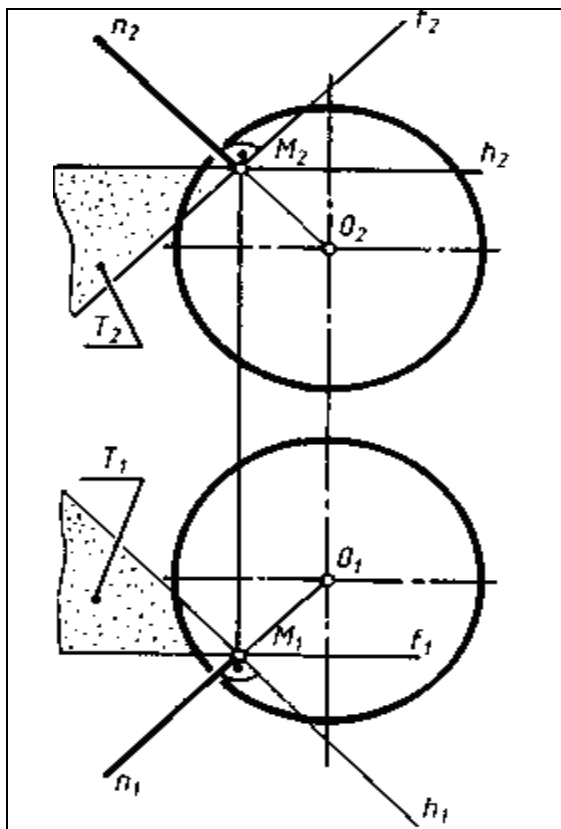


Рис. 75.

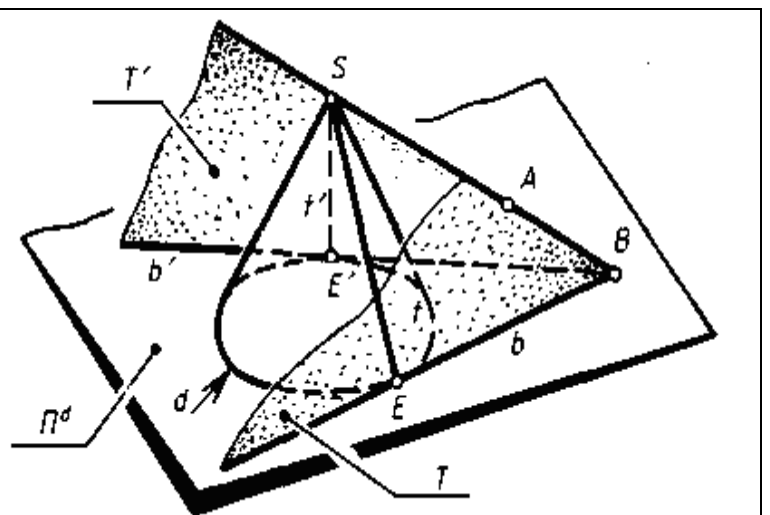


Рис. 76.

10. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

10.1. Основні поняття та визначення

Розгорткуванням називається таке перетворення поверхні Γ , в результаті якого вона суміщується з площиною Π : $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ (рис. 225).

Розгорткування можна уявити як послідовне розгинання гнучкої нерозтяжної плівки-поверхні Γ та суміщення її без складок і розривів з площиною Π (дотичною до неї у кожний певний момент).

Плоска фігура, одержана в результаті розгорткування поверхні (або її частини), називається розгорткою.

Теоретично можна сумістити з площиною без складок і розривів лише ті лінійчасті поверхні, дві суміжні твірні яких паралельні або перетинаються. Такі поверхні називаються розгортуваними. Інші поверхні є нерозгортуваними. До перших відносять торси, поверхні конусів, циліндрів, призм, пірамід та інших багатогранників.

Розгортки поділяють на три групи: точні; наближені; умовні. На рис. 77 подано класифікацію поверхонь та їхніх розгорток.

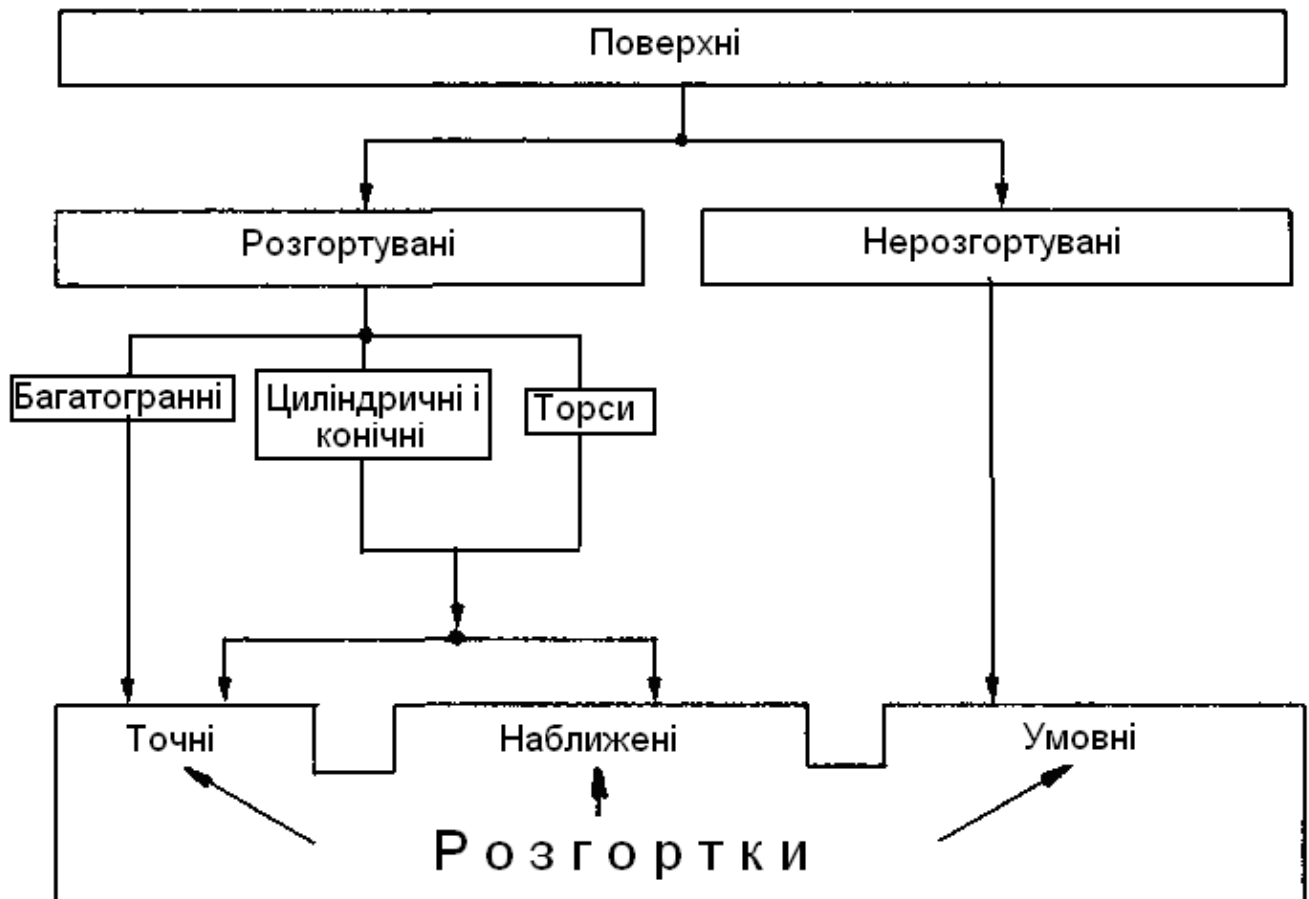


Рис. 77. Класифікація поверхонь та їхніх розгорток.

Точні розгортки при оберненому перетворенні - згортванні у поверхню не дають ні складок, ні розривів. Наближені та умовні розгортки завжди згортаються

або з розривами, або зі складками.

На практиці точні розгортки будують в основному для поверхонь багатогранників, а для інших розгортаних поверхонь переважно будують наближені розгортки. Умовні розгортки будують для нерозгортаних поверхонь.

На кресленнях розгортки лінії згину показують штрих-пунктирною лінією з двома крапками, відповідно до вимог ДСТУ.

На розгортці до позначення фігури в натурі додається зверху риска: А, b, Г тощо.

Властивості перетворення розгортання

У побудові розгортки (рис. 78) виконуються такі властивості (інваріанти):

1. Кожній точці поверхні однозначно відповідає точка на її розгортці і навпаки: $A \rightarrow A'$; $A' \rightarrow A$ (за виключенням ліній розрізу).

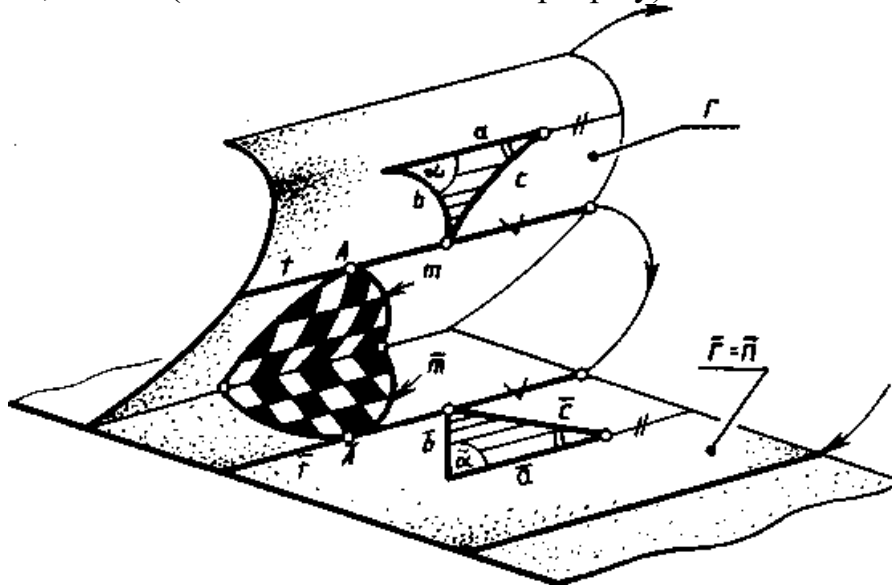


Рис. 78.

2. Прямая лінія на поверхні перетворюється в пряму лінію на розгортці: $a \rightarrow a'$; $t \rightarrow t'$,... . Обернене твердження несправедливе.

Лінія на поверхні (a, b, c,...), якій відповідає на розгортці пряма (a, b, c), називається найкоротшою або **геодезичною**.

3. Взаємна належність фігур зберігається: $A \in n$, тоді $A' \in n'$.

4. Паралельність прямих зберігається: $a \parallel t \Rightarrow a' \parallel t'$.

5. Якщо пряма дотикається лінії у точці А, то й на розгортці вона дотикається лінії у точці А.

На розгортці зберігаються: довжини дуг (відрізків) будь-яких ліній; величини кутів між лініями; площі фігур, визначальні метричні властивості фігур. Тому розгортання відносять до ізометричних (рівно вимірних, від isos (грецьк.) - рівний і metreo (грецьк.) – міряю) перетворень, а задачі побудови розгортки – до метричних задач.

Способи побудови розгорток

При побудові наближених та умовних розгорток використовують апроксимацію (наближення) однієї поверхні іншою (від *approximare* (лат.) – наближуватися).

Апроксимацією називають заміну однієї поверхні іншою - апроксимуючою, що наближається до заданої за певними властивостями (форма, площа, кривизна) з тією чи іншою ступінню точності.

На рис. 79, а, б по дано приклади апроксимації (А) конічної поверхні - шестигранною призматичною поверхнею і сфери - відсіками (частинами) різних поверхонь: циліндричної і конічної. Необхідно, щоб апроксимуюча поверхня була суцільною без розривів в місцях об'єднання апроксимуючих відсіків. В місцях розривів порушується умова однозначної відповідності, тому варіанти апроксимації поверхонь конуса і сфери, наведені на рис. 79, в, г, не можна застосовувати для побудови розгорток (хоча для визначення об'ємів тіл і площ відсіків поверхонь така апроксимація зручна).

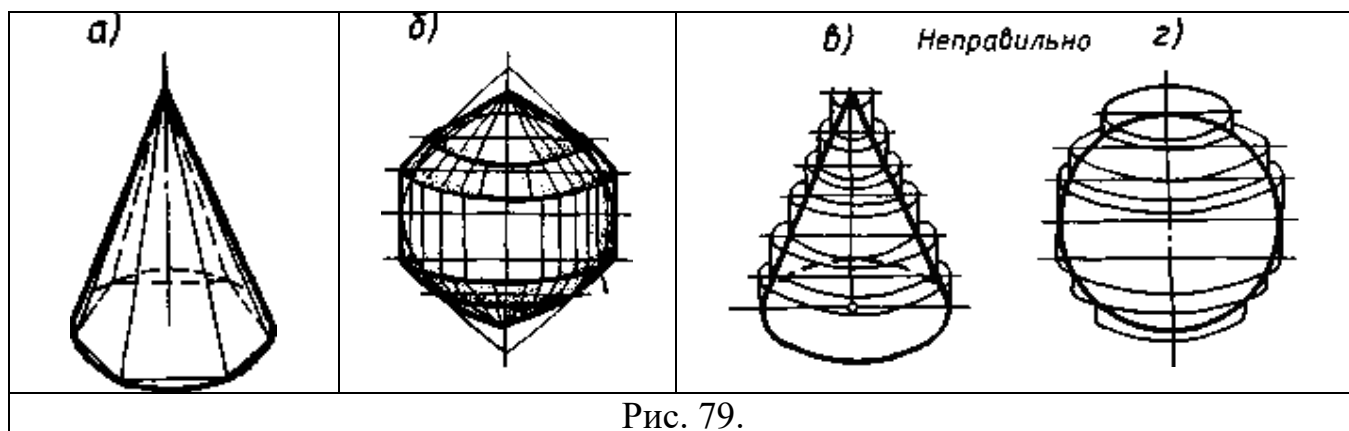


Рис. 79.

Апроксимація є точнішою із збільшенням n - числа апроксимуючих відсіків (на рис. 79, а $n=6$; на рис. 79, б $n = 5$). На практиці $n > 12$ (в наших прикладах часто $n < 12$, так як із збільшенням n креслення стає складним для сприйняття).

Графічні способи, якими можна будувати розгортки різного виду, зазначені у табл. 2. Розгортки призм будують способами розкатки або нормального перерізу, а розгортки пірамід - способом трикутників (триангуляції). Для точних розгорток можливим є спосіб вимірювання натуральних величин частин поверхонь з комплексного креслення і перенесення їх на площину.

Таблиця 2

Класифікація графічних способів побудови розгорток

Способи		
Точні	Апроксимація	
Розкатки	Наближена (А)	Умовна (АУ)
Нормального перерізу	Призм	Циліндрів
Трикутників	Пірамід	Конусів
	Трикутників	Трикутників

У побудові наближених розгорток поверхонь циліндрів, конусів, торсів використовують поверхні призм і пірамід, а також багатогранників, що складаються з трикутників.

У побудові умовних розгорток апроксимуючими поверхнями служать поверхні циліндрів, конусів і багатогранників, що складаються з трикутників (табл. 2). Таку апроксимацію називають умовною, позначимо її АУ.

У побудові умовної розгортки способом апроксимуючих циліндрів чи конусів ми апроксимуємо задану поверхню двічі: спочатку циліндричною (чи конічною) поверхнею, потім - призматичною (або пірамідальною).

Крім графічних способів побудови розгорток, існують аналітичні, так як основні параметри точних і наближених розгорток можна точно обрахувати за формулами.

10.2. Точні розгортки

Спосіб нормального перерізу застосовують на практиці для побудови точних розгорток бічних поверхонь призм і циліндрів обертання.

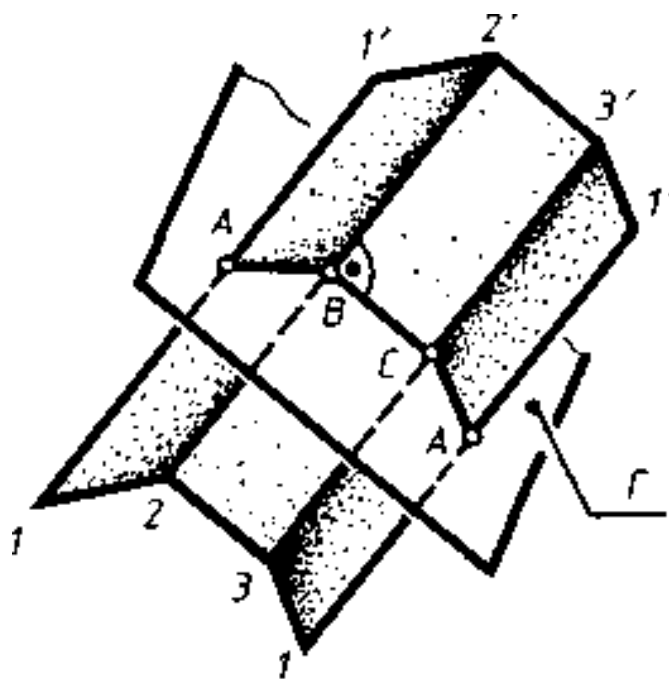


Рис. 80.

Ілюстрацію способу нормального перерізу на прикладі відсіку замкнутої трьохгранної призматичної поверхні, розрізаної по ребру 1-V подано на рис. 81. Ідею цього способу розглянемо на прикладі побудови розгорток бічної поверхні призми Ф, зображеної на рис. 81, а:

1. Через будь-яку точку бічного ребра призми, наприклад через точку А, проводимо площину Γ , перпендикулярну до ребер призми; кожне ребро призми паралельне Π_2 , тому $\Gamma_2 \perp (1_2' - 1_2)$.

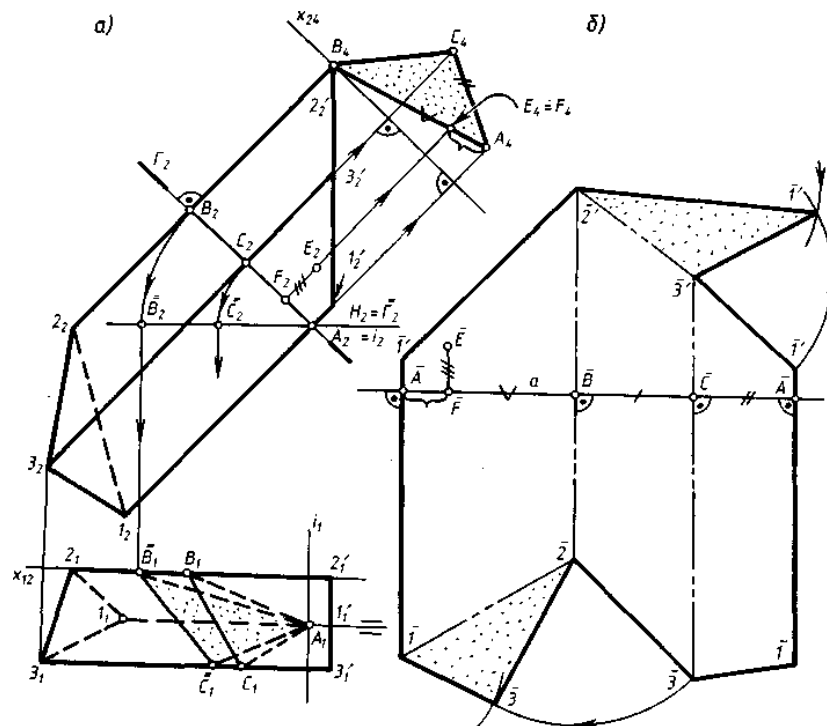


Рис. 81.

2. Будемо переріз призми площиною Γ (нормальний переріз) - трикутник ABC ; $\Delta ABC = \Phi \cap \Gamma$.

3. Визначаємо натуральний вигляд $\Delta ABC - \Delta A_1B_1C_1$ (використовуючи суміщення площини Γ з площиною H ; $A \supset i$; $i \perp \Pi_2$) або $\Delta A_4B_4C_4$ (використовуючи додаткову площину проєкцій $\Pi_4 \parallel \Gamma$).

4. На вільному полі креслення (на площині розгортки, рис. 81, б) будемо довільну пряму a .

5. Розрізаємо трикутник у вершині A і спрямляємо по лінії a : $|AB| = |A_1B_1| = |A_4B_4|$; $|CB| = |C_1B_1| = |C_4B_4|$; $|AC| = |A_1C_1| = |A_4C_4|$.

6. Через точки A, B, C проводимо прямі, перпендикулярні до лінії a .

7. На побудованих перпендикулярах відкладаємо відрізки, що відповідають натуральним величинам ребер призми. Ці відрізки поділені на частини від лінії нормального перерізу. Потім будемо чотирикутники, що відповідають натуральним зображенням граней призми.

Фігура $1-2-3-1'-3'-2'-1'-1$ - розгортка бічної поверхні призми. Способом засічок добудовуємо до неї трикутники $1-2-3$ і $1'-2'-3'$, що є натуральними зображеннями верхньої і нижньої основ призми; одержуємо повну розгортку призми.

На рис. 81 показано побудову на розгортці довільної точки E , що належить бічній поверхні призми: спочатку на прямій a будемо відрізок $|AF| = |A_4F_4|$, потім через точку F проводимо пряму, перпендикулярну до лінії a , і відкладаємо на ній ввєрх відрізок $|FE| = |F_2E_2|$.

Аналогічно будується розгортка бічної поверхні прямого кругового циліндра радіусу R і висотою h (рис. 82), вона є прямокутником, сторони якого дорівнюють h і $2\pi R$ - довжина кола основи. З креслення зрозумілою є побудова довільної точки E , розташованої на поверхні циліндра.

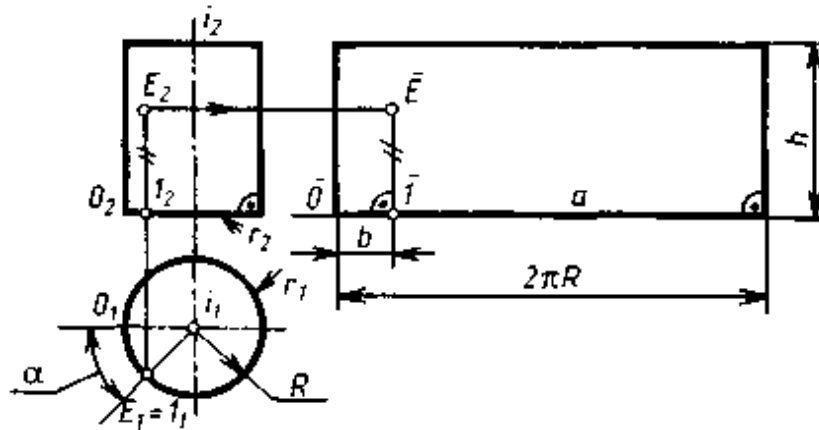


Рис. 82.

На рис. 83 подано побудову розгортки бічної поверхні циліндра обертання з віссю i – лінією рівня; нижня основа циліндра обмежена колом r , а верхня – еліпсом m .

Побудувавши натуральну величину нормального перерізу на епюрі - коло, ділимо його на n частин ($n = 8$) точками $1_4, 2_4, 3_4$ тощо. За допомогою цих точок будемо фронтальні проекції відповідних твірних циліндричної поверхні.

Нормальний переріз - коло r розрізаємо в точці O і суміщуємо з довільною прямою a , одержуючи відрізок $|O-O| = 2\pi R$. Поділимо цей відрізок на n ($n = 8$) рівних частин, одержуємо точки $1, 2, 3, \dots$. Через ці точки проводимо лінії, перпендикулярні до прямої a , відкладаємо на них (вверх) відрізки $|1-1'|, |2-2'|, \dots$, довжина яких дорівнює довжині твірних, виміряних на Π_2 . З'єднуючи точки $O', 1', 2', \dots$ лінією m , одержуємо розгортку бічної поверхні заданого циліндра. Розгортку, побудовану таким чином, можна вважати точною, але з обмеженням, тому що верхня її частина побудована по точкам за допомогою лекала.

Еліпс зображується на розгортці у вигляді синусоїди, екстремальними точками якої є точки $4'$ і $0'$, а точками перегину - точки $2'$ і $6'$. В двох останніх прикладах (рис. 82 і 83) розгортки побудовані способом нормального перерізу за допомогою графічних і аналітичних прийомів.

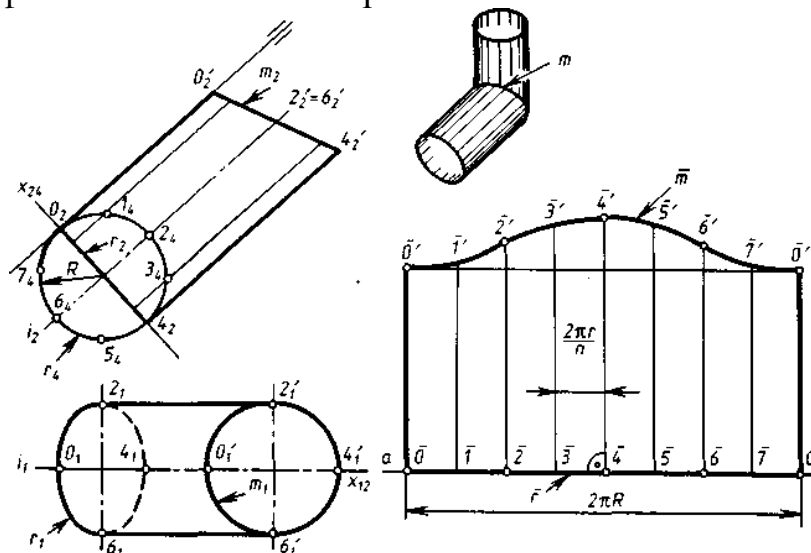


Рис. 83.

Спосіб розкатки застосовують для побудови точної розгортки бічної поверхні призми. Цей спосіб зручний, якщо ребра призми паралельні одній з площин проєкцій, а основи – іншій.

Задача зводиться до визначення натурального вигляду бічних граней призми шляхом їхнього суміщення з площиною рівня Π , що проходить через одне з ребер, наприклад AA' (рис. 84).

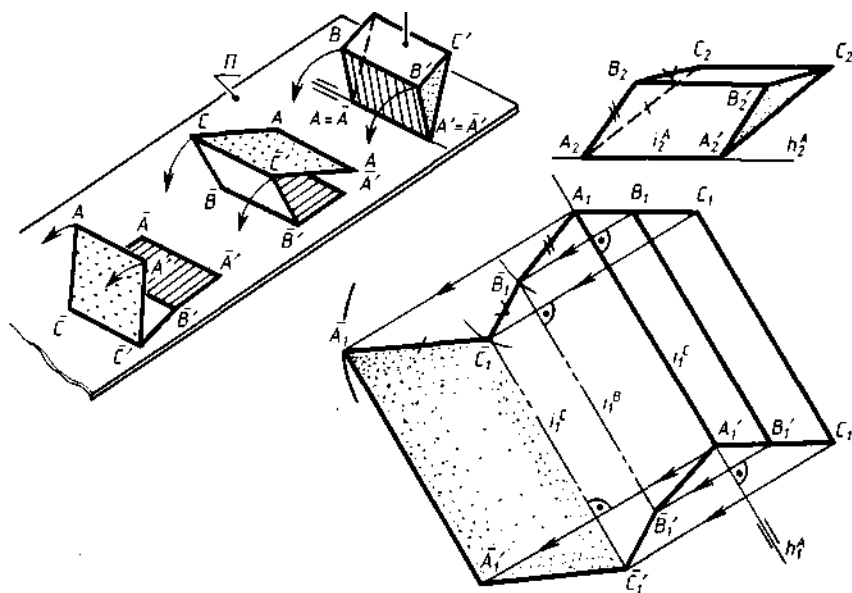


Рис. 84.

Сутність способу розкатки розглянемо на прикладі побудови розгортки бічної поверхні призми $ABCC'B'A'$ (рис. 85).

1. Розрізаємо поверхню призми по ребру AA' .
2. Обертанням навколо вісі i^A - горизонтального ребра $AA'(h^A)$ суміщуємо грань $ABB'A'$ з горизонтальною площиною Π_1 ($AA' \subset \Pi_1$); точку B_1 знаходимо як точку перетину перпендикуляра, опущеного з точки B_1 на h_1 , з колом, центр якого є точка A_1 , а радіус R дорівнює відрізку $|A_2B_2|$.

Паралелограм $A_1A_1'B_1B_1'$ є натуральною величиною грані $AA'B'B$.

3. Послідовним обертанням інших граней навколо відповідних осей i^B (суміщене з Π_1 ребро $BB'-BB'$) і i^C (суміщене з Π_1 ребро $CC'-CC'$) суміщуємо їх з площиною Π_1 і визначаємо натуральну величину паралелограмів – бічних граней призми..

4. Фігура, що обмежує ці паралелограми є шуканою розгорткою.

Спосіб трикутників (триангуляція). Способом трикутників можна побудувати точну розгортку поверхні будь-якого багатогранника. Сутність цього способу полягає в тому, що кожна грань – багатокутник розбивається на трикутники (рис. 86), натуральний вигляд яких визначається відомими способами. Після цього будується плоска фігура, що складається з послідовно складених одне до одного трикутників - шукана розгортка.

Крім того, кожний трикутник на розгортці можна будувати способом засічок: натуральну величину кожної сторони трикутника визначаємо за

допомогою відомих способів прийомів перетворення креслення, після чого будуємо трикутники за трьома їхніми сторонами.

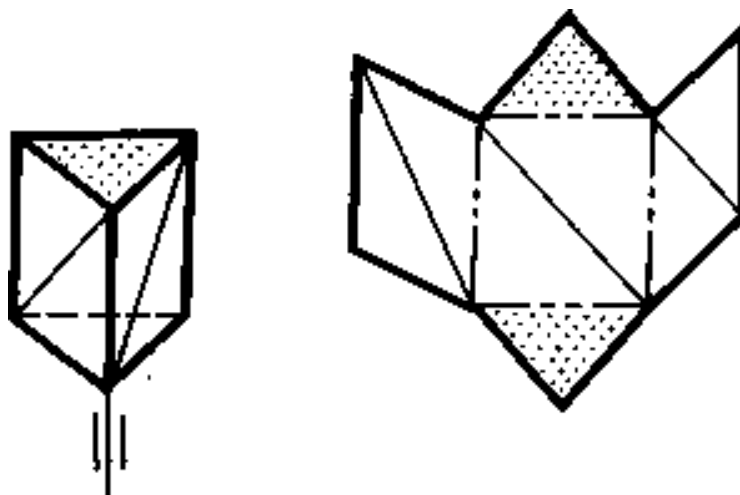


Рис. 86.

Так, на рис. 87, а натуральні величини трикутників - бічних граней піраміди $SABC$ визначені суміщенням їх з горизонтальною площиною основи піраміди. Осями обертання при цьому служать сторони основи - прямі AB , BC , AC ; натуральна величина відрізка $|SB|$ — ребра піраміди визначена за допомогою додаткової площини Π_4 - способом трикутника ($\Pi_4 \perp \Pi_1$, $SB \subset \Pi_4$; $X_{14} = S_1B_1$).

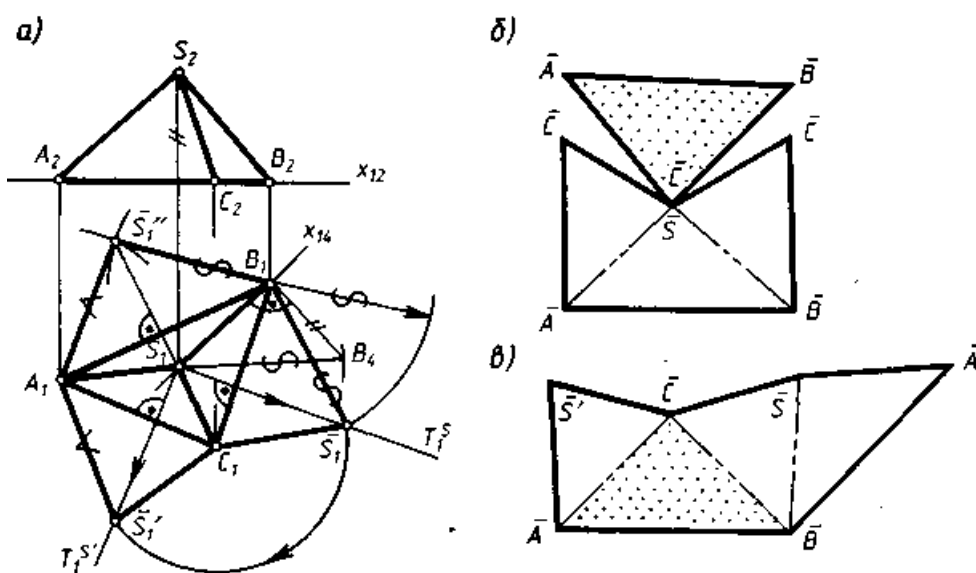


Рис. 87.

Розгортку треба будувати так, щоб якомога краще використовувати площу листа матеріалу, з якого виконується розгортка. (рис. 87, б, в).

Натуральний вигляд бічних граней похилої піраміди $SABC$, зображеної рис. 88, визначено способом засічок. Для цього спочатку визначено відрізки S_2B_2 і S_2C_2 - довжини бічних ребер SB і SC , що повернуті навколо вісі i ($i \perp \Pi_1$; S проходить через i) до суміщення з фронтальною площиною Φ , якій належить вісь i . Ребро

$SA \parallel \Pi_2 \Rightarrow |S_2A_2| = |SA|$.

Розгортка бічної поверхні піраміди складається з трьох трикутників. Розгортка повної поверхні піраміди включає ще й основу ΔABC , натуральна величина якої проєкціюється на Π_1 .

На рис. 88 показано також побудову на розгортці довільного відрізка $|1-2|$, розташованого на поверхні піраміди.

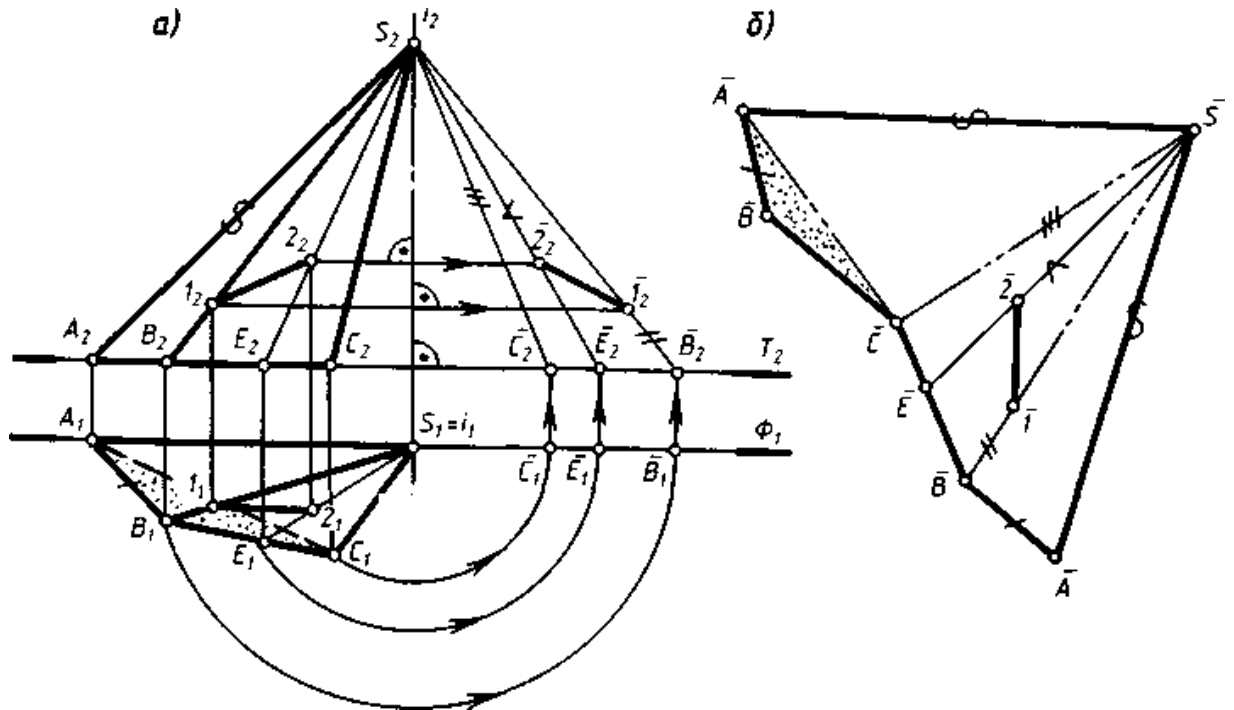


Рис. 88.

На рис. 89 представлено розгортки поверхонь правильних багатогранників: тетраедра (а), октаедра (б), ікосаедра (в), додекаедра (г), куба (д). Кожну з них можливо побудувати способом трикутників.

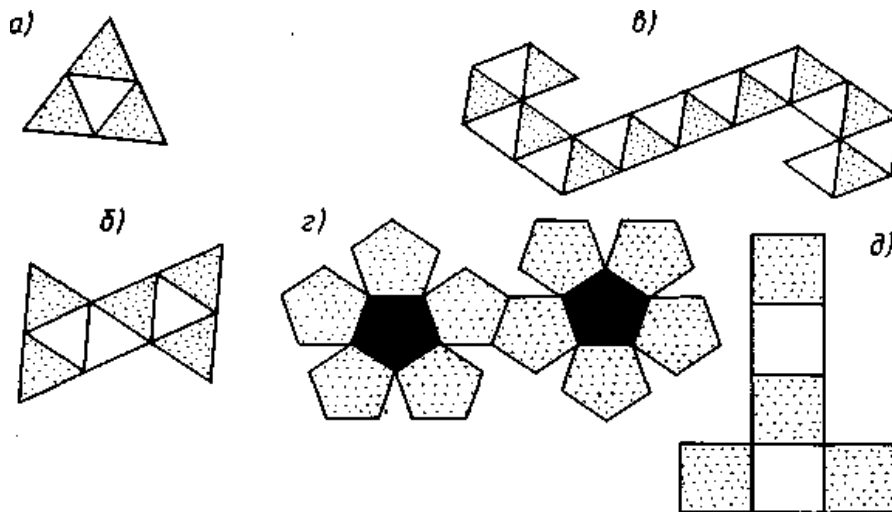


Рис. 89.

