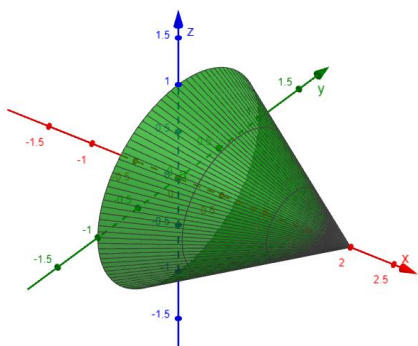
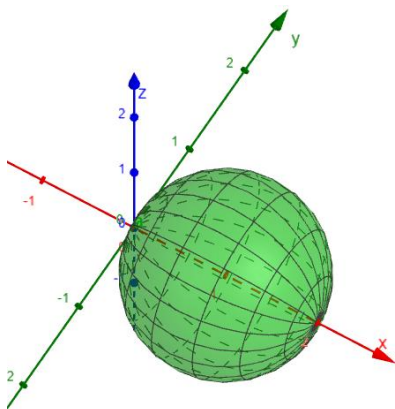


**Ковтонюк М. М., Клімішина А. Я., Леонова І. М.,
Соя О. М., Косовець О. П.**



**Практикум з інтегрального числення
функцій однієї змінної та рядів
(з використанням чисельних методів і
систем комп'ютерної математики)**

Навчальний посібник



Вінниця
ТВОРИ
2025

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського як навчальний посібник для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями Е7 Математика та А4 Середня освіта (Математика) (протокол №12 від 25 червня 2025 року)

Рецензенти:

Михалевич Володимир Маркусович – доктор технічних наук, професор кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету.

Тимошенко Олександр Захарович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Ковтонюк М. М., Клімішина А. Я., Леонова І. М., Соя О. М., Косовець О. П.

Практикум з інтегрального числення функцій однієї змінної та рядів (з використанням чисельних методів і систем комп'ютерної математики) : навчальний посібник. Вінниця : ТОВ «ТВОРИ», 2025. 656 с. DOI: <https://doi.org/10.31652/978-617-552-913-3-1-656>

ISBN 978-617-552-913-3

Навчальний посібник написано відповідно до освітньо-професійних програм спеціальностей Е7 Математика та А4 Середня освіта (Математика) з математичного аналізу. У посібнику є велика кількість розв'язаних типових прикладів, практико-орієнтованих задач з інтегрального числення функції однієї змінної та рядів та наближених методів їх розв'язання, завдань для самостійного опрацювання, завдань для самостійних і контрольних робіт.

Посібник написаний для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей Е7 Математика та А4 Середня освіта (Математика), в тому числі змішаної форми навчання. Посібник може використовуватись учителями математики в освітньому процесі закладів загальної середньої освіти; може бути корисним викладачам математики та магістрантам.

УДК 517.3:517.537.3/.6:519.6(075.8)

© М.М. Ковтонюк
© А. Я. Клімішина
© І. М. Леонова
© О. М. Соя
© О. П. Косовець
© ТОВ «ТВОРИ», 2025

ПЕРЕДМОВА

Рекомендований «Практикум» має своєю метою надати істотну допомогу студентам в оволодінні технікою інтегрування, дослідження числових і функціональних рядів, розв'язування практико-орієнтованих задач з використанням інтегралів і рядів.

«Практикум» складається з 25 практичних занять, в кожному з яких наведено короткі теоретичні відомості, запитання та завдання для самостійних і контрольних робіт з тем «Невизначений та визначений інтеграл», «Числові та функціональні ряди». Матеріал поділено відповідно до плану практичних занять.

У «Практикумі» є велика кількість типових прикладів і задач, розв'язування яких сприятиме формуванню загальних і фахових компетентностей студентів.

Під час складання «Практикуму» автори використовували різні підручники, навчальні посібники і збірники задач з математичного аналізу.

Посібник написаний для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей Е7 Математика та А4 Середня освіта (Математика), в тому числі змішаної форми навчання. Посібник може використовуватись учителями математики в освітньому процесі закладів загальної середньої освіти; може бути корисним викладачам математики та магістрантам.

Згідно з освітньо-професійною програмою бакалавра вивчення курсу математичного аналізу має бути спрямованим на формування вміння виконувати такі типові завдання професійної діяльності:

формулювати математичні задачі; аналізувати математичну проблему (задачу); формулювати гіпотетичне твердження; обґрунтовувати (доводити) гіпотетичні твердження, будувати контрприклад; вибирати і використовувати алгоритми, методи, прийоми та способи розв'язування; вміти проводити прикладні дослідження в галузі математики.

У результаті вивчення розділів «Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди» студент повинен:

➤ **знати:** усвідомити, що інтегрування функцій (знаходження функції за її похідною) є задачею оберненою до диференціювання, причому коли розв'язання останньої (за умови, що функція задана аналітично), зазвичай, не супроводжується принциповими труднощами, то первісна подається у скінченному вигляді через елементарні функції тільки для класу раціональних функцій; що поняття визначеного інтеграла вводиться з допомогою граничного переходу в специфічному відображенні двох множин точок (множина точок, що задає розбиття відрізка, і множина точок, обраних по одній у кожному з елементарних відрізків) у множину чисел, якими є інтегральні суми, побудовані за цими двома множинами для заданої функції; розуміти, що клас неперервних на відрізку функцій є підкласом інтегровних за Ріманом функцій на цьому відрізку, і що кожна неперервна на відрізку функція має первісну; розуміти сутність формули Ньютона-Лейбніца як містка між невизначеним і визначеним інтегралом; усвідомити, що з допомогою граничного переходу можна означити «суму» нескінченного числа доданків, побудувавши послідовність часткових

сум; усвідомити, що функціональні послідовності і ряди є чи не найбільш ефективним інструментом для подання і наближеного обчислення функцій; розуміти зміст і роль рівномірної збіжності функціональних рядів;

➤ **вміти:** володіти методами і прийомами інтегрування; користуватися таблицями інтегралів; вміти застосовувати визначений інтеграл під час розв'язування прикладних задач (геометричних, фізичних, економічних та інших); вміти досліджувати числові ряди на збіжність; розрізняти абсолютну і умовну збіжність; прогнозувати перенесення властивості, притаманній кожному члену функціонального ряду, на його суму; вміти досліджувати властивості функціональних рядів; використовувати можливість почленного диференціювання і інтегрування рядів; вміти застосовувати подання функції у вигляді функціонального ряду для обчислення значень функцій та інтегралів.

У посібнику під час розв'язування задач з інтегрального числення функції однієї змінної та рядів часто використовуються системи комп'ютерної математики (СКМ) та чисельні методи з метою активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів, розвитку їх системного мислення, просторової уяви, самостійності. За допомогою СКМ студенти чітко можуть виділити в завданні об'єкт дослідження, а також систему та системні зв'язки за допомогою яких формується системне мислення.

Зауваження та пропозиції щодо навчального посібника просимо надсилати на e-mail: kovtonyukmm@vspu.edu.ua.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- АВ – адитивна властивість;
БІ – безпосереднє інтегрування;
ВІ – визначений інтеграл;
ІБД – інтегрування біномних диференціалів;
ІЕД – інтегрування елементарних дробів;
ІЗЗ – інтегрування заміною змінних;
ІД – інтегрування ірраціональних дробів;
ІМФ – інтегрованість монотонної функції;
ІНФ – інтегрованість неперервної функції;
ІРД – інтегрування раціональних дробів;
ІТФ – інтегрування трансцендентних функцій;
ІЧ – інтегрування частинами;
ІЧФОЗ – інтегральне числення функції однієї змінної;
СКМ – системи комп'ютерної математики;
НІ – невизначений інтеграл;
ПФ – первісна (примітивна) функція;
ЧР – числові ряди;
ФР – функціональні ряди.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
§ 1. Первісна та невизначений інтеграл. Елементарні прийоми інтегрування.....	9
§ 2. Інтегрування заміною змінних	33
§ 3. Інтегрування частинами.....	51
§ 4. Інтегрування раціональних функцій.....	66
§ 5. Інтегрування ірраціональних функцій.....	84
§ 6. Інтегрування тригонометричних функцій.....	107
§ 7. Інтегрування трансцендентних функцій.....	126
Завдання для самостійних і контрольних робіт з теми «Невизначений інтеграл».....	140
§ 8. Означення визначеного інтеграла. Інтегральна сума та суми Дарбу.....	154
§ 9. Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегрування частинами та заміною змінних у визначеному інтегралі.....	175
§ 10. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Основні властивості визначеного інтеграла. Теореми про середнє.....	206
§ 11. Застосування визначених інтегралів до обчислення площ плоских фігур і довжин плоских кривих.....	227
§ 12. Наближені методи обчислення визначених інтегралів. Творчий проєкт.....	275
§ 13. Застосування чисельних методів в інтегральному численні.....	295
§ 14. Застосування визначених інтегралів до обчислення об'ємів тіл і площ поверхонь обертання.....	334

§ 15. Застосування визначеного інтеграла у фізиці та економіці.....	368
§ 16. Невласні інтеграли.....	409
Завдання для самостійних і контрольних робіт з теми «Визначений інтеграл».....	429
§ 17. Числові ряди.....	453
§ 18. Ознаки порівняння рядів з додатними членами. Ознаки Даламбера, Коші.....	471
§ 19. Інтегральна ознака Коші.....	488
§ 20. Ряди з довільними членами. Абсолютна і умовна збіжність.....	498
Завдання для самостійних і контрольних робіт з теми «Числові ряди».....	513
§ 21. Функціональні ряди. Збіжність, рівномірна збіжність.....	520
§ 22. Степеневі ряди. Область збіжності.....	552
§ 23. Формула Тейлора. Розклад функцій в степеневі ряди	566
§ 24. Наближені обчислення з використанням степеневих рядів	588
§ 25. Системи комп'ютерної математики.....	608
Завдання для самостійних і контрольних робіт з теми «Функціональні ряди».....	632
Предметно-іменний покажчик.....	646
Список використаних джерел	650

§ 1. Первісна та невизначений інтеграл. Елементарні прийоми інтегрування

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Первісна функція	Antiderivative of a function (primitive)
Невизначений інтеграл	Indefinite integral
Підінтегральний вираз	Integrand
Властивості первісної	Properties of antiderivatives
Змінна інтегрування	Variable of integration

1. Сформулювати означення первісної.

Функція $F(x)$ називається **первісною (примітивною) функцією** для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо в кожній точці цього проміжку $F(x)$ диференційовна і $F'(x) = f(x)$.

2. Сформулювати основну властивість первісної.

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, то множина $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ є множиною усіх первісних для функції $f(x)$ на цьому проміжку.

3. Сформулювати означення невизначеного інтеграла.

Множина усіх первісних для функції $f(x)$ на деякому проміжку називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається $\int f(x)dx$.

$\int$ – знак інтеграла; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз;
 $f(x)$ – підінтегральна функція.

$$\int f(x)dx := F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

4. Сформулювати геометричний зміст невизначеного інтеграла.

Множина графіків усіх первісних, які одержуються з графіка $F(x)$ паралельним перенесенням уздовж осі ординат на величину C (рис. 1.1).

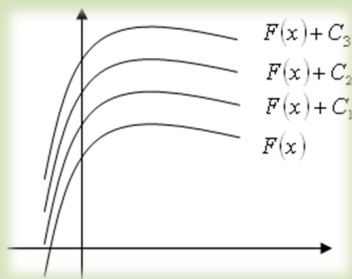


Рис.1.1

5. Сформулювати фізичний зміст невизначеного інтеграла.

Закон руху матеріальної точки залежно від швидкості і початкових даних:

$$\int v(t)dt = S(t) + C, C \in \mathbb{R}$$

6. Сформулювати основні властивості первісних і невизначених інтегралів.

$$1. \left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

$$2. d \int f(x)dx = f(x)dx.$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C.$$

Знак інтеграла і похідної або диференціала взаємно знищуються.

4. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для

$g(x)$ на проміжку X , то:

$F(x) + G(x)$ є первісною для $f(x) + g(x)$ на X , тобто первісна від суми дорівнює сумі первісних.

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C, \text{ тобто інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів.}$$

5. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку X , а $k = \text{const}$, то:

$kF(x)$ – первісна для функції $kf(x)$ на X . Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx = kF(x) + C.$$

6. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку X , а k і b – деякі числа ($k \neq 0$), то:

$\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первісна для $f(kx+b)$ на X .

$$\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C.$$

7. Вивчити таблицю невизначених інтегралів

Таблиця невизначених інтегралів (Table of indefinite integrals)	
Степеневі функції (The power function) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, x \neq 0$	Показникові функції (The exponential function) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
Тригонометричні функції (The trigonometric functions) $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$	Ірраціональні функції (The irrational function) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$ $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$ $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$ $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 + a^2} + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 - a^2} + C$
Дробово-раціональні функції (The rational function) $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$ $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	Гіперболічні функції (The hyperbolic functions) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$ $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$ $\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + C$ $\int \operatorname{cth} x dx = \ln \operatorname{sh} x + C$ $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$ $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

8. Назвати основні методи інтегрування.

Основні методи інтегрування (Methods of integration)
1. Метод безпосереднього інтегрування (Direct integration)
$\int (\alpha u(x) + \beta v(x)) dx = \alpha \int u(x) dx + \beta \int v(x) dx$ Правило 1. Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів (additivity). The indefinite integral of an algebraic sum of a finite number of functions equals the sum of their integrals, for example). Правило 2. Сталий множник можна виносити за знак

інтеграла ((homogeneity). A constant factor can be taken out of the integral sign)

2. Інтегрування заміною змінних (Integration by Substitution)

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$$

3. Інтегрування частинами (Integration by parts)

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на деякому проміжку, і на цьому проміжку існує $\int v du$, то існує і інтеграл $\int u dv$ і має місце рівність:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ або } \int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx.$$

Основні поняття, що стосуються теми «Невизначений інтеграл» узагальнено та подано у вигляді інтелект-карти (ментальної карти) (рис. 1.2).

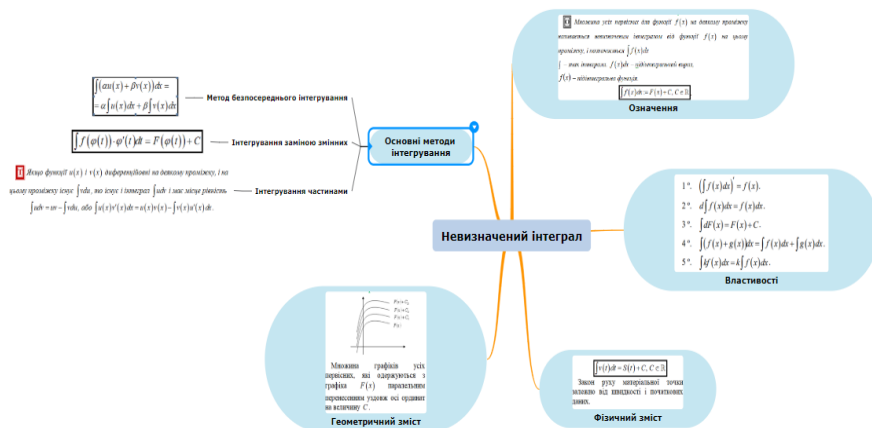


Рис. 1.2

Приклади розв'язування вправ

Задача 1.1. Для функції $f(x) = x^2 - 4$ знайти таку первісну, що пряма $y = -3$ є дотичною до її графіка.

Розв'язання.

Для заданої функції $f(x) = x^2 - 4$ знаходимо множину первісних $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + C$ (рис. 1.3).