Кожний з багатогранників має кілька варіантів розгортки. Наприклад, на рис. 90 дано два варіанти розгортки правильного тетраедра: зі швами - бічними

ребрами (а) і зі швом - поза ребрами (б). Як правило шов проводять по ребрам, але це не завжди раціонально. Іноді шов розташовують поза ребрами, що дозволяє зменшити довжину шва і розкroїти матеріал більш економно.

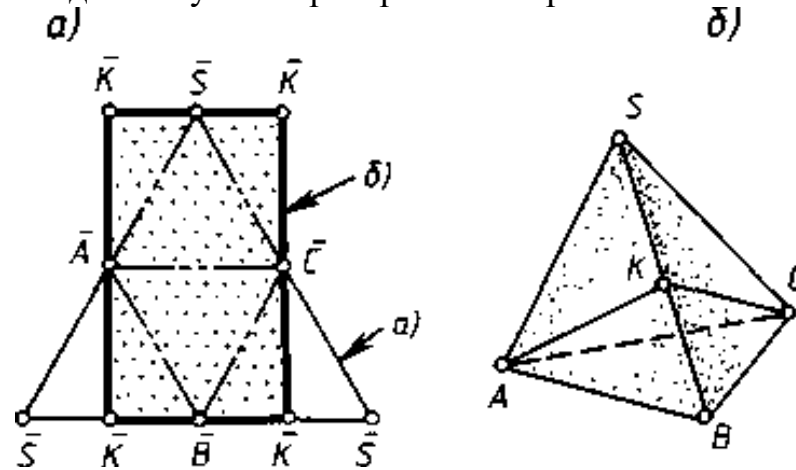


Рис. 90.

Використання аналітичних прийомів у побудові точних розгорток. На практиці аналітичні прийоми використовують для побудови точних розгорток поверхонь тіл обертання: циліндрів і конусів.

Розгортка бічної поверхні кругового конуса (рис. 91) з радіусом обертання R і висотою A представляє собою круговий сектор, радіус якого дорівнює довжині l твірної поверхні конуса, а кут φ при вершині S обраховується за формулою: $\varphi = 2\pi (R/l)$ або $\varphi^\circ = 360^\circ / (R/l)$.

На рис. 91 подано точну побудову на розгортці довільної точки A : спочатку визначаємо кут φ_A , в даному прикладі $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \varphi_A = 1/4 \varphi$.

Розгортка бічної поверхні зрізаного конуса обертання будується аналогічно.

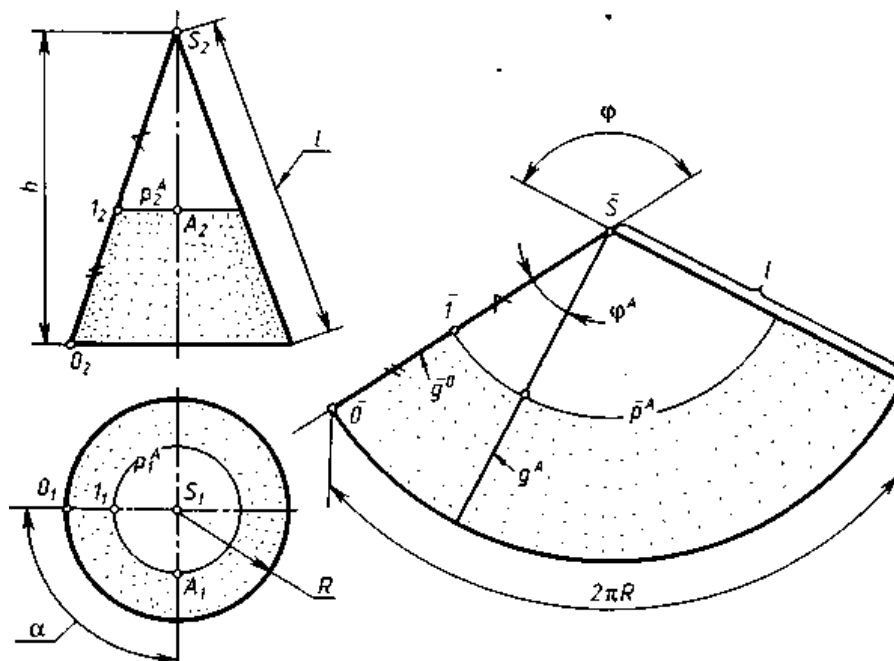


Рис. 91.

10.3. Наближені розгортки

Спосіб апроксимуючих призм використовують для побудови наближених розгорток відсіків циліндричних поверхонь. Побудуємо розгортку бічної поверхні еліптичного похилого циліндра, зображеного на рис. 92:

1. Задану циліндричну поверхню замінюємо (апроксимуємо) вписаною в неї поверхнею n -гранної призми (її бічної поверхні); приймаємо $n = 8$. Для цього коло нижньої основи ділимо на 8 частин і одержуємо 8 вершин основи і 8 стягуючих хорд. Через точки поділу проводимо твірні - ребра апроксимуючої 8-гранної призми.

2. Будуємо точну розгортку 8-гранної призми способом розкатки, попередньо перетворюючи її ребра в лінії рівня за допомогою додаткової площини проєкцій $\Pi_4 \perp \Pi_1$, розташованої паралельно до ребер призми. Лінією розрізу служить ребро $0-0'$; усі грані призми суміщуємо з площиною Π_4 .

3. З'єднуючи вершини на їхній розгортці плавними кривими, одержуємо наближену розгортку бічної поверхні заданого циліндра.

Відмітимо:

1. В даному прикладі ми використовували «розгинання» кола нижньої основи: $r \rightarrow r'$ (r - синусоида; точки $0_4'$, $0'$, $4'$ - екстремальні; точки $2'$ і $6'$ - точки перегину).

2. Стягувальні хорди на кресленні можна не показувати - на рис. 92 вони дані лише для половини бічної поверхні.

3. В якості апроксимуючої можна використовувати і описану призматичну поверхню.

4. Якщо відсік заданої поверхні має площину симетрії Σ , то зручно щоб лінією розрізу служила лінія, по якій площина симетрії перетинає задану поверхню (рис. 92).

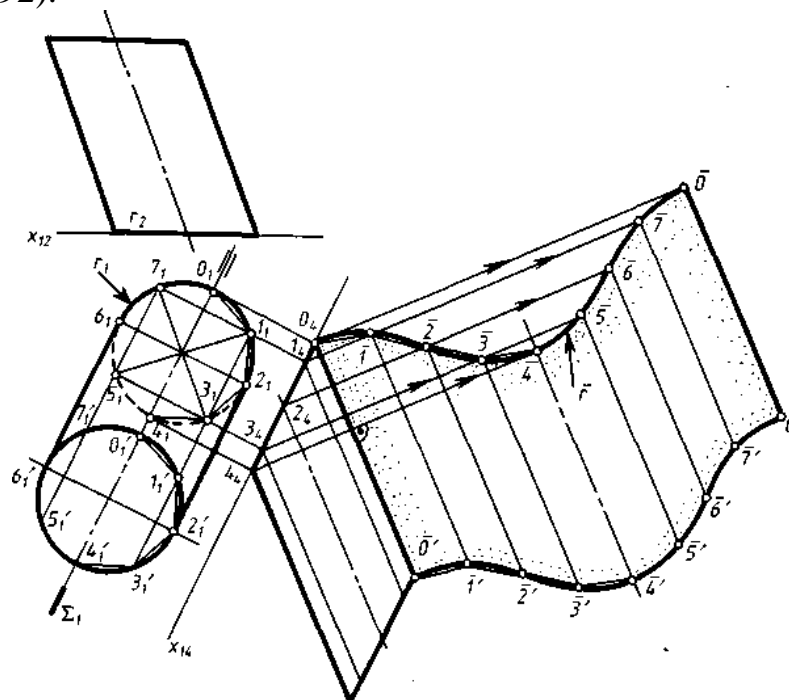


Рис. 92.

Якщо способом апроксимуючих призм необхідно побудувати розгортку відсіку циліндричної поверхні обертання, то краще ділити на n рівних частин її круговий переріз, а точну розгортку апроксимуючої призми будувати способом нормального перерізу.

Побудови при цьому аналогічні тим, що подані на рис. 83, але відрізняються наближеними побудовами дуг, стягуючих хорди кола r , при його спрямленні ($r \rightarrow r'$); при цьому довжина відрізка спрямленого кола дорівнює $2\pi R$ не точно, як на рис. 83, а наближено.

Для побудови розгорток відсіків циліндричних поверхонь другого порядку бажано використати нормальний круговий переріз або такий переріз, проекцією якого служить коло (рис. 92), тому що «розгинання» або «спрямлення» еліпса пов'язано з великими похибками.

Спосіб апроксимуючих пірамід застосовують для побудови розгорток бічних поверхонь конусів. Розглянемо побудову наближеної розгортки бічної поверхні конуса, зображеного на рис. 93.

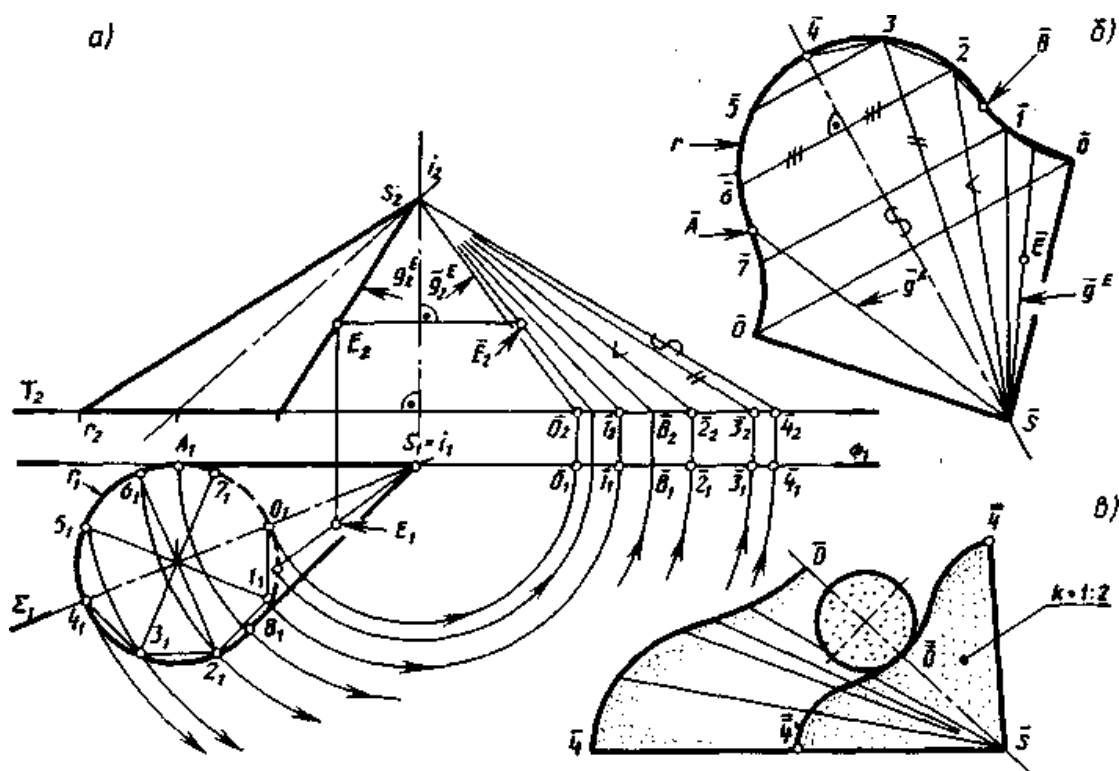


Рис. 93.

1. Задану конічну поверхню апроксимуємо вписаною в неї поверхнею 8-гранної піраміди. Для цього коло основи ділимо на 8 рівних частин і одержуємо 8 вершин основи і 8 стягуючих хорд. Через точки поділу проводимо твірні - ребра апроксимуючої піраміди (на рис. 93,а їхні ортогональні проекції не показані).

2. Будуємо точну розгортку бічної поверхні апроксимуючої піраміди способом трикутників (рис. 88). За лінію розрізу приймаємо ребро $S-O$ (рис. 93, б).

3. Замінюємо ламану лінію, що з'єднує вершини граней на розгортці

піраміди, плавною кривою, одержуємо шукану фігуру - наближену розгортку бічної поверхні заданого конуса (рис. 93, б).

На рис. 93, а, б дано побудову на розгортці довільної точки E поверхні конуса. Ця побудова теж наближена.

Зазначимо:

1. Бічна поверхня заданого конуса симетрична відносно площини Σ , що перетинає твірні $S-O$ і $S-4$. Ці прямі зручно використовувати як вісі симетрії розгортки : так, на рис. 93, б віссю симетрії служить пряма $S-4$, а на рис. 93, в – $S-O$. При побудові розгорток треба використовувати їхню симетрію (точки 5, 6, 7, ... побудовані як точки, симетричні точкам 3, 2, 1, ... відносно вісі симетрії $S-4$).

2. Розгорткою кола основи є синусоїда; точки O і 4 - екстремальні; точки, A і B - точки перегину.

3. На практиці часто використовують половини розгорток. Часто у розв'язанні практичних завдань розгортку зменшують або збільшують в k разів, тобто будують фігуру - гомотетичну (рис. 93, в) або подібну даній. Для цього зручно використовувати пантограф або пропорційний циркуль.

4. Для одержання повної розгортки поверхні конуса до побудованої фігури додають ще кругову основу конуса.

Спосіб апроксимуючих трикутників застосовують для побудови наближених розгорток відсіків торсів, апроксимуючи їх послідовно прикладеними один до одного трикутниками (рис. 94).

Дійсний вигляд кожного трикутника знаходимо за допомогою відомих способів перетворення креслення.

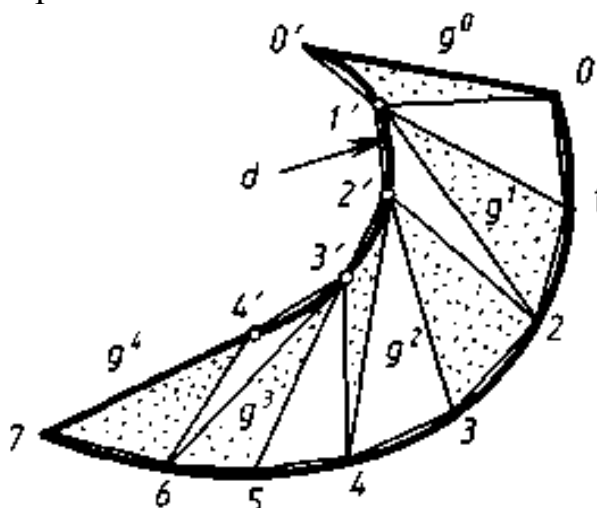


Рис. 94.

10.4. Умовні розгортки

Для нерозгортуваних поверхонь будують умовні розгортки. На відміну від точних і наближених, умовні розгортки можуть бути фігурами з вирізами (розривами), як, наприклад, на рис. 95-97.

Спосіб апроксимуючих конусів і циліндрів. Сутність цього способу

розглянемо на прикладі побудови умовної розгортки сфери.

Перший прийом (рис. 95):

1. Розбиваємо сферу меридіанами на n рівних частин (пелюсток): I, II, III, \dots, XII (рис. 95, а, б).

2. Кожну частину замінюємо (апроксимуємо) відсіком циліндричної поверхні, що описана навколо сфери і дотикається до неї по середньому меридіану g : I^A, II^A, III^A, \dots , (рис. 95, а, в).

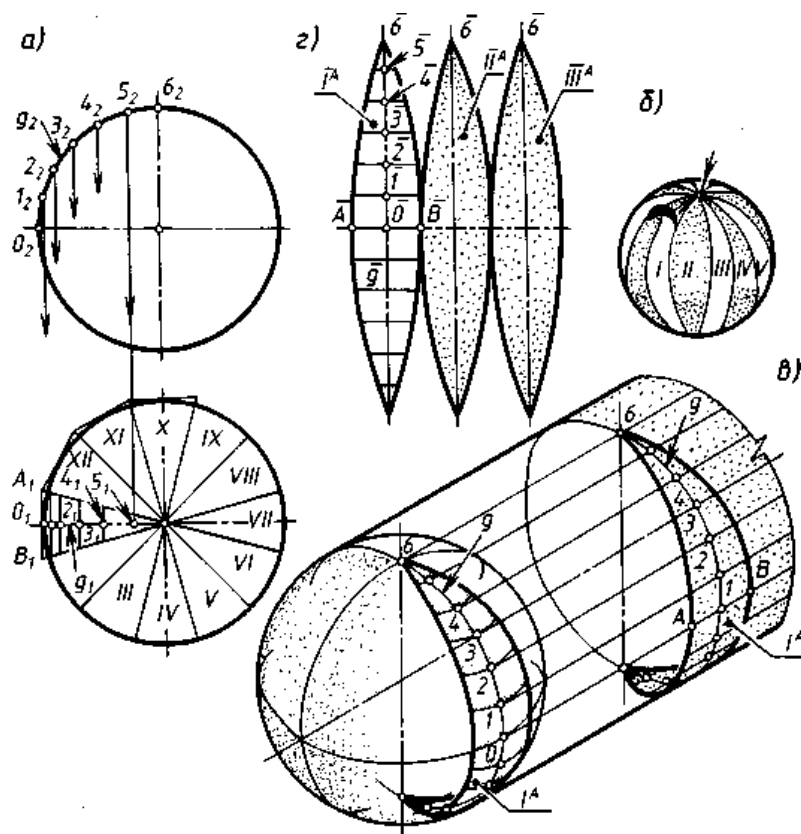


Рис. 95.

3. Будуємо відомими способами розгортку кожної апроксимуючої частини: I^A, II^A, III^A, \dots (рис. 95, г). Тут використано спосіб нормального перерізу.

4. Об'єднуючи розгортки всіх апроксимованих частин, одержуємо умовну розгортку сфери (рис. 95, г).

Другий прийом (рис. 96):

1. Розбиваємо сферу паралелями на n поясів: $O, I, II, \dots (n = 9)$ (рис. 96, а, б).

2. Кожний пояс сфери апроксимуємо відсіком розгортуваної поверхні обертання, що вписано в сферу; екваторіальний пояс замінюємо відсіком циліндричної поверхні O^A , інші - відсіками конічних поверхонь з вершинами $S (I^A), S'(II^A), \dots$.

3. Будуємо розгортку кожного апроксимуючого пояса відомими способами і одержуємо фігури: O^A, I^A, II^A, \dots (рис. 96, в). Кола основ циліндра і конусів поділені на 36 рівних частин.

4. Об'єднуючи розгортки усіх поясів, одержуємо умовну розгортку сфери

(рис. 96, в).

Як в першому, так і в другому прийомі послідовність операцій над кожною частиною (наприклад, I) поверхні можна записати так: $I \rightarrow I^A \rightarrow I^{A'}$.

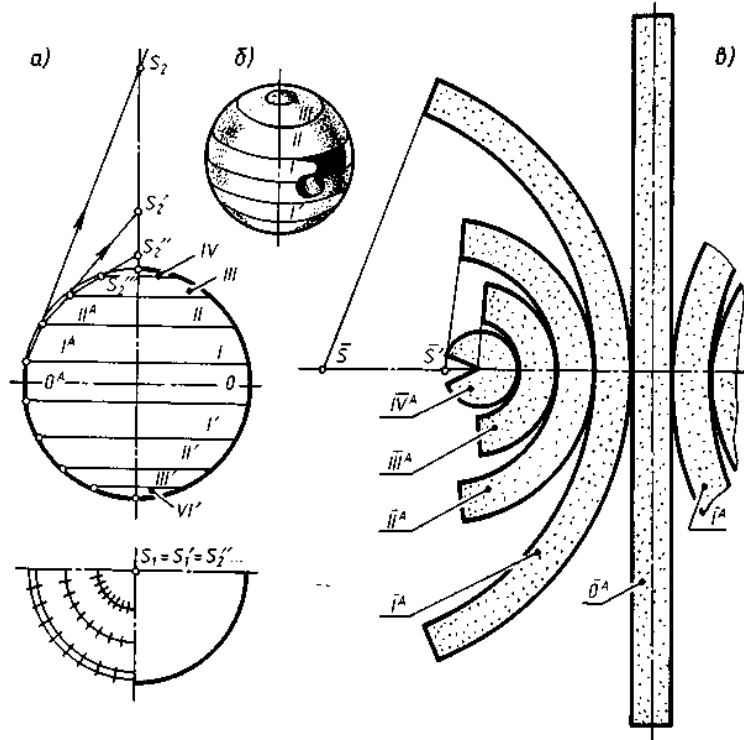


Рис. 96.

Аналогічно можна побудувати умовну розгортку будь-якої поверхні обертання, наприклад тора (рис. 97).

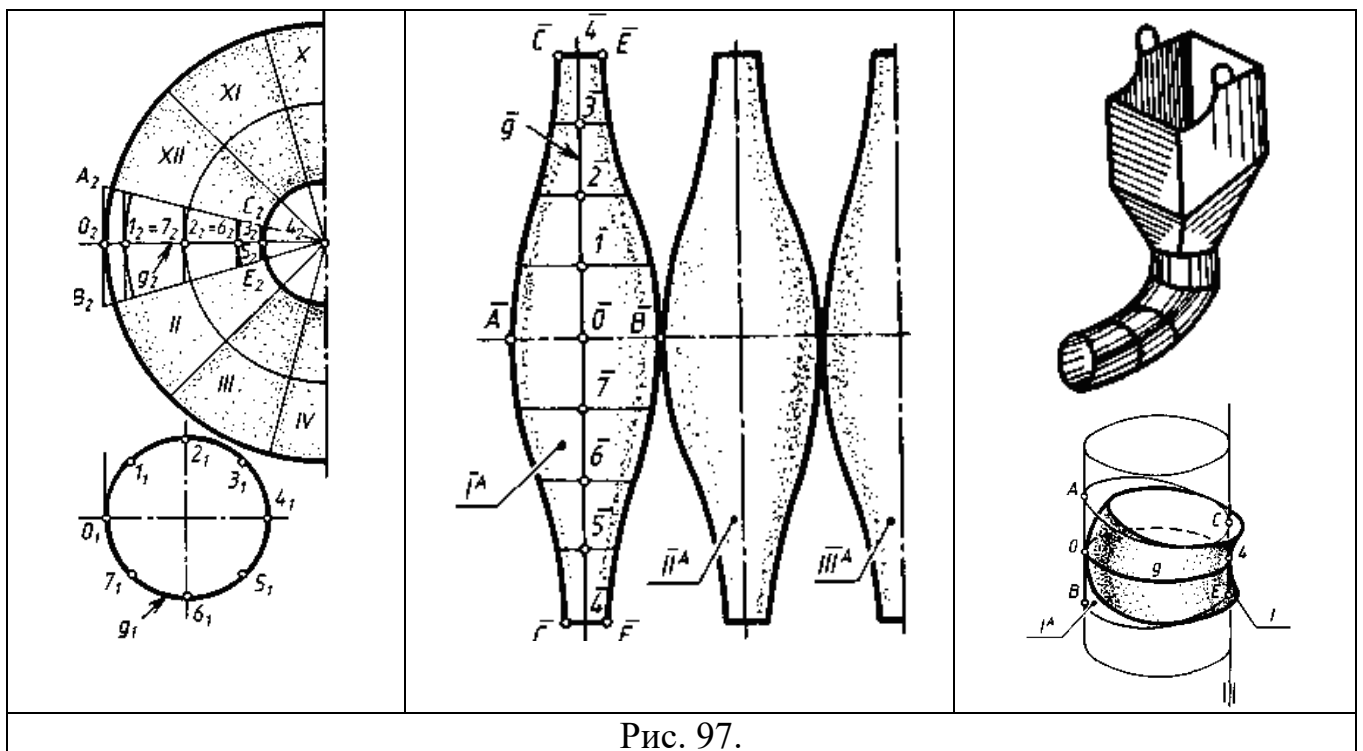


Рис. 97.

На рис. 97 тор розділений на меридіанами на 12 рівних частин (I, II, III,...).

Кожна частина тора апроксимована відсіком поверхні циліндра обертання: $I \rightarrow I^A$, який, в свою чергу, розгорнуто у фігуру.

Спосіб апроксимуючих трикутників. Застосування цього способу розглянемо на прикладі побудови умовної розгортки коноїда з напрямними d' (пряма), d (коло) і площиною паралелізму Π_2 (рис. 97, а, б).

1. Поділимо умовно поверхню коноїда на ряд трикутників, попередньо поділивши коло d на n і відрізок $|AB| = d'$ на m рівних частин ($n = 8$; $m = 2$).

2. Визначаємо натуральний вигляд всіх апроксимуючих трикутників (рис. 98, б, в).

3. Будуємо натуральний вигляд кожного трикутника i , об'єднуючи побудовані трикутники у певному порядку, одержуємо умовну розгортку коноїда, при цьому використовуємо симетрію розгортки відносно осей 4-0 і АВ (рис. 98, в).

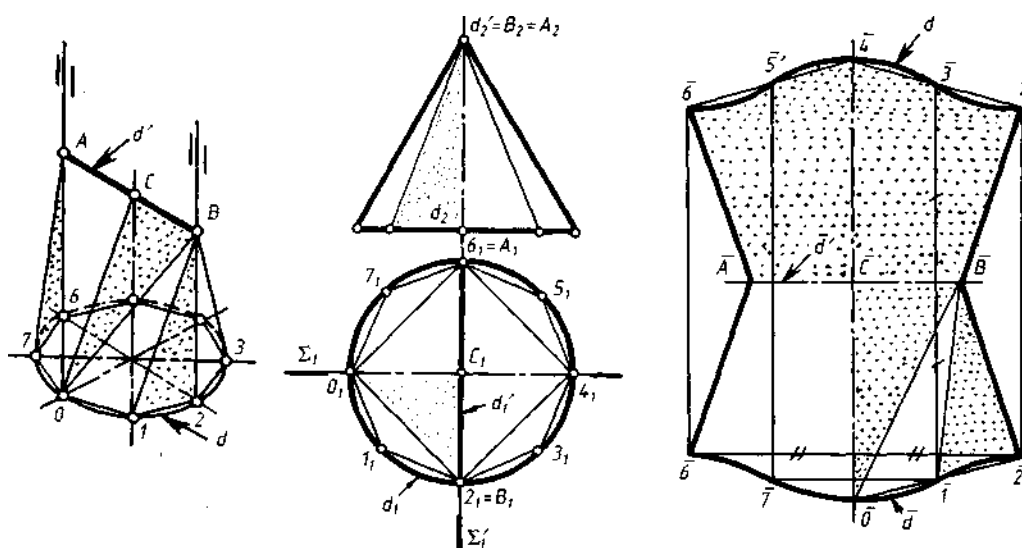


Рис. 98 (а, б, в).

В даному прикладі прямій d' на розгортці відповідає пряма d' , а колу d - плавна крива d , що складається з двох частин і з'єднує вершини трикутників (точки 0 і 4 - екстремальні точки кривої d). Твірні А-6 і В-2 - лінії розрізу. Але прямій лінії на поверхні в натурі не завжди буде відповідати пряма на умовній розгортці (на відміну від точної та наближеної розгортки).

10.5. Застосування розгорток

Побудова найкоротших ліній поверхні за допомогою розгорток. Найкоротші лінії (геодезичні) лінії на поверхні зручно будувати за допомогою розгорток. На розгортці найкоротша лінія m , що з'єднує дві точки А і В поверхні Γ , зображується завжди прямою.

Тому задачі такого типу розв'язують таким чином :

1 Спочатку будують розгортку поверхні і дві задані торчки на ній: $\Gamma \rightarrow \Gamma'$; $A \rightarrow A'$; $B \rightarrow B'$.

2. На розгортці через точки A і B проводять пряму $m = \{A; B\}$ і виділяють на ній певну множину точок (K, M, \dots).

3. Оберненим перетворенням (згорткуванням) поверхні ($\Gamma' \rightarrow \Gamma$) знаходять на комплексному кресленні проекції точок, що визначають лінію m , і, з'єднуючи їх в певному порядку, одержують відповідні проекції лінії $m - m_2, m_3, m_1$.

За таким принципом розв'язано задачу побудови найкоротшої лінії m , що з'єднує точки A і B , розташовані на поверхні прямої шестикутної призми Γ (рис. 99).

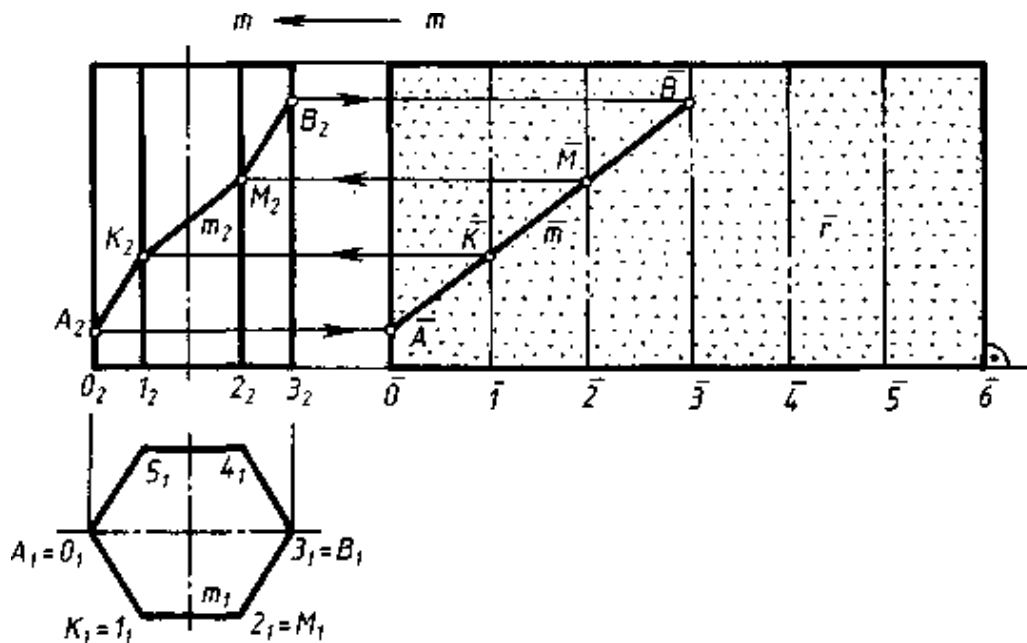


Рис. 99.

Галузі застосування розгорток. Побудова розгорток має особливе практичне значення, так як є важливим технологічним етапом у тих видах виробництв, що пов'язані з листовими матеріалами: легка промисловість (швейна й шкіряна); нафтохімічна і газова промисловості (резервуари й трубопроводи); суднобудівництво; авіабудівництво; виготовлення виробів з жерсті тощо. Розгортки виробів будуються на стадії їхнього проектування.

У техніці широко використовують усі види розгорток - точні, наближені, умовні. Площі наближених і умовних розгорток не дорівнюють точним площам проєктованих поверхонь - вони або більше (складки) або менше (розриви). Але у наближених розгортках складки (розриви) не перевищують 3%, а в умовних розгортках вони можуть бути значно більшими, що є неприпустимим для низки виробництв.

У цих випадках листовий матеріал за певних умов (тиск, температура тощо) піддають деформації у межах пластичності, після чого розриви зникають.

Самими розповсюдженими прикладами такої деформації є штамповка заготовок з листового металу (пластмаси) або волого-теплова обробка тканини з натуральних волокон за допомогою гарячої праски: окремі ділянки тканини можна розтягнути - ліквідувати розрив, а інші - стиснути (спрасувати) - ліквідувати складки. У побудові розгорток враховують припуск на шов (залежить

від технології складання виробів).

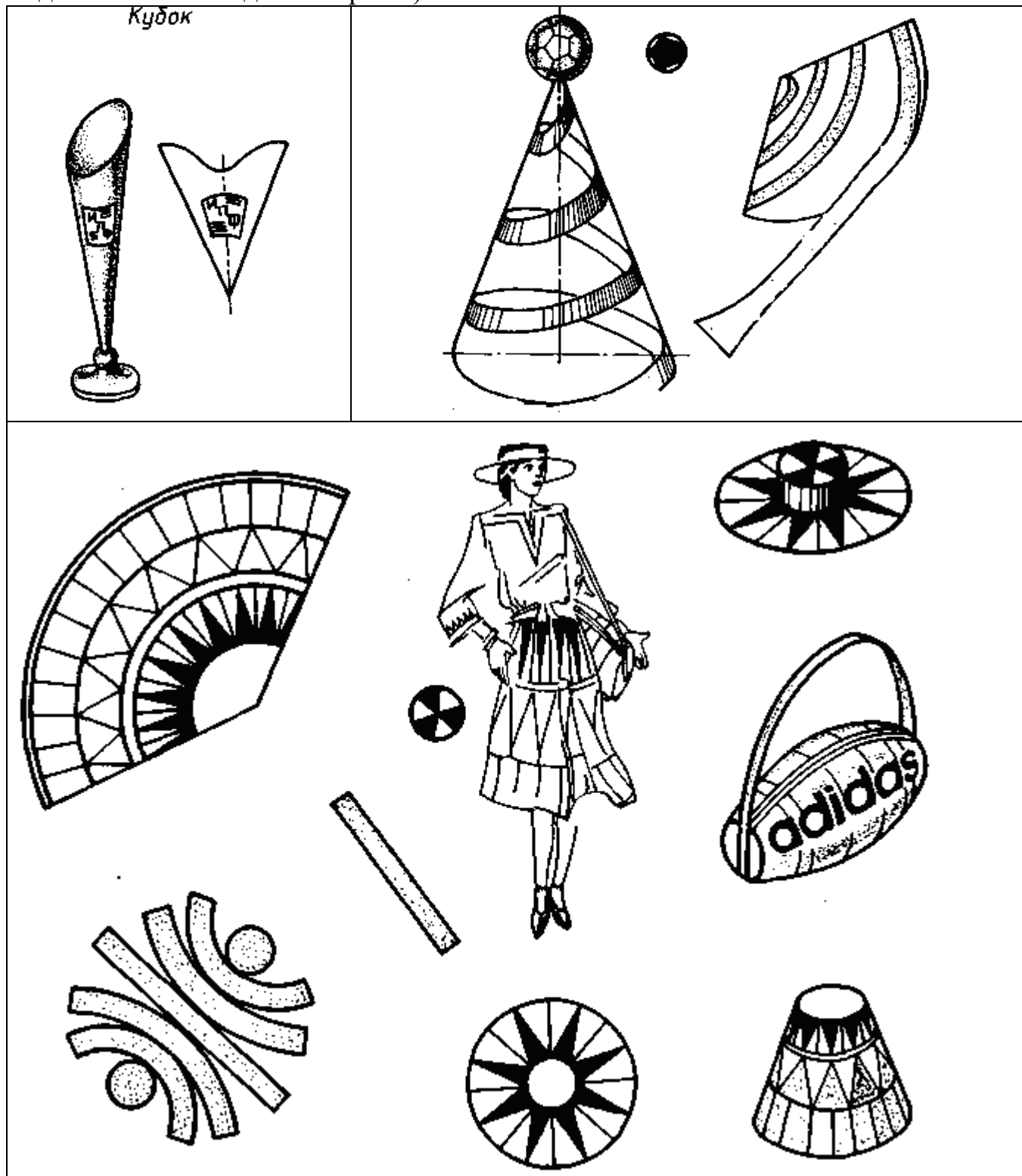


Рис. 100.

Розгортки використовують також при виготовленні найпростіших закрібних гвинтів для моделей суден. В теперішній час на багатьох підприємствах розгортки викрійки низки виробів виконуються лише за допомогою комп'ютерних програм.

У виготовленні інструментів, пристроїв, наочних посібників, моделей з

паперу, картону, оргскла, пластмас, також необхідно будувати розгортки.

Вчитель трудового навчання та технологій і креслення, викладач загальнотехнічних дисциплін, керівник гуртка технічної та художньої творчості має вміти виготовляти вироби самостійно і навчити цьому школярів. Наприклад, щоб завершити виготовлення моделі судна чи літака, готові каркаси крила, корпусу, фюзеляжа чи килія треба обтягнути листовим матеріалом (пергаментом, папером, легкою тканиною), попередньо розрахувавши його форми і кількість за допомогою розгортки.

На рис. 100 наведено приклади розгортки виробів, які можна виготовити в шкільній механічній майстерні або під час уроків обслуговуючої праці.

На рис. 101 дано розгортку покритишки сучасного м'яча, що складається з 12 чорних п'ятикутників і 20 білих шестикутників; сторона кожного багатокутника дорівнює 43 мм. Такі багатокутники з шкіри з'єднуються з певним зусиллям у сферу з певним наближенням. В будівництві при спорудженні сучасних полегшених конструкцій також застосовують сітку з багатокутників; а для інших виробів, що мають форму сфери, також використовують розгортки.

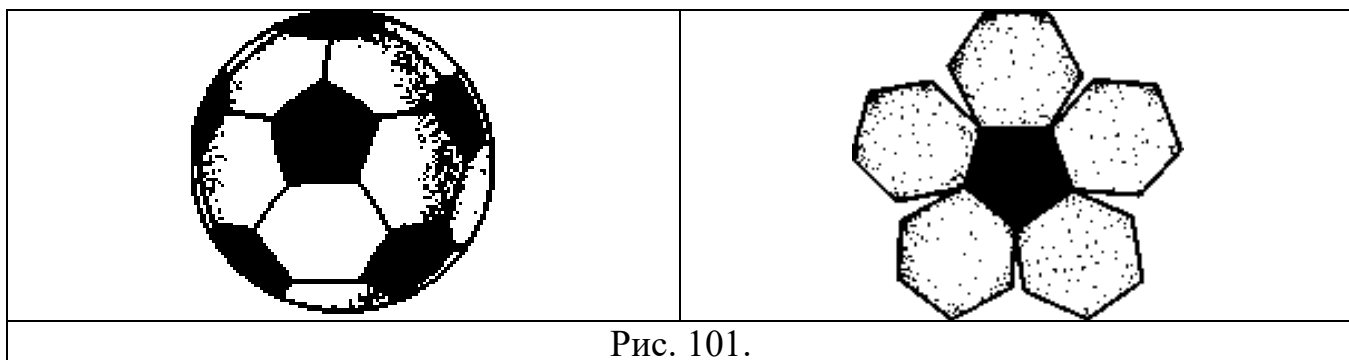


Рис. 101.

РОЗДІЛ 2. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ, ЛІНІЙ, ТІЛ

11. ЗАГАЛЬНІ ІДЕЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

11.1. Класифікація задач і способів їхнього розв'язання

Виокремлюють три типи задач на перетин:

- 1) взаємний перетин поверхонь (площин);
- 2) перетин поверхонь (площин) лініями;
- 3) перетин лінії з лінією.

Разом із задачами взаємного розташування (належність, дотик, паралельність) ці задачі відносять до основних позиційних задач нарисної геометрії.

Розв'язання задач на перетин зводиться нарешті до розв'язання задачі на взаємну належність точки, лінії і поверхні (площини), що є елементом («цеглинкою») розв'язання більш складних задач і може бути віднесено до елементарної задачі.

Випадки перетину можливо поділити на окремі та загальні. В основі розв'язання загальних випадків знаходяться окремі, що є частинами-модулями, з яких складається розв'язання загальної задачі.

Для розв'язання складних задач конструюється алгоритм з використанням окремих, простих випадків в якості базових підзадач.

На практиці зустрічаються такі групи окремих випадків:

1. У перетині бере участь хоча б одна проєкціювальна поверхня, площина або пряма.
2. Площина перетинає поверхню:
 - а) по точній лінії – прямій чи колу;
 - б) по лінії, проєкцією якої є пряма чи коло.
3. дві поверхні перетинають одна одну по плоским лініям.

Розв'язувати загальні випадки на основі окремих дозволяють два основних способи: спосіб посередників і спосіб перетворень. Наведемо класифікацію посередників і перетворень, що використовуються найчастіше (рис. 102).

Вибір способу розв'язання, виду посередника чи перетворення виявляє творчу складову, з якої починається розв'язання завдання. Після цього аналітичного етапу на кресленні виконуються побудови відповідно до загальних правил (алгоритмів).

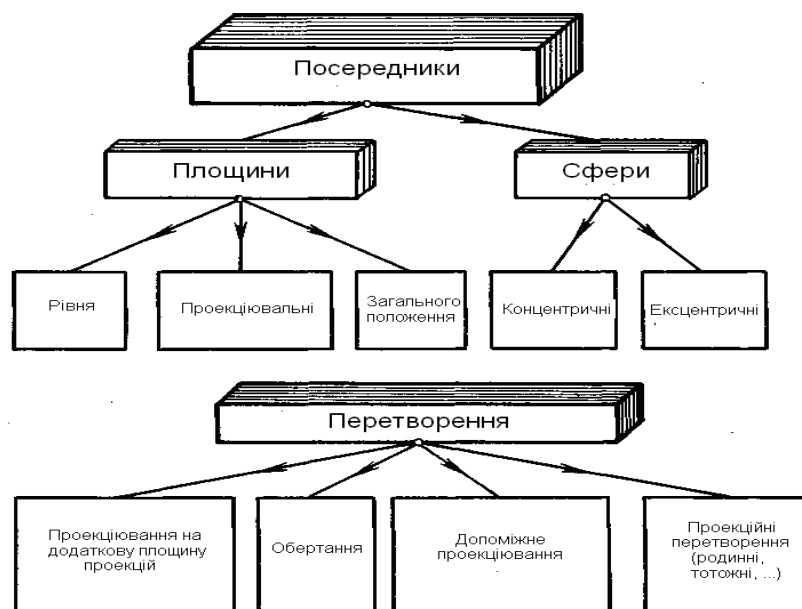


Рис. 102.

11.2. Алгоритми розв'язання позиційних задач

Для розв'язання задач одного типу зручно виокремити набір певних операцій (команд) і сформулювати їх у загальному випадку у формі алгоритму, що задає послідовність і характер виконання цих операцій за умов зміни вихідних даних.

1. Алгоритм проєкціювальної поверхні і прямої лінії

Проекціювальними за умов ортогонального проєкціювання можуть бути: пряма, площина, призматична чи циліндрична поверхня.

На рис. 103 зображено: Π' - площина проєкцій; s - проєкціювальна пряма, $s \perp \Pi'$, $s \rightarrow s'$, s' - точка; Γ - проєкціювальна поверхня, $\Gamma \perp \Pi'$, $\Gamma \rightarrow \Gamma'$, Γ' - лінія; Φ - довільна поверхня; a - довільна лінія; $m = \Gamma \cap \Phi$; $A = \Gamma \cap a$; $K = s \cap \Phi$ (m , A , K - досліджувані образи); $m \rightarrow m'$; $A \rightarrow A'$; $K \rightarrow K'$.

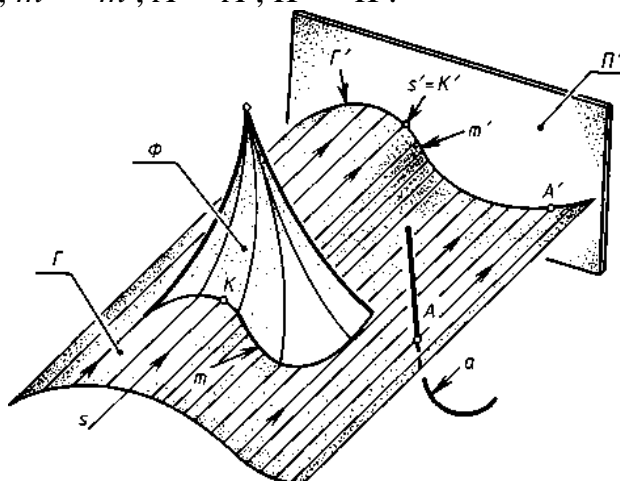
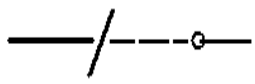


Рис. 103.

Для побудови на кресленні лінії чи точки перетину проєкціовальної поверхні або прямої з іншою поверхнею, варто виконати команди (операції), зазначені в алгоритмі №1 (таблиця 3).

Таблиця 3

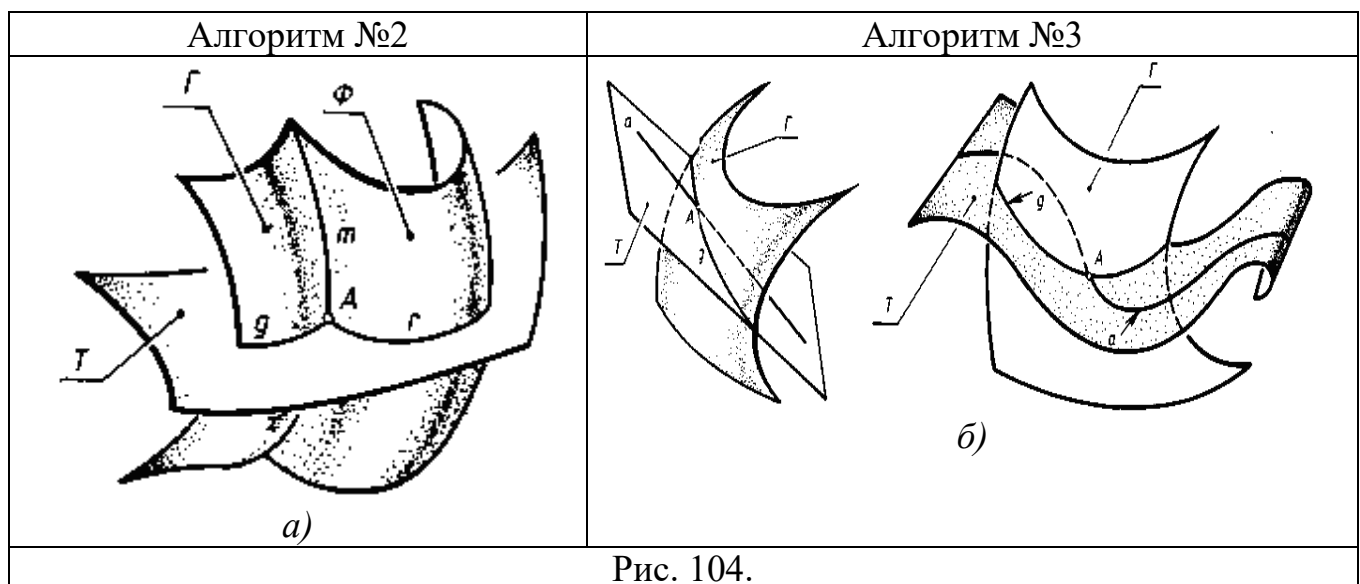
Алгоритм №1 (алгоритм проєкціовального геометричного образу)

Номер команди	КОМАНДА	
	Словесний опис	Символічний запис
1	Позначаємо на кресленні та обводимо відповідну проєкцію шуканої лінії або точки, тобто одна проєкція шуканої лінії (точки) вже задана на кресленні.	$m' \subset \Gamma'$
		$A' \subset \Gamma'$
		$K' = s'$
		(Γ і s' - задані)
2	Другу проєкцію шуканої лінії (точки) на площині проєкцій Π'' будемо за її належністю другій заданій поверхні (чи прямій) (на рис. 103 площина Π'' не показана)	$m'' \subset \Phi''$
		$A'' \subset a''$
		$K'' \subset \Phi''$
		$m \rightarrow m''$
		$A \rightarrow A''; K \rightarrow K''; \Phi \rightarrow \Phi''; a \rightarrow a''$
3	Визначаємо видимість проєкцій: а) знайденої лінії (точки); б) заданих поверхонь (поверхні і лінії; двох тіл)	

2. Алгоритми посередників

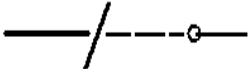
Для того щоб побудувати лінію взаємного перетину поверхонь Γ і Φ , варто використати алгоритм № 2 (рис. 104, а і таблиця 4).

Для побудови точки перетину лінії a з поверхнею Γ використовуємо алгоритм № 3 (рис. 104, б і таблиця 5).



Таблиця 4

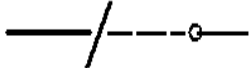
Алгоритм № 2

Номер команди	КОМАНДА	
	Словесний опис	Символічний запис
1	Ведемо пошук і вибір оптимального посередника Т	$T - ?$
2	Будуємо посередник Т	$T = \{...\}$
3	Знаходимо лінії, по яким посередник Т перетинає кожен задану поверхню	$g = T \cap \Phi$
		$r = T \cap \Gamma$
4	Відмічаємо точки перетину побудованих ліній	$g \cap r = A, B, \dots$
5	Операції 1, 2, 3, 4 повторюємо необхідну кількість разів	T^1, T^2, \dots g^1, g^2, \dots r^1, r^2, \dots A^1, A^2, \dots
6	Відмічені точки з'єднуємо лінією у порядку послідовності твірних будь-якої заданої поверхні	$m = \{A \cup A^1 \cup A^2 \cup, \dots\}$
7	Визначаємо видимість (якщо потрібно)	

Примітка до алгоритму №2. Посередники Т будуємо в межах існування шуканої лінії. Необхідно попередньо встановити межі цієї області, якщо можливо.

Таблиця 5

Алгоритм № 3

Номер команди	КОМАНДА	
	Словесний опис	Символічний запис
1	Ведемо пошук і вибір оптимального посередника Т	$T - ?$
2	Будуємо посередник (заключаємо задану лінію у посередник - допоміжну площину чи поверхню)	$T = \{a, \dots\}$ $T \supset a$
3	Знаходимо лінію перетину посередника із заданою поверхнею	$g = T \cap \Gamma$
4	Відмічаємо точки перетину побудованих ліній із заданою	$A = a \cap g$ (B, \dots)
5	Визначаємо видимість (якщо потрібно)	

Примітка: до алгоритмів посередників. Посередник обирають таким, щоб він перетинав, якщо це можливо, кожен задану поверхню: по точній лінії – прямій

чи колу; по лінії, проекцією якої є пряма чи коло.

Для наочності алгоритми часто подаються у вигляді блок-схем, що складаються за вимогами відповідних ДЕСТ. Команди (оператори, операції) алгоритму описуються в зрозумілій для користувача формі і поміщаються всередині символу. Кожний символ схеми – чітко визначена стандартна геометрична фігура. Хід процесу показують лініями, що з'єднують символи-блоки схеми.

Наведемо блок-схему (рис. 105), що описує алгоритм № 2, поданий в табличній формі (табл. 4). На цій блок-схемі знизу справа від кожного символу зазначені номери команд з табл. 4. Операції блоку 3 визначаються екстремальними (взагалі - крайніми) точками. Кількість посередників n визначає величину кроку в блоці 4. Блок 5 містить команди 3, 4 з табл. 4. У блоці 6 виконується команда 6. Повторення операцій створює цикл (команда 5); кількість повторів позначають літерою i і називають лічильником циклу. Цикл організовується у блоці 7.

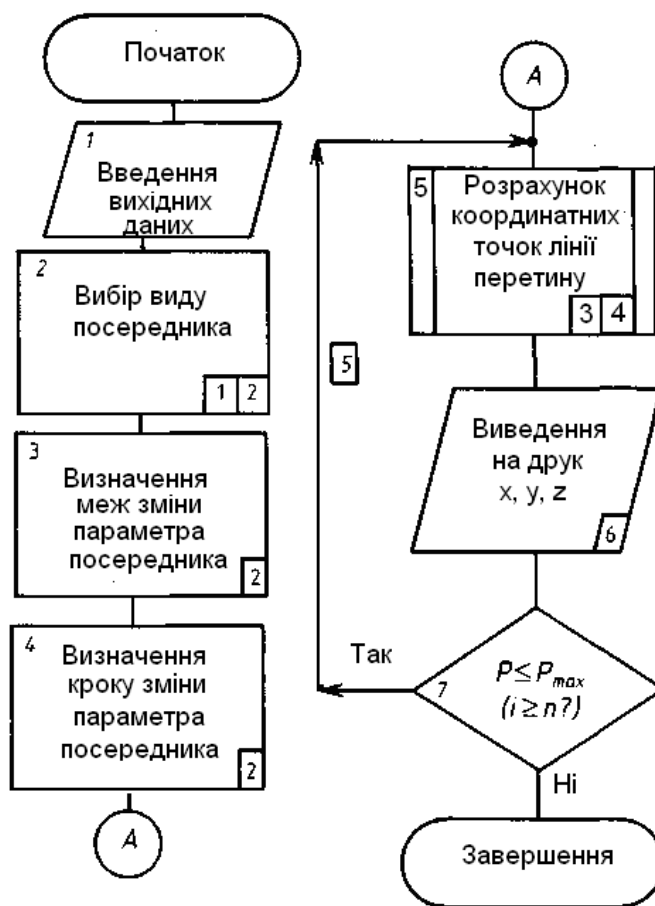


Рис. 105.

Кожний блок складається з певної кількості модулів - стандартних програм, які можуть бути затребувані з архіву-бібліотеки.

Задачі на перетин можливо формалізувати, тобто подати в зрозумілій для ЕОМ формі і розв'язувати за допомогою ЕОМ. Для цього алгоритм задачі розписують у вигляді програми на мові ЕОМ відповідно до його правил. Задачі

такого роду розглядаються і розв'язуються у відповідних розділах курсу машинної геометрії і машинної графіки.

11.3. Методичні вказівки до розв'язання задач на побудову лінії перетину поверхонь

Розв'язання задач на побудову лінії перетину поверхні з площиною чи поверхнею рекомендовано здійснювати в такій послідовності:

1. Проаналізувати, які поверхні задані, як вони утворені і взаємно розташовані (наприклад, наявність загальної площини симетрії) і як розташовані відносно заданих площин проєкцій.

2. Спробувати ще до початку побудови шуканої лінії «передбачити» її вид (крива, ламана, яка саме крива...) і властивості (плавність, симетрія, кривизна, наявність спеціальних і нерегулярних точок...).

3. Уявити шукану лінію у просторі і зробити її начерк – швидкий малюнок, виконаний від руки, наближено. Корисно рухом «намалювати» лінію – в просторі.

4. Визначити, чи не відноситься дана задача до окремих випадків, що мають прості розв'язання.

5. Визначити, які точки шуканої лінії є опорними.

6. Встановити, яким способом краще розв'язувати дану задачу. Іноді для пошуку опорних і проміжних точок варто використовувати різні способи або різні посередники.

7. Відповідно до обраного способу розв'язувати задачу за відповідним алгоритмом. Після знаходження всіх опорних і необхідної кількості проміжних точок з'єднати побудовані точки тонкою лінією у порядку послідовності твірних однієї із заданих поверхонь.

8. Перевірити, чи відповідають властивості побудованої лінії «передбаченим» раніше (у пункті 2), відкоригувати проєкції кривої, обвести їх і нариса заданих поверхонь з урахуванням видимості.

9. Уточнити начерк шуканої лінії, виконаний попередньо у пункті 3.

12. ПЕРЕТИН ПЛОЩИНИ З ПЛОЩИНОЮ І З ПРЯМОЮ

Дві площини Γ і Φ перетинаються по прямій лінії $\Gamma \cap \Phi = m$. Щоб побудувати цю пряму, достатньо знайти дві точки, які одночасно належать обом заданим площинам: $m = \{A; B\}$; $\Gamma \supset A \subset \Phi$; $\Gamma \supset B \subset \Phi$.

12.1. Окремі випадки побудови лінії перетину двох площин

Розглянемо випадок, коли одна із заданих площин - проєкціовальна.

Дано: $\Gamma \perp \Pi_1 \Rightarrow \Gamma = \{\Gamma_1\}$; $\Phi = \{\Delta C M K\}$ (рис. 106).

Необхідно знайти пряму $m = \Gamma \cap \Phi$.

У цьому випадку використовуємо алгоритм № 1 - алгоритм проєкціовальної фігури.

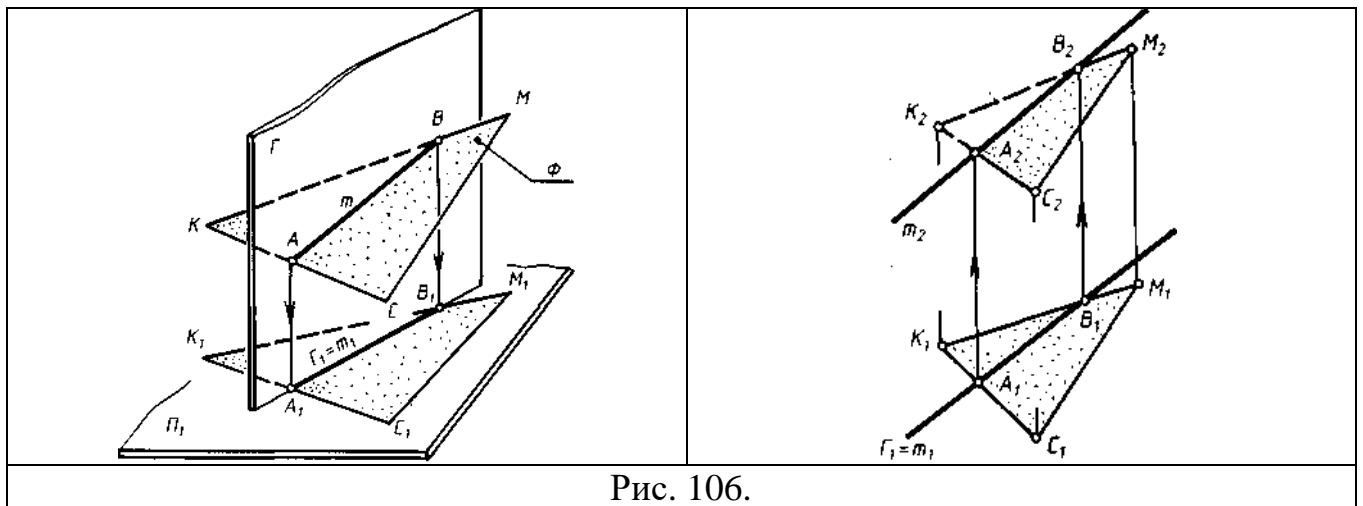


Рис. 106.

На епюрі вже відома одна проекція шуканої прямої m : $m_1 = \Gamma_1$. Друга проекція будується за належністю шуканої прямої другій непроекціювальній площині Φ : $m_1 = \{A_1; B_1\}$; $A \in CK$; $B \in KM \Rightarrow A_2 \in C_2K_2$, $B_2 \in K_2M_2 \Rightarrow m_2 = \{A_2; B_2\}$.

Видимість: точка K розташована за площиною Γ , тому ділянка KBA площини Φ невидима на Π_2 .

До окремого можливо віднести випадок завдання площин слідами: $\Gamma = \{h^{OG}; f^{OG}\}$, $\Phi = \{h^{O\Phi}; f^{O\Phi}\}$ (рис. 107).

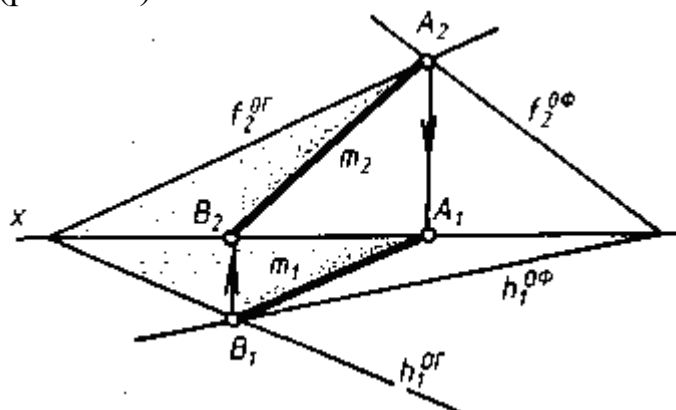


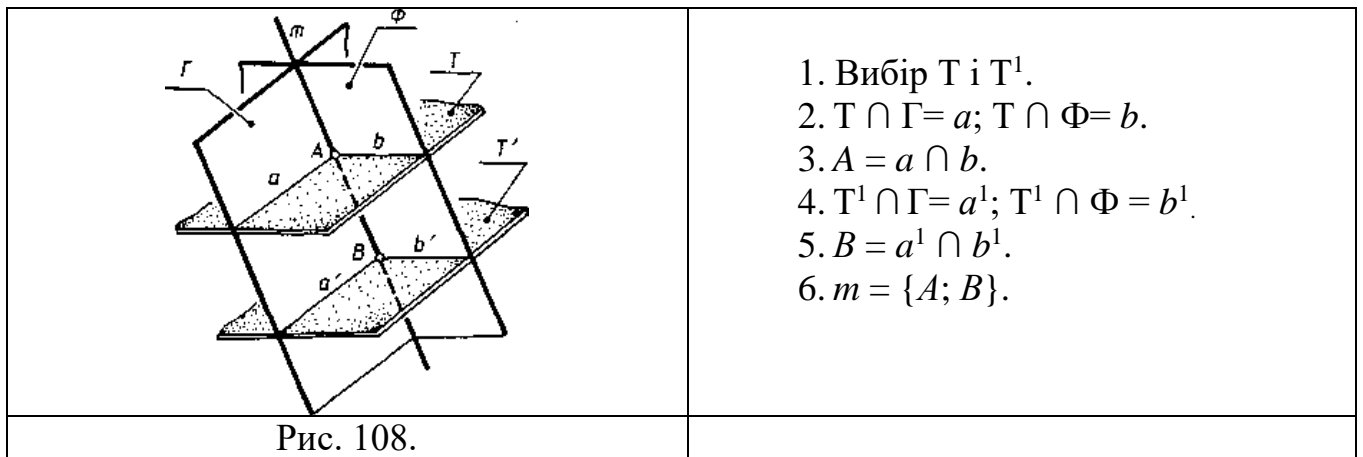
Рис. 107.

Тут вже відомі дві точки, що одночасно належать обом заданим площинам: це точки перетину однойменних слідів: $A = f^{OG} \cap f^{O\Phi}$; $B = h^{OG} \cap h^{O\Phi}$. Ці точки визначають шукану пряму $m_2 = \{A_2; B_2\}$; $m_1 = \{A_1; B_1\}$.

12.2. Загальні випадки побудови лінії перетину двох площин

Спосіб посередників. Якщо задані довільно дві площини загального положення, то задачу можливо розв'язати способом посередників відповідно до алгоритму №2. В якості посередників обирають две площини T і T^1 – проекціювальні чи рівня (рис. 108).

У випадку перетину двох площин алгоритм №2 запишемо так:



Приклад (рис. 109). Необхідно побудувати лінію перетину площин Γ і Φ : $\Gamma = \{c \parallel e\}$; $\Phi = \{u \cap v\}$; $m = \Gamma \cap \Phi$. Розв'язання (алгоритм № 2):

1. Використаємо посередники – дві фронтально-проекціювальні площини Γ і Γ^1 (довільні).
2. $\Gamma \cap \Gamma = a = \{1; 2\}$; $\Gamma \cap \Phi = b = \{3; 4\}$.
3. $A = a \cap b = (1-2) \cap (3-4)$.
4. $\Gamma^1 \cap \Gamma = a^1 = \{5; 6\}$, $\Gamma^1 \cap \Phi = b^1 = \{7; 8\}$.
5. $B = a^1 \cap b^1 = (5-6) \cap (7-8)$.
6. $m = \{A; B\}$.

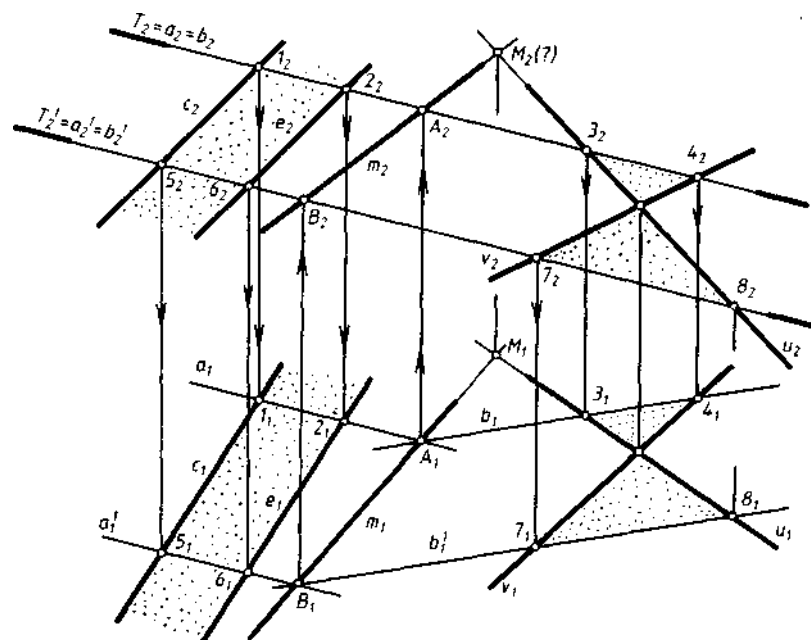


Рис. 109.

В якості перевірю вальної операції будуємо $M = \{M_1; M_2\}$ - точку перетину лінії m з будь-якою прямою площини Γ (або Φ), наприклад з прямою u . Якщо задача розв'язана правильно, то точки M_1 і M_2 розташовані на одній лінії проєкційного зв'язку. В багатьох подібних задачах доцільно, щоб площини-посередники Γ і Γ^1 проходили через якісь задані прямі площини, так як зникає необхідність будувати лінію перетину посередника з однією із заданих площин.

Спосіб перетворень. Проекціювання на додаткову площину проєкцій. У деяких випадках задачі на побудову лінії перетину двох площин можливо розв'язати також досить просто за допомогою перетворень.

Розглянемо приклад. На рис. 110 зображені дві площини загального положення: $\Gamma = \{h, M\}$; $\Phi = \{\Delta 1-2-3\}$. Необхідно знайти $m = \Gamma \cap \Phi$.

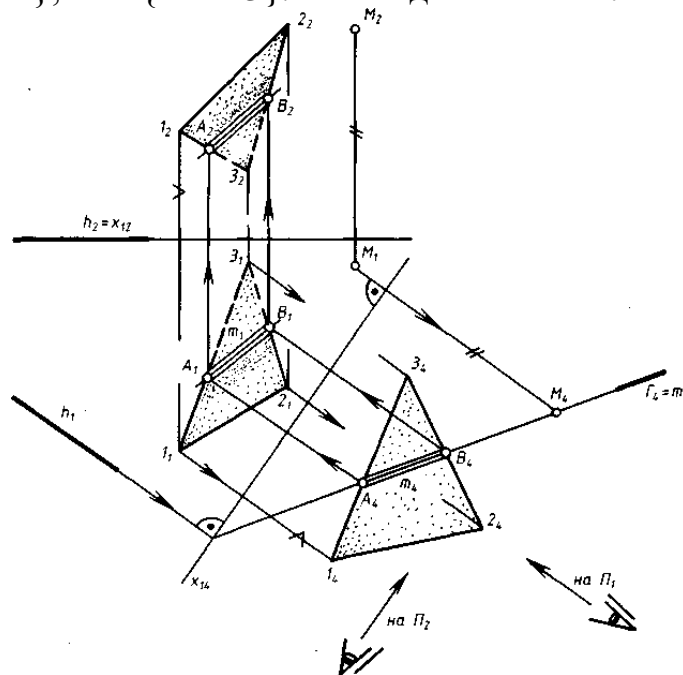


Рис. 110.

Перетворимо одну із заданих площин, наприклад Γ , в проєкціювальну. Для цього нову площину проєкцій Π_4 розташуємо так, що $\Pi_4 \perp h_1$ ($x_{14} \perp h_1$).

Тоді в новій системі площин проєкцій Π_1/Π_4 площина Γ є проєкціювальною, і лінію перетину площин Γ і Φ зручно будувати по алгоритму № 1:

1. $\Gamma \perp \Pi_4 \Rightarrow \Gamma_4 = m_4$, $m_4 = \{A_4; B_4\}$.

2. Горизонтальну і фронтальну проєкції лінії $m = \{A; B\}$ будуємо за її належністю другій площині Φ ($A \in 1-3$; $B \in 2-3$), вико зворотне проєкціювання точок A і B на площині Π_1 і Π_2 .

Видимість сторін трикутника також зручно визначити за допомогою зображень, побудованих на додатковій площині Π_4 .

12.3. Побудова точки перетину площини з прямою

Окремі випадки. До окремих випадків відносимо випадки, коли хоча б один з об'єктів (пряма чи площина) - проєкціювальний. Для визначення точки перетину прямої і площини, використаємо алгоритм № 1.

Нехай дано: $a \perp \Pi_1$; $\Gamma = \{\Delta BCE\}$ (рис. 111). Необхідно знайти точку $A = a \cap \Gamma$; $A = \{A_1; A_2\}$.

Розв'язання здійснюємо відповідно до алгоритму №1: $A_1 = a_1$, другу проєкцію A_2 точки A знаходимо за належністю точки A площині Γ : $A \in \Gamma \Rightarrow A \in B-1 \Rightarrow A_2 \in B_2-1_2$. Замість прямої $B-1$ можливо взяти будь-яку іншу пряму b площини Γ , в якій $b_1 \supset A_1$.

Аналогічно розв'язується задача, якщо площина Γ - проєкціювальна, а пряма – загального положення (рис. 112): $\Gamma = \{b \parallel c\}$; $A = a \cap \Gamma$. Тут: $\Gamma \perp \Pi_1 \Rightarrow A_1 = \Gamma_1 \cap a_1$; A_2 – будемо за належністю точки A прямій a ($A_2 \subset a_2$).

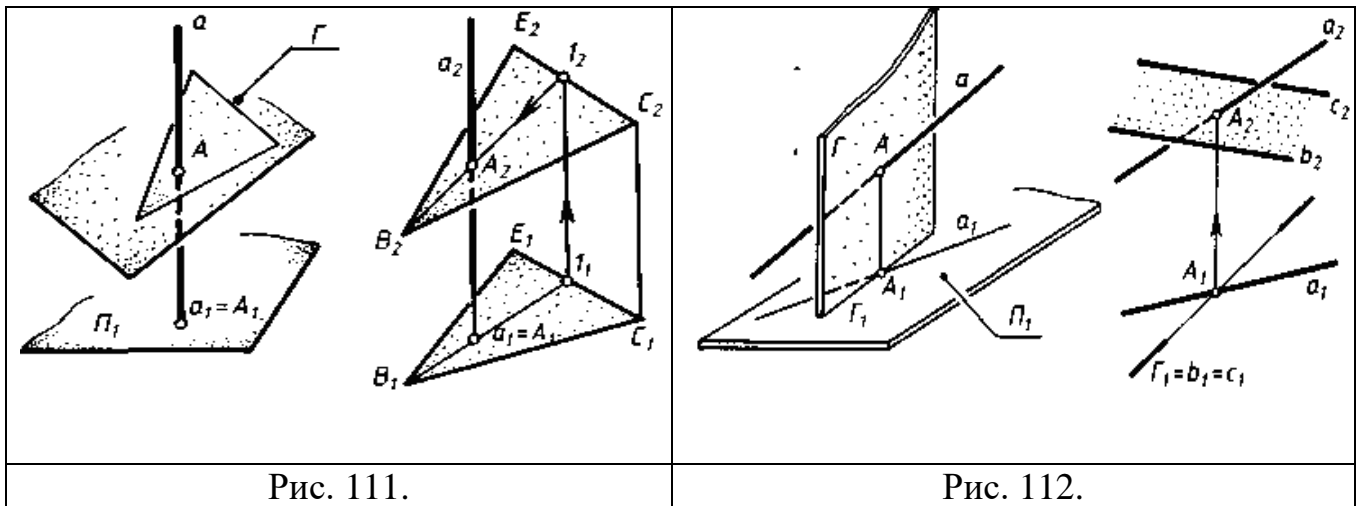


Рис. 111.

Рис. 112.

Загальні випадки. Спосіб посередників. Якщо пряма загального положення a перетинає площину загального положення Γ , то для знаходження точки перетину прямої a з площиною Γ використаємо алгоритм № 3 (рис. 113):

1. Обираємо найбільш оптимальний посередник - площину T : зазвичай $T \perp \Pi_1$ або $T \perp \Pi_2$.
2. Будуємо цей посередник на епюрі: $a \subset T \Rightarrow T_1 = a_1$ або $T_2 = a_2$.
3. Знаходимо пряму $g = T \cap \Gamma$.
4. Визначаємо точку $A = a \cap g$.
5. Вирішуємо, за потреби, питання видимості прямої a відносно Γ .

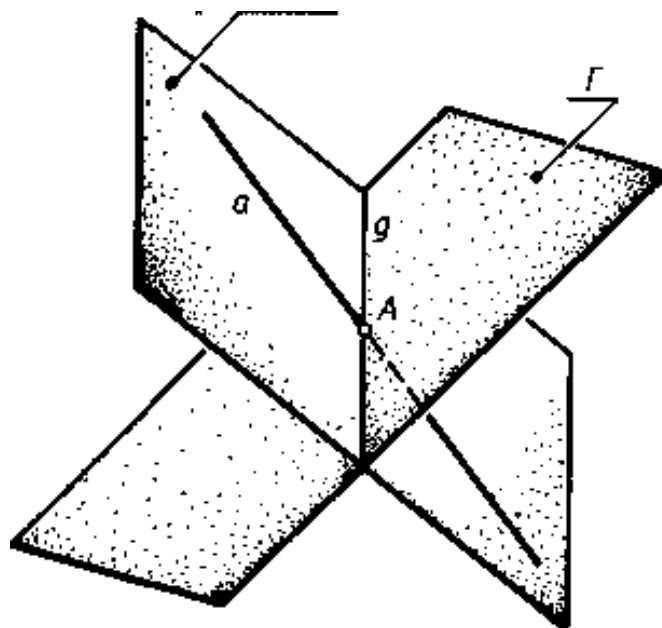


Рис. 113.

Приклад (рис. 114). Знайти точку перетину прямої a з площиною $\Gamma =$

$\{\Delta CMK\}$; $A = a \cap \Gamma$. Визначити видимість прямої відносно площини Γ .

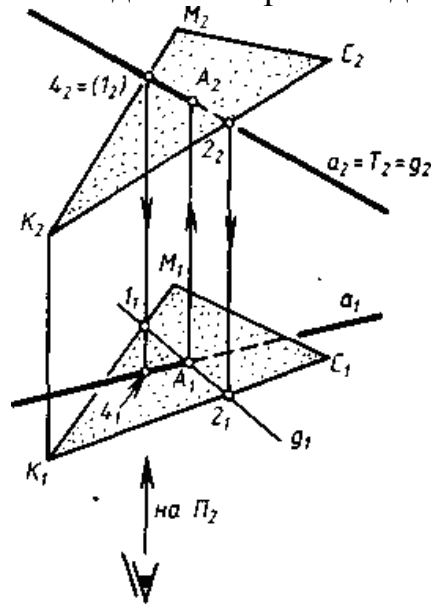


Рис. 114.

Розв'язання (алгоритм № 3):

1. Обираємо у якості посередника фронтально-проекціювальну площину Γ .
2. Заключаємо пряму a у цю допоміжну площину: $\Gamma_2 = a_2$.
3. Будуємо пряму 1-2, по якій площина Γ перетинає площину Γ .
4. Відмічаємо точку перетину прямих a і 1-2 (g): $A = a \cap g$.
5. Визначаємо видимість за допомогою пари фронтально-конкуруючих точок 1 і 4 ($1 \in KM$; $4 \in a$) з урахуванням того, що площина Γ - висхідна.

13. ПЕРЕТИН ПЛОЩИНИ З ПОВЕРХНЕЮ

13.1. Властивості перерізів поверхонь. Класифікація окремих випадків побудови перерізів

У загальному випадку перерізами поверхонь багатогранників є ламані лінії, а перерізами кривих поверхонь – криві лінії (рис. 115).