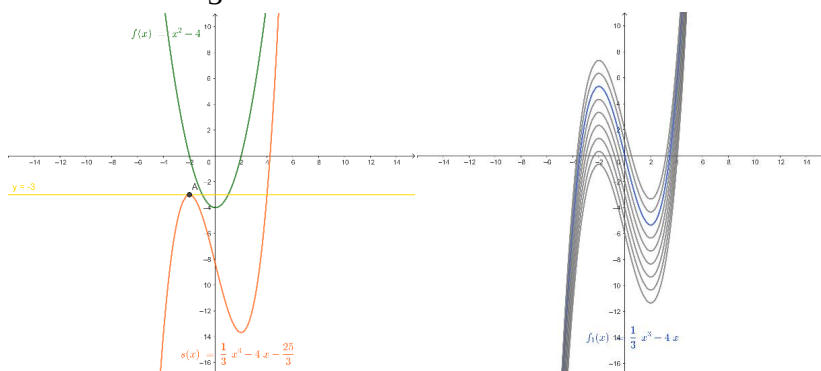


Рис. 1.3

Далі з цієї множини первісних потрібно виділити ту, для якої пряма $y = -3$ є дотичною, тобто знайти точку дотику $(x_0; y_0)$, $y_0 = -3$.

Скористаємося геометричним змістом похідної: $F'(x_0) = f(x_0) = 0$, оскільки дотична $y = -3$ до кривої $F(x)$ паралельна осі абсцис.

Отже, $x_0^2 - 4 = 0$; $x_{01} = 2$ або $x_{02} = -2$. Точки дотику: $M_1(2; -3)$, $M_2(-2; -3)$.

Графіки первісних $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + C$ проходять через ці точки. Знайдемо сталу C .

$$M_1(2; -3): -3 = \frac{8}{3} - 8 + C; C = \frac{7}{3};$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{7}{3}.$$

$$M_2(-2; -3): -3 = -\frac{8}{3} + 8 + C; C = -\frac{25}{3}.$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - \frac{25}{3}. \quad \blacksquare$$

Задача 1.2. Перевірити чи функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку X :

1) $F(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$, $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$, $X = \mathbb{R}$;

2) $F(x) = \frac{1}{8} \arcsin x^8$, $f(x) = \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}$, $X = (-1; 1)$.

Розв'язання.

Згідно з означенням функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку X , якщо $F(x)$ диференційовна на цьому проміжку і $\forall x \in X$ правильна рівність $F'(x) = f(x)$.

1) Графіки функцій $F(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$ і $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$ зображено на рис. 1.4.

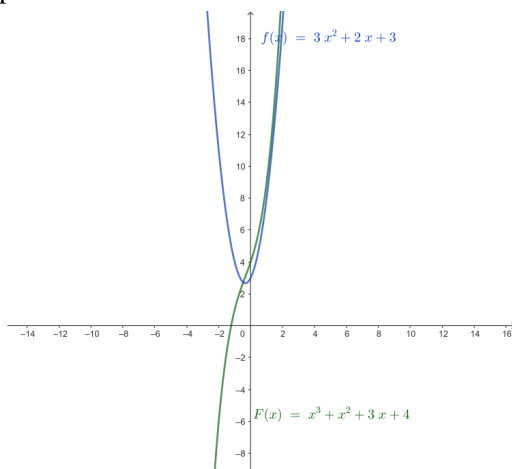


Рис. 1.4

$F'(x) = (x^3 + x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 + 2x + 3 = f(x)$, а це й означає, що $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$. ■

2) Графіки функцій $F(x) = \frac{1}{8} \arcsin x^8$ і $f(x) = \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}$

зображено на рис. 1.5.

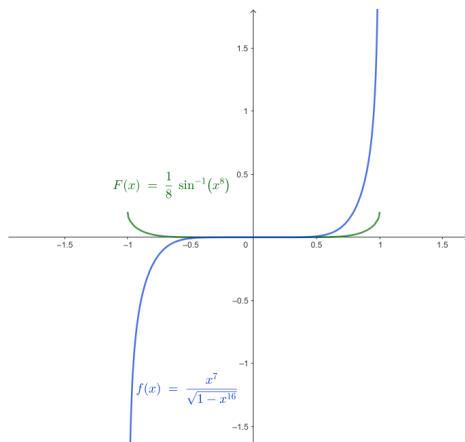


Рис. 1.5

$$F'(x) = \left(\frac{1}{8} \arcsin x^8 \right)' = \frac{1}{8} \cdot \frac{8x^7}{\sqrt{1-(x^8)^2}} = \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}} = f(x). \quad \blacksquare$$

Задача 1.3. Знайти функцію $f(x)$, для якої задана функція є первісною. Записати інтеграл знайденої функції:

1) $\ln(x + \sqrt{x^2 + a})$, $x \in \mathbb{R}^+$;

2) $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Розв'язання.

1) Використаємо формулу $F'(x) = f(x)$. Невизначений інтеграл для функції $f(x)$ на проміжку X – це множина всіх первісних для даної функції.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\ln \left(x + \sqrt{x^2 + a} \right) \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \left(x + \sqrt{x^2 + a} \right)' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} = f(x). \end{aligned}$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

Графіки функцій $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ і $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

зображено на рис. 1.6. ■

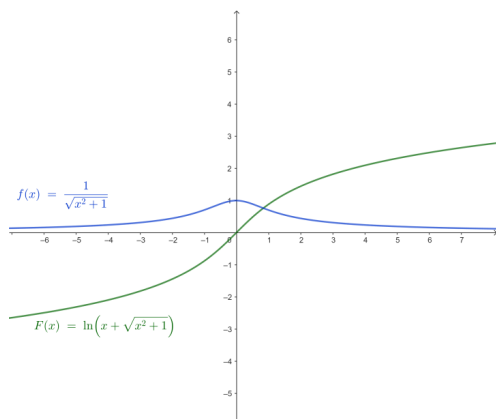


Рис. 1.6

2) Аналогічно:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \right)' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x+a}{x-a} \cdot \left(\frac{x+a}{x-a} \right)' = \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{x-a-x-a}{(x+a)^2} = \frac{-1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{a^2 - x^2} = f(x). \end{aligned}$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$$

Графіки функцій $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ і $f(x) = \frac{1}{1^2 - x^2}$ зображено

на рис. 1.7. ■

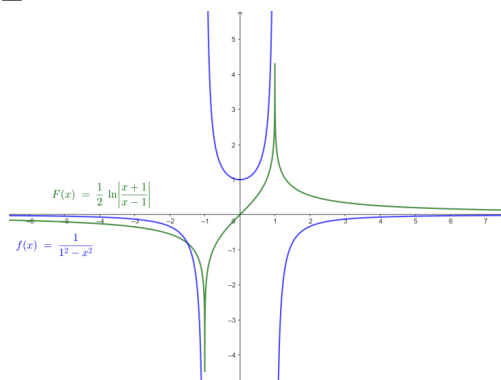


Рис. 1.7

Доповніть таблицю інтегралів цими двома інтегралами.

Задача 1.4. Для функції $f(x)$ знайти первісну $F(x)$. Завдання можна виконувати усно. Якщо сумніваєтеся у результаті, то перевірте свою відповідь диференціюванням $F(x)$. Записати невизначений інтеграл. Виконати рисунки функцій $f(x)$ і $F(x) + C$.

1) $f(x) = 2x$; 2) $f(x) = x^2$; 3) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Розв'язання.

1) Використаємо властивість 5 первісної та невизначеного інтеграла (сталій множник можна виносити за знак інтеграла) і таблицю невизначених інтегралів для степеневої функції:

$$f(x) = 2x; F(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} = x^2;$$

$$\int 2x dx = 2 \int x dx = x^2 + C.$$

Варто нагадати, що невизначений інтеграл – це множина всіх первісних, а з геометричної точки зору будемо мати множину графіків, які одержуються з графіка $F(x) = x^2$ паралельним перенесенням вздовж осі ординат на величину C .

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x) + C$ зображено на рис. 1.8. ■

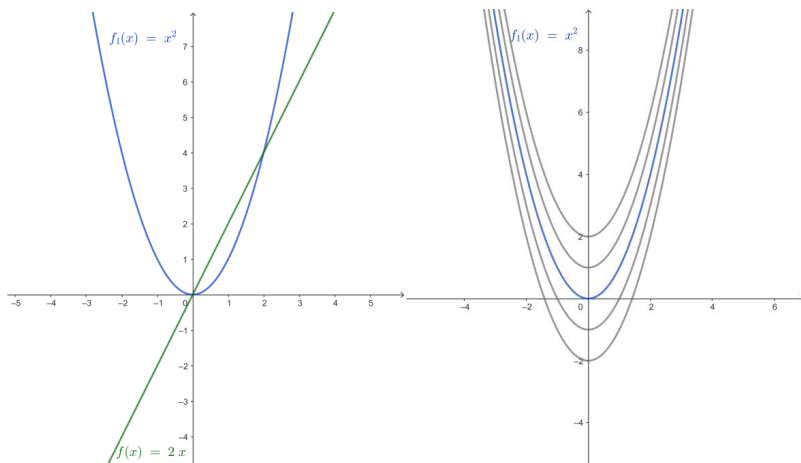


Рис. 1.8

2) Аналогічно до попереднього прикладу будемо мати:

$$f(x) = x^2; F(x) = \frac{x^3}{3}; \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x) + C$ зображено на рис. 1.9. ■

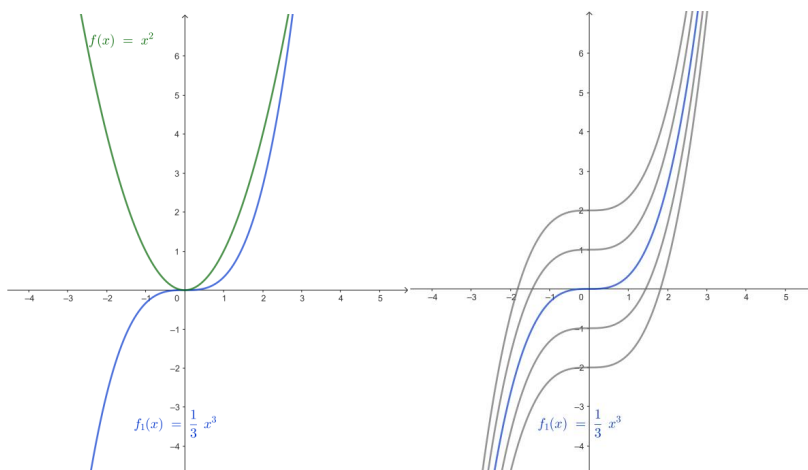


Рис. 1.9

3) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Щоб знайти первісну та невизначений інтеграл, використаємо властивість 4 первісної та невизначеного інтеграла (первісна (інтеграл) від суми дорівнює сумі первісних (інтегралів)):

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x;$$

$$\int (x^2 - 2x + 1) dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 1 \cdot dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C.$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x) + C$ зображено на рис. 1.10. ■

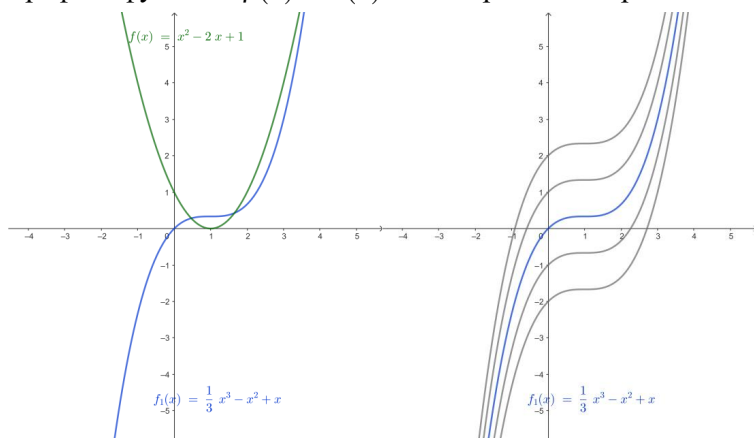


Рис. 1.10

Задача 1.5. Знайти первісну $y(x)$, що задовольняє умові $y' = 2x - 7$, $y(2) = 0$

Розв'язання.

Знайдемо множину всіх первісних $F(x) + C$, тобто невизначений інтеграл, скориставшись властивістю 3 невизначених інтегралів:

$$y = \int y'(x) dx = \int (2x - 7) dx = \int 2x dx - \int 7 dx = x^2 - 7x + C, \text{ або}$$

$$y = x^2 - 7x + C.$$

Виділимо з усіх графіків функції $y(x)$ той, який проходить через точку $(2; 0)$. З цією метою підставимо у функцію значення $x = 2$, $y = 0$:

$$0 = 4 - 7 \cdot 2 + C;$$

$$0 = -10 + C;$$

$$C = 10.$$

Отже, рівняння первісної $y = x^2 - 7x + 10$. ■

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x) + C$ зображено на рис. 1.11.

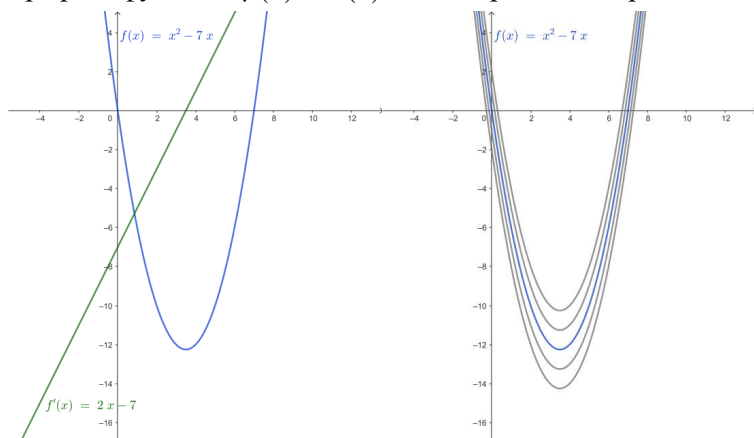


Рис. 1.11

Задача 1.6. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx; 2) \int (x^2 - 2)^2 dx; \quad 3) \int \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx.$$

Розв'язання.

1) Запишемо підінтегральну функцію у вигляді степеневій і використаємо табличний інтеграл від степеневій функції.

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx &= \int \left(x \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \\ &= \int \left(x \cdot x^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{7}{12}} dx = \frac{12\sqrt[12]{x^{19}}}{19} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

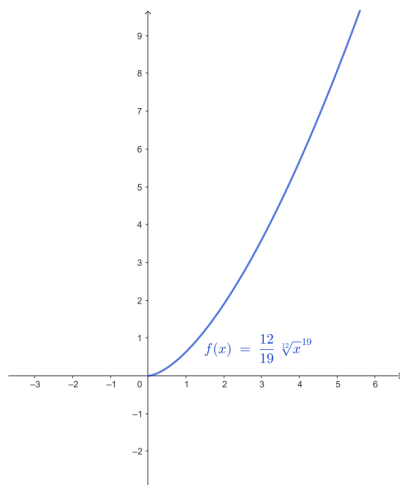


Рис. 1.12

2) Використаємо правила 1 і 2 невизначеного інтеграла і табличний інтеграл від степеневої функції.