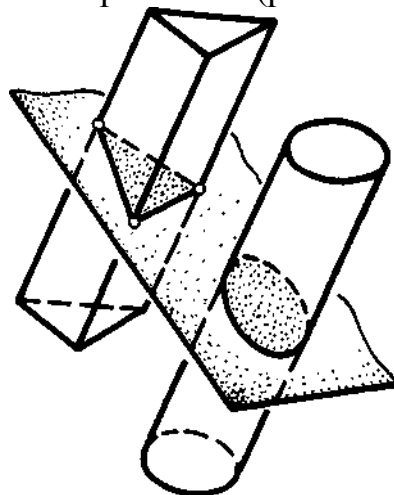


Рис. 115.

Перерізами поверхонь n -го порядку служать криві n -го порядку. Переріз поверхні, що має вісь симетрії, також має хоча б одну вісь симетрії.

Площина, що перпендикулярна до вісі поверхні обертання, перетинає її по колу, тобто нормальним перерізом поверхні обертання є коло.

Площина, що проходить через вершину лінійчастної поверхні з вершиною і напрямною, перетинає її по прямим лініям (твірним).

На рис. 116 показані поширені окремі випадки побудови лінії перетину поверхонь з площиною:

1. Коли поверхня або площина - проєкціювальна (рис. 116, а).

2. Коли площина перетинає лінійчасту поверхню по прямій лінії – твірній g (рис. 116); це можливо, якщо січна площина, наприклад, проходить через вершину S або S^∞ лінійчастої поверхні з вершиною і напрямною або паралельна площині паралелізму $\Pi^{\text{пар}}$ поверхні Каталана (рис. 116, б, в, г).

3. Коли січна площина Γ співпадає з площиною, в якій розташоване твірне коло r циклічної поверхні (рис. 116, д). Наприклад, якщо $\Gamma \perp i$ (i - вісь поверхні обертання Φ), то $\Gamma \cap \Phi = r$ (r – коло) (рис. 116, е).

4. Коли проєкцією перерізу є коло; це можливо для «замкнених» поверхонь 2-го порядку.

Рис. 116 можливо вважати графічним каталогом бібліотеки базових підзадач, що використовуються при розв'язанні складних задач на перетин фігур.

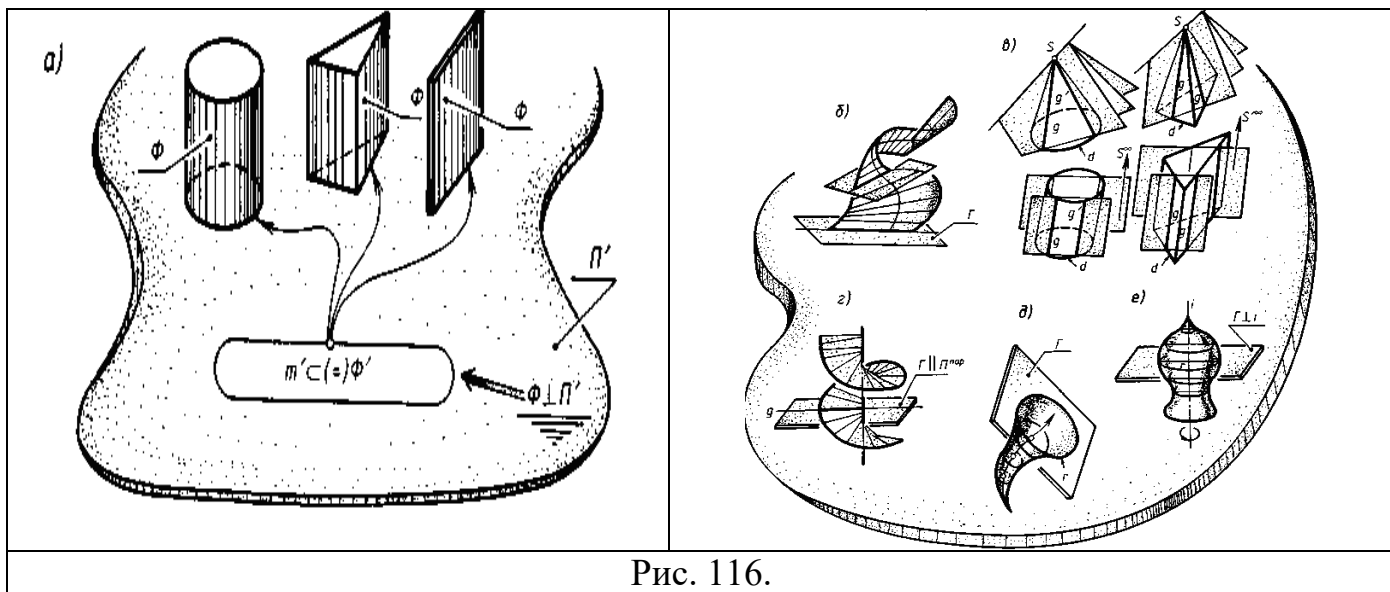


Рис. 116.

13.2. Побудова лінії перетину площини з проєкціювальною поверхнею

Розглянемо випадки: 1) проєкцію вальну поверхню перетинає проєкціювальна площина; 2) проєкціювальну поверхню перетинає площина загального положення.

В обох випадках для побудови перерізу на епюрі використовуємо алгоритм проєкціювальної фігури (алгоритм № 1).

У першому випадку на кресленні вже відомі обидві відповідні проєкції

шуканої лінії. Для знаходженні будь-якої іншої проекції (третьої – основної або додаткової), враховуючи зручність і простоту побудов, використовуємо: а) належність шуканої лінії будь-якій з даних фігур або б) проекційні закони побудови третьої проекції фігури по двом даним.

Приклад 1 (рис. 117). Необхідно побудувати на епюрі переріз m трикутної призматичної поверхні Φ ($\Phi \perp \Pi_1$) площиною Γ ($\Gamma \perp \Pi_2$); $\Gamma \cap \Phi = m$.

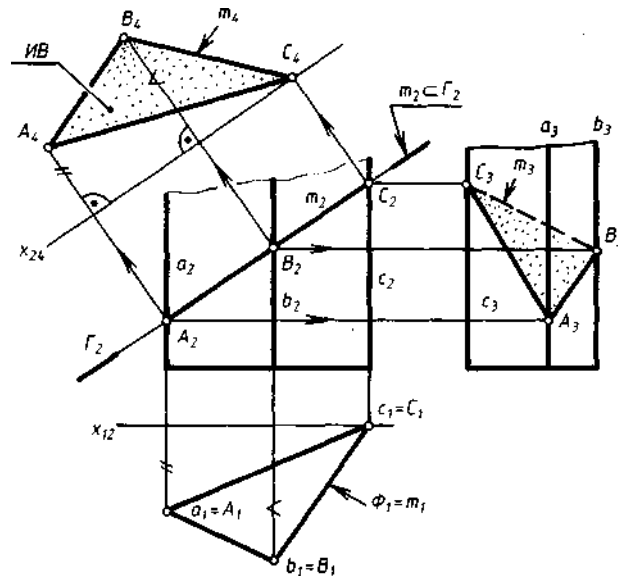


Рис. 117.

Розв'язання. З креслення зрозуміло, що m - трикутник. Обидві проекції шуканого трикутника на кресленні вже визначені: $m_2 \subset \Gamma_2$; $m_1 \subset \Phi_1$. Профільну проекцію лінії $m - m_3$ можливо побудувати за належністю лінії m поверхні Φ (її ребрам), а додаткову проекцію $m - m_3$ за відомими законами проекціювання точки на додаткову площину проекцій.

Приклад 2 (рис. 118). Необхідно побудувати проекції лінії перетину циліндричної поверхні обертання Φ ($\Phi \perp \Pi_3$) площиною Γ ($\Gamma \perp \Pi_1$); $\Phi \cap \Gamma = m$.

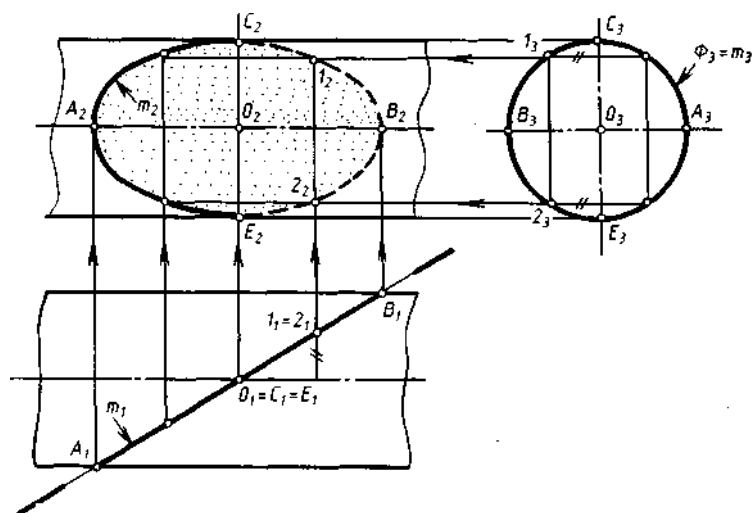


Рис. 118.

Розв'язання. З креслення видно, що шукана лінія m - еліпс. Обидві проекції еліпса вже відомі: $m_1 = |A_1B_1| \subset \Gamma_1$; $m_3 = \Phi_3$ (m_3 - коло). Фронтальну проекцію - еліпс m_2 будуюмо за належністю точок шуканій лінії поверхні Φ . Опорними точками еліпса m є: точка O - центр еліпса; точки A, B і C, E - кінці головних осей еліпса (вони є екстремальними точками й точками зміни видимості проекцій лінії на відповідних площинах проекцій).

Приклад 3 (рис. 119). Побудувати проекції перерізу трикутної призматичної поверхні Φ ($\Phi \perp \Pi_2$) площиною загального положення Γ , що задана слідами; $\Gamma \cap \Phi = m$.

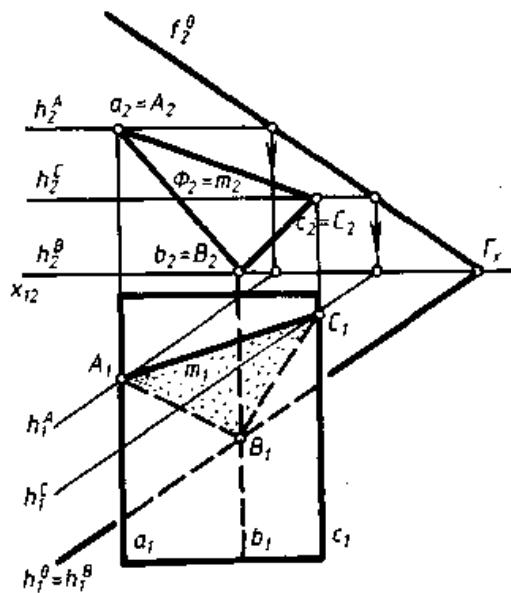


Рис. 119.

Розв'язання. Зрозуміло, що m - трикутник; позначимо його вершини A, B, C ; $m_2 = \Delta A_2 B_2 C_2 = \Phi_2$; $m_1 = \Delta A_1 B_1 C_1$ будуюмо за належністю точок A, B, C непроекціювальній площині Γ , зокрема її горизонталіям: $A \subset h^A \Rightarrow A_1 \subset h_1^A$; $B \subset h^B \Rightarrow B_1 \subset h_1^B$; $C \subset h^C \Rightarrow C_1 \subset h_1^C$.

Побудову горизонтальних проекцій вершин ΔABC можливо вести за допомогою будь-яких ліній площини Γ .

Приклад 4 (рис. 120). Побудувати проекції перерізу циліндричної поверхні обертання Φ ($\Phi \perp \Pi_1$) площиною загального положення Γ ; $\Gamma = \{h \cap f\}$; $\Gamma \cap \Phi = m$.

Розв'язання. Зрозуміло, що m - еліпс. Одна його проекція - коло m_1 відома: $m_1 = \Phi_1$. Другу проекцію - еліпс m_2 будуюмо за належністю точок еліпса m непроекціювальній площині Γ , зокрема її відповідним фронталям f ($f^c, f^a, f^b \dots$). При цьому використовуємо симетрію еліпса m_2 відносно його центра - точки O_2 ($O \subset f^3 \Rightarrow O_2 \subset f_2^3$).

Головними вісями еліпса m є взаємно перпендикулярні діаметри $|AB|$ і $|CE|$. $AB \subset s$; $s \supset O$; s - лінія ската площини Γ ; $A_1 B_1 \perp h_1$. Точку B_2 будуюмо за її належністю лінії $s_2 = O_2 K_2$ ($K \subset h$). Головні вісі еліпса проєкціюються на Π_2 у вигляді спряжених діаметрів $|A_2 B_2|$ і $|C_2 E_2|$ еліпса m_2 . Дотичні t , побудовані

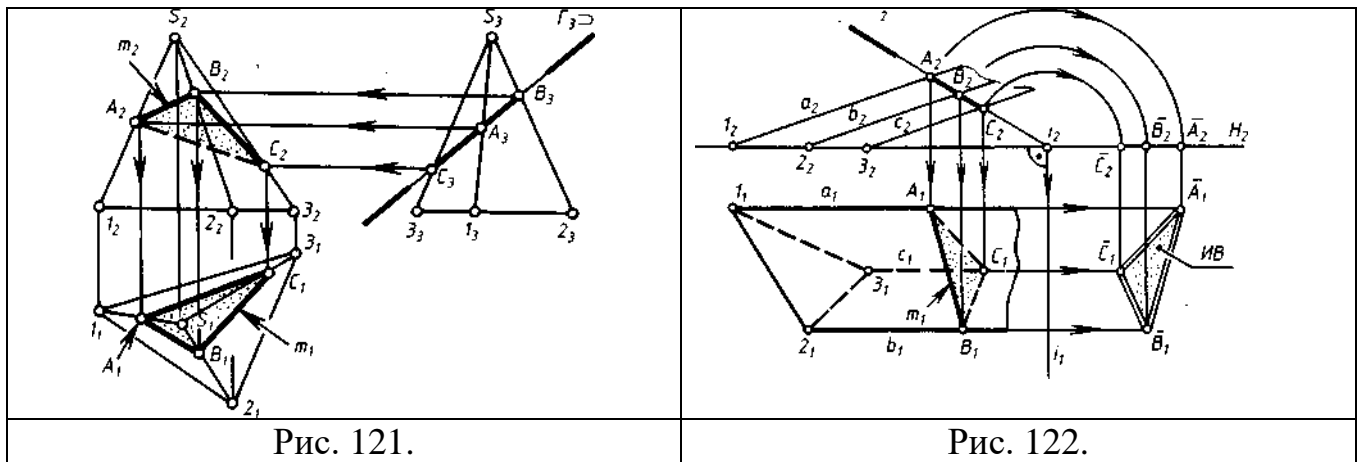


Рис. 121.

Рис. 122.

У другому випадку $\Gamma \perp \Pi_2$, тому на кресленні відомою є фронтальна проекція m_2 шуканого ΔABC , а горизонтальна його проекція – $\Delta A_1B_1C_1$ будується за належністю вершин відповідним ребрам заданої поверхні призми (рис. 122). Натуральну величину фігури перерізу у цьому прикладі визначено суміщенням площини Γ з горизонтальною площиною H ($H \supset i$) шляхом обертання навколо будь-якої фронтально-проекціовальної прямої i , що розташована у площині Γ .

На рис. 123 подано побудову на епюрі еліпса m – лінії перетину конічної поверхні обертання з площиною Γ , що розташована перпендикулярно до Π_2 і перетинає усі твірні поверхні конуса.

Фронтальною проекцією еліпса m слугує відрізок $|A_2B_2| \subset \Gamma_2$. Горизонтальна проекція еліпса m побудована за належністю точок еліпса твірним конічної поверхні (прямим лініям, що проходять через вершину S , або колам-паралелям).

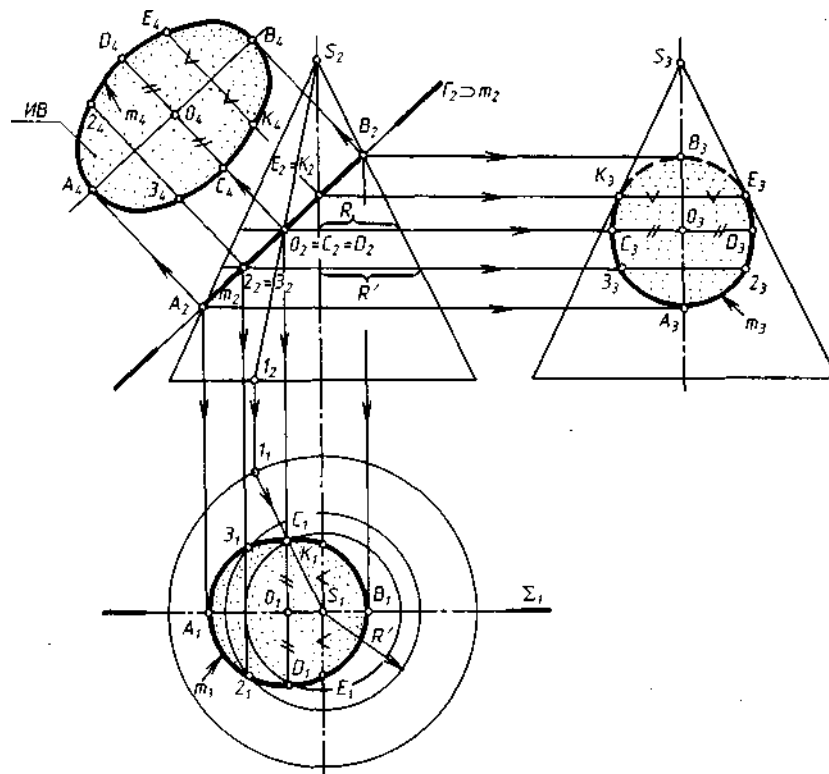


Рис. 123.

Профільна проекція еліпса - еліпс m_3 і додаткова проекція - еліпс m_4 побудовані за законами проєкціювання точок на площині Π_3 і Π_4 відповідно. Еліпс m_4 є дійсним видом фігури перерізу, так як додаткова площина проєкцій Π_4 розташована паралельно площині Γ .

Головними вісями еліпса m слугують відрізки $|AB|$ і $|CD|$; центром еліпса є точка O - середина відрізка $|AB|$: $|O_2A_2|=|O_2B_2|= \frac{1}{2} |A_2B_2|$; $|O_1A_1|=|O_1B_1|= \frac{1}{2} |A_1B_1|$.

Опорними точками еліпса m є:

1. Точки A і B – кінці великої вісі еліпса; точка B - найвища; точка A - найнижча. В точках A і B змінюється видимість еліпса при погляді на Π_2 : при погляді спереду точка A – крайня ліва, точка B - крайня права.

2. Точки C і D - кінці малої вісі еліпса; при проєкціюванні на Π_2 точка D є найближчою до спостерігача, а точка C найбільш віддалена від нього.

3. Точки K і E - точки, в яких змінюється видимість еліпса при проєкціюванні його на площину Π_3 .

4. Точка O – центр еліпса m .

Аналогічно будується на ешорі лінія перетину параболої обертання з фронтальною площиною Γ (рис. 124). Площина Γ перетинає поверхню по параболі m ; найвищою точкою перерізу є точка A , розташована на паралелі мінімального радіуса $R = |i_1A_1|$ (ця паралель дотикається до лінії Γ_1 , $i_1A_1 \perp \Gamma_1$).

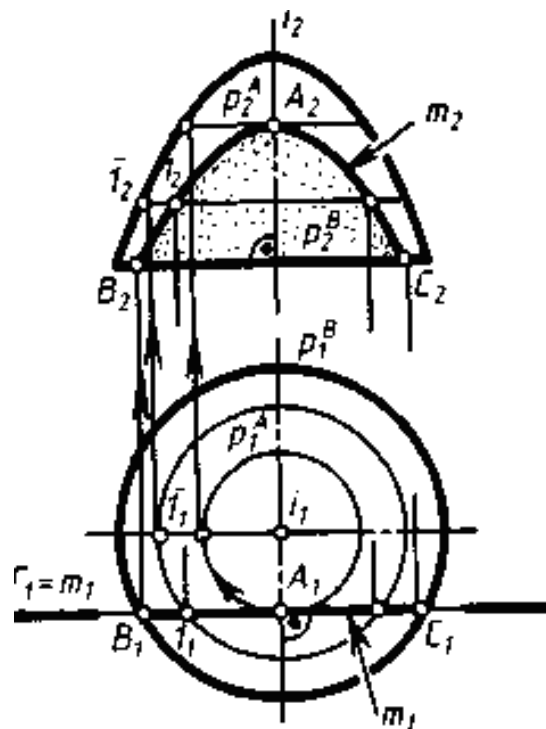


Рис. 124.

Зазначимо, що розв'язання задач цього типу зводиться до побудови проєкції (чи проєкцій) плоскої кривої, що належить заданій поверхні, за умов, що одна проєкція цієї кривої (у вигляді прямої чи відрізка) відома.

13.4. Загальні випадки побудови перерізів поверхонь з використанням додаткової площини проєкцій

Багато задач на побудову лінії перетину поверхні Φ площиною загального положення Γ зручно розв'язувати за допомогою проєкціювання на додаткову площину проєкцій Π_4 , перпендикулярну до заданої площини Γ . У цьому випадку площина загального положення Γ перетворюється у проєкціювальну і розв'язання задач у новій системі площин проєкцій $\Pi_1(\Pi_2)/\Pi_4$ здійснюється за алгоритмом проєкцію вальної фігури № 1.

Нестачаюча фронтальна (горизонтальна) проєкція шуканої лінії будується за відомими законами зворотного проєкціювання, коли зберігаються невивстаючі координати Z (Y) точок шуканої лінії.

Таким способом доцільно користуватися, коли нарисом поверхні Φ на площині Π_4 є точна лінія – коло або пряма. Спосіб зручний і тоді коли необхідно знайти натуральну величину перерізу. За допомогою цього способу можливо швидко визначити екстремальні точки перерізу і його вигляд, наприклад, вигляд кінцевого перерізу - еліпс, параболу, гіперболу (рис. 126).

Приклад 1 (рис. 125).

Дано: циліндрична поверхня Φ ; площина $\Gamma = \{h; M\}$ (рис. 125).

Необхідно знайти: $m = \Phi \cap \Gamma$.

Розв'язання: (порівняти з прикладом 4 - рис. 120). Очевидно, що шукана лінія m є еліпсом; пошук його проєкцій здійснимо таким чином:

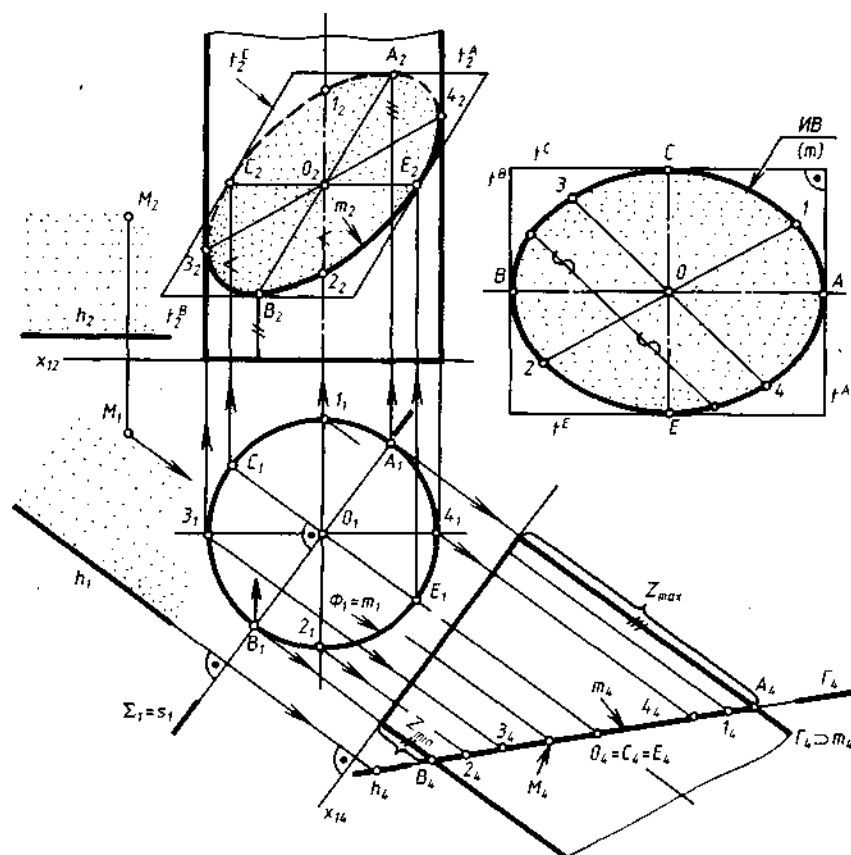


Рис. 125.

Задану циліндричну поверхню Φ і площину загального положення Γ проєкціюємо на площину Π_4 : $\Pi_4 \perp h \Rightarrow \Pi_4 \perp \Gamma$; $x_{14} \perp h_1$. Тоді площина Γ зобразиться на Π_4 у вигляді прямої Γ_4 ; еліпс m – у вигляді відрізка $m_4 = |A_4B_4|$ ($m_4 \subset \Gamma_4$). Горизонтальна проєкція шуканої лінії - коло $m_1 = \Phi_1$. Дві проєкції еліпса m однозначно визначають його положення у просторі: $m = \{m_1, m_4\}$.

Враховуючи, що при проєкціюванні на Π_4 зберігаються координати Z точок проєкціювання, зворотним проєкціюванням точок лінії m з $\Pi_4(\Pi_1)$ на Π_2 будуюмо еліпс m_2 , вимірюючи на Π_4 координати Z його точок.

Головними вісями еліпса m є відрізки $|AB|$ і $|CE|$: $|AB| = |A_4B_4|$; $|CE| = |C_1E_1|$; центр - точка O . Найвищою точкою перерізу служить точка A , найнижчою - точка B (це видно на Π_4). Спряжені діаметри еліпса m_2 - $|A_2B_2|$ і $|C_2E_2|$.

Дійсний вигляд еліпса m будуюмо за його головними вісями (або за допомогою нової площини проєкцій $\Pi_5 \perp \Pi_4$).

Обрисними точками лінії m служать точки 3_2 і 4_2 ; діаметри $|3-4|$ і $|1-2|$ - спряжені.

Приклад 2 (рис. 126).

Дано: конічна поверхня Φ ; площина загального положення Γ ; $\Gamma = \{h; M\}$.

Необхідно: побудувати $m = \Phi \cap \Gamma$.

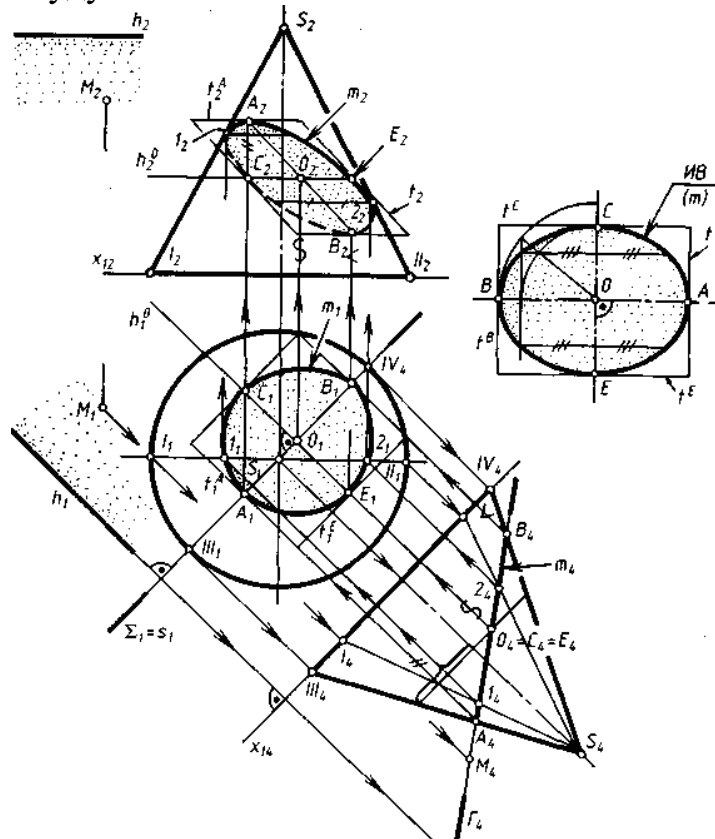


Рис. 126.

Розв'язання. Задану конічну поверхню Φ і площину Γ проєкціюємо на нову площину Π_4 : $\Pi_4 \perp h \Rightarrow \Pi_4 \perp \Gamma$; $x_{14} \perp h_1$. Тоді площина Γ зобразиться у вигляді прямої Γ_4 , а нарисом поверхні Φ на площині Π_4 будуть прямі S_4IV_4 і S_4III_4 . Нове зображення шуканих об'єктів на Π_4 дає можливість одразу встановити, що переріз m - еліпс, так як Γ перетинає всі твірні конічної поверхні Φ ; $m_4 = |A_4B_4|$; m_4

С Γ_4 . Горизонтальну проекцію еліпса m_1 будують за належністю точок лінії m твірним поверхні Φ .

Фронтальну проекцію - еліпс m_2 будують зворотним проєкціюванням точок перерізу з Π_4 і Π_1 на Π_2 , вимірюючи на Π_4 їх координати Z . Опорними точками еліпса m є: A і B - кінці вісі $|AB|$, A - найвища точка ($Z^A \max$), B - найнижча точка ($Z^B \min$); O - центр еліпса; C і E - кінці другої головної вісі $|CE|$, $CE \parallel \Pi_1$ ($|A_2B_2|$ і $|C_2E_2|$ - спряжені діаметри еліпса m_2); 1 і 2 - точки перерізу, що належать контурним твірним SI і SII поверхні Φ , в точках 1_2 і 2_2 змінюється видимість еліпса m_2 .

Дотичні до лінії m - t^A і t^B , побудовані в екстремальних точках перерізу A і B , є горизонтальними січньої площини Γ . Дотичні t^C і t^E , побудовані у точках C і E , паралельні головній вісі $|AB|$ ($t^C \parallel AB \Leftrightarrow t^C \perp h \Rightarrow t^C$ - лінія ската площини Γ).

Дійсний вигляд перерізу m (ДВ) можливо побудувати за двома головними вісями еліпса m або за допомогою другої додаткової площини проєкцій Π_5 , розташованій так, що $\Pi_5 \perp \Pi_4$; $\Pi_5 \parallel \Gamma$.

Приклад 3 (рис. 127).

Дано: сфера Φ з центром у точці $O = \{O_2; O_1\}$ і площина загального положення $\Gamma = \{h, M\}$.

Необхідно: побудувати переріз $m = \Phi \cap \Gamma$.

Розв'язання: аналогічно розв'язкам, описаним у двох попередніх прикладах (рис. 125, 126).

У цьому прикладі перерізом є коло m з центром C ($O_4C_4 \perp \Gamma_4$) і радіусом $R = 1/2 |A_4B_4| = |C_4A_4|$. Обрисні точки 3 і 4 знайдені за допомогою посередника $T \supset m^\circ$.

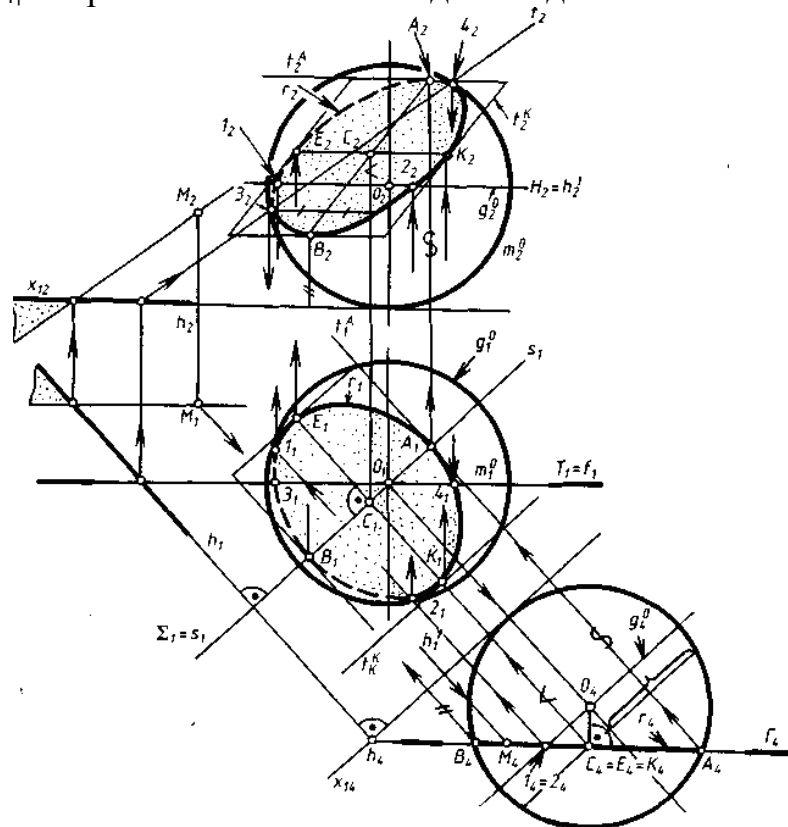


Рис.127.

13.5. Загальні випадки побудови перерізів поверхонь з використанням посередників

Розв'язання задач на побудову лінії перетину поверхні Φ з площиною Γ способом посередників здійснюється за алгоритмом № 2.

Для гранних поверхонь зручно використовувати й алгоритм № 3. У задачах цього типу посередниками є площини T . Посередник T перетинає задану площину Γ завжди по прямій, тому вибір його положення повністю залежить від виду лінії, по якій він перетне поверхню Φ ; бажано, щоб цією лінією була пряма чи коло.

При побудові посередників на епюрі варто враховувати межі області існування шуканого перерізу. Так, якщо посередники - горизонтальні площини, то граничні найвищий та найнижчий посередники мають пройти через екстремальні точки перерізу (найвищу і найнижчу), пошук яких можливо вести точно чи наближено – за допомогою перетворень або інших прийомів.

Розглянемо використання посередників на прикладі знаходження кількох точок лінії перетину сфери Φ (центр - точка $O = \{O_1; O_2\}$) з площиною $\Gamma = \{h \cap f\}$ - (рис. 128); $\Phi \cap \Gamma = r$.

Побудову ведемо за алгоритмом № 2:

1. У якості посередника зручно обрати будь-яку площину рівня T , так як вона перетинає сферу по колу, що проєкціюється на Π_1 (Π_2) без спотворення.
2. Будуємо на епюрі посередник $T = \{T_2\}$, $T \parallel \Pi_1$.
3. Будуємо лінії, по яким площина T перетинає сферу Φ і площину Γ :
 $T \cap \Phi = p$; p - коло радіусу R ; $p = p_1$; $T \cap \Gamma = h^1 \supset l$, $l \subset f$; $h^1 \parallel h$.
4. Знаходимо точки 5 і 6: $p \cap h^1 = 5, 6$.

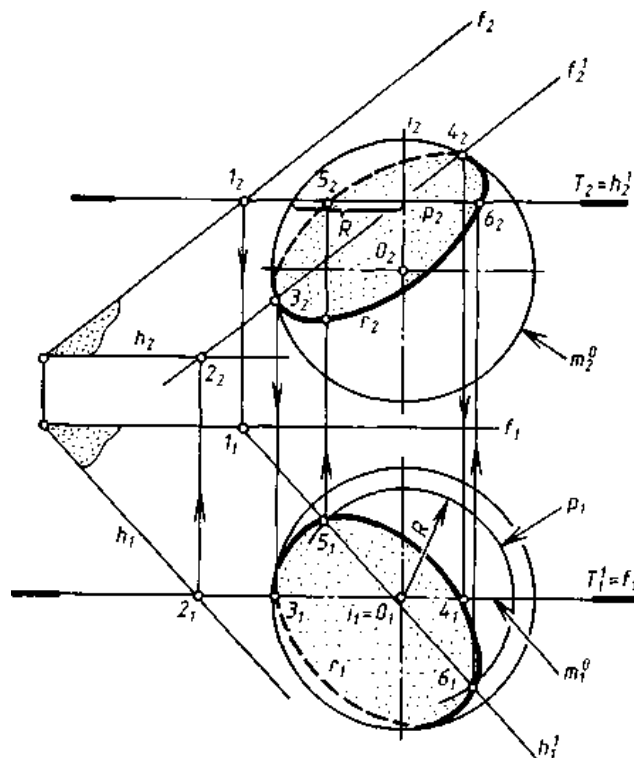


Рис. 128.

Аналогічно за допомогою другого посередника - площини T^1 ($T^1 \parallel \Pi_2$, $T^1 \supset m^0$) знаходимо на епюрі точки 3 і 4, в яких змінюється видимість шуканого перерізу – кола r при проєкціюванні Π_2 (3_2 і $4_2 \in m_2^0$, m^0 - головний меридіан сфери). Переріз $r = \{r_1; r_2\}$ показано на епюрі без побудов.

На рис. 129 подано побудову лінії перетину коноїда площиною $\Gamma = \{a \cap f\}$. Напрямними коноїда слугують лінії: d (коло) і d' (пряма), а площиною паралелізму є площина Π_2 . У якості площин-посередників оберемо фронтальні площини T , що перетинають коноїд по прямим g , а площина Γ - по фронталям f .

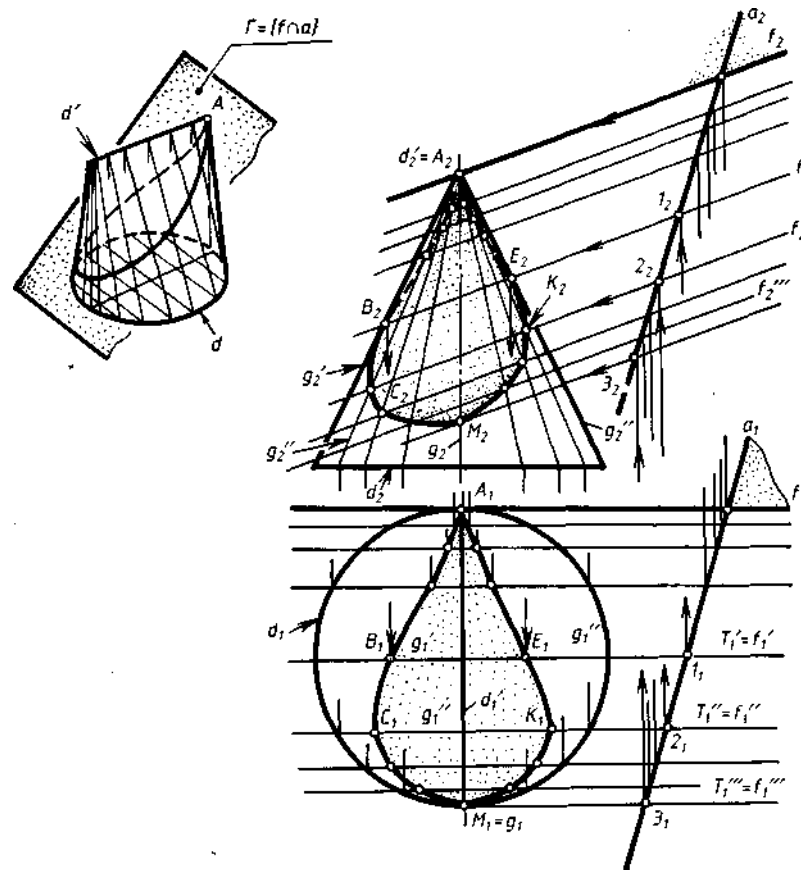


Рис. 129.

До опорних точок перерізу відносимо:

- 1) точки B і E , в яких змінюється видимість перерізу на Π_2 ;
- 2) точки A і M , в яких Z_A - max; Y_A - min; Y_M - max. Z_M - min.

Наведемо ще один приклад використання посередників: нехай необхідно побудувати переріз похилої тригранної призматичної поверхні Φ площиною загального положення Γ ; $\Gamma = \{h \cap f\}$ (рис. 130).

Задачу розв'язуємо таким чином. Відомо, що перерізом є трикутник, позначимо його вершини A , B і C . Щоб знайти ці точки, достатньо визначити точки перетину ребер призматичної поверхні з площиною Γ – це спосіб ребер.

Побудову здійснюємо за алгоритмом № 3, який опишемо на прикладі визначення точки A :

- 1, 2. Заключаємо ребро a у площину-посередник T : $a \subset T$; $T \perp \Pi_2$.
3. Будуємо лінію перетину площин T і Γ : $T \cap \Gamma = 1-2$.

4. Відмічаємо точку A : $a \cap (1-2) = A$.

Аналогічно будемо точки B ($B = b \cap \Gamma$; $b \subset T^1$) і C ($C = c \cap \Gamma$; $c \subset T^2$).

Видимість сторін $\triangle ABC$ визначаємо на епюрі, вважаючи, що на видимих гранях розташовані видимі лінії перерізу, а на невидимих - невидимі.

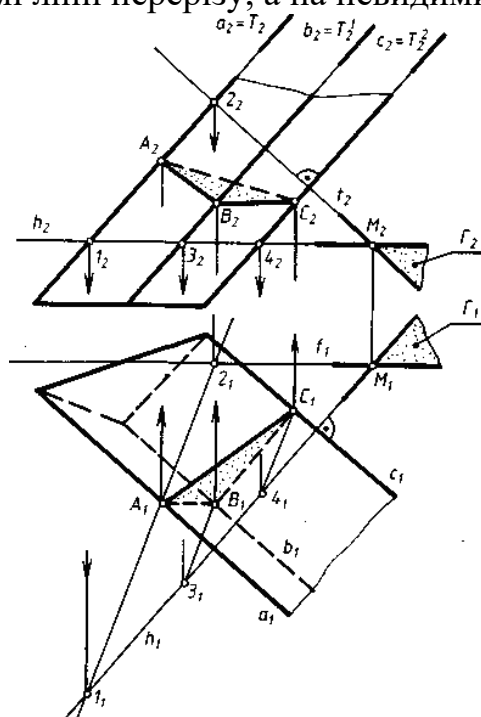


Рис. 130.

13.6. Використання обертання для побудови перерізів поверхонь обертання

У розв'язанні задач на побудову лінії перетину поверхні обертання з площиною можливо застосувати площини-посередники Γ , що перпендикулярні до вісі обертання поверхні, так як вони перетинають задану поверхню по колам-паралелям.

Приклад використання таких площин подано на рис. 131, а для побудови лінії перетину параболоїда обертання Φ з площиною $\Gamma = \{h \cap f\}$; T, T^1, \dots . Тут для побудови точок 8 і 9, в яких змінюється видимість шуканої кривої при її проєкціюванні на Π_2 , обрано фронтальну площину-посередник T^2 : $T^2 \cap \Gamma = f^1$; $T^2 \cap \Phi = m^0$, m^0 - головний меридіан; $8(9) = f^1 \cap m^0$.

Але за допомогою таких площин не вдається знайти точне положення екстремальних точок перерізу A і B . Для цього можливо поєднувати спосіб посередників і спосіб обертання. Знаючи, що точки A і B розташовані на лінії ската площини Γ , що перетинає вісь i ($A, B \subset s$; $\Gamma \cap \Sigma = s$), виконаємо такф операції:

1. Заклучимо пряму s у площину-посередник $\Sigma \perp \Pi_1$.
2. Площина Σ перетинає параболоїд по меридіану m^Σ .
3. Площину Σ повернемо навколо вісі i до суміщення з площиною головного меридіану Σ (рис. 131, б).

Тоді разом з площиною Σ повернуться й ті фігури, що розташовані у ній: пряма s і меридіан m . Ці фігури займуть нове положення: $s \rightarrow s'$; $m^\Sigma \rightarrow m^0$ (m^0 - головний меридіан - задана параболою).

4. На Π_2 відмічаємо точки A_2' і B_2' - фронтальні проєкції точок A і B , в яких перетинаються лінії s_2' і m_2^0 .

4. Зворотним обертанням до вихідного положення знаходимо точки A і B (рис. 131, б). Лінії t^A і t^B - дотичні до перерізу, проведені в його екстремальних точках A і B .

Цей прийом особливо зручний, коли меридіаном поверхні обертання є лекальна (неточна) крива і використання додаткової площини проєкцій нерациональне, так як зв'язане з побудовою лекальної кривої - нарису заданої поверхні на Π_4 .

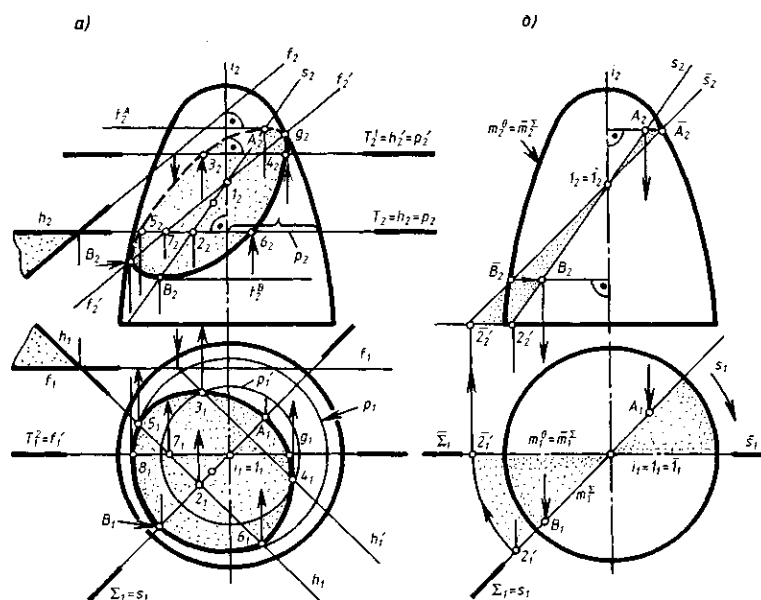


Рис. 131.

13.7. Побудова точок перетину прямої лінії з поверхнею

Задачі такого типу розв'язуються у загальному випадку за допомогою площин-посередників за алгоритмом №3 або способом перетворень. Іноді ці способи зручно поєднувати. Найбільш просто задачі розв'язуються в окремих випадках.

Зображатимемо суцільною тонкою лінією ту частину прямої, яка розташована всередині поверхні між точками «входу» і «виходу» прямої.

Якщо контурна лінія поверхні розташована за прямою a , то будемо переривати нарис поверхні поблизу його невидимої точки; якщо ж пряма a розташована за поверхнею, то умовно перериваємо зображення прямої.

Окремі випадки. Серед окремих випадків розглянемо такі, коли пряма або поверхня займає проєкціювальне положення.

Тоді для побудови точок перетину фігур можливо використати алгоритм проєкцію вальної фігури - алгоритм № 1.

Якщо пряма a перетинає проєкцію вальну поверхню Φ призми (рис. 132, а) або циліндра (рис. 132, б), то одна проєкція шуканих точок перетину прямої a з поверхнею Φ визначається на кресленні одразу, а друга проєкція шуканих точок A і B визначається за їх належністю непроєкціювальній прямій a .

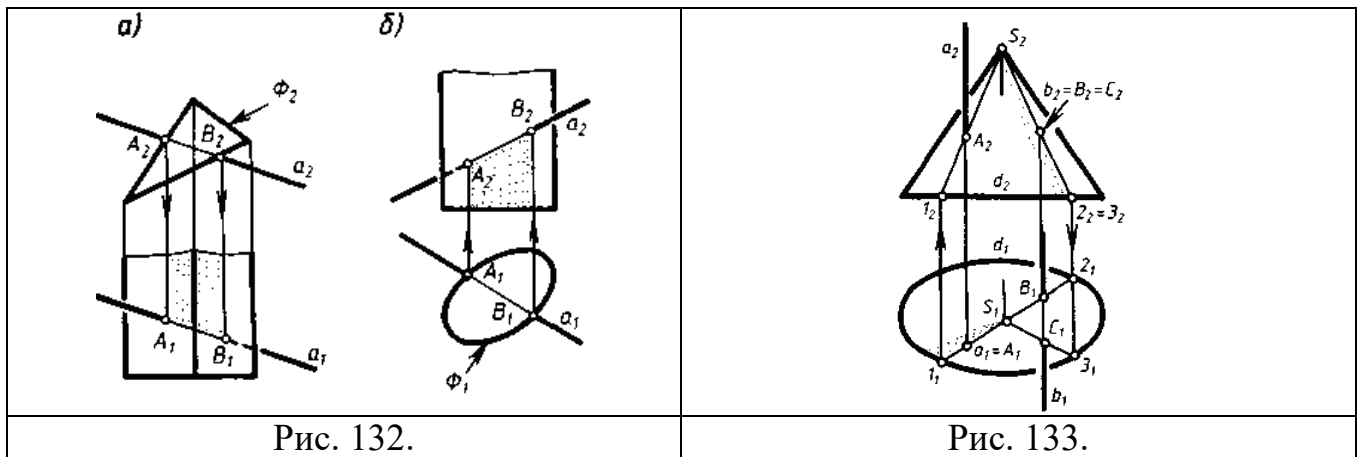


Рис. 132.

Рис. 133.

Якщо проєкціювальна пряма a перетинає поверхню Φ у точці A (B, \dots), то одна проєкція шуканої точки A (B, \dots) визначена на кресленні: якщо $a \perp \Pi_1$, то A_1 (B_1, \dots) = a_1 ; якщо $a \perp \Pi_2$, то A_2 (B_2, \dots) = a_2 ; якщо $a \perp \Pi_3$, то A_3 (B_3, \dots) = a_3 . Друга проєкція шуканої точки (точок) визначається за належністю точки відповідній твірній поверхні Φ .

Так знайдемо точки перетину проєкціювальних прямих a і b з поверхнею: конуса (рис. 133), циліндра (рис. 134), кулі (рис. 135) і тора (рис. 136).

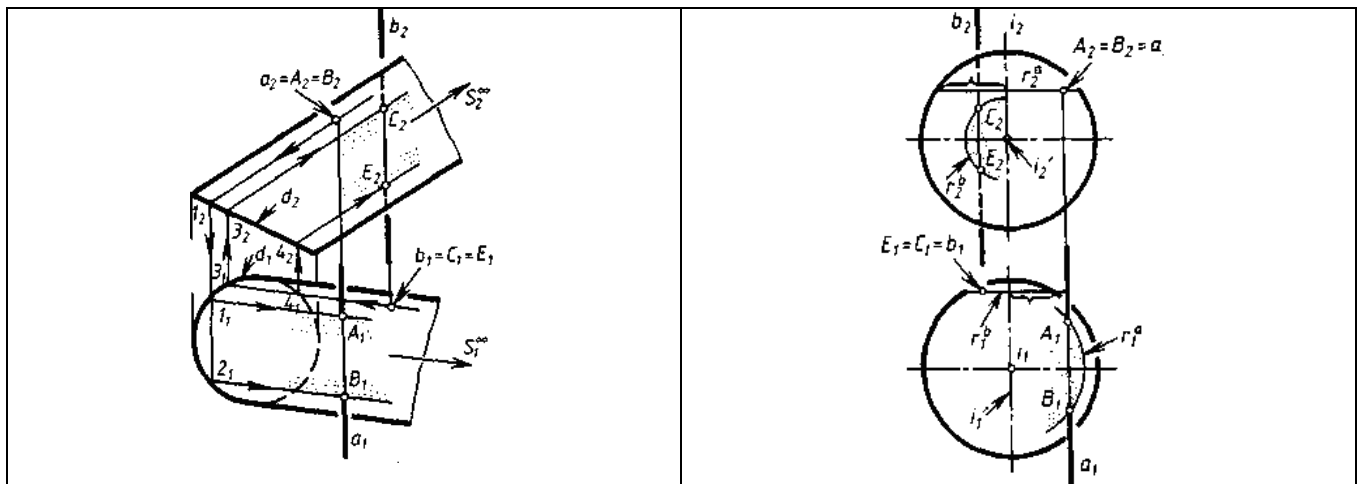


Рис. 134.

Рис. 135.

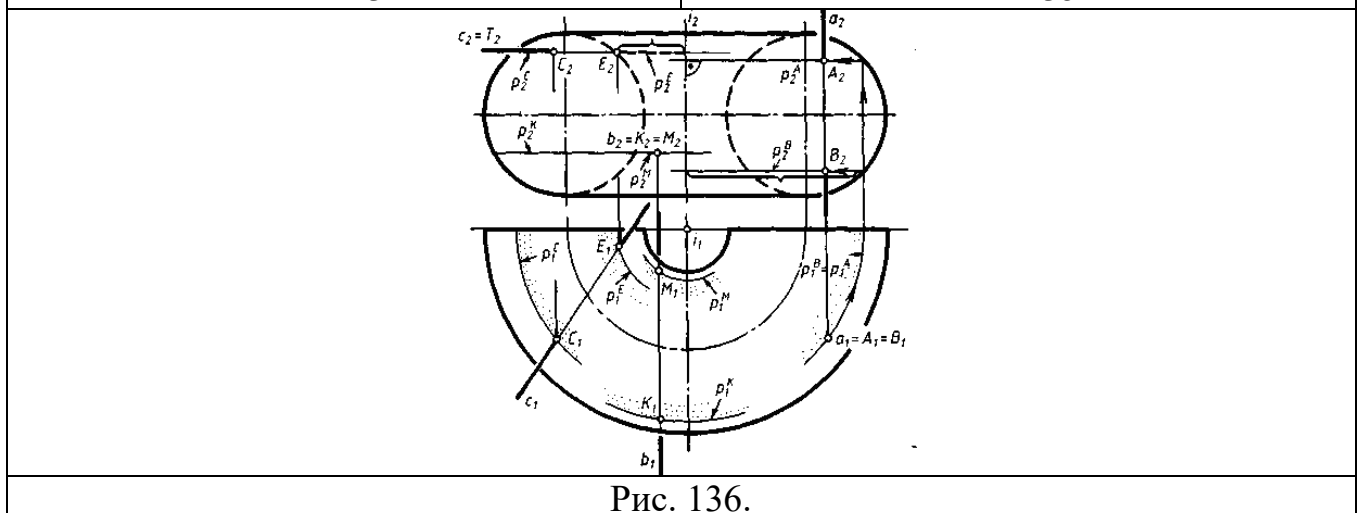


Рис. 136.

13.8. Загальні випадки перетину. Спосіб посередників

Для знаходження точок перетину прямої лінії з поверхнею Φ способом посередників варто пряму заключати в таку площину-посередник T , яка перетинає задану поверхню Φ по точній лінії – прямій чи колу. Огляд і класифікація різних видів таких площин дані раніше (рис. 116).

При такому способі побудову точок перетину прямої лінії з поверхнею виконуємо за алгоритмом № 3. Тому, якщо задана пряма і будь-яка точна лінія поверхні розташовані в одній площині T , то цю площину T будемо використовувати у якості посередника.

Посередники – площини окремого положення

Приклад 1 (рис.136). Знайти точки перетину прямої c ($c \perp i$) з поверхнею тора Φ .

Розв'язання.

1. $T \perp i$. 2. $c \subset T$. 3. $T \cap \Phi = p^C(p^E)$. 4. $C = c \cap p^C$, $E = c \cap p^E$ (p – коло).

Якщо пряма перетинає поверхню багатогранника Φ , то в якості посередника завжди можливо використати проєкціювальну поверхню T ($T \perp \Pi_1$ або $T \perp \Pi_2$), яка, і як будь-яка інша, перетинає поверхню Φ по ламаній лінії.

Приклад 2 (рис. 137). Знайти точку перетину прямої a з поверхнею призми Φ .

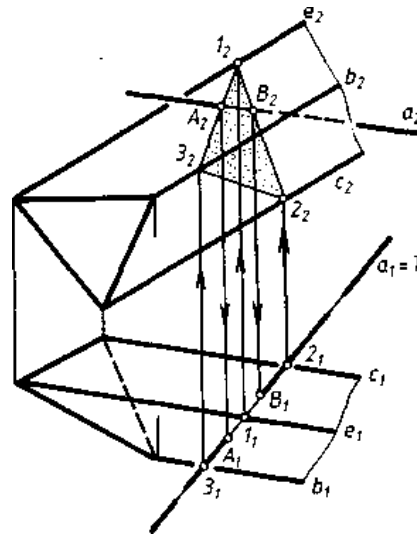


Рис. 137.

Розв'язання.

1. $T \perp \Pi_1$. 2. $T \supset a$, $T = \{T_1\}$. 3. $T \cap \Phi = \Delta 1-2-3$. 4. $a \cap \Delta 1-2-3 = A(B)$.

Приклад 3 (рис. 138). Найдти точки перетину прямої a з поверхнею піраміди Φ .

Розв'язання: аналогічно попередньому ($T \perp \Pi_2$).

Приклад 4 (рис. 139). Знайти точки перетину прямої a ($a_1 \supset S^\infty$) з циліндричною поверхнею Φ . Точка S^∞ - вершина циліндричної поверхні; лінія d - її напрямна.

Розв'язання.

1. $T \perp \Pi_1$; $T \supset S^\infty$. 2. $T \supset a$; $T_1 = a_1$.

3. $T \cap \Phi = g = S^\infty - 1(2)$. 4. $A = a \cap (S^\infty - 1)$; $B = a \cap (S^\infty - 2)$.

Приклад 5 (рис. 140). Знайти точки перетину прямої a з поверхнею обертання Φ .

Розв'язання.

1. Аналіз вихідних даних задачі виявляє, що пряму не можна заключити в таку площину-посередник, яка перетинала б поверхню Φ по точній лінії. Тому в якості посередника зручно обрати проєкціювальну площину T ($T \perp \Pi_1$), за допомогою якої допоміжний переріз m будувати просто, чим з допомогою будь-якої площини загального положення.

2. $a \subset T$; $T = \{T_1\}$; $a_1 = T_1$.

3. $T \cap \Phi = m$; m - лекальна крива.

4. $A(B) = a \cap m$.

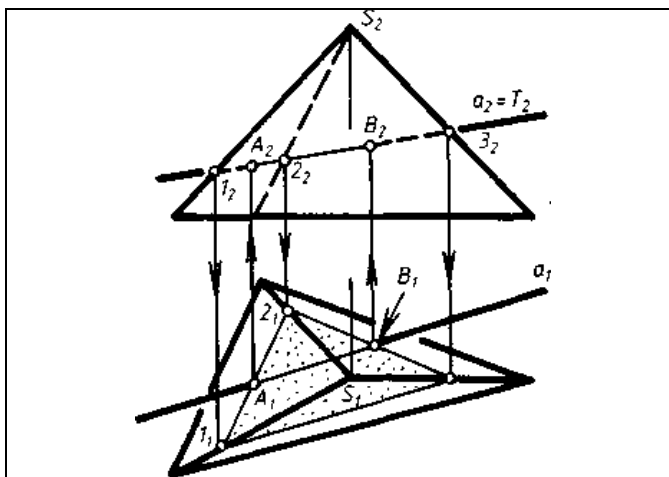


Рис. 138.

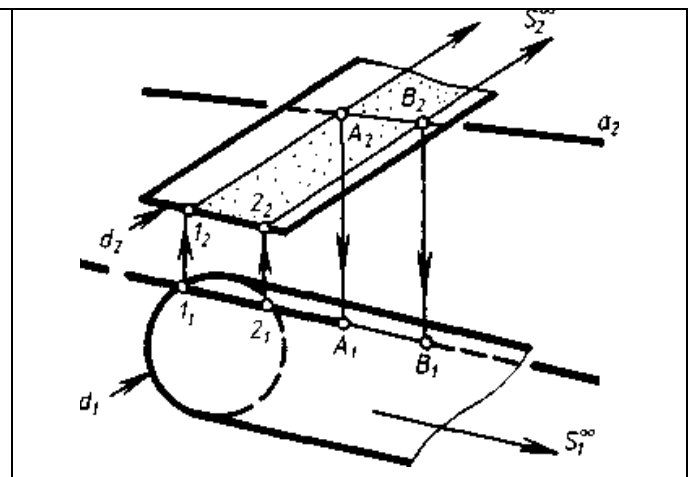


Рис. 139.

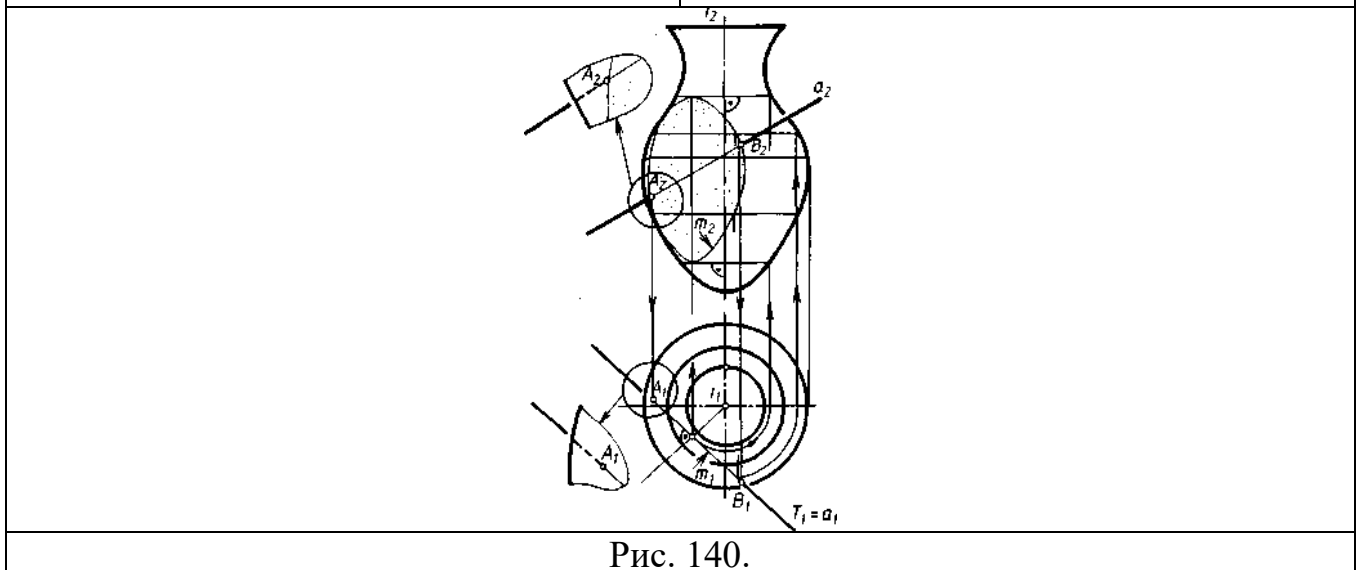


Рис. 140.

Посередники – площини загального положення. Якщо задана пряма a і якась точна лінія поверхні Φ розташовані в одній площині загального положення, то цю площину зручно використовувати у якості посередника T , якщо немає простішого рішення.

Так, якщо пряма перетинає лінійчасту поверхню з вершиною і напрямною,

то допоміжна площина, що проходить через дану пряму і вершину S (S^∞), завжди перетинає поверхню по твірним – прямим лініям g .

Приклад 1 (рис. 141). Необхідно знайти точки перетину прямої a з конічною поверхнею Φ . Вершина конічної поверхні - точка S ; напрямна - крива d , розташована у площині Π^d (в даному прикладі $\Pi^d = \Pi_1$); лінію d можливо розглядати як слід поверхні Φ на площині Π^d : $d = \Phi \cap \Pi^d$.

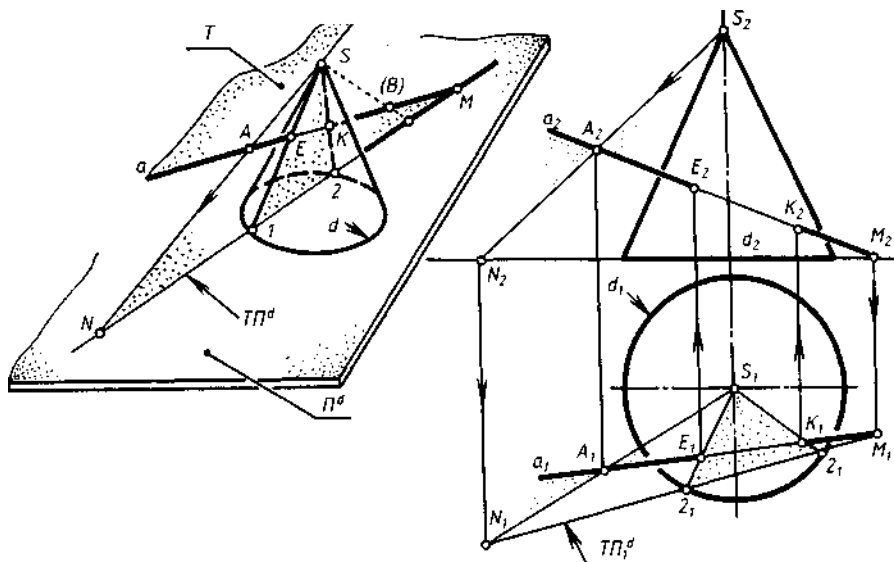


Рис. 141.

Розв'язання (рис. 141, а, б).

1. $T \supset S$.
2. $T = \{S; a\} \Leftrightarrow T = \{SA \cap a\}$; A – будь-яка точка прямої a .
3. $T \cap \Phi = (S-1)$; $T \cap \Phi = (S-2)$.

Щоб знайти твірні $(S-1)$ і $(S-2)$, по яким площина T перетинає поверхню Φ , необхідно:

- а) побудувати пряму MN - слід $T \cap \Pi^d$ площини T на площині Π^d ($M = a \cap \Pi^d$; $N = SA \cap \Pi^d$; $MN = T \cap \Pi^d$);
- б) відмітити точки 1 і 2: $1(2) = T \cap \Pi^d \cap d$;
- в) провести прямі-твірні $(S-1)$ і $(S-2)$.
4. Відмічаємо точки E і K : $E = a \cap (S-1)$; $K = a \cap (S-2)$.
5. Визначаємо видимість прямої a відносно поверхні Φ . Площина Π^d , іноді її називають площиною слідів, так як у ній розташовані лінії MN і d - сліди площини T і заданої поверхні Φ .

Приклад 2 (рис. 142). Необхідно знайти точки перетину прямої a з циліндричною поверхнею Φ . Вершина циліндричної поверхні - невласна точка S^∞ ; напрямна - крива d , що належить площині Π^d ($\Pi^d \perp \Pi_2$ – у даному прикладі).

Розв'язання. (аналогічно попередньому).

1. $T \supset S^\infty$.
2. $T = \{S^\infty; a\} \Leftrightarrow T = \{S^\infty A \cap a\}$; A – будь-яка точка прямої a .
3. $T \cap \Phi = (S^\infty-1)$; $T \cap \Phi = (S^\infty-2)$:

- а) $MN = \{M; N\}$, $M = a \cap \Pi^d$, $N = (S^\infty - A) \cap \Pi^d$; $MN = \text{ТП}^d$;
 б) $1(2) = \text{ТП}^d \cap d$;
 в) проводимо прямі $(S^\infty - 1)$ і $(S^\infty - 2)$.
 4. $E = a \cap (S^\infty - 1)$; $K = a \cap (S^\infty - 2)$.

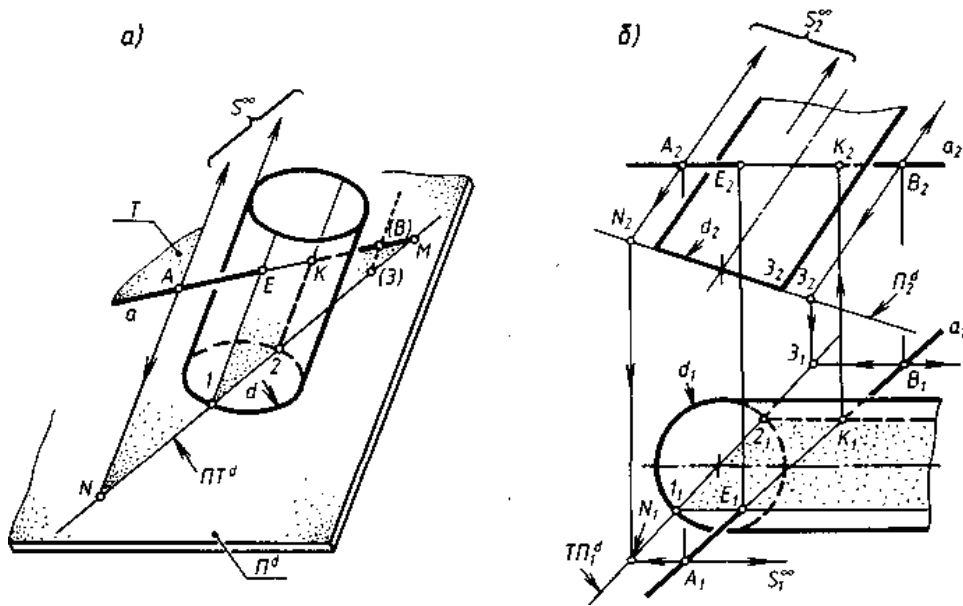


Рис. 142.

Визначаємо видимість прямої a відносно поверхні Φ . У всіх випадках це можливо визначити за допомогою відомого прийому конкуруючих точок, одна з яких належить заданій прямій, а друга - поверхні (зокрема, її лінії контуру).

Якщо точка M лежить за межами креслення, то площину T задають прямими $S(S^\infty)A$ і $S(S^\infty)B$ (A і B - точки прямої a).

13.9. Спосіб посередників

Розглянемо приклади, коли більш доцільними способами розв'язання задач на побудову точок перетину прямої з поверхнею є додаткове проєкціювання і обертання.

Проекціювання на додаткову площину проєкцій.

Приклад 1 (рис. 143). Необхідно знайти точки перетину прямої a з циліндричною поверхнею обертання Φ .

Розв'язання.

1. Перетворимо циліндричну поверхню Φ у проєкціювальну, введемо додаткову площину проєкцій Π_4 , розташовану перпендикулярно до вісі i ; $i \parallel \Pi_2 \Rightarrow \Pi_4 \perp \Pi_2$. Тоді додатковою проєкцією поверхні Φ на площину Π_4 буде точна лінія: коло Φ_4 , а проєкцією прямої a - пряма a_4 .

2. Застосуємо алгоритм проєкціювальної фігури - алгоритм № 1. Відмітимо додаткові проєкції шуканих точок A_4 і B_4 та зворотним проєкціюванням будемо точки A_2, B_2 і A_1, B_1 , використовуючи належність точок A і B прямої a .

4. Вводимо додаткову площину проєкцій Π_4 , що паралельна площині T ($x_{14} \parallel T^1$). Тоді коло r спроекціюється на Π_4 без спотворення ($r_4 = r$), а пряма a зобразиться у вигляді прямої a_4 .

5. Відмічаємо додаткові проєкції шуканих точок: $A_4(B_4) = a_4 \cap r_4$.

6. Зворотним проєкціюванням знаходимо точки A_1, B_1 і A_2, B_2 , використовуючи їхню належність прямій a .

Тут використано поєднання двох способів: посередника і додаткового проєкціювання. В загальному випадку при визначенні точок перетину прямої лінії з поверхнею зручно використовувати проєкціювання на додаткову площину проєкцій, якщо на цю площину проєкціюється у вигляді точної лінії контур поверхні або її переріз, розташований у тій самій площині-посереднику, що і задана пряма a .

Обертання.

Приклад 1 (рис. 145). Необхідно визначити точки перетину прямої a з тором Φ . Пряма a і вісь тора i перетинаються у точці 1.

Розв'язання. Через пряму a проводимо фронтально-проєкціювальну площину-посередник T ; вісь тора - пряма i належить площині T ; так як $i \perp \Pi_2$ і $a \cap i = 1$, то $T \cap \Phi = r$ (r - коло).

2. Повернемо площину T і розташовані в ній лінії навколо вісі i до горизонтального положення T . Тоді пряма a займе положення a' , коло r - положення r' ($r' = r^\circ$; r° - твірна тора).

3. Відмітимо точки перетину прямої a з твірною тора: $A'(B') = a' \cap r'$.

4. Зворотним обертанням $T' \rightarrow T$ знаходимо точки A і B ($A' \rightarrow A, B' \rightarrow B$): $A(B) = a \cap r \Leftrightarrow a \cap \Phi$.

Приклад 2 (рис. 146). Знайти точки перетину прямої a з поверхнею обертання Φ . Крива g - головний меридіан поверхні; a і вісь обертання i перетинаються у точці 1.

Розв'язання.

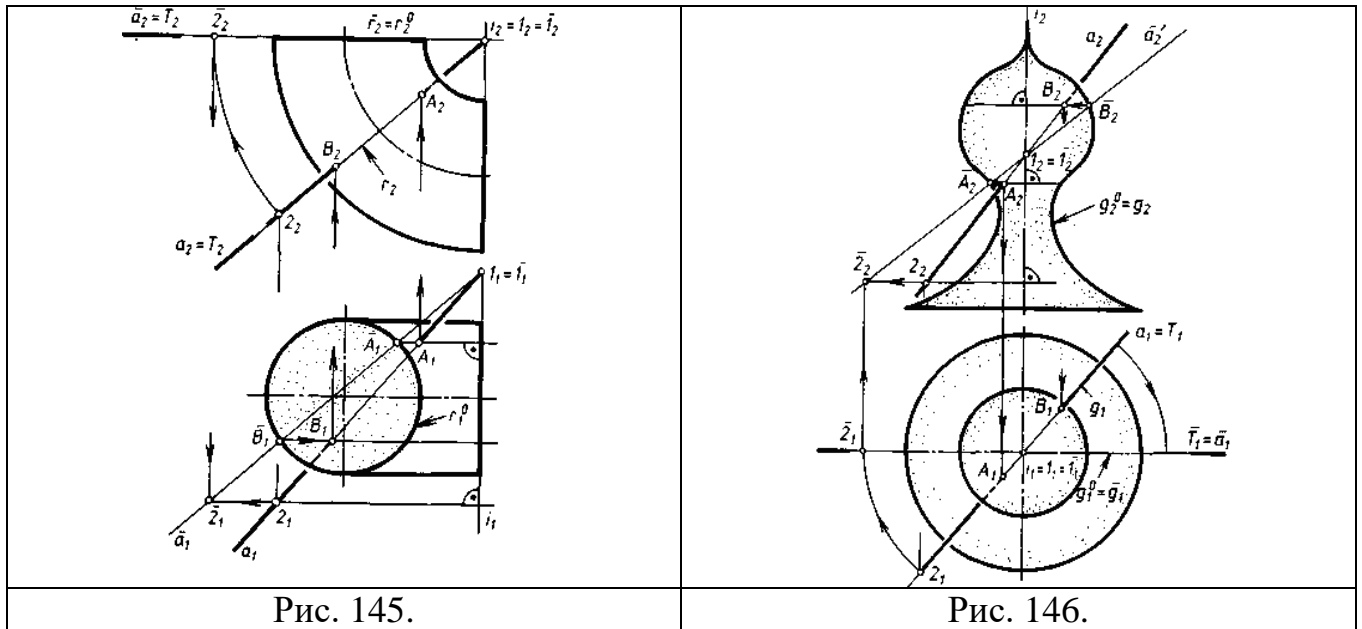
1. Через пряму a і вісь i проведемо площину T : $T = \{a \cap i\}$; $i \perp \Pi_1 \Rightarrow T \perp \Pi_1$. Площина T перетинає поверхню Φ по її меридіану g .

2. Повернемо площину T навколо вісі i до фронтального положення T' ($T' \parallel \Pi_2$). Тоді пряма a займе положення a' , а меридіан g співпаде з головним меридіаном g° : $g \rightarrow g'$; $g' = g^\circ$.

3. Відмічаємо точки A', B' : $A'(B') = a' \cap g^\circ$.

4. Зворотним обертанням $T' \rightarrow T$ знаходимо точки A і B ($A' \rightarrow A, B' \rightarrow B$): $A(B) = a \cap g \Leftrightarrow a \cap \Phi$.

З розглянутих прикладів зрозуміло: якщо пряма перетинає вісь поверхні обертання, то для знаходження точок її перетину із заданою поверхнею зручно використати поєднання посередника з прийомом обертання. Це особливо вигідно, коли нарисом заданої поверхні є складна лекальна (або складова) крива, как, наприклад, на рис. 146.



14. ПОБУДОВА ЛІНІЙ ВЗАЄМНОГО ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ

У загальному випадку лінія перетину двох поверхонь є просторовою кривою, яка іноді розпадається на кілька ліній.