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2)^2 dx &= \int (x^4 - 4x^2 + 4) dx = \int x^4 dx - 4 \int x^2 dx + 4 \int dx = \\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

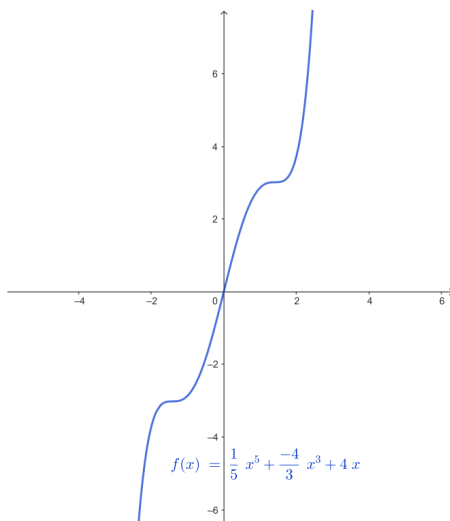


Рис. 1.13

3) Поділимо почленно чисельник на знаменник, запишемо функції у вигляді степеневих і використаємо правила 1 і 2 невизначеного інтеграла (елементарні методи інтегрування).

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 6\sqrt{x} + C. \quad \blacksquare$$

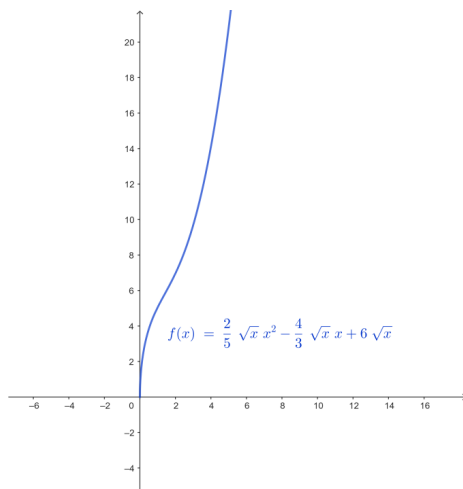


Рис. 1.14

Задача 1.7. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx; \quad 2) \int \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 2e^x + 4} dx; \quad 3) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Розв'язання.

1) Використаємо властивість степеня $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b} \right)^x$, елементарні прийоми інтегрування (інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів) і табличний інтеграл від показникової функції: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

$$\int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx = \int \left(\frac{2^x}{6^x} + \frac{3^x}{6^x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{3} \right)^x dx + \int \left(\frac{1}{2} \right)^x dx =$$

$$= -\frac{3^{-x}}{\ln 3} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + C \quad \blacksquare$$

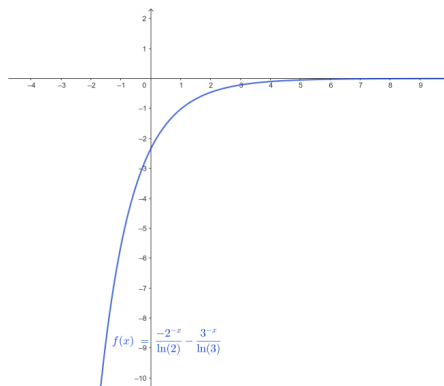


Рис. 1.15

2) У чисельнику маємо різницю кубів:

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, після скорочення скористаємося правилами 1 і 2 інтегрування й табличними інтегралами від показникової та сталої функцій.

$$\int \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 2e^x + 4} dx = \int \frac{(e^x - 2)(e^{2x} + 2e^x + 4)}{e^{2x} + 2e^x + 4} dx = \int (e^x - 2) dx = e^x - 2x + C. \quad \blacksquare$$

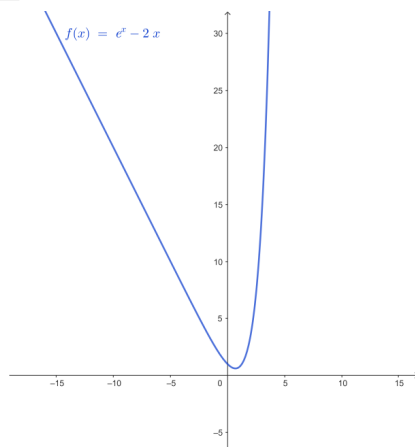


Рис. 1.16

3) Виконаємо елементарні перетворення у підінтегральному виразі, після чого застосуємо формулу:

$$\int \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = \int \frac{d(f(x))}{1+f^2(x)} = \arctg(f(x)).$$

$$\int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctg e^x + C. \quad \blacksquare$$

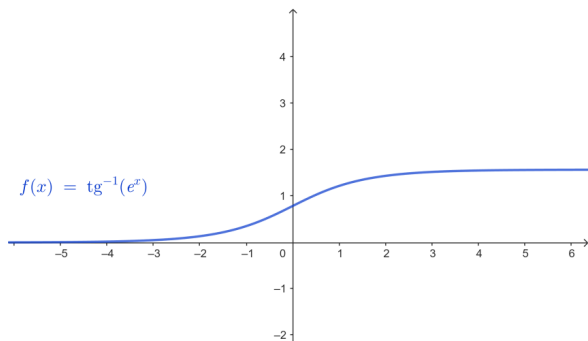


Рис. 1.17

Задача 1.8. Обчислити інтеграли:

1) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$

2) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$

3) $\int \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} dx.$

Розв'язання.

1) Застосуємо формулу пониження степеня для тригонометричних функцій, а потім властивості 4 і 5 невизначеного інтеграла.

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C. \quad \blacksquare$$

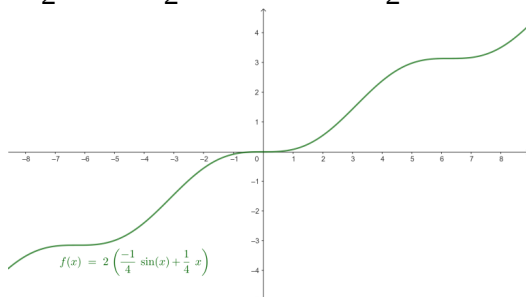


Рис. 1.18

2) Використаємо формулу косинуса подвійного кута:
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Далі формулу різниці квадратів: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx =$$

$$= \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C. \blacksquare$$

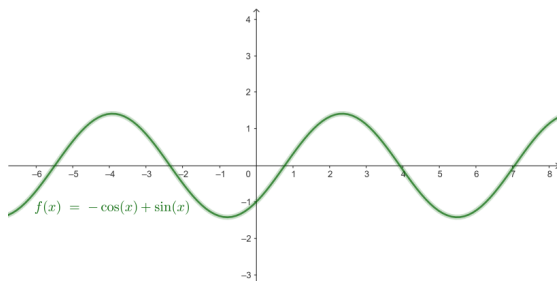


Рис. 1.19

3) Використаємо формулу пониження степеня для гіперболічних функцій:

$$\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2} \right)^2 = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}.$$

$$\int \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2} dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x - x) + C. \blacksquare$$

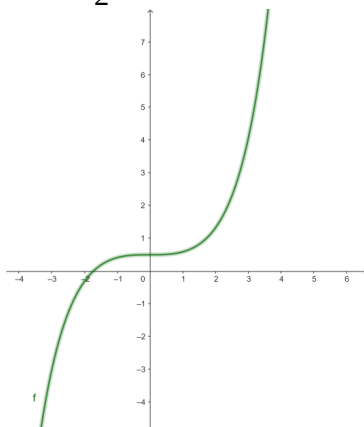


Рис. 1.20

!!! Під час вивчення таблиці інтегралів важливо зрозуміти, що в підінтегральному виразі змінну можна позначати різними буквами або символами, наприклад:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C, \quad \int \wp^2 d\wp = \frac{\wp^3}{3} + C.$$

Тоді очевидно, що $\int \sin^2 x d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C$, а

$$\int \frac{(2x+10)dx}{x^2+x+4} = \int \frac{d(x^2+x+4)}{x^2+x+4} = \ln(x^2+x+4) + C.$$

Завдання для самостійного розв'язування

✎1. Перевірити, чи функція F є первісною для функції f на проміжку X :

1) $F(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$, $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$, $X = \mathbb{R}$;

2) $F(x) = -\frac{1}{x^2} + 5$, $f(x) = \frac{2}{x^3}$, $X_1 = (2; 5)$, $X_2 = (-1; 1)$;

3) $F(x) = \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + 3$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$, $X = \mathbb{R}$;

4) $F(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \sin \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0 & \text{, якщо } x = 0, \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\frac{2}{3} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0 & \text{, якщо } x = 0, \end{cases} \quad X = \mathbb{R}.$

✎2. Для функції $f(x)$ знайти первісну $F(x)$. Завдання можна виконувати усно. Якщо сумніваєтеся в результаті, то перевірте свою відповідь диференціюванням $F(x)$. Записати невизначений інтеграл. Виконати рисунки функцій $f(x)$ і $F(x) + C$.

- 1) $-\frac{2}{x^3}$; 2) $\frac{1}{2x^3}$; 3) $x^3 - \frac{1}{x^3}$; 4) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$;
 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 6) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; 7) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$; 8) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$;
 9) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 10) $\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$; 11) $\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$; 12) $-\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}$;
 13) $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$; 14) $-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$; 15) $-\frac{3}{2}x^{\frac{5}{2}}$; 16) $\frac{1}{x}$;
 17) $\frac{7}{x}$; 18) $1 - \frac{5}{x}$; 19) $\frac{1}{3x}$; 20) $\frac{2}{5x}$;
 21) $1 + \frac{4}{3x} - \frac{1}{x^2}$; 22) $-\pi \sin \pi x$; 23) $3 \sin x$;
 24) $\sin \pi x - 3 \sin 3x$; 25) $\pi \cos \pi x$; 26) $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$;
 27) $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$; 28) $\sec^2 x$; 29) $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$;
 30) $-\sec^2 \frac{3x}{2}$; 31) $\operatorname{cosec}^2 x$; 32) $-\frac{3}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{3x}{2}$;
 33) $1 - 8 \operatorname{cosec}^2 2x$; 34) $\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x$;
 35) $-\operatorname{cosec} 5x \cdot \operatorname{ctg} 5x$; 36) $-\pi \operatorname{cosec} \frac{\pi x}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}$;
 37) $\sec x \cdot \operatorname{tg} x$; 38) $4 \sec 3x \cdot \operatorname{tg} 3x$; 39) $\sec \frac{\pi x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;
 40) e^{3x} ; 41) e^{-x} ; 42) $e^{\frac{x}{2}}$; 43) e^{-2x} ;
 44) $e^{\frac{4x}{3}}$; 45) $e^{\frac{-x}{5}}$.

З3. Знайти функцію f , для якої задана функція є первісною.

Записати інтеграл знайденої функції:

- 1) $x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$; 2) $\frac{x^7}{7} + \frac{2x^4\sqrt{x}}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$;
 3) $\sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \frac{4}{(x-2)^5}$; 4) $\sin^3 2x \cdot \cos 8x^5$;

5) $\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x$;

6) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x|$;

7) $\ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|$;

8) $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$, $a \in \mathbb{R}^+$.

4. Для функції $f(x) = 2x^2 + 3x$ знайти таку первісну, що пряма $y = 5x - 2$ є дотичною до її графіка.

5. Для функції $f(x) = -2x + 5$ знайти таку первісну, щоб її графік мав тільки одну спільну точку з прямою $y = 2$.

6. Для функції $f(x) = x + 1$ знайти таку первісну, щоб її графік мав тільки одну спільну точку з прямою $y = -4$.

7. Обчислити інтеграли:

1) $\int (x+1) dx$;

2) $\int (5-6x) dx$;

3) $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2} \right) dt$;

4) $\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3 \right) dt$;

5) $\int (2x^3 - 5x + 7) dx$;

6) $\int (1 - x^2 - 3x^5) dx$;

7) $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx$;

8) $\int \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x \right) dx$;

9) $\int x^{\frac{1}{3}} dx$;

10) $\int x^{\frac{5}{4}} dx$;

11) $\int x(x+3)(x-2) dx$;

12) $\int (x^2 - 2)^2 dx$;

13) $\int \left(\frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} \right) dx$;

14) $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx$;

15) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$;

16) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$;

17) $\int \left(8y - \frac{2}{y^{\frac{1}{4}}} \right) dy$;

18) $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{\frac{5}{4}}} \right) dy$;

19) $\int 2x(1 - x^{-3}) dx$;

20) $\int x^{-3}(x+1) dx$;

$$21) \int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt;$$

$$22) \int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} dt;$$

$$23) \int \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x^5 \sqrt{x^3}}} dx;$$

$$24) \int \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;;$$

$$25) \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}.$$

8. Обчислити інтеграли:

$$1) \int 2^x \cdot 3^x \cdot e^x dx;$$

$$2) \int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx;$$

$$3) \int (3^{x-3} + 4^{x+4}) 12^{-x} dx;$$

$$4) \int \frac{e^{3x} + 8}{e^{2x} - 2e^x + 4} dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$6) \int x^2 e^{3x^3} dx;$$

$$7) \int (e^{3x} + 5e^{-x}) dx;$$

$$8) \int (2e^x - 3e^{-2x}) dx;$$

$$9) \int (e^{-x} + 4^x) dx;$$

$$10) \int 1,3^x dx.$$

9. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$2) \int \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{1 + \cos 2x};$$

$$4) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$$

$$5) \int \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$6) \int \operatorname{th}^2 x dx;$$

$$7) \int (-2 \cos t) dt;$$

$$8) \int (-5 \sin t) dt;$$

$$9) \int 7 \sin \frac{\theta}{3} d\theta;$$

$$10) \int 3 \cos 5\theta d\theta;$$

$$11) \int (-3 \operatorname{cosec}^2 x) dx;$$

$$12) \int \left(-\frac{\sec^2 x}{3} \right) dx;$$

$$13) \int \frac{\operatorname{cosec} \theta \cdot \operatorname{ctg} \theta}{2} d\theta;$$

$$14) \int \frac{2}{5} \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta d\theta;$$

$$15) \int (4 \sec x \cdot \operatorname{tg} x - 2 \sec^2 x) dx; \quad 16) \int \frac{1}{2} (\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x) dx;$$

$$17) \int (\sin 2x - \operatorname{cosec}^2 x) dx; \quad 18) \int (2 \cos 2x - 3 \sin 3x) dx;$$

$$19) \int \frac{1 + \cos 4t}{2} dt; \quad 20) \int \frac{1 - \cos 6t}{2} dt;$$

$$21) \int \left(\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2 + 1} \right) dx; \quad 22) \int \left(\frac{2}{\sqrt{1 - y^2}} - \frac{1}{y^4} \right) dy;$$

$$23) \int 3x^{\sqrt{3}} dx; \quad 24) \int x^{\sqrt{2}-1} dx;$$

$$25) \int (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) d\theta; \quad 26) \int (2 + \operatorname{tg}^2 \theta) d\theta;$$

$$27) \int \operatorname{ctg}^2 x dx; \quad 28) \int (1 - \operatorname{ctg}^2 x) dx;$$

$$29) \int \cos \theta (\operatorname{tg} \theta + \sec \theta) d\theta; \quad 30) \int \frac{\operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta} d\theta.$$

З10. Молоток і перо. Коли астронавт Apollo 15 Девід Скотт кинув молоток і перо на Місяць, щоб продемонструвати, що у вакуумі всі тіла падають з однаковим (постійним) прискоренням, він кинув їх з висоти приблизно 4 фути над поверхнею. Телевізійні кадри події показують, як молот і перо падають повільніше, ніж на Землі, де, у вакуумі, їм знадобилося лише півсекунди, щоб впасти з висоти 4 фути. Скільки часу знадобилося молоту та перу, щоб упасти з висоти 4 фути на Місяці? Щоб дізнатися це, потрібно розв'язати наступну задачу з початковою умовою (у деяких джерелах – задача Коші) для s як функції від t . Потім знайти значення t , при якому s дорівнює 0.

Диференціальне рівняння: $\frac{d^2 s}{dt^2} = -5,2 \text{ ft/sec}^2$.

Початкові умови: $\frac{ds}{dt} = 0$ та $s = 4$ при $t = 0$.

З11. Рух з постійним прискоренням. Стандартне рівняння для положення тіла s , що рухається з постійним прискоренням a

вздовж координатної прямої, має вигляд $s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0$, де v_0 та s_0 – відповідно швидкість і положення тіла в певний час $t=0$. Вивести дане рівняння, розв'язавши задачу з початковою умовою (у деяких джерелах – задача Коші).

Диференціальне рівняння: $\frac{d^2s}{dt^2} = a$.

Початкові умови: $\frac{ds}{dt} = v_0$ та $s = s_0$ при $t = 0$.

§12. Вільне падіння поблизу поверхні планети. Для вільного падіння поблизу поверхні планети, де прискорення сили тяжіння має постійну величину g (одиниця довжини на секунду в квадраті, довж./сек²), рівняння $s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0$ набуває вигляду $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, де s – висота тіла над поверхнею. Рівняння набуває від'ємного значення, тому що прискорення діє вниз, у напрямку зменшення s . Швидкість v_0 набуватиме додатних значень, якщо об'єкт піднімається в певний час $t=0$, і від'ємних, якщо об'єкт падає.

Замість того, щоб використовувати результат вправи 11, ви можете вивести рівняння $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$ безпосередньо, розв'язавши відповідну задачу з початковою умовою (у деяких джерелах – задача Коші). Яка початкова умова задачі? Розв'язати її, щоб переконатися, що у вас є правильне початкове значення, пояснюючи кроки розв'язання під час виконання.

§ 2. Інтегрування заміною змінних

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Теорема про заміну змінної в невизначеному інтегралі	Theorem of change of a variable in the indefinite integral
Внутрішня функція	The inner function
У підінтегральному виразі побачити внутрішню функцію та її похідну	See the inner function and its derivative in the integrand
Правило підстановки	Integration by change of a variable
Правило заміни змінної	Integration by Substitution Method

1. Сформулювати теорему про заміну змінних у невизначеному інтегралі.

Теорема про заміну змінних у невизначеному інтегралі.

Нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена та диференційовна на проміжку T , а проміжок X – множина її значень. Якщо функція $y = f(x)$ визначена на проміжку X і має на ньому первісну $F(x)$, тоді функція $F(\varphi(t))$ є первісною для функції $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на проміжку T і виконується рівність:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C \quad (2.1)$$

2. Сформулювати правило заміни змінної та правило підстановки.

Особливу увагу зверніть на ті властивості внутрішньої функції $\varphi(x)$, які гарантують правильність формули (2.1).

Правило заміни змінної (The Substitution Rule)

Підінтегральну функцію $f(x)$ намагаємося подати у вигляді добутку складеної функції і похідної внутрішньої функції:

$$f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Якщо функція $g(t)$ має первісну $G(t)$, тоді:

$$\int f(x) dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \int g(t) dt = G(t) + C = G(\varphi(x)) + C.$$

Правило підстановки (Rule (formula) of change of a variable)

Якщо підставити в підінтегральний вираз $f(x)dx$ замість $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – диференційовна функція, яка має обернену $t = \varphi^{-1}(x)$, то:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int g(t) dt = |G'(t) = g(t)| = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Особливу увагу зверніть на формули, записані нижче. Спробуйте їх відпрацювати на багатьох нескладних прикладах так, щоб ви могли їх застосовувати майже автоматично:

$$\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} \int f(kx+b) d(kx+b) = \frac{1}{k} F(kx+b) + C. \quad (2.2)$$

$$\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C. \quad (2.3)$$

$$\int \frac{f'(x) dx}{1+f^2(x)} = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} f(x) + C. \quad (2.4)$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 2.1. Обчислити інтеграли:

$$1) \int (4x-3)^7 dx;$$

$$2) \int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx;$$

$$3) \int \sqrt[5]{6x+7}dx;$$

$$4) \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Розв'язання.

$$1) \int (4x-3)^7 dx.$$

I спосіб. Використаємо правило заміни змінної та табличний інтеграл від степеневої функції:

$$\int (4x-3)^7 dx = \left. \begin{array}{l} t = 4x-3 \\ dt = (4x-3)' dx = 4dx \\ dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \int t^7 \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int t^7 dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^8}{8} + C =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{Повернемося} \\ \text{до заміни} \end{array} \right| = \frac{1}{32} (4x-3)^8 + C.$$

II спосіб. Можна використати формулу (2.2), яка ґрунтується на властивостях первісної. Оскільки для $f(x)=x^7$ первісна $F(x)=\frac{x^8}{8}$, то для $f(4x-3)=(4x-3)^7$ первісна:

$$\frac{1}{4} F(4x-3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x-3)^8}{8} ;$$

$$\int (4x-3)^7 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x-3)^8}{8} + C = \frac{1}{32} (4x-3)^8 + C. \quad \blacksquare$$

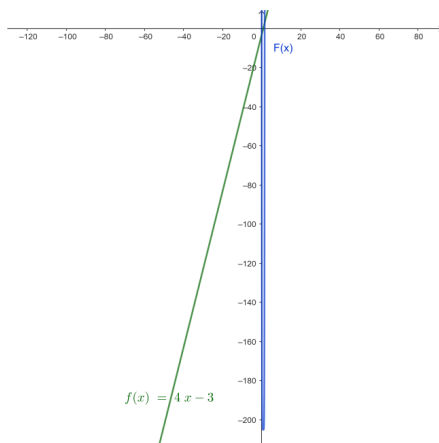
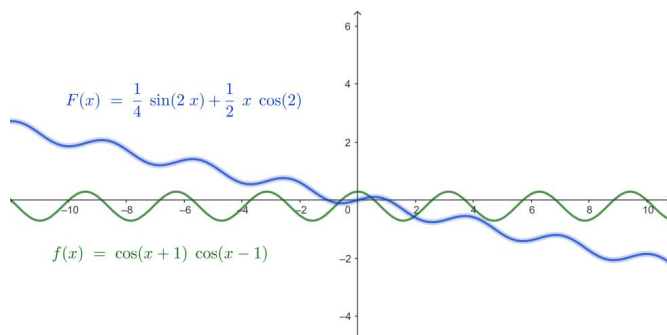


Рис. 2.1

$$2) \int \cos(ax + b) \cos(ax - b) dx.$$

Застосуємо формулу перетворення добутку тригонометричних функцій в суму, властивості 3), 4) невизначеного інтеграла і той факт, що число $\cos 2b$ є сталим множником відносно змінної x , тому його можна винести за знак інтеграла.

$$\begin{aligned} \int \cos(ax + b) \cos(ax - b) dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2ax + \cos 2b) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 2ax dx + \frac{1}{2} \cos 2b \int dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2a} \sin 2ax + \frac{x}{2} \cos 2b + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



$$a=1, b=1$$

Рис. 2.2

$$3) \int \sqrt[5]{6x+7} dx.$$

I спосіб. Аналогічно задачі 1) знаходимо інтеграл:

$$\int \sqrt[5]{6x+7} dx = \int (6x+7)^{\frac{1}{5}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 6x+7 \\ dt = 6dx \\ dx = \frac{1}{6} dt \end{array} \right| = \int t^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + C =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} t^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{36} \sqrt[5]{(6x+7)^6} + C.$$

II спосіб. Аналогічно задачі 1):

Для $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$ первісна $F(x) = \frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}$, отже для $f(6x+7) = (6x+7)^{\frac{1}{5}}$

первісна $\frac{1}{6} F(6x+7) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} (6x+7)^{\frac{6}{5}}$, тому:

$$\int \sqrt[5]{6x+7} dx = \frac{5}{36} (6x+7)^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{36} \sqrt[5]{(6x+7)^6} + C. \blacksquare$$

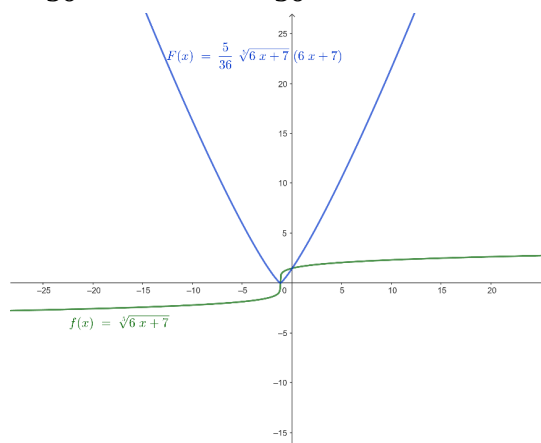


Рис. 2.3

$$4) \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Для обчислення $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} \cdot \frac{dx}{x}$ потрібно використати правило заміни змінної. Внутрішньою функцією є $y = \ln x$, а її похідна $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ є у підінтегральному виразі. Тому:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} \cdot \frac{dx}{x} &= \left| \begin{array}{l} t = 1 + \ln x \quad \ln x = t - 1 \\ dt = (1 + \ln x)' dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt = \\ &= \int \left(\frac{t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt = \int \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right) dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} - 2\sqrt{1+\ln x} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

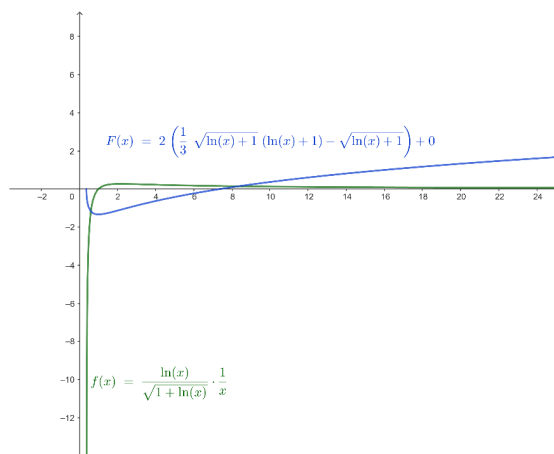


Рис. 2.4

Задача 2.2. Обчислити інтеграли:

- 1) $\int \frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+8}$;
- 2) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$;
- 3) $\int \frac{x^2}{5+x^3} dx$;
- 4) $\int \operatorname{tg} x dx$;
- 5) $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$.

Розв'язання.

Для всіх інтегралів використаємо формулу інтегрування заміною змінних. І тут важливо побачити внутрішню функцію та її похідну й застосувати формули (2.3) або (2.4).

$$1) \int \frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+8} = \left| (x^2+7x+8)' = 2x+7 \right| \stackrel{(2.3)}{=} \int \frac{d(x^2+7x+8)}{x^2+7x+8} = \ln|x^2+7x+8| + C. \quad \blacksquare$$

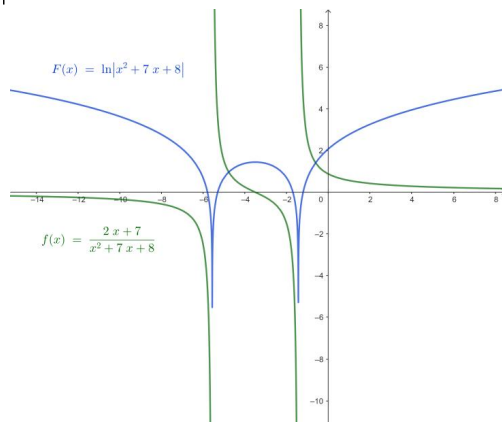


Рис. 2.5

$$2) \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \left| (\ln(\ln x))' = \frac{1}{x \ln x} \right| \stackrel{(2.3)}{=} \int \frac{d(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)| + C. \quad \blacksquare$$

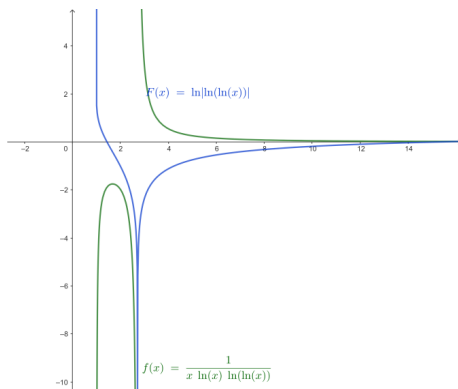


Рис. 2.6

$$3) \int \frac{x^2}{5+x^3} dx = \left| (5+x^3)' = 3x^2 \right| \stackrel{(2.3)}{=} \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{5+x^3} = \frac{1}{3} \ln |5+x^3| + C. \quad \blacksquare$$

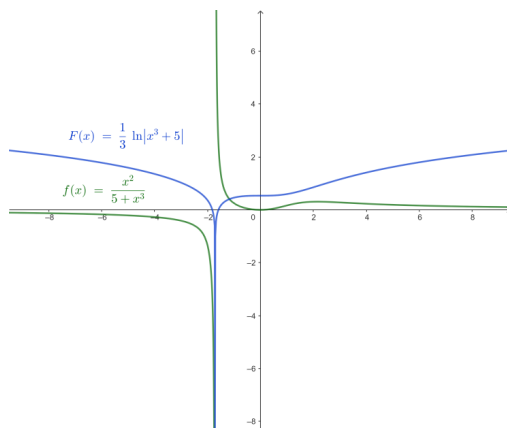


Рис. 2.7

$$4) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C. \quad \blacksquare$$

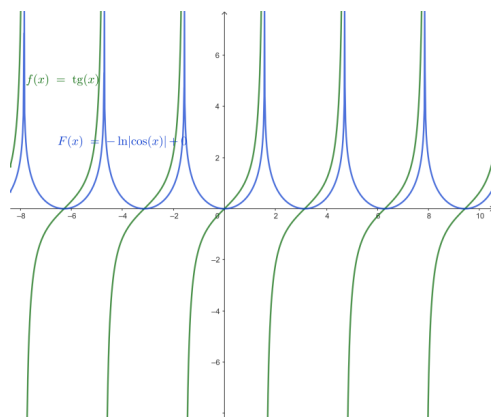


Рис. 2.8

$$5) \int \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} \stackrel{(2.4)}{=} \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \sin x + C. \quad \blacksquare$$

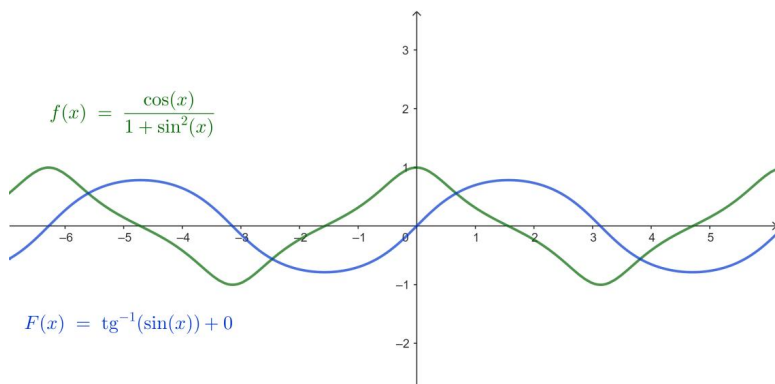


Рис. 2.9

Задача 2.3. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \left(\frac{x}{x^5 + 2} \right)^4 dx; \quad 2) \int x^2 \sqrt[3]{x^3 + 1} dx; \quad 3) \int \frac{\ln(\arcsin x) dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}.$$

Розв'язання.