Лінія перетину багатогранників є ламаною лінією; лінія перетину багатогранника з кривою поверхнею складається з частин перерізів поверхні гранями багатогранника.

Проекція лінії перетину поверхонь не може вийти за межі зони перетину однойменних проєкцій контурів поверхонь.

З аналітичної геометрії відомо, що порядок n лінії перетину двох поверхонь порядку n_1 і n_2 дорівнює добутку n_1 і n_2 . Наприклад, тор ($n_1=4$) перетинає поверхню другого порядку ($n_2=2$) по кривій восьмого порядку ($n=8$).

Якщо дві поверхні дотикаються у деякій точці, то лінія перетину цих поверхонь перетинає саму себе у цій точці (це особлива точка кривої – вузол).

Видимість. Для того, щоб креслення було наочним, на епюрі варто визначити видимість: самої лінії m ; нарисів заданих поверхонь; інших ліній заданих поверхонь, наприклад, усіх ребер поверхонь багатогранників.

Проекція будь-якої точки лінії перетину поверхонь вважається видимою на епюрі, якщо вона розташована на видимих лініях обох поверхонь і навпаки.

Видимість лінії перетину визначають окремо для кожної ділянки, обмеженої точками зміни видимості, розташованими лініях контуру кожної поверхні. Видимість усієї ділянки лінії m співпадає з видимістю будь-якої його точки.

Вважаємо, що задані поверхні обмежують єдине геометричне тіло. Лінії контурів поверхонь, розташовані всередині тіла, зображуються суцільною тонкою лінією (наприклад, рис. 167, 168).

Можливо переривати нарис поверхні у найближчому оточенні його

невидимої точки (наприклад, рис. 163, 165, 166).

14.1 Властивості ліній перетину поверхонь. Класифікація окремих випадків побудови лінії перетину поверхонь

1. Симетрія. Якщо дві поверхні мають спільну площину симетрії Σ , то лінія перетину таких поверхонь (лінія m) також симетрична відносно цієї площини (рис. 147).

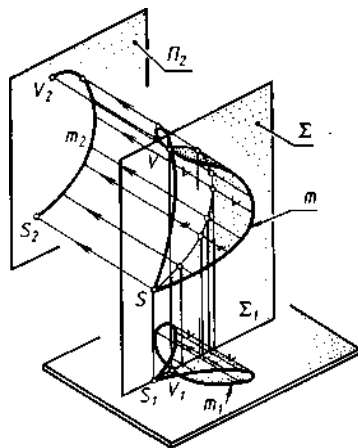


Рис. 147.

Виявляється таке:

1. Проекції симетричних частин лінії m співпадають, якщо загальна площина симетрії Σ паралельна площині проєкцій. На рис. 147 $\Sigma \parallel \Pi_2$, тому фронтальні проєкції видимої і невидимої частин лінії m співпадають, отже m_2 - «подвійна» лінія.

Якщо m - плоска крива, то вона належить проєкціювальній площині і, отже, $m_2 \in$ «подвійною» прямою лінією (якщо $\Sigma \parallel \Pi_2$).

2. Екстремальні точки лінії m розташовані в площині Σ ; рис. 147: $V \subset \Sigma$.

2. Окремі випадки лінії перетину лінійчастих поверхонь з вершиною і напрямною. Якщо лінійчасті поверхні з напрямними d, d', d'', \dots (рис. 148) мають спільну вершину S (власну чи невласну точку), то вони перетинаються по прямим лініям - твірним g, g', g'', \dots , що проходять через точки перетину їхніх напрямних d, d', d'', \dots (A, B, \dots) і спільну вершину S ($S^{(0)}$).

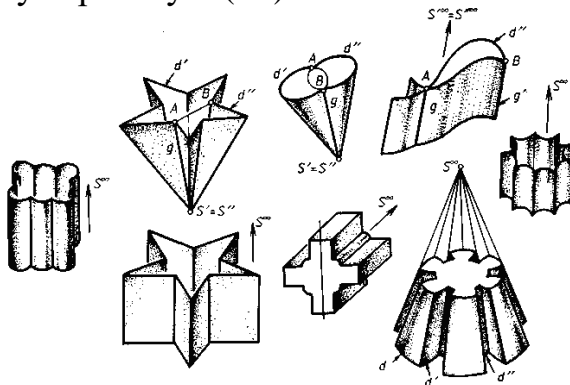


Рис. 148.

3. Властивість лінії перетину співвісних поверхонь обертання.
Співвісними називають поверхні обертання із спільною віссю i (рис. 149).

Теорема. Дві співвісні поверхні обертання перетинаються по колам, число яких дорівнює числу точок перетину головних напівмеридіанів поверхонь.

Справедливість теореми виявляється із закону утворення співвісних поверхонь обертання: точки перетину напівмеридіанів m і m' є спільними для обох поверхонь (рис. 149, б, в), окрім того, кожна з таких точок розташована на паралелі, що одночасно належить обом поверхням.

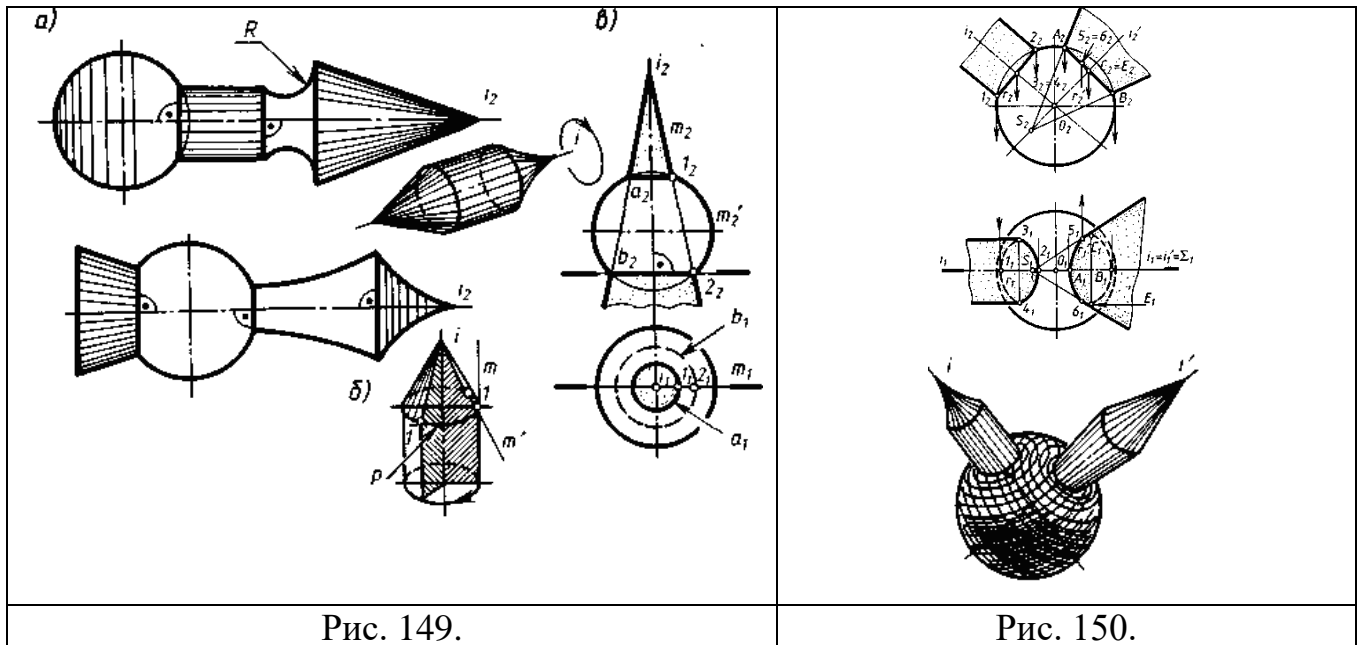


Рис. 149.

Рис. 150.

Площини кіл a і b (по яким перетинаються співвісні поверхні) перпендикулярні до вісі обертання i , тому кола проєкціюються: у відрізки прямих на площину, що паралельна вісі i ; у кола - на площину, перпендикулярну до вісі i ; в еліпси - на будь-яку іншу площину.

Варто зазначити на гарну властивість сфери - вона має безмежну кількість осей: кожний її діаметр - вісь обертання. Тому будь-яка поверхня обертання, вісь якої проходить через центр сфери, співвісна з нею i , відповідно, перетинає сферу по колу.

На рис. 150 показано дві поверхні обертання з вісями $i \supset O$ та $i' \supset O$ (O - центр сфери). Ці поверхні перетинають сферу по колам r ($r \perp i$) та r' ($r' \perp i'$), що проєкціюються на Π_2 у вигляді відрізків «подвійних» прямих (так як спільна площина симетрії $\Sigma \parallel \Pi_2$); а на Π_1 - у вигляді еліпсів.

4. Властивості ліній перетину поверхонь другого порядку (подані без доведення)

Теорема 1. Дві поверхні другого порядку (коротко - квадрики) перетинаються по просторовій кривій четвертого порядку - біквдратній кривій. У загальному випадку проєкцією біквдратної кривої є також біквдратна крива.

Теорема 2. Якщо дві квадрики мають спільну площину симетрії Σ , то лінія їхнього перетину ортогонально проєкціюється на цю площину у коніку (наприклад, рис. 161, 168, 181).

Знання конкретного виду коніки - лінії-проєкції шуканої кривої корисно враховувати до початку графічного розв'язання задачі – це спрощує побудову і сприяє одержанню точніших результатів. У табл. 6 наведено основні дані про проєкції ліній, що одержуються при перетину поверхонь обертання, якщо виконуються умови теореми 2.

Таблиця 6

Одержувана проєкція	Поверхні обертання		
	без особливих умов		
		з умовами, крім основних	
Гіпербола	Циліндричні Конічні Параболоїди Гіперболоїди Еліпсоїди розтягнуті	У будь-яких комбінуваннях	Обидві поверхні - стиснуті еліпсоїди
Рівностороння гіпербола	Обидві поверхні – циліндричні. Обидві поверхні - параболоїди Циліндрична і параболоїд		Обидві поверхні - конічні, с рівними кутами при вершинах конусів. Обидві поверхні – подібні еліпсоїди
Парабола	Сфера з поверхнями: циліндричною, конічною, параболоїдом, гіперболоїдом, еліпсоїдом		
Еліпс	Стиснений еліпсоїд з поверхнями: циліндричною, конічною, параболоїдом, гіперболоїдом, розтягнутим еліпсоїдом		

Лінія перетину двох квадрик може розпастися на дві, три і чотири складові. Сума порядков складових дорівнює 4. Можливі такі варіанти розпадів: а) $4 = 3+1$; б) $4 = 2+2$; в) $4 = 2+1+1$; г) $4 = 1+1+1+1$.

Найцікавішим є випадок «б», коли біквдратна крива розпадається за певних умов на дві коніки. Ці умови визначають теореми 3, 4, 5 (за Є.А. Глазуновим).

Теорема 3. Якщо дві квадрики мають спільну коніку, то вони перетинаються ще по одній коніці.

На рис. 151 зображено циліндрична і конічна поверхні другого порядку, що мають спільну напрямну - коло d .

За теоремою 3, невивставаючою складовою лінії перетину цих поверхонь має бути ще одна коніка – еліпс b . Спільна площина симетрії Σ обох поверхонь паралельна Π_2 , тому b_2 є відрізком прямої.

Теорема 4. Якщо дві квадрики мають дотик у двох точках, то лінія їхнього перетину розпадається на дві коніки, що проходять через точки дотику.

Цю теорему (про подвійний дотик) ілюструє приклад (рис. 151), коли дано поверхні колового та еліптичного циліндрів, що дотикаються одне одного у

точках A і B і мають спільну площину симетрії Σ ($\Sigma \parallel \Pi_2$).

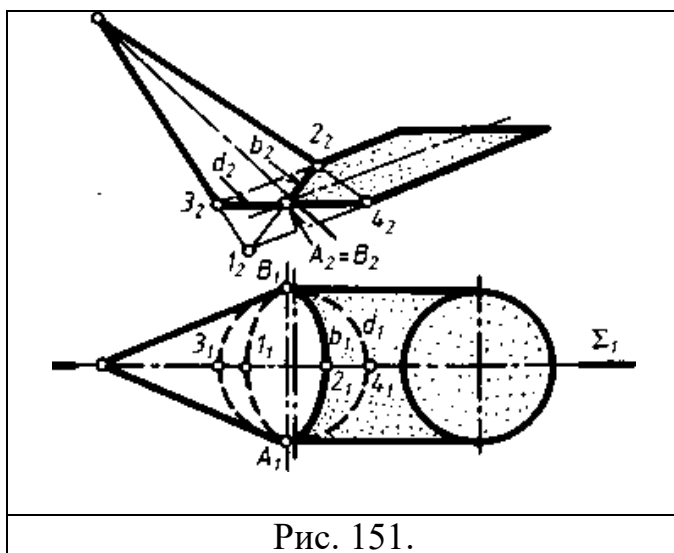


Рис. 151.

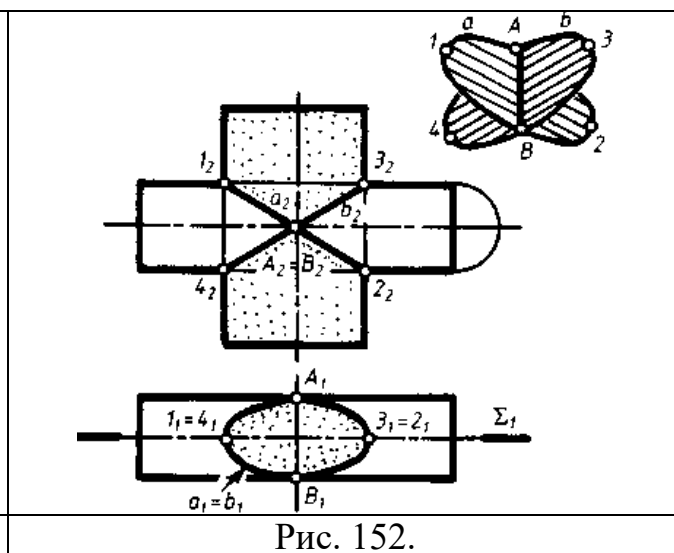


Рис. 152.

За теоремою 4, лінія перетину заданих квадрик розпадається на два еліпси - a і b , площини яких перетинаються по прямій AB . Фронтальні проєкції цих еліпсів - лінії a_2 і b_2 є відрізками «подвійних» прямих, так як $\Sigma \parallel \Pi_2$ (видима і невидима частини еліпсів a і b при проєкцію ванні на Π_2 співпадають).

Теорему 4 часто використовують для пошуку «колових» перерізів поверхонь другого порядку. При цьому використовують сферу, тому що будь-яким її плоским перерізом є коло.

На рис. 153 і 154 показано побудову «колових» перерізів поверхонь еліптичного циліндра і трьохосного еліпсоїда за допомогою сфери, що дотична до цих поверхонь у точках A і B .

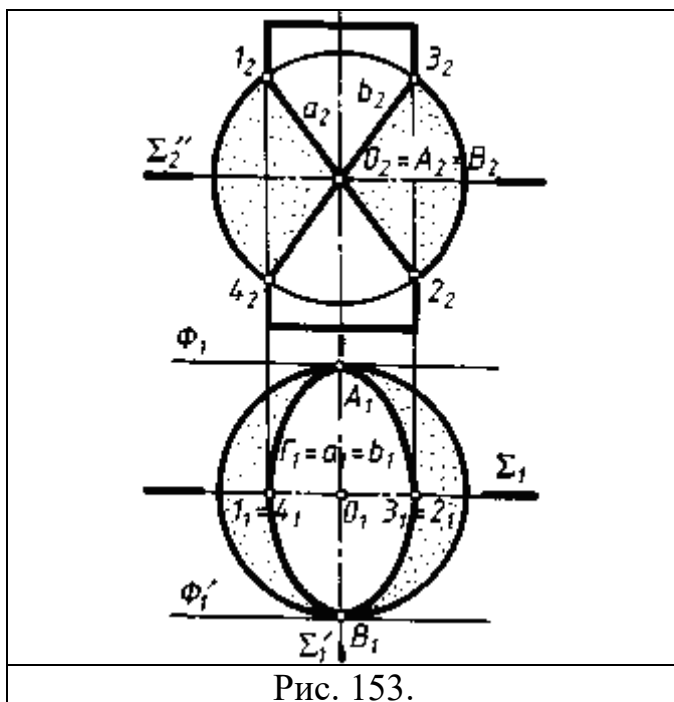


Рис. 153.

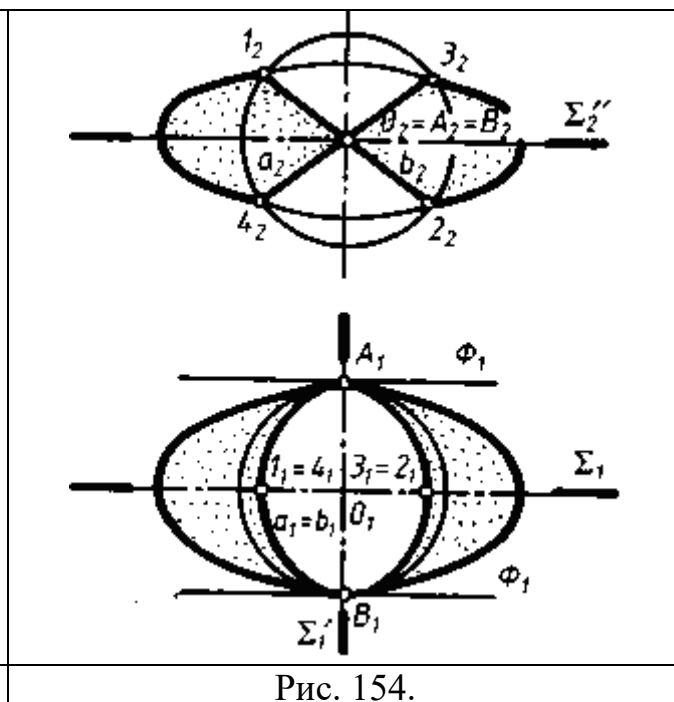


Рис. 154.

Теорема 5 (теорема Гаспара Монжа). Якщо дві квадрики описані навколо третьої квадрики або вписані в неї, то лінія їхнього перетину розпадається на дві коніки (ця теорема є наслідком теореми 4).

Теорему Г. Монжа ілюструють приклади, що показано на рис. 155, а, б (дві циліндричні поверхні другого порядку описані навколо сфери) і на рис. 156 (дві конічні поверхні описані навколо сфери). На рис. 155 біквдратна крива розпадається на дві замкнені коніки – еліпси a і b . На рис. 156 біквдратна крива розпадається на еліпс a і параболу b (з невласною вершиною - точкою 4^∞).

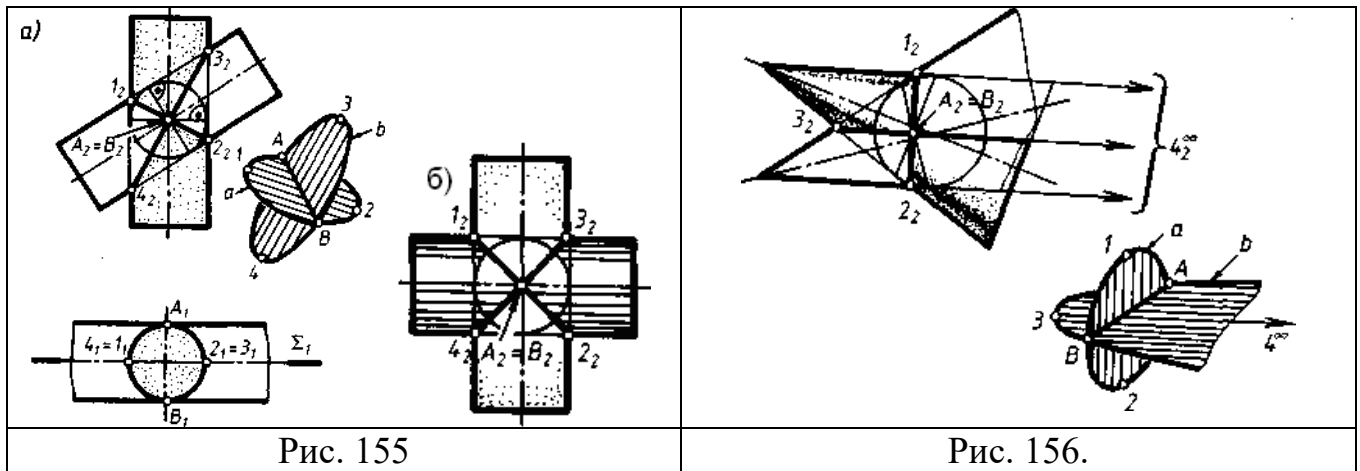


Рис. 155

Рис. 156.

На рис. 157 також ілюстровано теорему Монжа, коли навколо сфери описано конічну і циліндричну поверхні обертання. Лінія перетину розпадається на два еліпси a і b , що перетинаються в точках A і B . У точках A і B перетинаються кола, по яким задані поверхні дотикаються сфери. Ці точки є точками подвійного дотику, так як в них задані поверхні є дотичними одна одній і сфери.

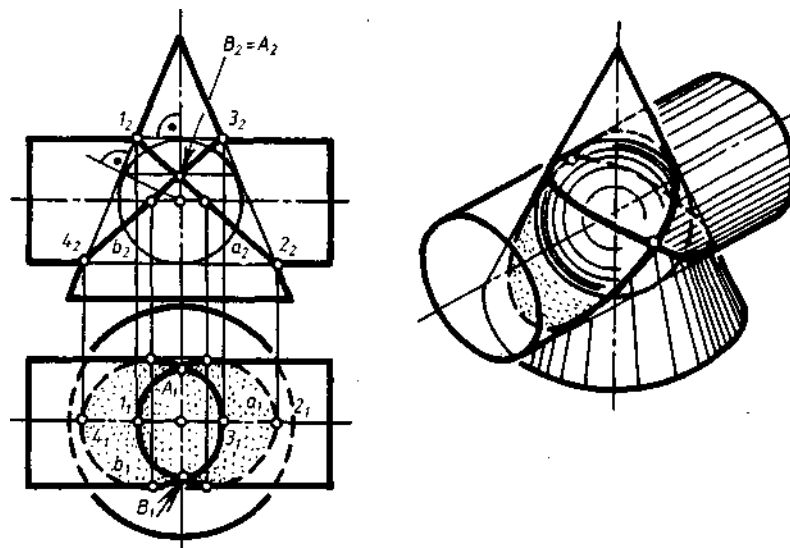


Рис. 157.

У наведених прикладах спільна площина симетрії $\Sigma \parallel \Pi_2$, тому a_2 і b_2 є відрізками подвійних прямих. Лінії a_1 і b_1 побудовані за належністю еліпсів a і b конічній поверхні.

Властивості ліній перетину поверхонь, сформульовані в теоремах 1-5, поширено застосовуються у техніці, архітектурі, дизайні, прикладному мистецтві і науці. Використовуючи зазначені властивості ліній перетину деяких поверхонь і закони їхнього проєкціювання, можливим є значне полегшення розв'язання багатьох задач на побудову ліній перетину поверхонь. Можливо віднести до самостійних окремих випадків або базових під задач. Наприклад, у складних задачах звертаються до підзадачі побудови лінії перетину сфери з співвісною з нею поверхнею обертання (рис. 150).

5. Класифікація окремих випадків

Окремі випадки побудови лінії перетину двох поверхонь можливо поділити на дві основні групи:

- 1) колт лінією перетину або її проєкцією є точна лінія – пряма чи коло;
- 2) коли в перетину бере участь хоча о одна проєкціювальна поверхня.

На рис. 158 подано коротки графічний огляд окремих випадків 1-ї групи з використанням вищезазначених властивостей ліній перетину деяких поверхонь.

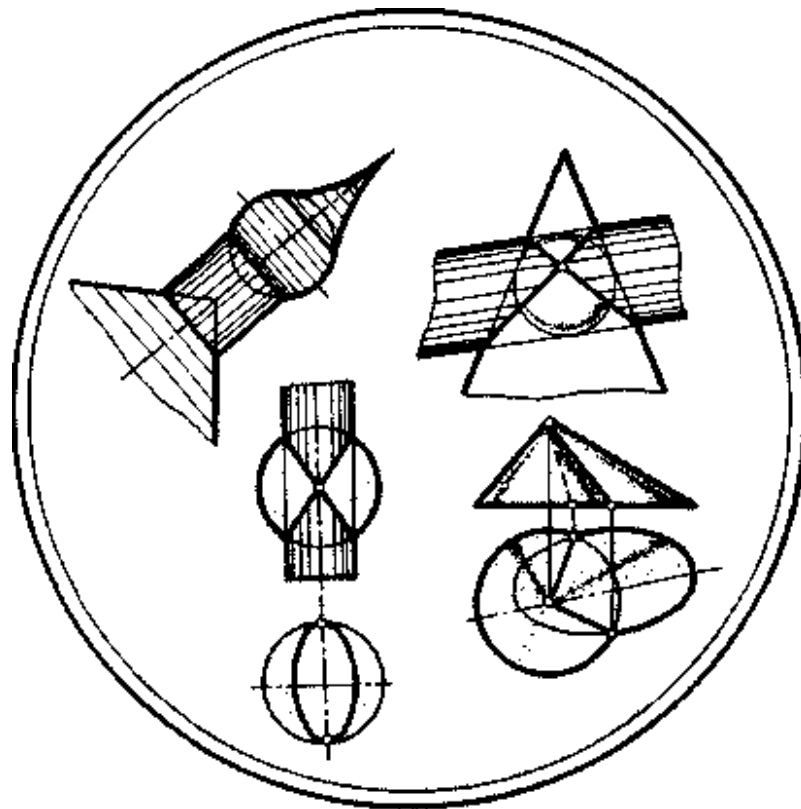


Рис. 158.

14.2. Побудова лінії перетину двох проєкціювальних поверхонь

Можливі три варіанти взаємного сполучення тіл, що обмежені двома проєкціювальними поверхнями: призма перетинає призму; призма перетинає циліндр; циліндр перетинає циліндр.

Якщо перетинаються дві однойменно проєкціювальні поверхні (наприклад, горизонтально-проєкціювальні призми або циліндри), то лініями їхнього

перетину служать однойменно проєкціювальні прямі. Якщо перетинаються неоднойменні проєкціювальні поверхні (призма і циліндр), то лініями їхнього перетину є: 1) ламані лінії, якщо призма перетинає призму (рис. 159); 2) лінії, складені з ділянок перервизів поверхні циліндра, якщо призма перетинає циліндр (рис. 160); 3) просторові криві, якщо циліндр перетинає циліндр (рис. 161).

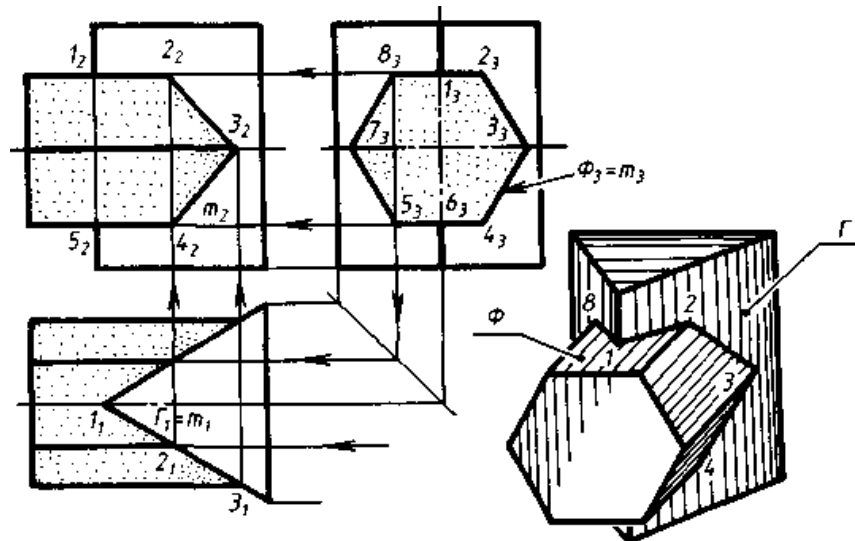


Рис.159.

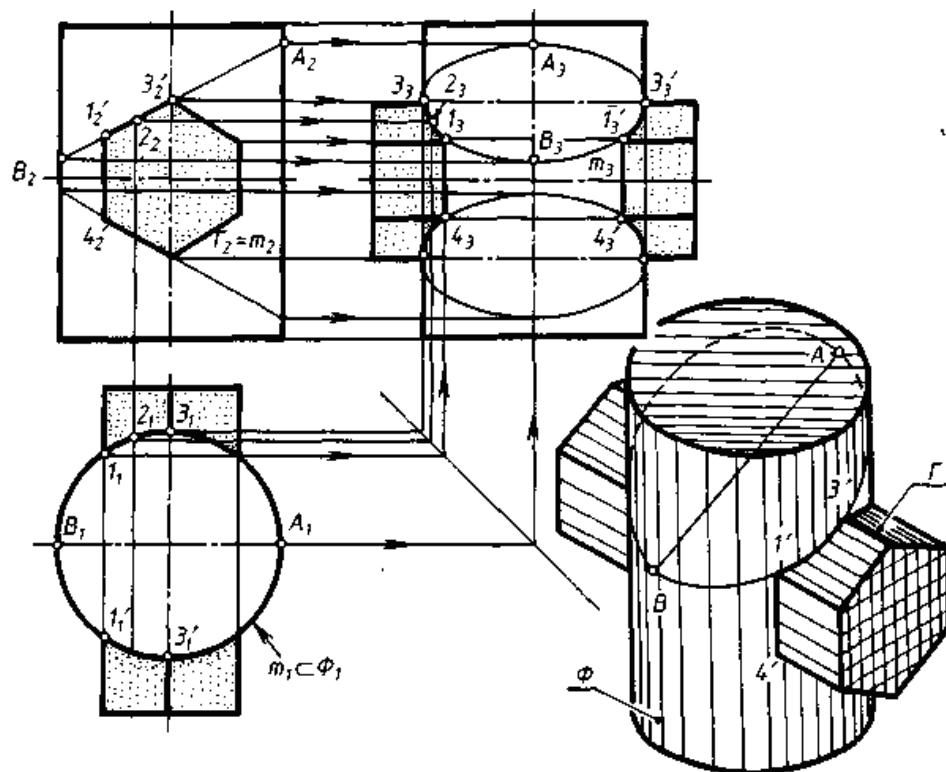


Рис. 160.

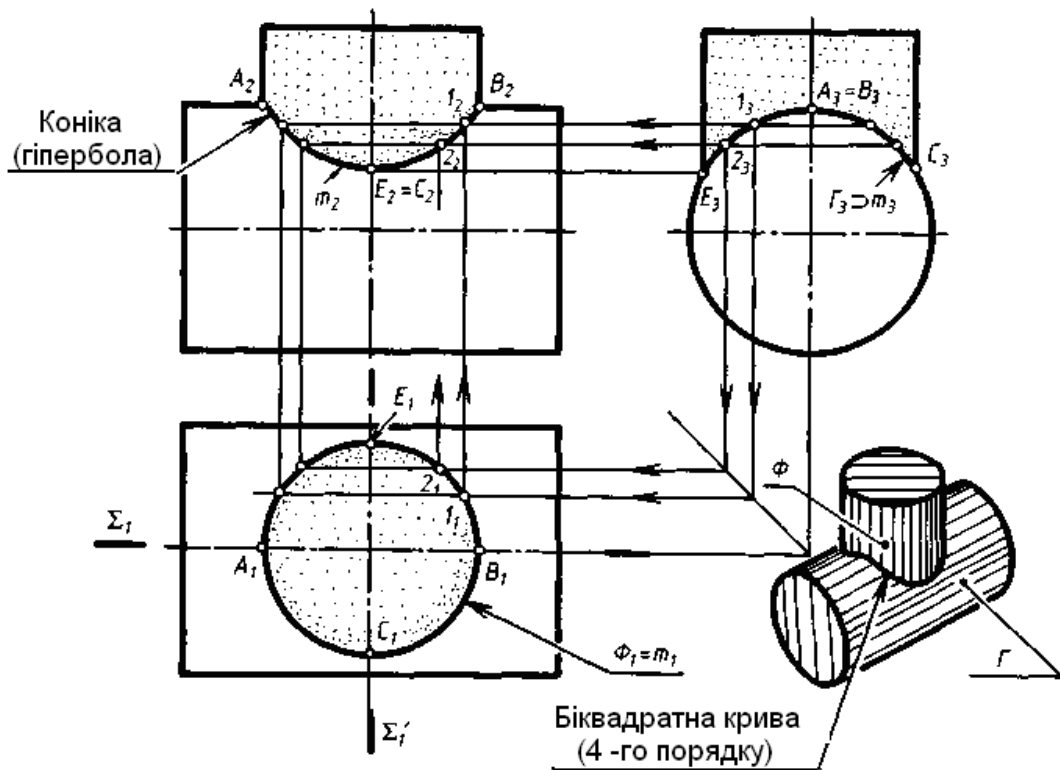


Рис. 161.

Позначимо поверхні Γ і Φ , а лінію їхнього перетину m . Якщо обидві поверхні Γ і Φ - проєкціювальні, то обидві проєкції лінії m відомі:

1. Якщо $\Gamma \perp \Pi_2$ і $\Phi \perp \Pi_1$, то $m_2 \subset \Gamma_2$ і $m_1 \subset \Phi_1$; m_3 ?
2. Якщо $\Gamma \perp \Pi_3$ і $\Phi \perp \Pi_2$, то $m_3 \subset \Gamma_3$ і $m_2 \subset \Phi_2$; m_1 ?
3. Якщо $\Gamma \perp \Pi_1$ і $\Phi \perp \Pi_3$, то $m_1 \subset \Gamma_1$ і $m_3 \subset \Phi_3$; m_2 ?

Третю проєкцію лінії перетину можливо знайти різними способами:

а) за належністю цієї лінії будь-якій із заданих поверхонь (відповідно до алгоритму № 1);

б) використовуючи закон побудови третьої проєкції лінії за двома даними двома проєкціями;

в) поєднуючи способи а і б.

За вищевикладеними правилами, побудовані проєкції ліній перетину поверхонь, зображених на рис. 159-161.

У будь-якому випадку необхідно перш за все дослідити вид шуканої лінії і властивості її проєкцій. Наприклад, знаючи, що похилі грані шестигранної призми (рис. 160) перетинають циліндричну поверхню по еліпсам, корисно спочатку побудувати (тонкими лініями) увесь еліпс перерізу, а потім виокремити на ньому (відповідними лініями) ті ділянки, що належать грані заданої призми.

Або, знаючи, що біквдратна крива, одержана в результаті перетину двох циліндричних поверхонь другого порядку (рис. 161), проєкціюється на Π_2 у вигляді коніки ($\Pi_2 \parallel \Sigma$, Σ - спільна площина симетрії заданих поверхонь), цю коніку побудувати нескладно (аналітично доводять, що у даному випадку цієї конікою служить гіпербола).

14.3. Побудова лінії перетину проєкціовальної поверхні з проєкціовальною

Якщо проєкціовальна поверхня Γ (циліндрична чи призматична) перетинає будь-яку іншу непроєкціовальну поверхню Φ (рис. 162), то побудову лінії перетину поверхонь Γ і Φ (лінія - m) здійснюємо за алгоритмом № 1: якщо $\Gamma \perp \Pi_2$, то $m_2 \subset \Gamma_2$ (або $m_2 = \Gamma_2$); якщо $\Gamma \perp \Pi_1$, то $m_1 \subset \Gamma_1$ (або $m_1 = \Gamma_1$); якщо $\Gamma \perp \Pi_3$, то $m_3 \subset \Gamma_3$ (або $m_3 = \Gamma_3$). Будь-яку іншу проєкцію шуканої лінії m будуємо за її належністю непроєкціовальній поверхні Φ .

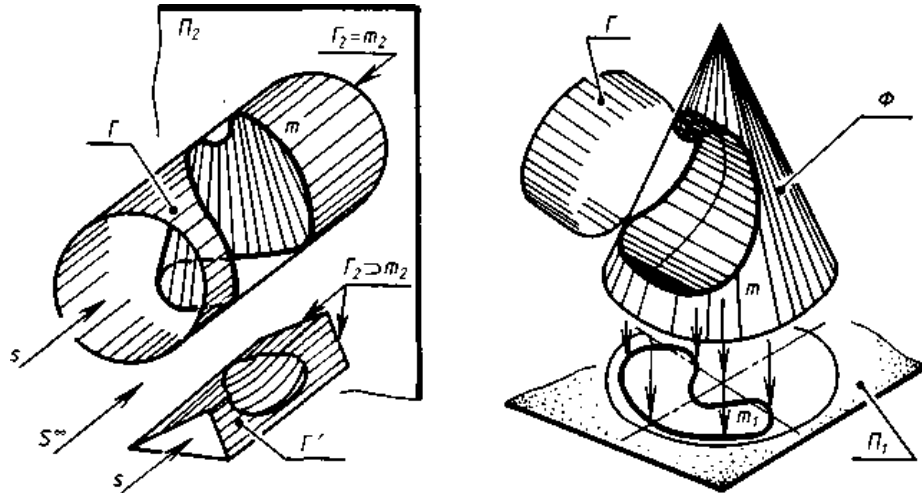


Рис. 162

Так, на рис. 162 проєкціовальна поверхня циліндра Γ перетинає конічну поверхню Φ по просторовій кривій m . $\Gamma \perp \Pi_2$, тому $m_2 \subset \Gamma_2$, а горизонтальну проєкцію m_1 лінії m будуємо за її належністю поверхні конуса Φ .

На рис. 163 подано побудову лінії перетину фронтально-проєкціовальної поверхні призми Γ з конічною поверхнею Φ .