Проаналізувавши формулу (2.1), зауважимо, що у підінтегральній функції важливо побачити складену функцію $f(\varphi(t))$, помножену на похідну внутрішньої функції $\varphi'(t)$. Тоді:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \int f(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

$$1) \int \left(\frac{x}{x^5 + 2} \right)^4 dx = \int \frac{x^4 dx}{(x^5 + 2)^4} = \left| \begin{array}{l} t = x^5 + 2 \\ dt = 5x^4 dx \end{array} \right| \stackrel{(2.1)}{=} \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + C =$$

$$= -\frac{1}{15t^3} + C = -\frac{1}{15(x^5 + 2)^3} + C. \quad \blacksquare$$

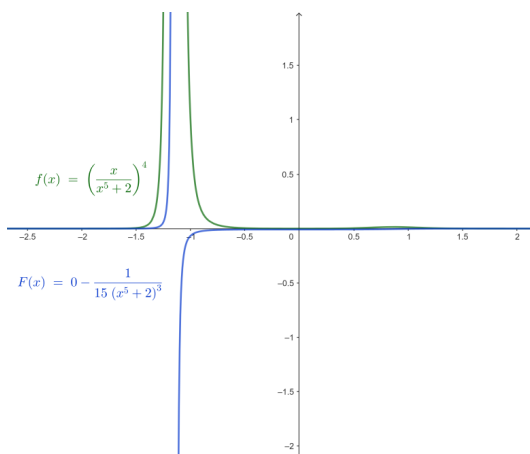


Рис. 2.10

$$2) \int x^2 \sqrt[3]{x^3+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3+1 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| \stackrel{(2.1)}{=} \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4} \sqrt[3]{(x^3+1)^4} + C. \quad \blacksquare$$

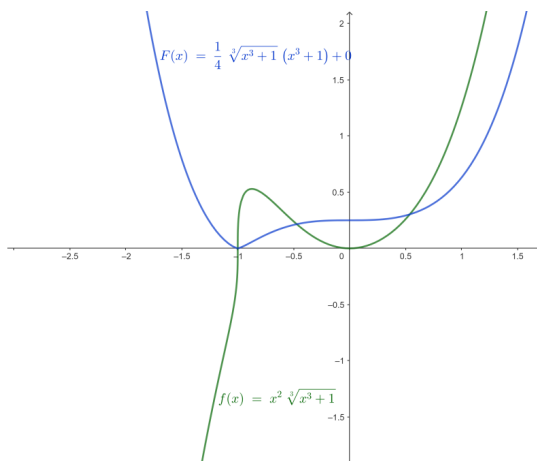


Рис. 2.11

$$3) \int \frac{\ln(\arcsin x) dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} = \left| \begin{array}{l} t = \ln(\arcsin x) \\ dt = \frac{dx}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| \stackrel{(2.1)}{=} \int t dt = \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln^2(\arcsin x) + C. \quad \blacksquare$$

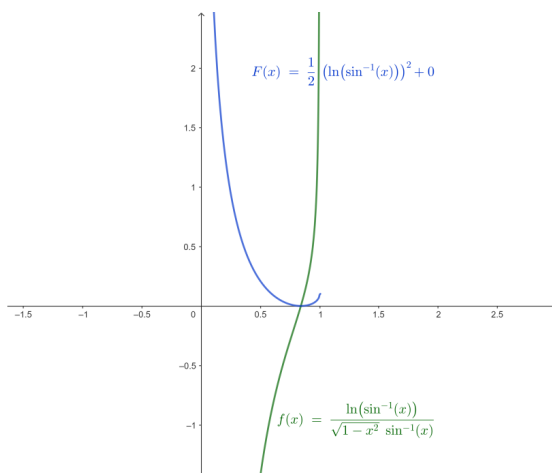


Рис. 2.12

Задача 2.4. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}; \quad 2) \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}; \quad 3) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 4 \cos x + \cos^2 x}}.$$

Розв'язання.

В підінтегральних виразах 1), 2) намагаємося побачити складену функцію, помножену на похідну внутрішньої функції. Цю внутрішню функцію й замінюємо іншою буквою.

$$1) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{tg} x} + C. \quad \blacksquare$$

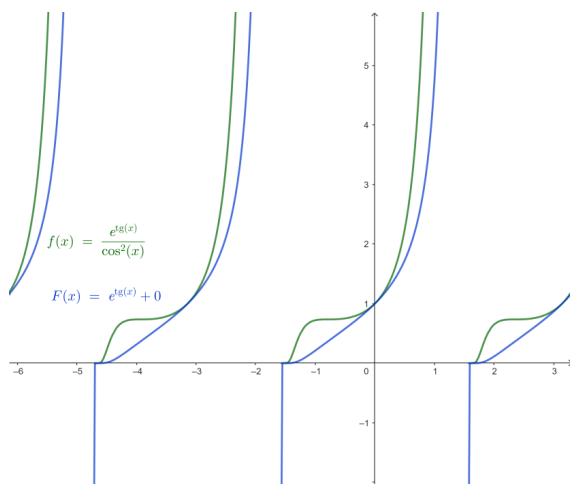


Рис. 2.13

$$2) \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| \stackrel{(2.1)}{=} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C =$$

$$= -\operatorname{ctg}(\ln x) + C. \quad \blacksquare$$

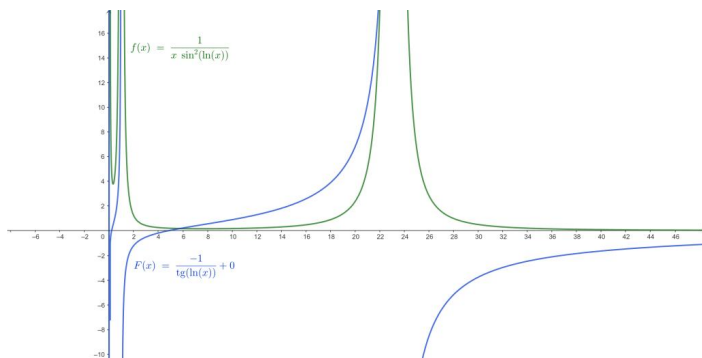


Рис. 2.14

3) У підкореновому виразі виділимо квадрат двочлена, скористаємось рівністю диференціалів $dt = d(t + 2)$ і застосуємо табличний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+4\cos x+\cos^2 x}} &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| \stackrel{(2.1)}{=} - \int \frac{dt}{\sqrt{1+4t+t^2}} = \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{(t^2+4t+4)-3}} = - \int \frac{d(t+2)}{\sqrt{(t+2)^2-3}} \stackrel{(1.1)}{=} - \ln \left| t+2+\sqrt{t^2+4t+1} \right| + C = \\ &= - \ln \left(2 + \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1} \right) + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

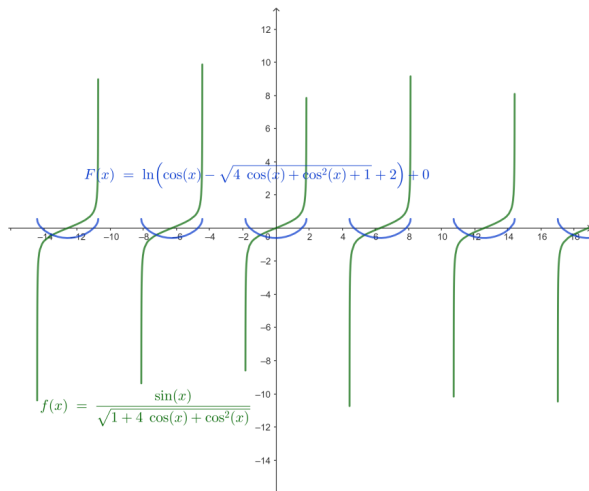


Рис. 2.15

Задача 2.5. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad 3) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}.$$

Розв'язання.

У всіх прикладах 1), 2), 3) потрібно звільнитися від ірраціональності. Застосуємо правило підстановки: у підінтегральний вираз $f(x)dx$ підставимо $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – диференційовна функція, яка має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int g(t) dt = G(t) + C =$$

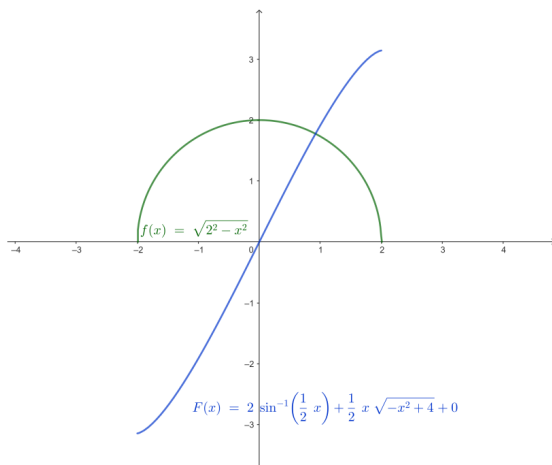
$$= G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

$$1) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ dx = a \cos t dt, \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt =$$

$$= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \quad \blacksquare$$



$$a=2$$

Рис. 2.16

$$\begin{aligned}
 2) \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} &= |x = a \sin t| = \int \frac{a \cos t dt}{\sqrt{(a^2 - a^2 \sin^2 t)^3}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \\
 &= \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) + C = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

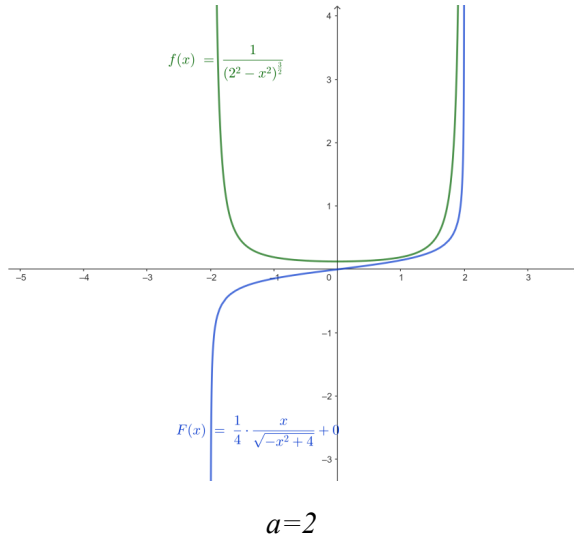


Рис. 2.17

$$\begin{aligned}
 3) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{3}{\cos t}, \quad dx = \frac{3 \sin t dt}{\cos^2 t} \\ \cos t = \frac{3}{x}, \quad t = \arccos \frac{3}{x} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{3 \sin t dt}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t} \cdot \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} = \\
 &= \int \frac{\sin t dt}{9 \operatorname{tg} t} = \frac{1}{9} \int \cos t dt = \frac{1}{9} \sin t + C = \frac{1}{9} \sin \left(\arccos \frac{3}{x} \right) + C = \\
 &= \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{9x} + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

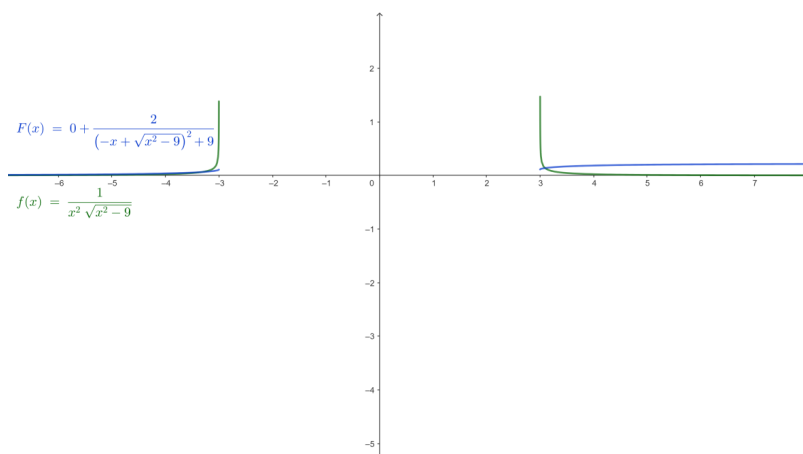


Рис. 2.18

Завдання для самостійного розв'язування

З1. Обчислити інтеграли $\left(\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \right)$:

1) $\int (3x+5)^8 dx$;

2) $\int \cos(ax+b)dx$, $a \neq 0$;

3) $\int \frac{dx}{(2x+5)^4}$;

4) $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx$;

5) $\int \sqrt{ax+bdx}$;

6) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$, $a \neq 0$;

7) $\int 7^{3x+5} dx$;

8) $\int \frac{1}{e^{2x}} dx$;

9) $\int e^{5-\frac{x}{2}} dx$;

10) $\int \frac{1}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$;

11) $\int \frac{dx}{7-2x}$;

12) $\int \frac{dx}{4x+9}$;

13) $\int \sin 5x \cos 3x dx$;

14) $\int \sin \frac{7x}{4} \sin \frac{5x}{4} dx$;

$$15) \int \cos x \cos 8x dx.$$

2. Обчислити інтеграли $\left(\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \right)$:

$$1) \int \frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+8};$$

$$2) \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)};$$

$$3) \int \frac{\sin 2x dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x};$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x}.$$

$$5) \int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x} + 5};$$

$$6) \int \frac{2 \ln x + 7}{\ln^2 x + 7 \ln x} \cdot \frac{dx}{x}.$$

3. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{x dx}{(1-x^2)^2};$$

$$2) \int \left(\frac{x}{x^5 + 2} \right)^4 dx;$$

$$3) \int x^2 \sqrt[3]{x^3 + 1} dx;$$

$$4) \int x \sqrt{1-x} dx;$$

$$5) \int \frac{\ln(\arcsin x) dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x};$$

$$6) \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{2x} + 2e^x + 2}};$$

$$7) \int e^{2x^2+2x+1} (2x+1) dx;$$

$$8) \int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$9) \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} + 1}};$$

$$10) \int \frac{(\sin x - 2 \cos x) dx}{\sin^3 x}.$$

4. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x};$$

$$2) \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)};$$

$$3) \int x \cos(9-x^2) dx;$$

$$4) \int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx;$$

5) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\cos 2x}};$

6) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+4\cos x+\cos^2 x}};$

7) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x} dx}{(1+x)\sqrt{x}};$

8) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$

✎ 5. Обчислити інтеграли:

1) $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3} dx;$

2) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$

3) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$

4) $\int \frac{\sqrt{x^2-8} dx}{x^4};$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}};$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$

✎ 6. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx;$

2) $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})};$

3) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx;$

4) $\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$

✎ 7. Обчислити інтеграли (інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен):

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+20};$

2) $\int \frac{dx}{5-4x-x^2};$

3) $\int \frac{3x+4}{x^2+x+1} dx;$

4) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{4+x^2}} dx;$

5) $\int \frac{8x+10}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx.$

§ 3. Інтегрування частинами

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Теорема про інтегрування частинами невизначеного інтеграла	Theorem on integration by parts of an indefinite integral
Типи функцій, які інтегруються лише частинами	Types of functions that integrate only by parts
Добуток степеневі функції на показникову чи тригонометричну	The product of a power function and an exponential function (or a trigonometric function)
Добуток степеневі функції на обернену до показникової чи тригонометричної	The product of a power function and the inverse of an exponential function (or the inverse of a trigonometric function)
Добуток показникової функції на тригонометричну	The product of an exponential function and a trigonometric function
Рекурентні формули	Recurrence formulas

1. Сформулювати теорему про інтегрування частинами невизначеного інтеграла.

Теорема про інтегрування частинами невизначеного інтеграла.

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на деякому проміжку, і на цьому проміжку існує $\int v du$, то існує і інтеграл

$\int u dv$ і має місце рівність (3.1):

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}, \text{ або } \boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx}$$

2. Пригадати типи функцій, які інтегруються лише частинами.

Спеціальний вигляд функцій, які інтегруються лише частинами.

1. $P_n(x)e^x$, $P_n(x)\sin x$, $P_n(x)\cos x$. Тут за функцію $u(x)$ доцільно прийняти многочлен $P_n(x)$, а за $dv(x)$ відповідно $e^x dx$, $\sin x dx$, $\cos x dx$.

2. $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arctg x$, $P_n(x)\arcsin x$. Тут доцільно за функцію $u(x)$ прийняти трансцендентний множник ($u = \ln x$; $u = \arctg x$; $u = \arcsin x$), а за $dv = P_n(x) dx$.