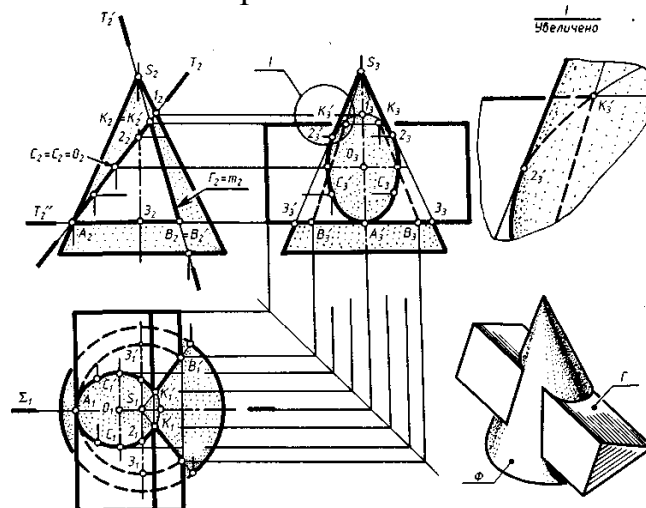


Рис. 163.

Площини T , T' , T'' граней призми перетинають поверхню Φ по: еліпсу, прямим, колам (відповідно). Ділянки цих ліній з'єднуються одна з одною в точках A , K і K' , B і B' (де ребра призми перетинають поверхню Φ) і утворюють шукану

лінію m . Ця лінія m проєкціюється на Π_2 у вигляді «подвійного» трикутника $m_2 = \Gamma^2$; а горизонтальну і профільну проєкції лінії m будуюмо за її належністю конічній поверхні Φ .

На рис. 164 показано побудову проєкцій лінії перетину коноїда з фронтально-проєкціовальною поверхнею призми Γ : $m = \Phi \cap \Gamma$. Напрямними коноїда слугують лінії d ($d \perp \Pi_1$) і d' (d' – напівколо, площина якого перпендикулярна до Π_1). Площиною паралелізму коноїда є горизонтальна площина проєкцій Π_1 .

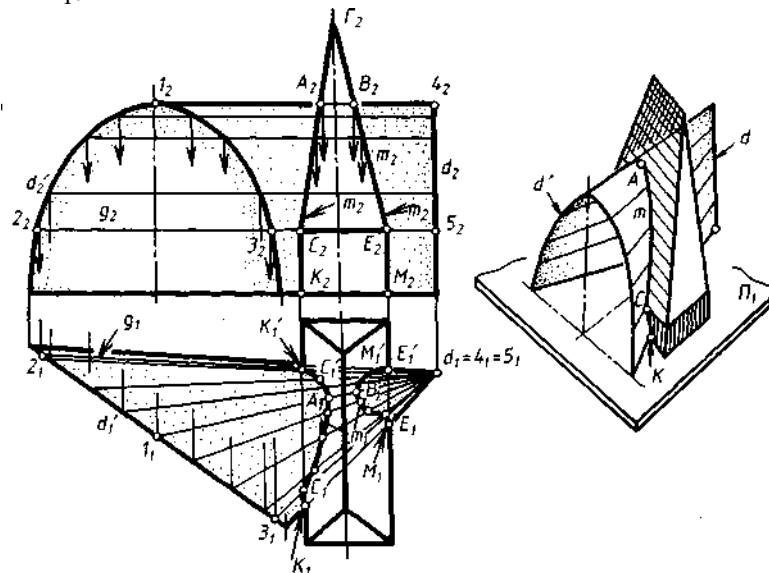


Рис. 164.

Бічні грані призми перетинають коноїд по лінії m , поділеній на дві частини m' і m'' (з найвищими, екстремальними точками A і B). Ребра призми перетинають коноїд у точках K (K'), C (C') і M (M'), E (E'); $\Gamma \perp \Pi_2 \Rightarrow m_2 \subset \Gamma_2$. Горизонтальну проєкцію лінії m – лінію m_1 (також поділену на дві частини) будуюмо за належністю точок лінії m коноїду: кожна точка коноїда розташована на твірній коноїда – прямій g , що перетинає обидві напрямні коноїда і паралельна площині паралелізму Π_1 .

Побудову проєкцій лінії перетину тора з горизонтально-проєкціовальною поверхнею призми наведено на рис. 165. Площини граней призми перетинають тор по двом колам (фронтальна площина T' грани, що утворена ребрами a і e) і двом плоским кривим четвертого порядку (площини двох інших граней). Ділянки цих ліній з'єднуються одна з одною у точках A, B, E і C, K , в яких ребра призми перетинають тор. Лінія m складається з ділянок цих кривих. Для кращого уявлення характеру лінії m , зручно зробити її начерк від руки, як це показано на рис. 165, б.

Лінія m проєкціюється на площину Π_1 у вигляді трикутника $m_1 = \Gamma_1$, а фронтальна проєкція цієї лінії будується за належністю її точок тору: кожна точка тора належить колу-паралелі тора, площина T якої перпендикулярна до вісі обертання тора - прямої i .

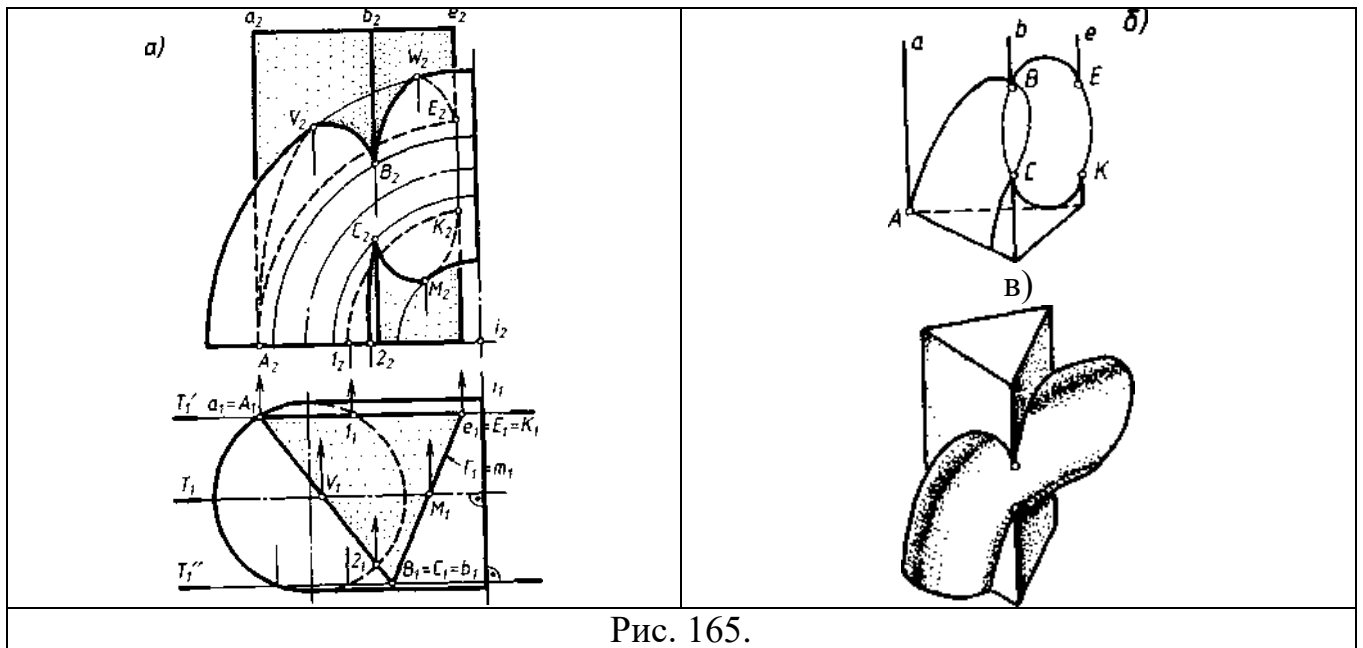


Рис. 165.

На рис. 166 подано приклад побудови лінії перетину поверхні тора Φ з фронтально-проекціоувальною поверхнею Γ . Шуканою лінією слугує просторова крива восьмого порядку - лінія m , що має дві площини симетрії Σ і Σ' . Лінія m проєкціюється на Π_2 дугою кола $m_2 \subset \Gamma_2$, а горизонтальну і профільну проєкції лінії m будемо за її належністю поверхні тора Φ : кожна точка цієї лінії розташована на відповідному колі-паралелі тора; на Π_3 лінія m проєкціюється у вигляді «подвійної» кривої m_3 , так як $\Sigma' \parallel \Pi_3$. Точки K і E є екстремальними; у найнижчій точці S лінія m перетинає сама себе; в точках A і B (A' і B'); V і W (V' і W'); K , E і S змінюється видимість лінії m при проєкціюванні її на площини Π_1 , Π_2 , Π_3 відповідно.

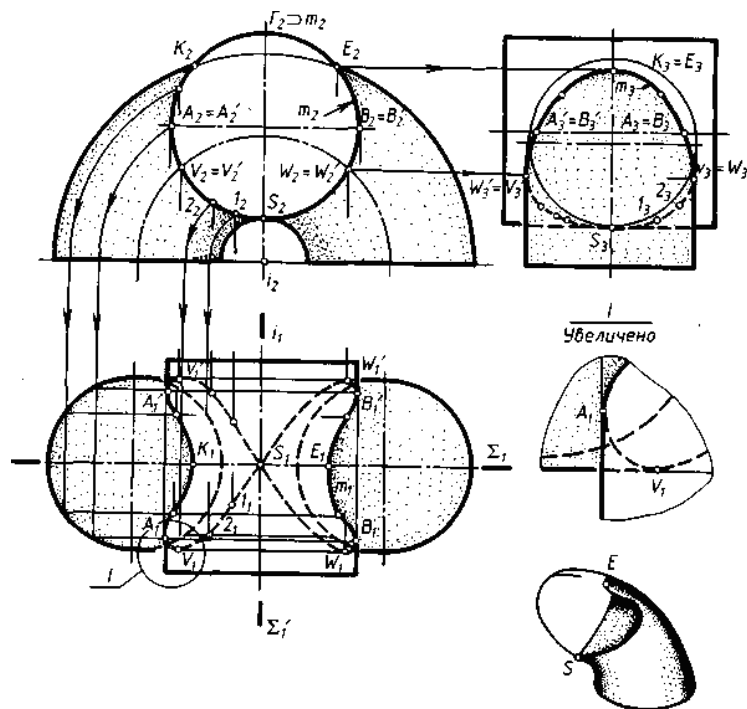


Рис. 166.

На рис. 167 показано побудову на епюрі лінії перетину горизонтально-проекціювальної циліндричної поверхні Γ з параболоїдом обертання Φ : $m = \Gamma \cap \Phi$.

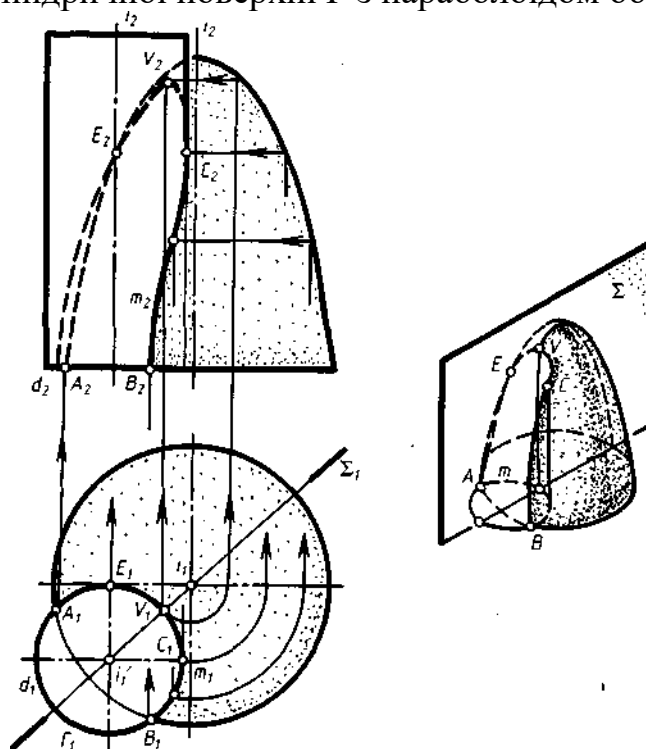


Рис. 167.

Обидві задані поверхні мають спільну площину симетрії Σ , отже, лінія m також симетрична відносно площини Σ ($\Sigma \parallel \Pi_2$); $\Rightarrow \Gamma \perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 \subset \Gamma_1$. Опорними точками лінії m слугують: екстремальна точка ($V \in \Sigma$); точка C , в якій змінюється видимість лінії m при її проєкціюванні на Π_2 ; найнижчі точки A і B ; найбільш віддалена від спостерігача (при погляді спереду) точка E ($Y^E = \min$).

Біквдратна крива m проєкціюється на Π_2 у вигляді кривої m_2 , яку будуюмо за належністю точок лінії m параболоїду обертання Φ ; кожна точка розташована на своїй паралелі (коло), площина якої перпендикулярна до вісі i .

14.4. Спосіб площин-посередників

Основою цього способу слугують окремі випадки побудови точних ліній – перерізів поверхонь, класифікація яких подана раніше (рис. 116).

При побудові ліній перетину поверхонь способом посередників використовують алгоритм № 2, іноді алгоритм № 3.

Посередники – площини рівня. Якщо лінії рівня заданих поверхонь – горизонталі, фронталі чи профільні прямі є точними лініями, то в якості допоміжних площин-посередників T зручно використовувати відповідні площини рівня.

Сутність застосування площин рівня в якості посередників показано на рис. 168. Дано: дві поверхні обертання: еліпсоїд і конічна поверхня; вісі заданих поверхонь i та i' розташовані перпендикулярно до площини Π_1 .

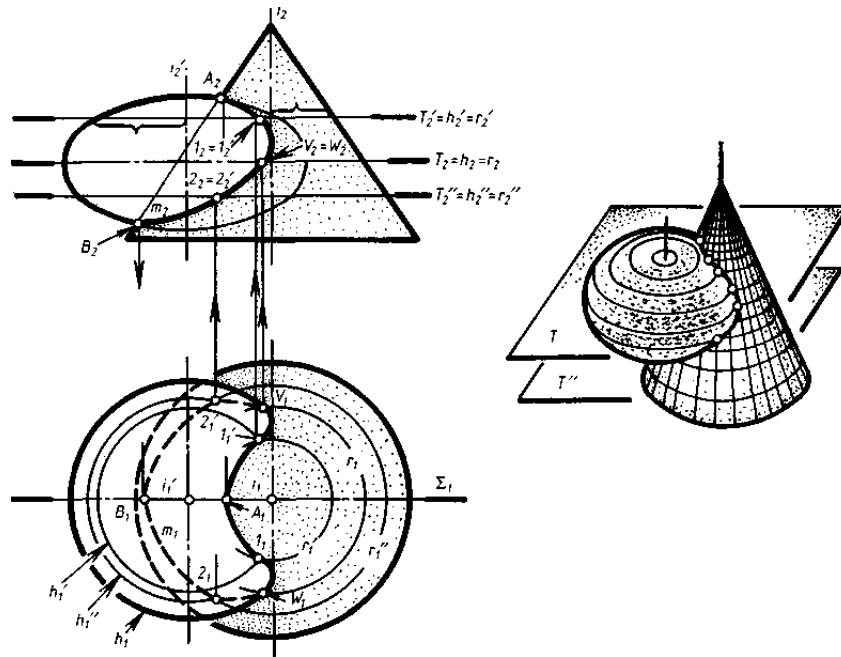


Рис. 168.

Будь-яка площина-посередник T (T' , T'' ,...), паралельна площині Π_1 , перетне обидві задані поверхні по паралелям h і r , які спроекціюються на Π_1 колами h_1 і r_1 . Точки перетину кіл, розташованих в одній площині T , що належить шуканій лінії перетину заданих поверхонь: $h \cap r = V(W)$; $h' \cap r' = 1(1')$;... . Усі такі задачі розв'язуються за алгоритмом № 2.

Площина $\Sigma \parallel \Pi_2$, тому шукана біквадратна крива m проєкціюється на Π_2 у «подвійну» криву - коніку m_2 (m_2 - парабола).

У даному прикладі за допомогою горизонтальних площин-посередників можуть бути знайдені будь-які проміжні точки шуканої лінії і точки на екваторі еліпсоїда - точки V і W , в яких змінюється видимість шуканої лінії при проєкціюванні її на площину Π_1 . Інші опорні точки будуються за допомогою за допомогою інших посередників. Наприклад, екстремальні точки A і B визначаємо за допомогою інших посередників: вони розташовані у загальній площині симетрії заданих поверхонь – у фронтальній площині Σ ($\Sigma \parallel \Pi_2$), тому точки A_2 і B_2 знаходимо як точки перетину нарисів на Π_2 заданих поверхонь. Точки A_2 і B_2 визначають Z_{\max} і Z_{\min} для площин-посередників.

Посередники – площини загального положення. У якості площин-посередників можуть бути обрані площини загального положення. Найбільш часто вони застосовуються, якщо у перетині беруть участь лінійчасті поверхні з вершиною і напрямною.

Застосування площин загального положення у якості посередників розглянемо на прикладах розв'язання задач способом пучка площин.

Спосіб пучка площин (спосіб «хитної» площини). Якщо необхідно побудувати лінію взаємного перетину двох поверхонь з вершиною і напрямною, то в загальному випадку використовують у якості посередників такі площини T , які проходять одночасно через вершини обох заданих поверхонь і, відповідно, перетинають кожену поверхню по прямим-твірним, що містять точки шуканої лінії

перетину (рис. 116, в).

Площини T , що проходять через вершини заданих поверхонь, утворюють пучок площин, віссю якого слугує пряма, що проходить через вершини S (S') і S^∞ ($S^{\infty'}$). Віссю пучка площин може бути як власна, так і не власна пряма (в останньому випадку площини T взаємно паралельні). Наприклад, при перетині двох конічних поверхонь віссю пучка площин-посередників T слугує власна пряма SS' (рис. 169). Усі задачі такого типу розв'язують за алгоритмом № 2.

Розглянемо приклади побудови лінії перетину поверхонь з вершиною і напрямною (з чотирьох типів таких поверхонь можливі десять їх різних комбінувань: конус-конус, конус-піраміда, конус-циліндр, конус-призма, піраміда-піраміда, піраміда-циліндр, піраміда-призма, циліндр-циліндр, циліндр-призма, призма-призма).

Приклад 1 (рис. 169, 170). Побудувати лінію взаємного перетину поверхонь двох конусів з вершинами S і S' і напрямними - кривими d і d' ; $d \subset \Pi^d \supset d'$.

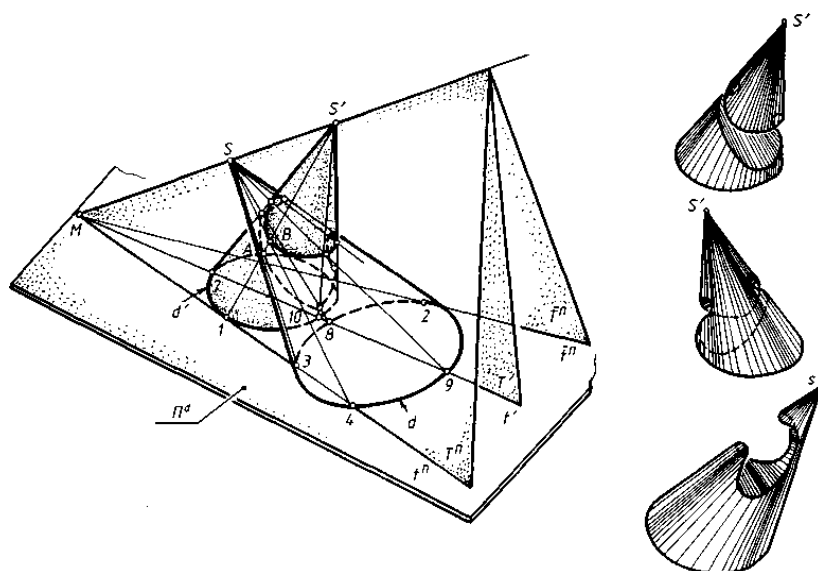


Рис. 169.

Розв'язання. На рис. 169 проілюстровано спосіб побудови лінії перетину двох заданих поверхонь, а на рис. 170 ця задача розв'язана на епюрі.

Побудову здійснюємо за алгоритмом № 2.

1. У якості посередників обираємо площини T , що проходять через вісь пучка - пряму SS' . Знаходимо точку перетину прямої SS' з площиною Π^d , в якій розташовані лінії d і d' : $M = SS' \cap \Pi^d$.

2. Будуємо сліди площин T (прямі t', t'', t''', \dots) на площині Π^d . Попередньо необхідно побудувати сліди граничних площин T (T^n і $T^{n'}$) - прямі t^n і $t^{n'}$. Гранична площина T^n дотикається конічної поверхні з вершиною S' по твірній $S'-1$ і перетинає другу конічну поверхню з вершиною S по двом твірним $S-3, S-4$; перший граничний слід - пряма t^n дотикається напрямної d' у точці 1 і перетинає другу напрямну d у точках 3 і 4.

Друга гранична площина $T^{n'}$ дотикається конічної поверхні з вершиною S по твірній $S-2$ і перетинає другу конічну поверхню з вершиною S' по двом твірним

S'-5 і S'-6; її слід на площині Π^d - пряма t''' (рис. 169).

Тоді будь-яка площина T , слід t якої розташований між граничними слідами t'' і t''' , перетинає обидві задані поверхні по двом твірним. Проведемо, наприклад, слід $t' = T \cap \Pi^d$.

3. Будуємо твірні, по яким площина T' перетинає задані поверхні. Для цього відмічаємо точки перетину напрямних d і d' з прямою t' : $t' \cap d = 8; 9$; $t' \cap d' = 9; 10$. Потім проведемо шукані твірні: S-8, S-9; S'-7; S'-10.

4. Відмічаємо точки перетину побудованих твірних.

5. Повторюємо попередні операції потрібну кількість разів, знаходимо точки, що належать шуканій лінії.

6. Знайдені точки послідовно з'єднуємо плавною кривою лінією відповідно порядку твірних будь-якої з двох поверхонь.

7. Визначаємо видимість на епюрі побудованої кривої.

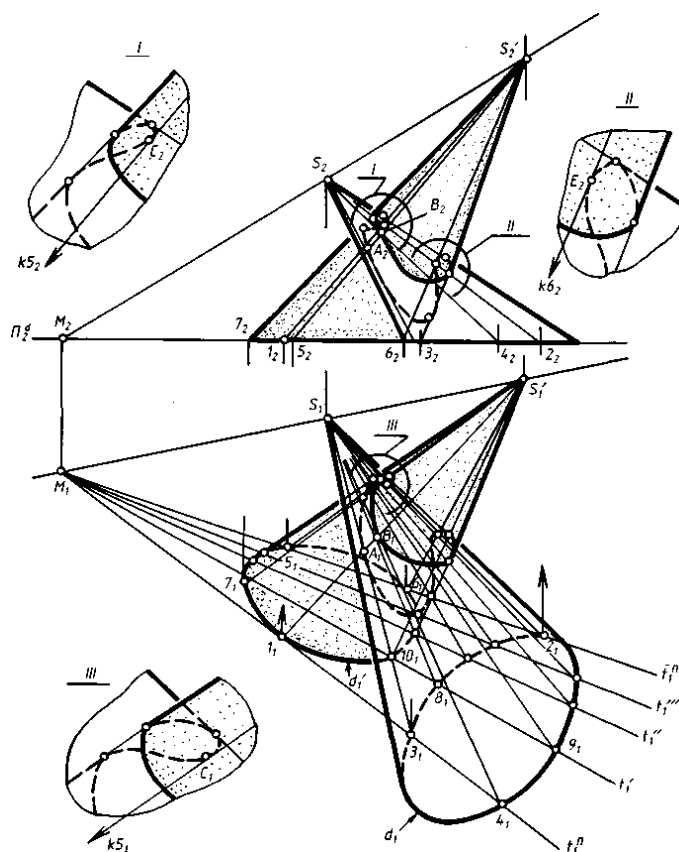


Рис. 170.

У загальному випадку необхідно побудувати десять площин T , в яких розташовані опорні точки: дві граничні площини і вісім площин, що містять обрисні лінії заданих поверхонь. У даному випадку достатньо побудувати не десять, а вісім таких площин.

На епюрі (рис. 170) окремі ділянки (вузли) шуканої лінії подано з деяким збільшенням - I, II, III.

Характер лінії перетину поверхонь – взаємного врізання одного тіла в інше – можливо встановити за видом взаємного розташування ліній d і d' – напрямних лінійчастих поверхонь і слідів граничних площин - прямих t'' і t''' (рис. 171).

Перетин (врізку) вважаємо повним, якщо всі твірні хоча б однієї поверхні перетинають іншу поверхню. В цьому випадку лінія перетинурозпадеться на дві гілки - криву входу і криву виходу (наприклад, рис. 159-161; 171,а; 173). В окремому випадку гілки можуть перетинатися в одній або двох точках (рис. 157, 171, б, г).

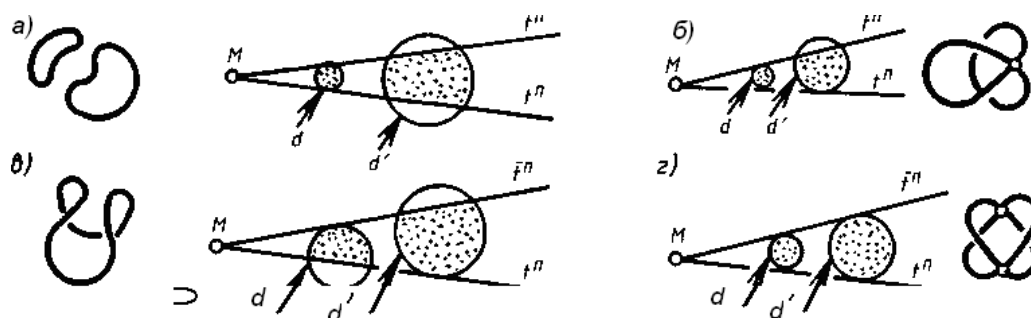


Рис. 171.

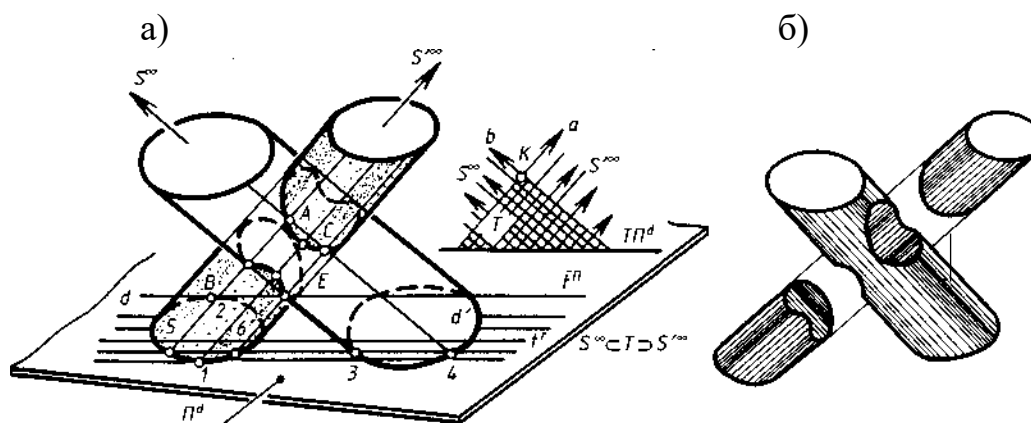


Рис. 172.

В інших випадках перетин вважається неповним (рис. 171, в). На рис. 169, 170, 176 наведено приклади неповної врізки.

Приклад 2 (рис. 172, 173). Побудувати лінію взаємного перетину двох циліндричних поверхонь. Вершини поверхонь - точки S^∞ і S'^∞ ; $d \subset \Pi^d \supset d'$.

Розв'язання. У якості площин-посередників використовуємо площини пучка з невласною віссю $S^\infty S'^\infty$. Всі площини такого пучка взаємно паралельні і перетинають кожену циліндричну поверхню по відповідним твірним.

Побудову починаємо з того, що обираємо у просторі довільну точку K і проводимо через неї прямі a і b , відповідно паралельні твірним заданих циліндричних поверхонь: $a \supset S^\infty$, $b \supset S'^\infty$. Ці прямі визначають площину T . Відшукавши сліди прямих a і b на площині напрямних циліндричних поверхонь Π^d ($d \subset \Pi^d \supset d'$), визначаємо слід площини T на площині Π^d - пряму $T\Pi^d$. Будь-яка площина-посередник, паралельна площині T , перетне площину Π^d по лінії, що паралельна прямій $T\Pi^d$, а кожену циліндричну поверхню - по твірним, а саме $T\Pi^d \parallel t' \parallel t'' \parallel t''' \dots$ (рис. 172, 173).

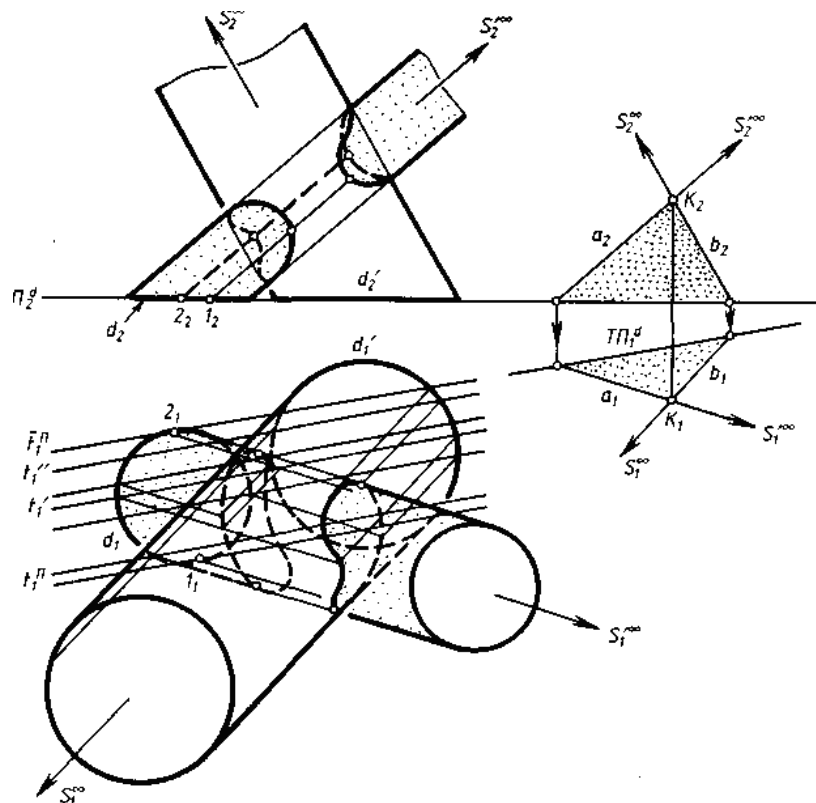


Рис. 173.

Відповідні твірні циліндричних поверхонь перетинаються по точкам, що належать шуканій лінії перетину. Характер врізки однієї поверхні в іншу визначається так само, як і у випадку конічних поверхонь, але з тією різницею, що $t^n \parallel t^{n'}$ (рис. 174).

Усі побудови і міркування аналогічні тим, що розглянуті у попередньому прикладі 1; у даному випадку маємо повну врізку.

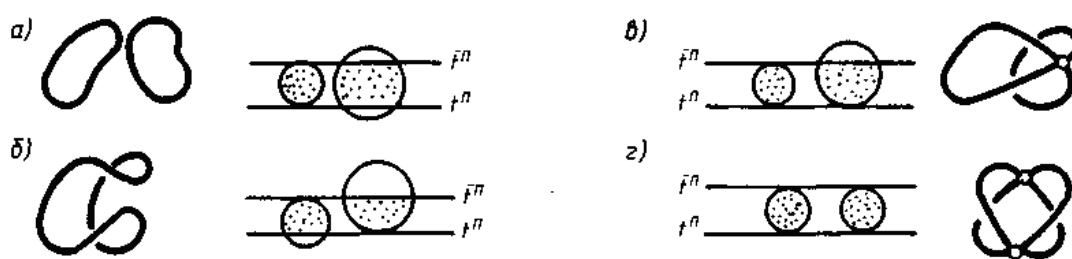


Рис. 174.

На рис. 175-178 проілюстровано приклади побудов ліній перетину поверхонь з вершиною і напрямною способом пучка площин.

Якщо поверхня конуса або піраміди перетинає поверхню циліндра чи призми, то вісь пучка площин-посередників - пряма $S'S^\infty$ проходить через вершину конуса або піраміди паралельно твірній циліндра або призми (рис. 176, 177).

При побудові лінії перетину поверхні багатогранника з поверхнею конуса або циліндра бажано зобразити у тонких лініях повністю перетин, по якому площина грані перетинає криву поверхню, а потім обвести відповідною лінією

(суцільною основною чи штриховою) ту частину перерізу, що розташована в межах грані (рис. 177).

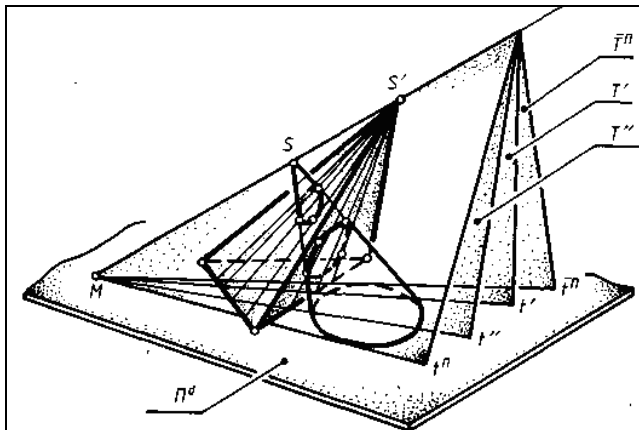


Рис. 175.

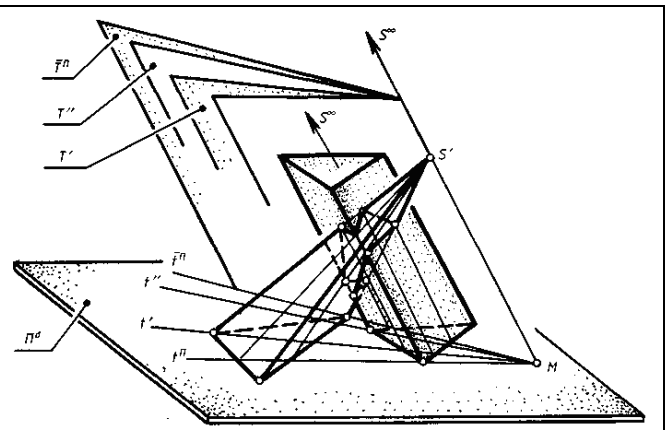


Рис. 176.

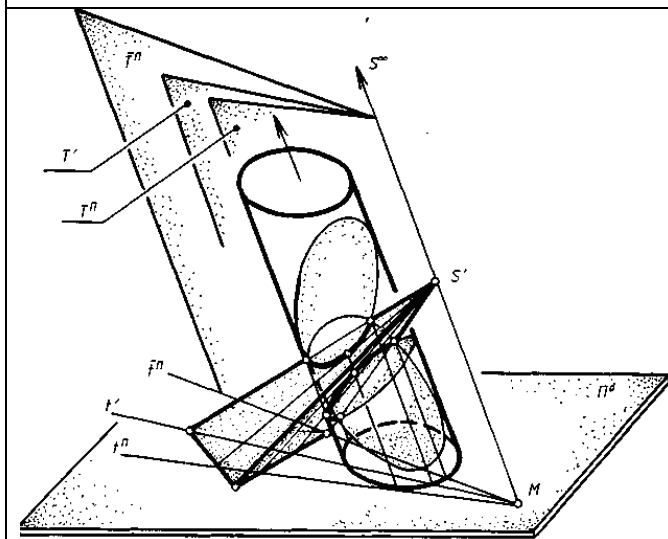


Рис. 177.

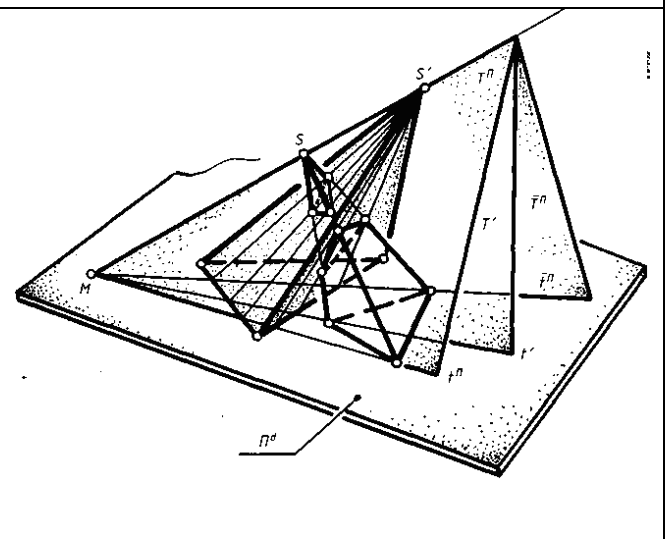


Рис. 178.

14.5. Спосіб сфер-посередників

Спосіб сфер-посередників застосовують частіше всього для побудови ліній перетину поверхонь обертання; іноді – для циклічних поверхонь загального вигляду (рис. 179).

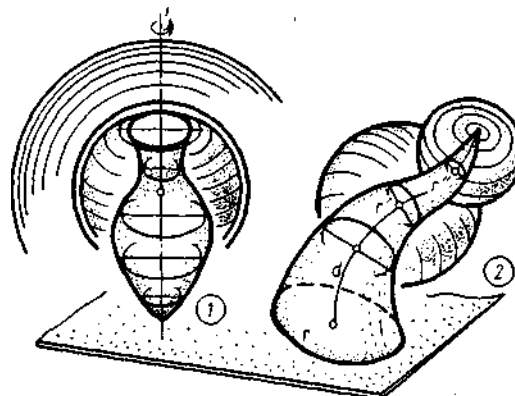


Рис. 179.

Концентричні сфери-посередники. За основу способу взято властивості співвісних поверхонь обертання (і сфери), розглянуті нами раніше (рис. 149).