3. $e^{ax} \sin bx$, $e^{ax} \cos bx$. Тут вибір функції u і диференціала dv несуттєвий, оскільки двократне застосування методу інтегрування частинами приводить до початкового інтеграла. Після чого для обчислення інтеграла розв'язують лінійне рівняння.

3. Виписати рекурентні формули, які можна вивести методом інтегрування частинами.

Цікаві рекурентні формули.

Формули можна вивести методом інтегрування частинами. Спробуйте!!!

$$1. I = \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

$$2. I = \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

$$3. I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}$$

$$4. I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}, \quad m+n \neq 0.$$

$$5. \int P_n(x)e^{ax} dx = \left(P_n(x) - \frac{P'_n(x)}{a} + \frac{P''_n(x)}{a^2} - \dots + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{a^n} \right) \cdot \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

$$6. I_n = \int x^n e^{ax} dx =$$

$$7. I_n = \int \ln^n x dx =$$

$$8. I_n = \int \sin^n x dx =$$

$$9. I_n = \int \cos^n x dx =$$

$$10. I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$11. I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} =$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 3.1. Обчислити інтеграли:

$$1) \int (5x^2 + 6x + 7) \sin 2x dx; \quad 2) \int x^5 \ln x dx; \quad 3) \int \arcsin^2 x dx.$$

Розв'язання.

$$1) \int (5x^2 + 6x + 7) \sin 2x dx.$$

Функція інтегрується частинами за формулою (3.1), причому за $u(x)$ доцільно взяти $P_2(x) = 5x^2 + 6x + 7$.

Завдання 2) і 3) виконуються аналогічно.

$$\begin{aligned} \int (5x^2 + 6x + 7) \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 5x^2 + 6x + 7, \quad du = (10x + 6) dx, \\ dv = \sin 2x dx \quad v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} (5x^2 + 6x + 7) \cos 2x + \int (5x + 3) \cos 2x dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{ll} u = 5x + 3, & du = 5dx, \\ dv = \cos 2x dx & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = -\frac{1}{2} (5x^2 + 6x + 7) \cos 2x + \\
 &+ \frac{1}{2} (5x + 3) \sin 2x - \frac{5}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} (5x^2 + 6x + 7) \cos 2x + \\
 &+ \frac{1}{2} (5x + 3) \sin 2x + \frac{5}{4} \cos 2x + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

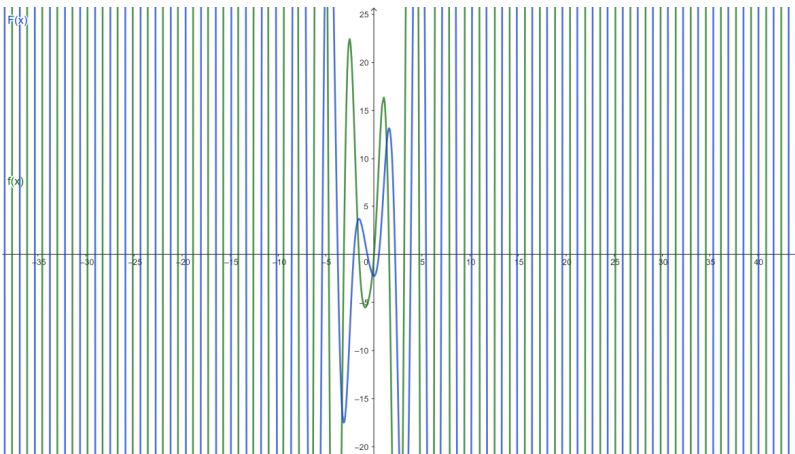


Рис. 3.1

$$2) \int x^5 \ln x dx.$$

$$\begin{aligned}
 \int x^5 \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^5 dx & v = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} \end{array} \right| = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{6} \int x^5 dx = \\
 &= \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{36} + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

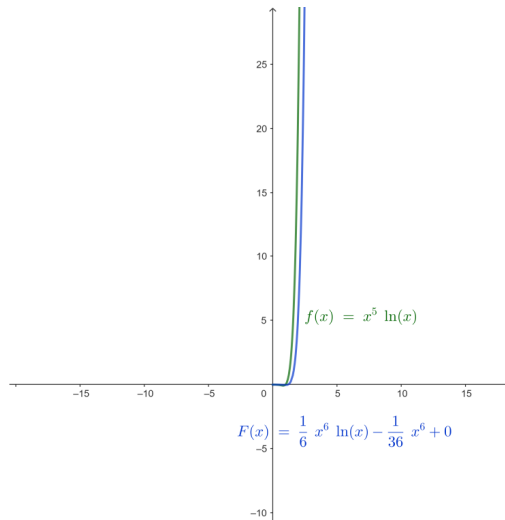


Рис. 3.2

3) $\int \arcsin^2 x dx$.

$$\int \arcsin^2 x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin^2 x & du = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \arcsin^2 x - 2 \int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x, & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = \frac{-2x dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = 2\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C. \quad \blacksquare$$

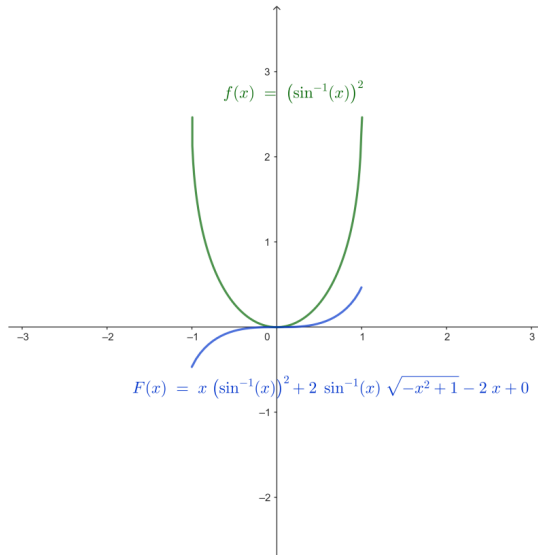


Рис. 3.3

Задача 3.2. Обчислити інтеграли:

1) $I = \int e^{ax} \cos bxdx$; 2) $\int \cos(\ln x) dx$; 3) $\int x^2 e^x \cos x dx$.

Розв'язання.

1) $I = \int e^{ax} \cos bxdx$.

Обчислимо інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\begin{aligned}
 I &= \int e^{ax} \cos bxdx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax} & du = ae^{ax} dx \\ dv = \cos bxdx & v = \int \cos bxdx = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right| = \\
 &= \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax}, & du = ae^{ax} dx, \\ dv = \sin bxdx, & v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right| = \\
 &= \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx \right).
 \end{aligned}$$

Отже,

$$I = \int e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} I, \text{ звідки}$$

$$I = \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

■

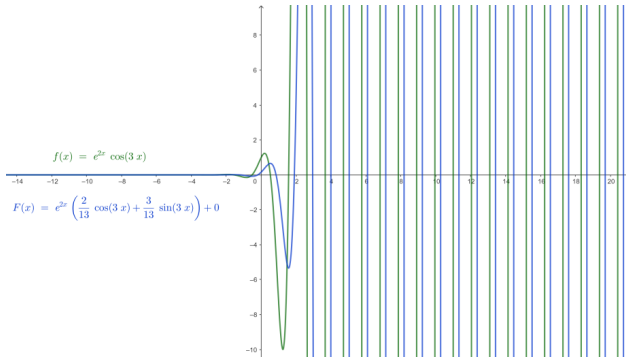


Рис. 3.4

2) $\int \cos(\ln x) dx.$

Використаємо спочатку заміну змінної, після чого формулу з пункту 1), одержимо:

$$\int \cos(\ln x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ x = e^t \\ dx = e^t dt \end{array} \right| = \int e^t \cos t dt = \left| \begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array} \right| = \frac{e^t (\sin t + \cos t)}{2} + C =$$

$$= \left| t = \ln x \right| = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C. \quad \blacksquare$$

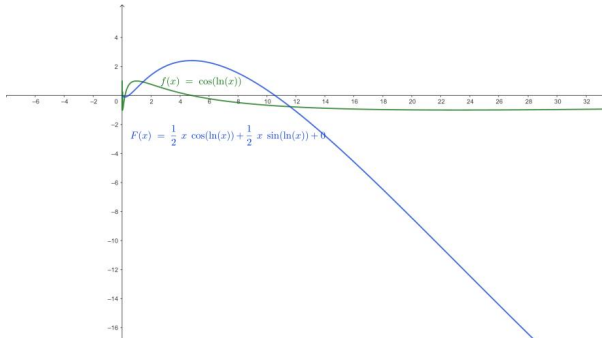


Рис. 3.5

$$3) \int x^2 e^x \cos x dx.$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = e^x \cos x dx \quad v = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2 e^x (\sin x + \cos x)}{2} - \int x e^x (\sin x + \cos x) dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^x (\sin x + \cos x) dx, \\ du = dx, \quad v = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} = e^x \sin x \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2 e^x (\sin x + \cos x)}{2} - x e^x \sin x + \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C = \\ &= \frac{e^x}{2} ((x^2 - 2x + 1) \sin x + (x^2 - 1) \cos x) + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

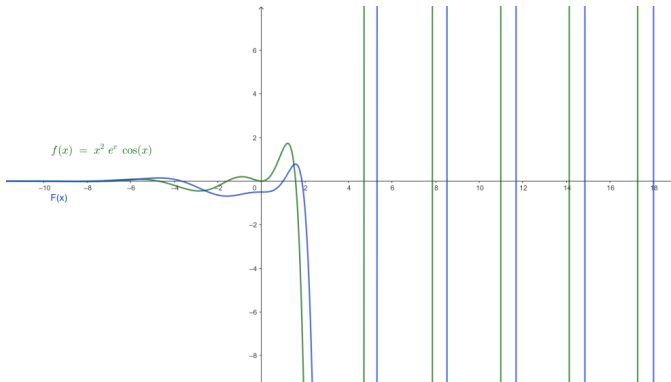


Рис. 3.6

Задача 3.3. Обчислити інтеграли методом невизначених коефіцієнтів:

$$1) \int (x^2 + 5x) e^{2x} dx;$$

$$2) \int (x^2 - 3x + 4) \sin 2x dx.$$

Розв'язання.

З попередніх прикладів ми бачимо, що первісні від функцій $P(x)e^{ax}$, $P(x)\cos bx$, $P(x)\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ є функціями такого самого вигляду або їх лінійних комбінаціями. Отже, в таких випадках можна скористатися **методом невизначених коефіцієнтів**, тобто за виглядом підінтегральної функції відшукати її первісну і, виходячи з рівності похідних, скласти лінійну систему для знаходження невідомих коефіцієнтів. Цей метод можна застосувати також і до функцій вигляду $\csc x \cos bx$, $\csc x \sin bx$, $\sec x \cos bx$, $\sec x \sin bx$.

$$1) \int (x^2 + 5x)e^{2x} dx.$$

$$\int (x^2 + 5x)e^{2x} dx = (ax^2 + bx + c)e^{2x} + C, \quad a, b, c, C \in \mathbb{R}.$$

Знайдемо похідні лівої та правої частини:

$$(x^2 + 5x)e^{2x} = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} \Big| : e^{2x},$$

звідки

$$x^2 + 5x = 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x , дістанемо систему лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів a, b, c :

$$\begin{matrix} x^2 \\ x \\ x^0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 2a = 1, \\ 2a + 2b = 5, \\ b + 2c = 0; \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{matrix} a = \frac{1}{2}, \\ 2b = 4, \\ 2c = -b; \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = \frac{1}{2}, \\ b = 2, \\ c = -1. \end{matrix}$$

$$\text{Тому } \int (x^2 + 5x)e^{2x} dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \right) e^{2x} + C. \quad \blacksquare$$

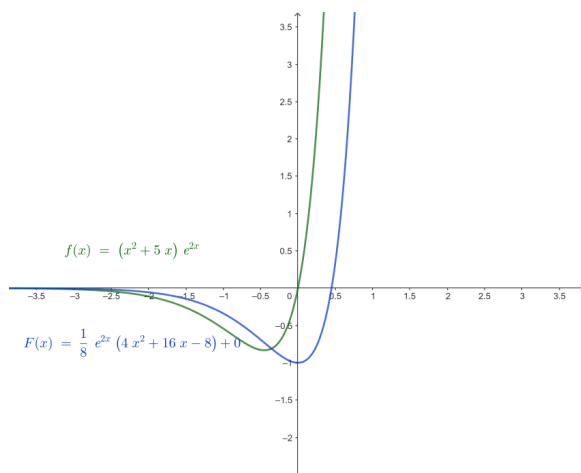


Рис. 3.7

$$2) \int (x^2 - 3x + 4) \sin 2x dx.$$

Аналогічно до попереднього прикладу запишемо:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x + 4) \sin 2x dx &= (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \sin 2x + (a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \cos 2x + C, \\ (x^2 - 3x + 4) \sin 2x &= (2a_1 x + b_1) \sin 2x + 2(a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \cos 2x + \\ &+ (2a_2 x + b_2) \cos 2x - 2(a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \sin 2x. \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ і $\sin 2x$:

$$\begin{cases} \sin 2x & \left\{ \begin{array}{l} 2a_1 x + b_1 - 2a_2 x^2 - 2b_2 x - 2c_2 = x^2 - 3x + 4, \\ \cos 2x & \left\{ \begin{array}{l} 2a_2 x + b_2 + 2a_1 x^2 + 2b_1 x + 2c_1 = 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2a_2 = 1, \\ 2a_1 - 2b_2 = -3, \\ b_1 - 2c_2 = 4, \\ 2a_1 = 0, \\ 2a_2 + 2b_1 = 0, \\ b_2 + 2c_1 = 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_2 = -\frac{1}{2}, \\ -2b_2 = -3, \\ -2c_2 = 4 - b_1, \\ a_1 = 0, \\ 2b_1 = 1, \\ 2c_1 = -b_2; \end{array} \right.$$

$$\text{звідки } a_2 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{3}{2}, c_2 = -\frac{7}{4}, a_1 = 0, b_1 = \frac{1}{2}, c_1 = -\frac{3}{4}.$$

Отже,

$$\int (x^2 - 3x + 4) \sin 2x dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4} \right) \sin 2x + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \right) \cos 2x + C. \blacksquare$$

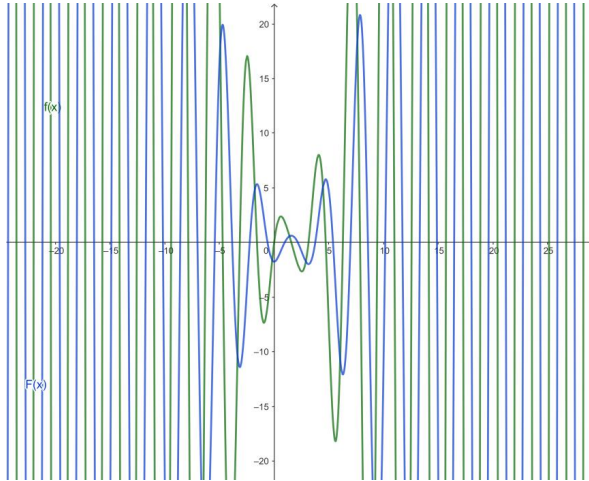


Рис. 3.8

Задача 3.4. Вивести рекурентні формули для обчислення інтегралів:

$$1) I_n = \int x^n e^{ax} dx;$$

$$2) I_n = \int \sin^n x dx.$$

Розв'язання.