Загальну ідею використання концентричних сфер-посередників ілюструє рис. 180, на якому зображені дві довільні поверхні обертання, вісі яких i і i' перетинаються у точці O . Спільна площина симетрії заданих поверхонь $\Sigma, \Sigma \parallel \Pi_2$. Побудуємо сферу з центром у точці O ; її нарис на Π_2 - коло r_2 . Ця сфера є співвісною як з першою, так і з другою поверхнею, перетне одну поверхню по колу a , а другу - по колу b .

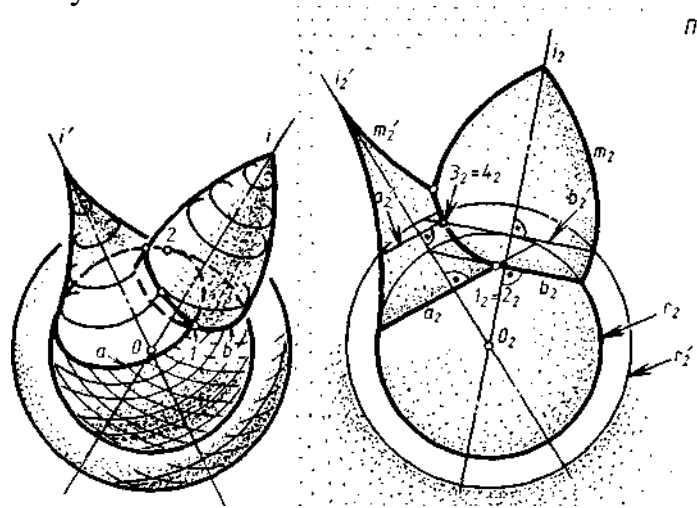


Рис. 180.

Кола a і b перетинаються у точках 1 і 2, що належать лінії взаємного перетину заданих поверхонь. Кожне коло зобразиться на Π_2 у вигляді відрізка прямої: a_2 ($a_2 \perp i_2'$) і b_2 ($b_2 \perp i_2$). Перетин фронтальних проєкцій кіл дає фронтальні проєкції точок шуканої лінії: $1_2 = (2_2) = a_2 \cap b_2$.

Якщо в тій самій точці O , як у центрі, побудувати другу сферу (її нарис на Π_2 - коло r_2'), то аналогічні побудови дадуть інші точки шуканої лінії - точки 3 і 4: $3(4) = a' \cap b'$.

На рис. 181 подано приклад використання концентричних сфер-посередників для побудови лінії перетину двох поверхонь обертання - конічної і циліндричної. Вісі заданих поверхонь перетинаються в точці O ; спільна площина симетрії $\Sigma \parallel \Pi_2$. Оберемо точку O за центр множини концентричних сфер-посередників, будуємо точки, що належать лінії перетину заданих поверхонь так, як описано вище.

Але спочатку необхідно визначити граничні величини радіусів сфер. Очевидно, що максимальний радіус сфери R_{\max} дорівнює найбільшій відстані від точки O_2 до точки перетину обрисів заданих поверхонь. Сфера мінімального радіусу має дотикатись однієї поверхні і перетинати другу, тому мінімальний радіус сфери R_{\min} дорівнює більшому з двох відрізків перпендикулярів $O_2 3_2$ і $O_2 4_2$, опущених з точки O_2 на фронтальні проєкції головних меридіанів заданих поверхонь: $|O_2 4_2| > |O_2 3_2| \Rightarrow R_{\min} = |O_2 4_2|$.

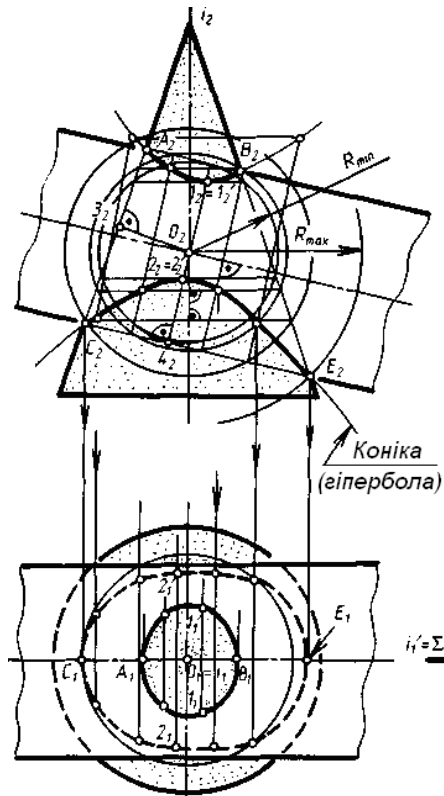


Рис. 181.

Екстремальні точки шуканої лінії A, B, C, E розташовані у спільній площині симетрії Σ і визначаються як точки перетину головних меридіанів. Шукана лінія (біквдратна крива) проєкціюється на Π_2 у вигляді «подвійної» лінії - гіперболи.

Концентричні сфери-посередники можливо засосовувати, коли вісі поверхонь обертання перетинаються, а їх спільна площина симетрії паралельна площині проєкцій.

Якщо остання умова не виконується, то варто ввести додаткову площину проєкцій, паралельну загальній площині симетрії, і розв'язувати задачу у новій системі площин проєкцій, потім повернутися у вихідну систему.

Концентричні чи ексцентричні сфери. Якщо у перетині беруть участь дві поверхні обертання, з яких хоча б одна є сферою, то в якості посередників можливо застосовувати як концентричні (Сф. 1, Сф. 2), так і ексцентричні сфери з центрами O^2, O^3, O^4 , розташовані обов'язково на вісі обертання поверхні загального вигляду (рис. 182).

Ексцентричні сфери. Ідею використання ексцентричних сфер у якості посередників розглянемо на прикладі побудови лінії перетину тора (вісь $i' \perp \Pi_2$) і поверхні обертання з твірною m і віссю i ($i \perp \Pi_1$) (рис. 183). Обидві поверхні мають спільну площину симетрії $\Sigma, \Sigma \parallel \Pi_2$.

Вісі поверхонь обертання тут є мимобіжними, отже, в якості посередників не можна використати концентричні сфери. Але зважимо на те, що тор є циклічною поверхнею.

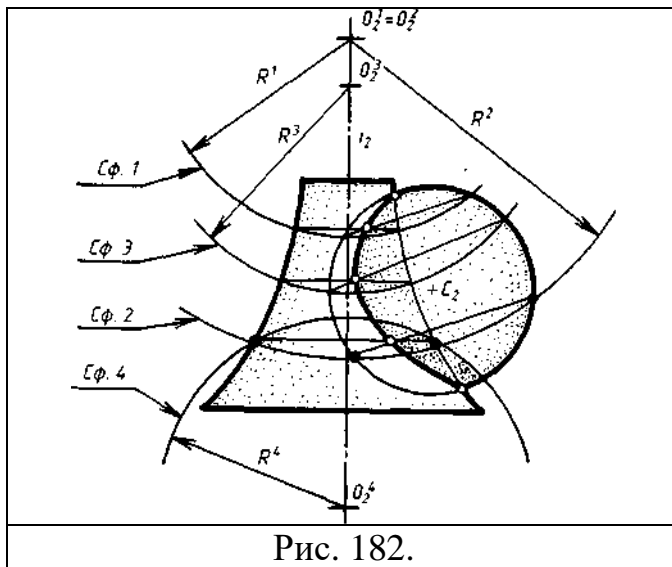


Рис. 182.

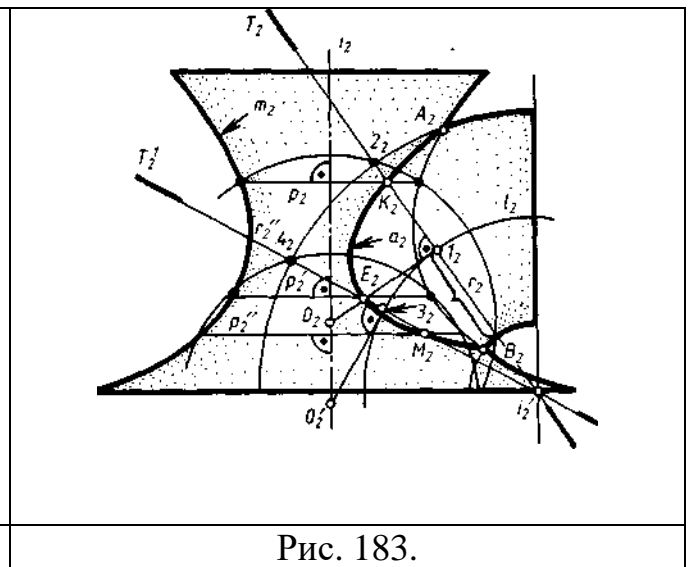


Рис. 183.

Оберемо на торі будь-яке коло r , розташоване у площині T ($T \supset i'$), відмітимо його центр - точку 1 ($1 = T \cap l$) і встановимо з цього центра перпендикуляр до площини T до перетину його з віссю i у точці O . Після цього будемо сферу з центром у точці O і радіусом - відрізком $|O-2| = |O_2-2_2|$. Ця сфера перетне співісну з нею поверхню обертання з віссю i по паралелі p ($p_2 \perp i_2$). Паралель-коло p і коло тора r розташовані на одній сфері і перетинаються в точках K і K' , що належать шуканій лінії перетину заданих поверхонь.

Аналогічно будемо й інші точки шуканої лінії (сфера з центром у точці O' перетне поверхню обертання з віссю i по двом колам-паралелям p' і p''). Очевидно, що центри сфер-посередників не співпадають ($O \neq O'$), тому в даному випадку посередниками слугують ексцентричні сфери.

Ексцентричні сфери-посередники можливо застосувати, якщо даними поверхнями є - поверхня обертання і циклічна (загального вигляду), в яких спільна площина симетрії паралельна площині проєкцій.

До циклічних поверхонь можливо віднести й будь-яку «замкнену» поверхню другого порядку. Якщо на кресленні не зазначені колові перерізи такої поверхні, то попередньо їх варто знайти (множина паралельних площин T дасть множину колових перерізів - паралельних і антипаралельних); для цього можливо використати теорему 4 (рис. 153, 154).

14.6. Використання посередників різного виду

На практиці для побудови лінії перетину двох поверхонь використовують різні види посередників. Проміжні точки часто будують за допомогою одного виду посередників, а для пошуку опорних точок застосовують посередники іншого виду або користуються іншими прийомами.

Розглянемо задачу. Необхідно побудувати лінію перетину сфери з кінечною поверхнею обертання (рис. 184). Центр сфери - точка C ; спільна площина симетрії Σ ; $\Sigma \parallel \Pi_2$.

Розв'язання.

1. Перед побудою ліній визначаємо, що це - біквдратна крива, що проєкціюється на Π_2 у вигляді коніки (можливо довести, що це - парабола). Уявимо її приблизний вигляд у просторі і зробимо начерк.

2. До опорних точок шуканої лінії віднесемо: екстремальні точки 1 і 5, розташовані в площині Σ ; крім того, точку 5 - крайню праву; точки 2 (2'), 4 (4'), розташовані на профільних контурних твірних конічної поверхні; точки 3 і 3', розташовані на екваторі сфери; точки B і B' , розташовані на профільному меридіані сфери; точки A і A' - крайні ліві; точки K і K' , в яких твірні конічної поверхні дотикаються сфери і шуканої лінії (рис. 185).

3. Побудову точок шуканої лінії здійснюємо за допомогою посередників - за алгоритмом № 2.

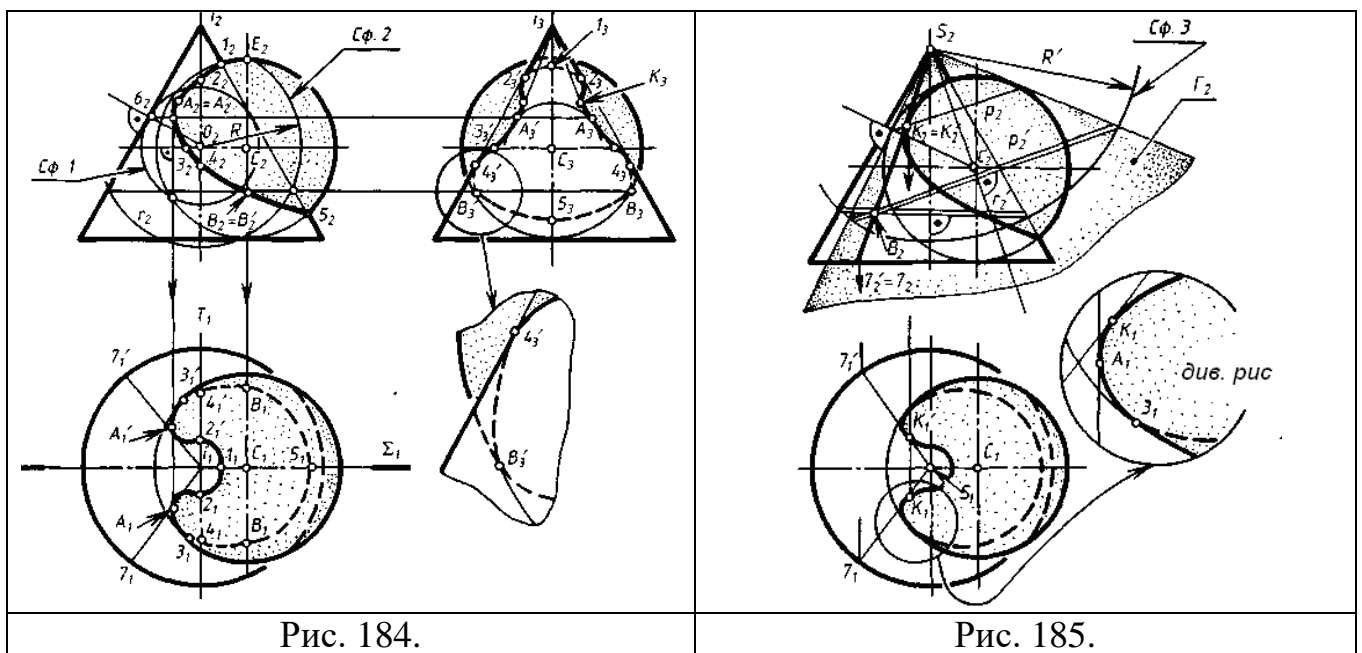


Рис. 184.

Рис. 185.

Проміжні точки і точки 3 і 3' знаходимо за допомогою горизонтальних площин-посередників. Точки 1 і 5 будуюмо за допомогою площини Σ . Точки 2 (2') і 4 (4') визначаємо через профільну площину T , що проходить через профільні контурні твірні конічної поверхні. Побудова цих точок зрозуміла з креслення (рис. 184).

А які посередники доцільно використати для пошуку інших опорних точок? Якщо, наприклад, через профільний меридіан сфери провести профільну площину, то ця площина перетне конічну поверхню по лекальній кривій - гіперболі, що для побудов є небажаним.

Використаємо сфери. Сфера 1 (центр O , радіус $|O_2-b_2|$) вписана в конічну поверхню. На ній знаходимо точки A і A' - крайні ліві (із збільшенням радіусу сфери-посередника коло її перетину із заданою сферою переміститься вправо). Сфера 1 перетинає задану сферу по колу, фронтальна проєкція якого паралельна прямій i_2 , тому $O_2C_2 \perp i_2$.

Сфера 2 - центр O ; радіус $R = |O_2E_2|$ перетинає задану сферу по її профільному меридіану, а конічну поверхню - по колу r . На ньому знаходимо

точки B і B' .

Сфера Σ (рис. 185) - центр у вершині конуса S ; радіус R довільний. Сфера Σ перетинає задану конічну поверхню по колу r' , а допоміжну конічну поверхню Γ (з вершиною S), описану навколо заданої сфери, - по колу p' . Перетин кіл r' і p' дає точки 8 і $8'$, через які проходять твірні заданого конуса, дотичні до сфери. Ці твірні перетинають коло p заданої сфери в опорних точках K і K' (конічна поверхня Γ дотична до заданої сфери по колу p).

Горизонтальні проєкції K і K' зручно побудувати за допомогою точок 7 і $7'$, розташованих на заданому колі - напрямній конічної поверхні. Твірні конічної поверхні - прями $S-7$ і $S-7'$ - дотикаються шуканої лінії перетину заданих поверхонь у точках K і K' .

14.7. Спосіб перетворень

Проекціювання на додаткову площину проєкцій. Додаткову площину проєкцій Π_4 зручно використовувати, коли задачу на побудову лінії перетину двох поверхонь можливо розв'язати більш просто і точно, перетворюючи одну із заданих поверхонь у проєкціювальну і використовуючи алгоритм № 1.

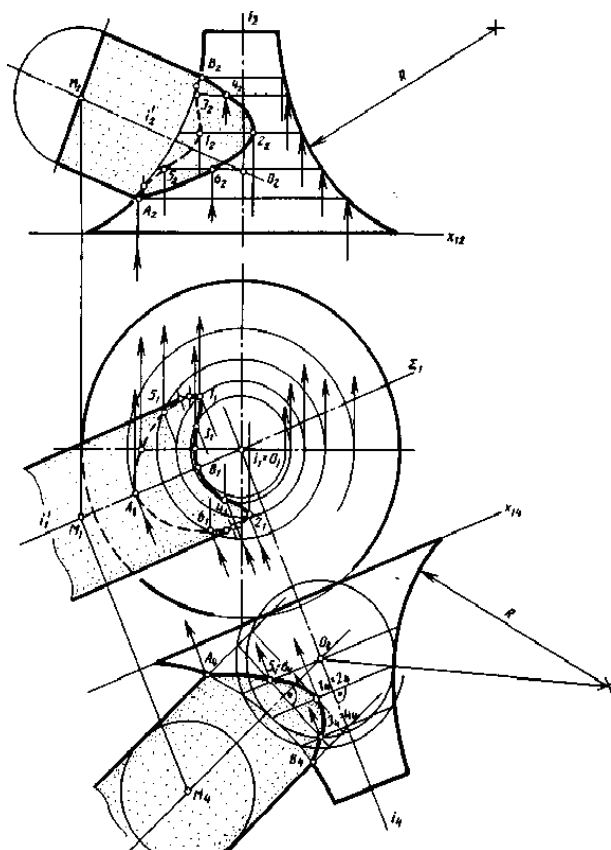


Рис. 186.

Якщо задачу зручно розв'язувати способом сфер-посередників або на основі теореми Г. Можна й інших окремих випадків, але для цього виконується єдина вимога - спільна площина симетрії Σ , не паралельна заданій площині проєкційям, то введенням додаткової площини проєкцій $\Pi_4 \parallel \Sigma$ ця перепона

усувається.

Задачі такого роду зручно розв'язувати за допомогою додаткової площини проєкцій Π_4 , якщо нарисами (обрисами) заданих поверхонь на Π_4 є точні лінії.

Приклад використання додаткової площини Π_4 для побудови способом концентричних сфер-посередників лінії перетину циліндричної поверхні обертання (вісь i') з тором (вісь i) подано на рис. 186.

Вісі i та i' перетинаються в точці O і розташовані у спільній площині симетрії обох поверхонь Σ : $\Sigma \perp \Pi_1$; $\Sigma \nparallel \Pi_2$.

Вводимо нову площину $\Pi_4 \parallel \Sigma$ – і розв'язуємо задачу в системі Π_1/Π_4 , а потім зворотним проєкціюванням з Π_1 і з Π_4 будуюмо фронтальну проєкцію шуканої лінії.

Обертання. Іноді для знаходження деяких опорних точок лінії перетину двох поверхонь зручно використовувати обертання.

На рис. 187 показано побудову точки B - екстремальної точки лінії перетину двох поверхонь: параболоїда обертання з віссю i і конічної поверхні з вершиною S .

Відомо, що у спільній площині симетрії заданих поверхонь розташовуються екстремальні точки. Тому шукана точка B розташована також у площині Σ , отже, вона належить одночасно твірні $S-1$ і m^B заданих поверхонь, які лежать у площині Σ : $B = (S-1) \cap m^B$; $S-1 = b$.

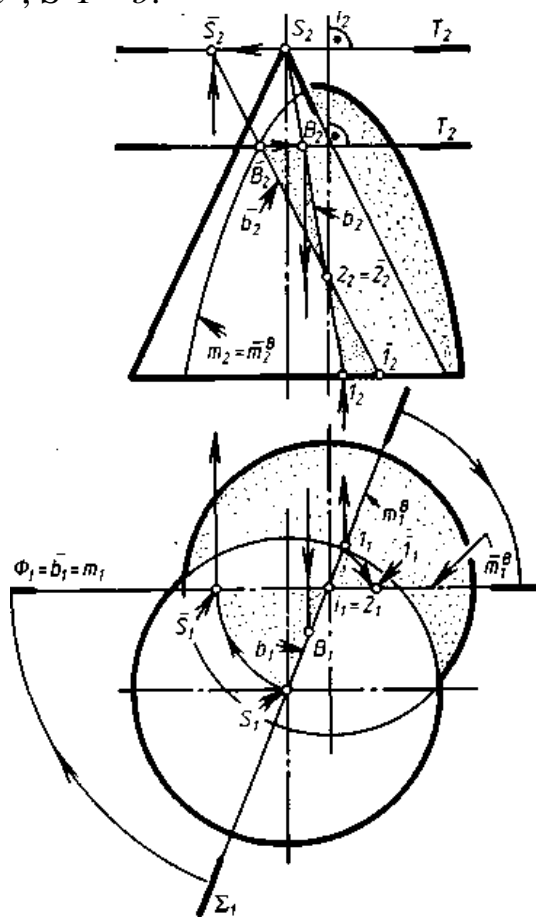


Рис.187.

Повернемо навколо вісі i площину Σ і розташовані в ній фігури до суміщення з площиною Φ ($\Phi \supset i$). Тоді твірна $S-1$ (b) конічної поверхні займе положення $b'=(S'-2)$, а твірна параболоїда - напівмеридіан m^B суміститься з

головним напівмеридіаном m , заданим на кресленні. Перетин ліній b' і m дає шукану точку B у повернутому положенні: ($B' = b_2' \cap m_2$). При зворотному обертанні знаходимо точку B : $B' \rightarrow B$ ($b' \rightarrow b$; $S' \rightarrow S$).

У цій задачі для пошуку точки B незручно використовувати додаткову площину $\Pi_4 \parallel \Sigma$, так як додатковою проекцією лінії m^B на Π_4 слугує лекальна крива ($m_B \approx m_4$). Застосовуючи обертання, ми використали задану на кресленні лінію.

Цей прийом зручно використовувати, якщо у перетині бере участь поверхня обертання з віссю i та будь-яка інша, в якій площина Σ проходить через вісь i , а твірною служить точна лінія, розташована у площині Σ .

Інші види перетворень. У деяких випадках для знаходження точок і ліній перетину фігур доцільно застосовувати допоміжне проєкціювання, спільність або більш складні види проєкційних і топологічних перетворень.

Загальна ідея розв'язання задач цими способами така:

1. Задані фігури перетворюємо відповідно до заклонів обраного перетворення.
2. Розв'язуємо задачу в новому перетвореному вигляді з використанням системи прийомів.
3. Знайдені точки або лінії перетину фігур повертаємо у вихідний стан, використовуючи зворотне перетворення.

Наприклад, за допомогою спільних подібних перетворень зручно будувати лінії перетину будь-яких поверхонь з поверхнями другого порядку загального вигляду, оскільки вони дозволяють перетворити квадрику загального вигляду у поверхню обертання, з якою досить легко працювати.

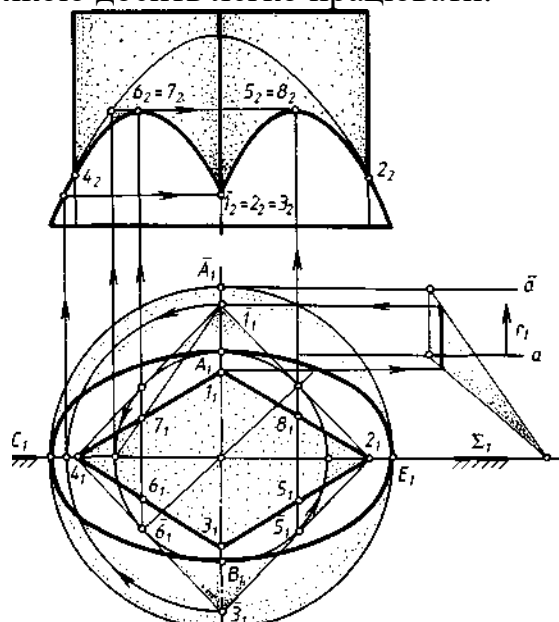


Рис. 188.

Рис. 188 ілюструє побудову лінії перетину горизонтально-проєкціовальної призматичної поверхні з еліптичним параболоїдом: задаючи спільність парою відповідних точок A і A' і площиною спільності Σ ($\Sigma \parallel \Pi_2$; $AA' = r$ напрям спільності; $r \perp \Pi_2$), поверхню еліптичного параболоїда перетворимо у поверхню

обертання. Після цього будуємо лінію перетину поверхні призми з поверхнею обертання (використовуємо алгоритм № 1), а потім зворотним перетворенням знаходимо проєкції шуканої лінії. Фронтальні проєкції цієї лінії до і після перетворення співпадають, так як $r \perp P_2$.

14.8. Використання теми «Перетин геометричних образів в освітньому процесі і техніці»

Необхідність побудови ліній і точок перетину фігур постійно виникає під час навчання таких дисциплін, як трудове навчання та технології, графіка, креслення, машинознавство, основи виробництва, технічне і художнє конструювання, технологічний практикум, а також під час курсового та дипломного проектування. В техніці, коли створюються або читаються креслення виробів, форма яких складається з набору самих різних поверхонь, також необхідними є графічні знання цієї теми.

Розглянемо деякі приклади.

На рис. 189 зображено технічну деталь, що обмежена ззовні ділянками площин, конічною та циліндричною поверхнями обертання, всередині – ділянками циліндричних поверхонь обертання; деталь має площину симетрії, паралельну P_2 .

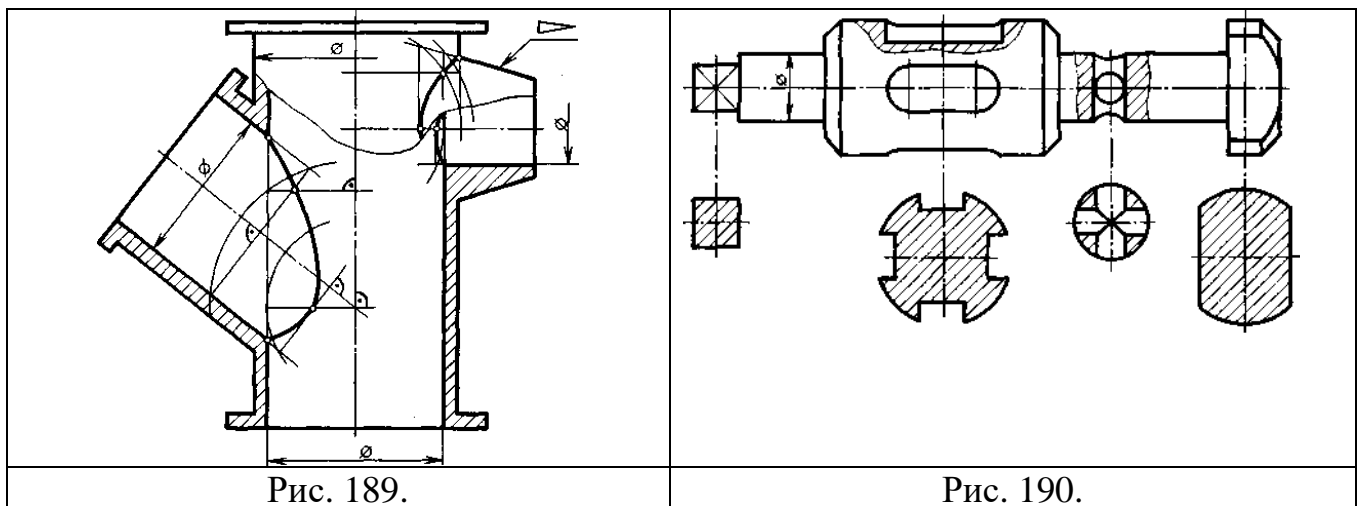


Рис. 189.

Рис. 190.

Примітка. Тут не враховано спрощення креслення, що допускаються стандартом.

У цьому прикладі для побудови лінії перетину поверхонь зручно використати концентричні сфери-посередники і вести побудову за алгоритмом №2. Побудову проєкцій лінії перетину зовнішніх форм деталі подано на місцевому вигляді, внутрішніх – на розрізі.

На рис. 190 зображено вал. Для виготовлення вала необхідно знання подробиць усіх його геометричних форм - інформація про них подана за оидопомогою винесених нормальних перерізів. При побудові креслення цієї деталі (містить головний вигляд, місцеві розрізи, перерізи) використані відомі правила і прийоми побудови ліній взаємного перетину поверхонь: двох циліндрів

(також теорема Г. Монжа); двіввісних поверхонь обертання; площини з циліндром і конусом.

При виконанні креслень виробів можливо рекомендувати таку послідовність робіт, пов'язаних з перетином фігур:

1) Зробити аналіз зовнішніх форм виробів, обрати спосіб і побудувати на вигляді (виглядах) проекції ліній перетину поверхонь, що обмежують виріб;

2) Зробити аналіз внутрішніх форм виробу, обрати спосіб і побудувати на розрізі (розрізах) проекції ліній перетину поверхонь, що обмежують частину виробу;

3) Побудувати перерізи (нормальні або похилі), обрати для цього найбільш простий спосіб.

Задачу побудови ліній і точок перетину фігур розв'язують у машинобудуванні, будівництві й архітектурі, дизайні, в роботі шкільного учителя трудового навчання та технологій і креслення, в геології та інших сферах людської діяльності.

Література:

1. Антонович Є.А., Василюшин Я.В., Шпільчак В.А. Креслення: Навч. посібник/ За ред. проф. Є.А. Антоновича. Львів: Світ, 2006. 512 с. іл.
2. Нарисна геометрія. Практикум: Навч. посібник /За ред. проф. Є.А.Антоновича. Львів: Світ, 2004. 528 с.
3. Гаркушевський В.С., Цвілик С.Д. Правила виконання зображень на кресленнях. Вінниця: ТОВ «Поліграф», 2017. 120 с.
4. Гаркушевський В.С., Цвілик С.Д. Схеми як вид конструкторської документації: види, типи і правила виконання/ В.С. Гаркушевський, С.Д. Цвілик. Вінниця: ТОВ «Поліграф», 2017. 72 с.
5. Державні стандарти єдиної системи конструкторської документації (ЄСКД). 356 с.
6. Інженерна графіка: підручник для здобувачів вищих закладів освіти/ В.Є. Михайленко, В.В. Ванін, С.М. Ковальов; За ред.. В.Є. Михайленка. Львів: Новий світ, 2002. 336 с.
7. Михайленко В.Є. Інженерна та комп'ютерна графіка: Підручник для студ. вищих закладів освіти/ За ред.. В. Є. Михайленка. К.: Каравела, 2004. 344 с.
8. Михайленко В.Є. Інженерна та комп'ютерна графіка: Підручник для студ. вищих закладів освіти/ За ред.. В. Є. Михайленка. К.: Каравела, 2004. 344 с.
9. Цвілик С.Д., Гаркушевський В.С. Робочий зошит з нарисної геометрії. Вінниця, 2017. 76 с.

Інформаційні ресурси

1. uk.wikipedia.org/wiki/ Категорія: Нарисна геометрія [та інженерна графіка](#).
2. rtf-15.io.ua/album170008 - Зошит із готовими розв'язаннями задач.
3. www.vsau.vin.ua/.../961138001298537527.- PDF/Adobe Acrobat .
4. Нарисна геометрія - [1-ий курс](#) - rtf-15.at.ua/load/27.
5. Нарисна геометрія - [uCoz](#)- in-dubno.at.ua > [Форум](#) > [НТУУ КІП ФЕА](#)
6. Нарисна геометрія - ng-kg.kpi.ua/index.php?option...
7. ld.lp.edu.ua/index.php?id=2529 .
8. Нарисна геометрія - [files.khadi.kharkov.ua/.../Нарисна геом.](http://files.khadi.kharkov.ua/.../Нарисна_геом)
9. tmkts.ztu.edu.ua/NGtaIG/start.html .

ЗМІСТ

	Стор.
ПЕРЕДМОВА	3
РОЗДІЛ 1. ВИДИ ПОВЕРХОНЬ ТА ЇХНЄ ЗАВДАННЯ НА КРЕСЛЕННЯХ	
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ	4
1.1. Загальні відомості	4
1.2. Переріз і каркас поверхні	5
1.3. Проекціювальна поверхня	6
1.4. Визначник поверхні	7
1.5. Обрис поверхні (нарис)	8
1.6. Епюр поверхні	9
2. ЛІНІЙЧАСТІ ПОВЕРХНІ З ВЕРШИНОЮ ТА НАПРЯМНОЮ. ТОРСИ	10
2.1. Визначення і класифікація	10
2.2. Епюр поверхні. Нарисні твірні	12
2.3. Епюр точки і лінії, що належать лінійчастій поверхні з вершиною і напрямною. Видимість проєкцій на епюрі	14
3. ЛІНІЙЧАСТІ ПОВЕРХНІ З ТРЬОМА НАПРЯМНИМИ. ЛІНІЙЧАСТІ ПОВЕРХНІ З ДВОМА НАПРЯМНИМИ І ПЛОЩИНОЮ ПАРАЛЕЛІЗМУ	17
3.1. Визначення і класифікація	17
3.2. Епюр поверхні. Епюр точки і лінії, що належить поверхні Каталана	19
4. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ	20
4.1. Визначення і класифікація	20
4.2. Епюр точки, що належить поверхні другого порядку	22
5. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ	22
5.1. Основні поняття та визначення	23
5.2. Класифікація поверхонь обертання	25
5.3. Епюр точки і лінії, що розташовані на поверхнях обертання	26
5.4. Застосування поверхонь обертання	28
6. ГВИНТОВІ ПОВЕРХНІ І ГВИНТИ	
6.1. Основні поняття і визначення	30
6.2. Гелікоїди	30
6.3. Гвинти та гвинтові виступи. Різьба	32
7. ПОВЕРХНІ КАРКАСНІ, ЦИКЛІЧНІ І ПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСУ	32
7.1. Поверхні, що задаються каркасом	32
7.2. Поверхні паралельного переносу	34
7.3. Циклічні поверхні	35
8. БАГАТОГРАННИКИ	
8.1. Загальні відомості	35

8.2. Багатогранники у природі. Використання багатогранників	37
9. ЛІНІЇ НА ПОВЕРХНІ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ І ЛІНІЙ. ПОБУДОВА ПЛОЩИНИ, ЩО ДОТИЧНА ДО ПОВЕРХНІ	39
9.1. Лінії на поверхні. Конічні перерізи - коніки	39
9.2. Проекційні властивості конік	41
9.3. Лінії зрізу	42
9.4. Лінії на гвинтовій поверхні	43
9.5. Деякі особливі лінії поверхонь	44
9.6. Взаємне розташування поверхонь і ліній. Побудова площини, дотичної до поверхні	44
10. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ	48
10.1. Основні поняття та визначення	48
10.2. Точні розгортки	51
10.3. Наближені розгортки	58
10.4. Умовні розгортки	60
10.5. Застосування розгорток	63
РОЗДІЛ 2. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ, ЛІНІЙ, ТІЛ	
11. ЗАГАЛЬНІ ІДЕЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ	67
11.1. Класифікація задач і способів їхнього розв'язання	67
11.2. Алгоритми розв'язання позиційних задач	68
11.3. Методичні вказівки до розв'язання задач на побудову лінії перетину поверхонь	72
12. ПЕРЕТИН ПЛОЩИНИ З ПЛОЩИНОЮ І З ПРЯМОЮ	
12.1. Окремі випадки побудови лінії перетину двох площин	72
12.2. Загальні випадки побудови лінії перетину двох площин	73
12.3. Побудова точки перетину площини з прямою	75
13. ПЕРЕТИН ПЛОЩИНИ З ПОВЕРХНЕЮ	77
13.1. Властивості перерізів поверхонь. Класифікація окремих випадків побудови перерізів	77
13.2. Побудова лінії перетину площини з проекціювальною поверхнею	78
13.3. Побудова лінії перетину проекціювальної площини з непроекціювальною поверхнею	81
13.4. Загальні випадки побудови перерізів поверхонь з використанням додаткової площини проекцій	84
13.5. Загальні випадки побудови перерізів поверхонь з використанням посередників	87
13.6. Використання обертання для побудови перерізів поверхонь обертання	89
13.7. Побудова точок перетину прямої лінії з поверхнею	90
13.8. Загальні випадки перетину. Спосіб посередників	92
13.9. Спосіб посередників	95

14. ПОБУДОВА ЛІНІЙ ВЗАЄМНОГО ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ	98
14.1 Властивості ліній перетину поверхонь. Класифікація окремих випадків побудови лінії перетину поверхонь	99
14.2. Побудова лінії перетину двох проєкціювальних поверхонь	104
14.3. Побудова лінії перетину проєкціювальної поверхні з проєкціювальною	107
14.4. Спосіб площин-посередників	110
14.5. Спосіб сфер-посередників	116
14.6. Використання посередників різного виду	119
14.7. Спосіб перетворень	121
14.8. Використання теми «Перетин геометричних образів в освітньому процесі і техніці»	124
Література	126

ПОВЕРХНІ: УТВОРЕННЯ ТА ЗАВДАННЯ НА КРЕСЛЕННІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

П78

Гаркушевський В.С., Цвілик С.Д. Поверхні: утворення та завдання на кресленні: Навчальний посібник. Вінниця: ТОВ «Меркьюрі Поділля», 2020. 130 с.

Оригінал-макет	С.Д. Цвілик
Коректор, технічний редактор	С.Д. Цвілик
Дизайн обкладинки.....	І.В. Шимкова

Підписано до друку
Формат
Папір офсетний. Друк різнографічний.
Гарнітура Arial. Ум. друк. арк. 8
Наклад 30 прим.
Віддруковано з готових діапозитивів на
ПП Балюк І.Б.
М. Вінниця, вул Р.Скалецького, 15
Тел./факс (0432) 52-08-02
e-mail: balyk2@ukr.net