В обох випадках використаємо метод інтегрування частинами.

$$1) I_n = \int x^n e^{ax} dx.$$

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^n & du = nx^{n-1} dx \\ dv = e^{ax} dx & v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array} \right| = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}.$$

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

Наприклад,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int x^3 e^{ax} dx = \frac{x^3 e^{ax}}{a} - \frac{3}{a} \int x^2 e^{ax} dx = \frac{x^3 e^{ax}}{a} - \frac{3}{a} \left(\frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a} \int x e^{ax} dx \right) = \\ &= \frac{x^3 e^{ax}}{a} - \frac{3x^2 e^{ax}}{a^2} + \frac{6}{a^2} \left(\frac{x e^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx \right) = \\ &= \frac{x^3 e^{ax}}{a} - \frac{3x^2 e^{ax}}{a^2} + \frac{6x e^{ax}}{a^3} - \frac{6e^{ax}}{a^4} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2) $I_n = \int \sin^n x dx$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x & du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + \\ &+ (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n; \end{aligned}$$

звідки $I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$, або

$$I_n = \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \quad \blacksquare$$

Задача 3.5. Довести формулу ($P_n(x)$ – многочлен n -го степеня):

$$\int P_n(x) e^{ax} dx = \left(P_n(x) - \frac{P'_n(x)}{a} + \frac{P''_n(x)}{a^2} - \dots + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{a^n} \right) \cdot \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

Доведення.

Використаємо формулу інтегрування частинами і те, що:

$$P_n^{(n)}(x) = a_0 n! = \text{const}, P_n^{(n+1)}(x) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Маємо: } \int P_n(x) e^{ax} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = P_n(x) & du = P'_n(x) dx \\ dv = e^{ax} dx & v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{e^{ax}}{a} P_n(x) - \frac{1}{a} \int e^{ax} P'_n(x) dx = \left| \begin{array}{ll} u = P'_n(x) & du = P''_n(x) dx \\ dv = e^{ax} dx & v = \frac{e^{ax}}{a} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{e^{ax}}{a} P_n(x) - \frac{1}{a} \left(\frac{e^{ax}}{a} P'_n(x) - \frac{1}{a} \int e^{ax} P''_n(x) dx \right) = \\
 &= \frac{e^{ax}}{a} P_n(x) - \frac{e^{ax}}{a^2} P'_n(x) + \frac{1}{a^2} \int e^{ax} P''_n(x) dx = \left| \begin{array}{l} \text{використаємо ще } (n-2) \text{ рази} \\ \text{формулу інтегрування частинами} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{e^{ax}}{a} P_n(x) - \frac{e^{ax}}{a^2} P'_n(x) + \dots + \frac{(-1)^n}{a_n} \int \frac{e^{ax}}{a} P_n^{(n)}(x) dx = \\
 &= \left(\frac{e^{ax}}{a} P_n(x) - \frac{e^{ax}}{a^2} P'_n(x) + \dots + \frac{(-1)^n e^{ax}}{a^{n+1}} P_n^{(n)}(x) \right) + C = \\
 &= \left(P_n(x) - \frac{P'_n(x)}{a} + \frac{P''_n(x)}{a^2} - \dots + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{a^n} \right) \cdot \frac{e^{ax}}{a} + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язування

З1. Обчислити інтеграли від функцій вигляду $P_n(x) a^x$:

1) $\int (2x+5) \cdot 2^x dx$;

2) $\int (7x^2 - 4) \cdot 3^x dx$;

3) $\int (x^2 - 6x + 2) e^{3x} dx$;

4) $\int x^8 e^{-x} dx$.

З2. Обчислити інтеграли від функцій вигляду $P_n(x) \cos x$,

$P_n(x) \sin x$:

$$1) \int x \cos(5x+9) dx;$$

$$2) \int x^2 \cos 3x dx;$$

$$3) \int (ax^2 + bx + c) \sin 2x dx;$$

$$4) \int (3x+4)^5 \sin 6x dx;$$

$$5) \int x^5 \sin 8x dx;$$

$$6) \int (2x+11)^3 \operatorname{sh} 4x dx.$$

З3. Обчислити інтеграли від функцій вигляду $P_n(x) \log_a x$:

$$1) \int (5x-1) \ln x dx;$$

$$2) \int (x^2 - 2x + 8) \ln(x+3) dx;$$

$$3) \int x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx;$$

$$4) \int x^\alpha \ln x dx, x \in \mathbb{R};$$

$$5) \int x^3 \ln^3 x dx;$$

$$6) \int \frac{\ln \ln x}{x} dx.$$

З4. Обчислити інтеграли від функцій вигляду $P_n(x) \arcsin x$, $P_n(x) \arccos x$, $P_n(x) \operatorname{arctg} x$:

$$1) \int \operatorname{arctg} x dx;$$

$$2) \int \arcsin^2 x dx;$$

$$3) \int \arccos(5x-2) dx;$$

$$4) \int x^2 \arcsin 2x dx;$$

$$5) \int x \operatorname{arctg} x^2 dx;$$

$$6) \int x \arccos \frac{1}{x} dx.$$

З5. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$2) \int \sqrt{x^2 + a} dx;$$

$$3) \int x^2 e^x \sin x dx;$$

$$4) \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx;$$

$$5) \int \sin(\ln x) dx;$$

$$6) \int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx;$$

$$7) \int \ln(x + \sqrt{4+x^2}) dx;$$

$$8) \int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx;$$

$$9) \int x^2 e^x \cos x dx;$$

$$10) \int x e^x \sin^2 x dx.$$

✎ 6. Обчислити інтеграли методом невизначених коефіцієнтів:

$$1) \int (x^2 + 2x + 3) e^{-3x} dx;$$

$$2) \int (x^2 + 2) \cos 2x dx;$$

$$3) \int ((x^2 + 3x + 1) e^{-3x} + (x - 1) \sin x) dx;$$

$$4) \int e^x \cos 2x dx.$$

✎ 7. Вивести рекурентні формули для обчислення інтегралів.

Доповнити таблицю рекурентних формул:

$$1) I_n = \int x^n e^{ax} dx;$$

$$2) I_n = \int \ln^n x dx;$$

$$3) I_n = \int \sin^n x dx;$$

$$4) I_n = \int \cos^n x dx;$$

$$5) I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + a^2}};$$

$$6) I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}.$$

✎ 8. Довести формули ($P_n(x)$ – многочлен степеня n):

$$1) \int P_n(x) e^{ax} dx = \left(P_n(x) - \frac{P'_n(x)}{a} + \dots + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{a^n} \right) \frac{e^{ax}}{a} + C;$$

$$2) \int P_n(x) \sin ax dx = - \left(P_n(x) - \frac{P''_n(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right) \frac{\cos ax}{a} + \\ + \left(\frac{P'_n(x)}{a} - \frac{P_n'''(x)}{a^3} + \dots \right) \frac{\sin ax}{a} + C;$$

$$3) \int P_n(x) \cos ax dx = \left(P_n(x) - \frac{P''_n(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right) \frac{\sin ax}{a} + \\ + \left(\frac{P'_n(x)}{a} - \frac{P_n'''(x)}{a^3} + \dots \right) \frac{\cos ax}{a} + C.$$

§ 4. Інтегрування раціональних функцій

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Раціональний дріб	A rational fraction
Правильний раціональний дріб	A proper rational fraction
Неправильний раціональний дріб	An improper rational fraction
Прості (елементарні) дробі першого-четвертого типів	Simple (elementary) fractions of the first through fourth types
Розклад правильного раціонального дробу на прості дробі	Decomposition of a proper rational fraction into simple fractions
Метод невизначених коефіцієнтів	The method of undetermined coefficients
Рекурентна формула	Recurrent formula

1. Як інтегруються елементарні (прості) дробі першого – четвертого типів:

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, p^2-4q < 0, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}?$$

Інтегрування раціональних дробів.

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ многочлени степенів m і n відповідно.

Інтегрування елементарних дробів першого типу:

$$\frac{A}{x-a}, a, A \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

Інтегрування елементарних дробів другого типу:

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n > 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Інтегрування елементарних дробів третього типу:

$$\frac{1}{x^2 + px + q}, \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad D = p^2 - 4q < 0;$$

або

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Спочатку в знаменнику виділяємо квадрат двочлена:

$$\int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C;$$

Потім у чисельнику виділяємо похідну знаменника.

Інтегрування елементарних дробів четвертого типу:

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}, \quad n > 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

У чисельнику виділяємо похідну квадратного тричлена $x^2 + px + q$, потім використаємо рекурентну формулу для

$$\text{інтеграла } I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}.$$

2. Довести рекурентну формулу

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}. \quad (4.1)$$

3. Сформулювати леми 1 і 2 про подання правильного раціонального дробу у вигляді суми елементарних (простих) дробів.

Лема 1. Якщо $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – правильний раціональний дріб і α – корінь знаменника кратності k , то існує таке число A і многочлен $P_1(x)$, що:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_{n-k}(x)}$$

Лема 2. Якщо $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – правильний раціональний дріб і якщо $\beta + \gamma i$ – комплексний корінь знаменника кратності l , то існують дійсні числа M і N та многочлен $P_1(x)$, що:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^l} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{l-1} Q_{n-2l}(x)},$$

$$\text{де } p = -2\beta, q = \beta^2 + \gamma^2, Q_{n-2l}(\beta + \gamma i) \neq 0.$$

Наслідок. Якщо знаменник $Q_n(x)$ правильного дробу подано у вигляді:

$$Q_n(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_l)^{k_l} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_r x + q_r)^{s_r},$$

$$k_1 + \dots + k_l + 2(s_1 + \dots + s_r) = n, \text{ то раціональну функцію } \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad (m < n)$$

можна подати у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{j=1}^{k_1} \frac{A_j^{(1)}}{(x - \alpha_1)^j} + \dots + \sum_{j=1}^{k_l} \frac{A_j^{(l)}}{(x - \alpha_l)^j} + \sum_{j=1}^{s_1} \frac{M_j^{(1)} x + N_j^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^j} + \dots + \sum_{j=1}^{s_r} \frac{M_j^{(r)} x + N_j^{(r)}}{(x^2 + p_r x + q_r)^j}$$

4. Сформулювати алгоритм обчислення інтегралу від правильного раціонального дробу. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів?

Алгоритм розкладання правильних раціональних дробів на прості дроби.

1. Якщо дріб неправильний, то виділяємо цілу і дробову частину.

2. Знаменник $Q_n(x)$ правильного дробу розкладаємо на незвідні над полем дійсних чисел множники.

3. Правильний дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ подаємо у вигляді суми простих дробів з врахуванням кратності коренів.

У правій частині рівності зводимо дроби до спільного знаменника, прирівнюємо чисельники, а потім коефіцієнти при невідомих в однакових степенях. З одержаної системи знаходимо невідомі нам коефіцієнти (**метод невизначених коефіцієнтів**).

5. Ознайомитись з біографією українського математика М. В. Остроградського.

Класи інтегровних функцій подано на схемі (рис. 4.1)

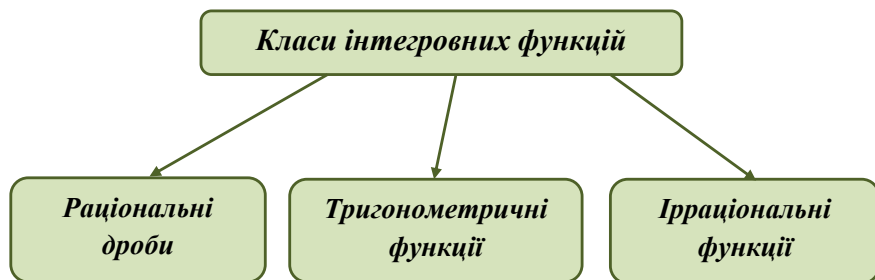


Рис. 4.1

Алгоритм розкладання правильних раціональних дробів на прості дроби подано на схемі (рис. 4.2).

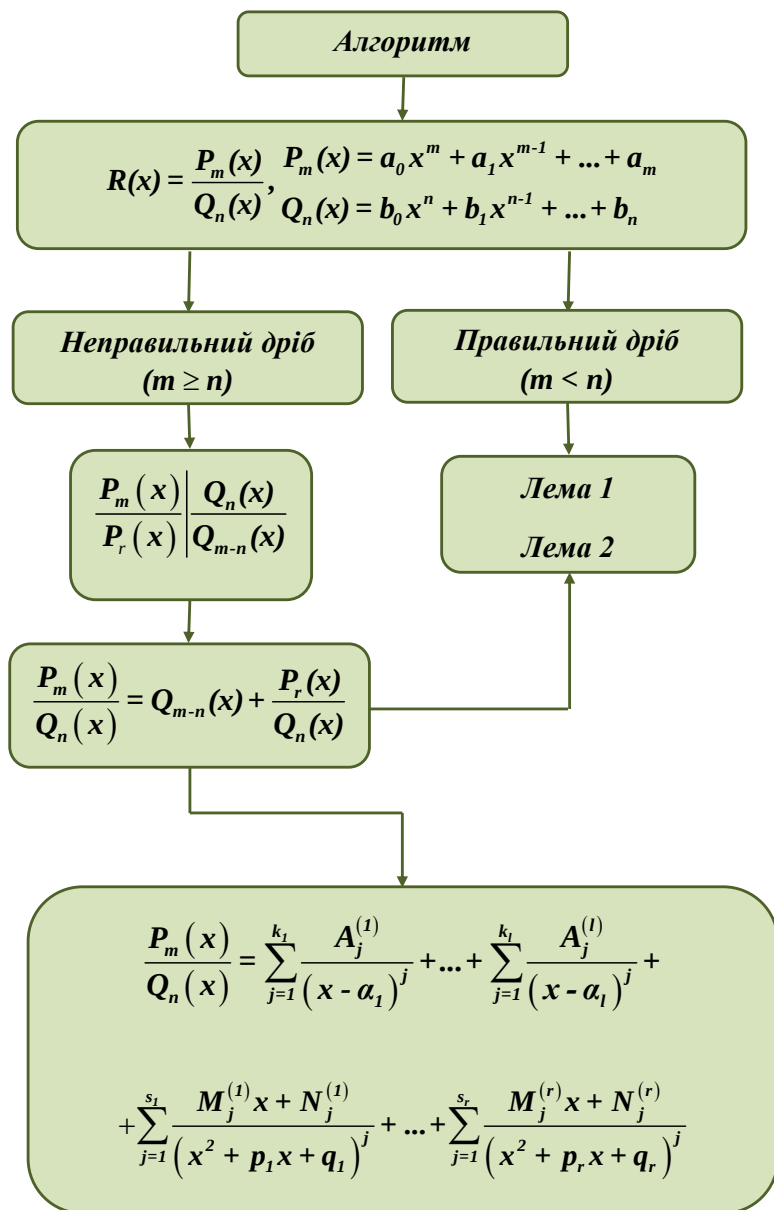


Рис. 4.2

Приклади розв'язування вправ

Задача 4.1. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{dx}{3x+2};$$

$$2) \int \frac{dx}{(2x-1)^4};$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2-4x+9};$$

$$4) \int \frac{5x+7}{x^2+6x+11} dx.$$

Розв'язання.

$$1) \int \frac{dx}{3x+2}.$$

Маємо елементарний дріб першого типу. Використаємо властивість диференціала: $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$ і формулу:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+2)}{3x+2} = \frac{1}{3} \ln|3x+2| + C. \quad \blacksquare$$

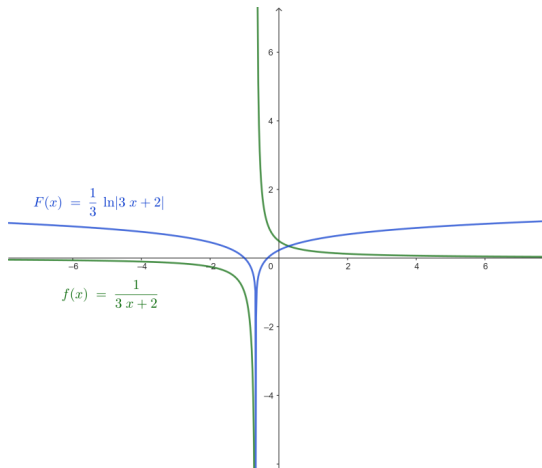


Рис. 4.3

$$2) \int \frac{dx}{(2x-1)^4}.$$

Маємо елементарний дріб другого типу:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2x-1)^4} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{(2x-1)^4} = \frac{1}{2} \int (2x-1)^{-4} d(2x-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^{-3}}{-3} + C = \\ &= -\frac{1}{6(2x-1)^3} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

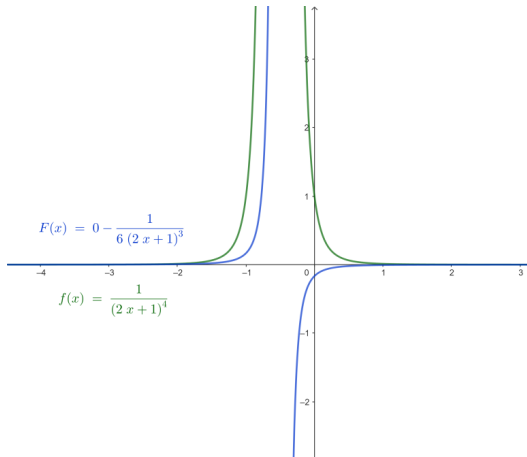


Рис. 4.4

$$3) \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9}.$$

Маємо елементарний дріб третього типу: $A=0$, $B=1$. У знаменнику підінтегральної функції виділимо квадрат двочлена і скористаємося табличним інтегралом.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9} &= |D = -20 < 0| = \int \frac{dx}{x^2 - 2x \cdot 2 + 4 + 5} = \\ &= \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

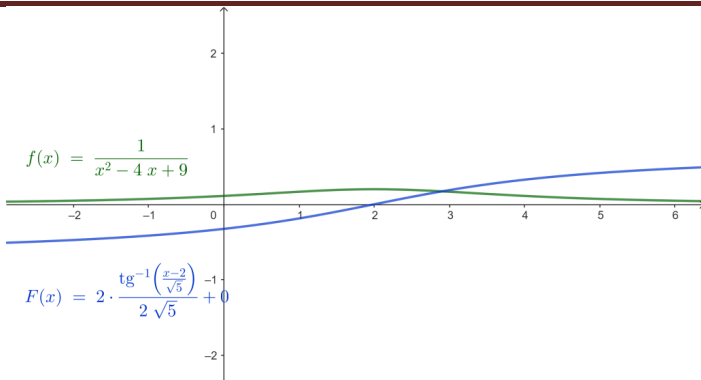


Рис. 4.5

$$4) \int \frac{5x+7}{x^2+6x+11} dx.$$

Маємо елементарний дріб третього типу: $A=5, B=7$,
 $D=b^2-4ac=36-44<0$. Тому в чисельнику спочатку виділимо
 похідну знаменника і скористаємось відомою вам формулою

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C, \text{ а потім у знаменнику другого дробу}$$

інтегралу виділимо квадрат двочлена (див. приклад 3):

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+7}{x^2+6x+11} dx &= \left| (x^2+6x+11)' = 2x+6 \right| = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+6) - 15 + 7}{x^2+6x+11} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+11} - 8 \int \frac{dx}{x^2+2x \cdot 3 + 9+2} = \frac{5}{2} \ln|x^2+6x+11| - \\ &- 8 \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{5}{2} \ln(x^2+6x+11) - \frac{8}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{\sqrt{2}} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

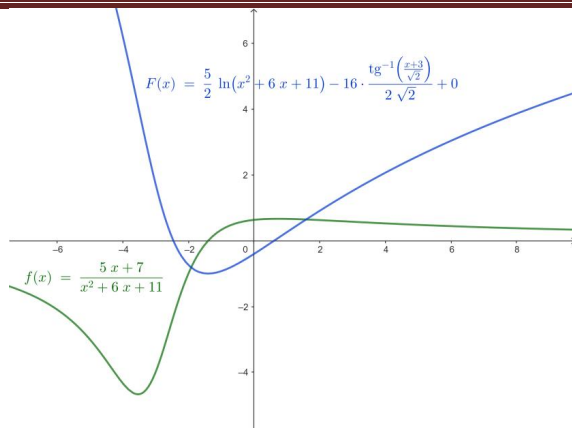


Рис. 4.6

Запам'ятаємо:
$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C, n \neq 1.$$

Задача 4.2. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{x^7 - 5x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx;$$

$$2) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$$

Розв'язання.

$$1) \int \frac{x^7 - 5x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx.$$

Використаємо алгоритм розкладу раціональної функції на елементарні дробки. Бачимо, що дріб $\frac{P_7(x)}{Q_5(x)}$ неправильний ($7 > 5$), тому виділимо цілі і дробову частини діленням чисельника на знаменник:

$$\frac{\begin{array}{r} x^7 - 5x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x + 4 \\ - x^7 - 5x^5 + 4x^3 \\ \hline \end{array}}{3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6x + 4} \quad \frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{x^2}$$

Отже,

$$I = \int \frac{x^7 - 5x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx =$$

$$= \int \left(x^2 + \frac{3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \int \frac{3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx.$$

Знаменник $Q_5(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ розкладемо на множники:

$$Q_5(x) = x(x^4 - 5x^2 + 4) = x(x^2 - 4)(x^2 - 1) =$$

$$x(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1).$$

Він має прості дійсні корені $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -2$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = -1$.

Значить правильний дріб можна розкласти на 5 простих дробів першого типу з покищо невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{x(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{x - 1} + \frac{F}{x + 1}. \quad (4.2)$$

Щоб визначити ці невідомі коефіцієнти, зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{x(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)} = \frac{A(x^4 - 5x^2 + 4) + B(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x)}{x(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)} +$$

$$+ \frac{C(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) + D(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x) + F(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x)}{x(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)}.$$

Маємо рівні дроби з рівними знаменниками, отже в них будуть рівними і чисельники:

$$3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6x + 4 =$$

$$= Ax^4 - 5Ax^2 + 4A + Bx^4 + 2Bx^3 - Bx^2 - 2Bx + Cx^4 - 2Cx^3 - Cx^2 + 2Cx +$$

$$+ Dx^4 + Dx^3 - 4Dx^2 - 4Dx + Fx^4 - Fx^3 - 4Fx^2 + 4Fx.$$

(4.3)

Рівні многочлени мають рівні коефіцієнти при однакових степенях змінної x :

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ x^0 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} A+B+C+D+F=3 \\ 2B-2C+D-F=-3 \\ -5A-B-C-4D-4F=2 \\ -2B+2C-4D+4F=6 \\ 4A=4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=1, \\ B+C+D+F=2, \\ 2B-2C+D-F=-3, \\ B+C+4D+4F=-7, \\ B-C+2D-2F=-3, \end{array} \right. \\
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 & \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right), \left\{ \begin{array}{l} B+C+D+F=2, \\ -2C+D-3F=-5, \\ D+F=-3, \\ F=-1, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=2, \\ C=3, \\ D=-2, \\ F=-1. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Отже, } I &= \frac{x^3}{3} + \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\
 &= \frac{x^3}{3} + \ln \left| \frac{x(x-2)^2(x+2)^3}{(x-1)^2(x+1)} \right| + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

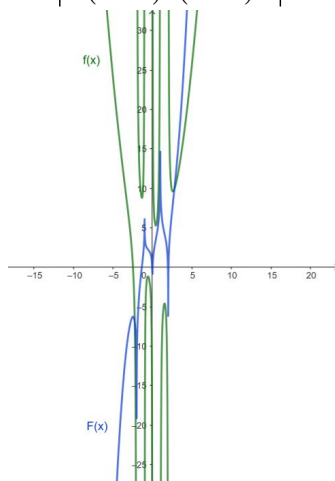


Рис. 4.7

Зауваження. Є інший метод відшукування невідомих у рівності (4.1), який у багатьох випадках швидше приводить до мети. Оскільки рівність (4.2) правильна $\forall x \in \mathbb{R}$, то візьмемо конкретні значення змінної x , наприклад нулі знаменника (4.1), тощо.

Отримаємо:

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} 4=4A, \\ 48=24B, \\ 72=24C, \\ 12=-6D, \\ 6=-6F, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=1, \\ B=2, \\ C=3, \\ D=-2, \\ F=-1. \end{array} \right. \end{array}$$

Однак тут варто пам'ятати, що при підстановці довільних чисел отримаємо рівняння, що можуть бути залежними.

$$2) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$$

Підінтегральна функція $\frac{P_0(x)}{Q_6(x)}$ є правильним дробом,

знаменник якого $Q_6(x) = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$ має дійсні корені: $\alpha_1 = -1$ кратності $k_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$ кратності $k_2 = 2$, $\alpha_3 = -3$ кратності $k_3 = 3$. Тому, згідно з лемою 1, в розкладі підінтегральної функції одержимо шість елементарних дробів першого і другого типу:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \\ & = \frac{A_1}{x+1} + \frac{B_1}{(x+2)^2} + \frac{B_2}{x+2} + \frac{C_1}{(x+3)^3} + \frac{C_2}{(x+3)^2} + \frac{C_3}{x+3}, \end{aligned}$$

звідки:

$$1 = A_1(x+2)^2(x+3)^3 + B_1(x+1)(x+3)^3 + B_2(x+1)(x+2)(x+3)^3 + \\ + C_1(x+1)(x+2)^2 + C_2(x+1)(x+2)^2(x+3) + C_3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2.$$

Остання рівність правильна $\forall x \in \mathbb{R}$, тому обчислимо значення многочлена в певних, взятих нами точках:

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \\ x = -3 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array} \right\} \begin{cases} 1 = 8A_1, \\ 1 = -B_1, \\ 1 = -2C_1, \\ 1 = 108A_1 + 27B_1 + 54B_2 + 4C_1 + 12C_2 + 36C_3, \\ 1 = 576A_1 + 128B_1 + 384B_2 + 18C_1 + 72C_2 + 288C_3, \\ 1 = -4A_1 + 3B_1 + 6B_2 - 12C_1 + 12C_2 - 12C_3, \end{cases} \Rightarrow$$

або

$$A_1 = \frac{1}{8} = 0,125, B_1 = -1, C_1 = -\frac{1}{2} = -0,5, C_2 = -7,25, C_3 = -4,625, B_2 = 5.$$

$$I = \int \left(\frac{0,125}{x+1} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{5}{x+2} - \frac{0,5}{(x+3)^3} - \frac{7,25}{(x+3)^2} - \frac{4,625}{x+3} \right) dx = \\ = 0,125 \ln|x+1| + \frac{1}{x+2} + 5 \ln|x+2| + \frac{0,25}{(x+3)^2} + \frac{7,25}{x+3} - \\ - 4,625 \ln|x+3| + C. \quad \blacksquare$$

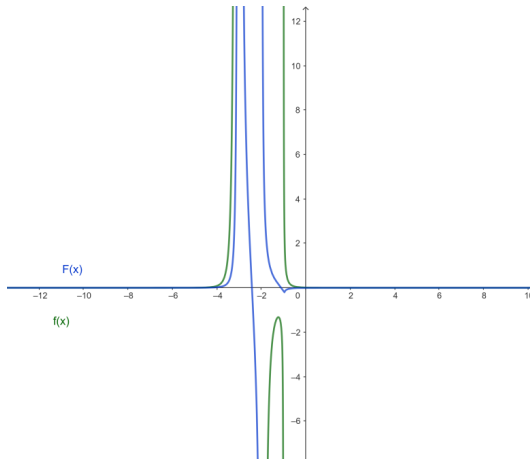


Рис. 4.8

Задача 4.3. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{(15x^2 - 8x - 75)dx}{(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 6x + 10)}; \quad 2) \int \frac{(3x^4 - 4)dx}{x^2(x^2 + 2)^2}.$$

Розв'язання.

$$1) \int \frac{(15x^2 - 8x - 75)dx}{(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 6x + 10)}.$$

Дріб $\frac{P_2(x)}{Q_4(x)}$ правильний ($2 < 4$), знаменник

$$Q_4(x) = (x^2 - 6x + 5)(x^2 + 6x + 10) = (x - 5)(x - 1)(x^2 + 6x + 10)$$

має два простих дійсних і два простих комплексно-спряжених коренів, тому, згідно з лемами 1 і 2, маємо:

$$\frac{15x^2 - 8x - 75}{(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 6x + 10)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 6x + 10},$$

звідки $15x^2 - 8x - 75 =$

$$= A(x - 1)(x^2 + 6x + 10) + B(x - 5)(x^2 + 6x + 10) + (Cx + D)(x^2 - 6x + 5).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x , одержимо:

$$\begin{cases} x^3 & A + B + C = 0, \\ x^2 & 5A + B - 6C + D = 15, \\ x & 4A - 20B + 5C - 6D = -8, \\ x^0 & -10A - 50B + 5D = -75, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -6 & 1 & 15 \\ 4 & -20 & 5 & -6 & -8 \\ 2 & 10 & 0 & -1 & 15 \end{array} \right) & \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 1 & 15 \\ 0 & -24 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & 8 & -2 & -1 & 15 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 67 & -12 & -98 \\ 0 & 0 & -24 & 1 & 45 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & -221 & 0 & 442 \\ 0 & 0 & -24 & 1 & 45 \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ -4B-11C+D=15, \\ -221C=442, \\ -24C+D=45, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=1, \\ C=-2, \\ D=-3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+6x+10} \right) dx = \int \frac{dx}{x-5} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{(2x+3)dx}{x^2+6x+10} = \\ &= \left| (x^2+6x+10)' = 2x+6 \right| = \ln|x-5| + \ln|x-1| - \int \frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+10} + \\ &+ 3 \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \ln|x^2-6x+5| - \ln(x^2+6x+10) + 3\operatorname{arctg}(x+3) + C = \\ &= \ln \frac{|x^2-6x+5|}{(x^2+6x+10)} + 3\operatorname{arctg}(x+3) + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

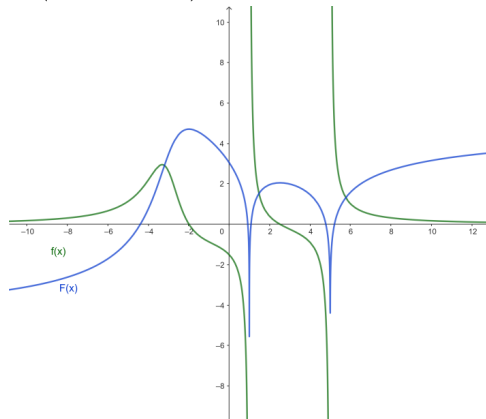


Рис. 4.9

$$2) \int \frac{(3x^4-4)dx}{x^2(x^2+2)^2}.$$

Підінтегральну функцію розкладемо на прості дроби. Оскільки знаменник $Q_6(x) = x^2(x^2+2)^2$ має дійсний корінь $\alpha_1 = 0$ кратності $k_1 = 2$ і два комплексно-спряжені корені також кратності 2, то:

$$\frac{3x^4 - 4}{x^2(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2}, \text{або}$$

$$3x^4 - 4 = A(x^2 + 2)^2 + Bx(x^2 + 2)^2 + (Cx + D)x^2 + (Mx + N)x^2(x^2 + 2),$$

$$\begin{array}{l} x^5 \\ x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} B + M = 0, \\ A + N = 3, \\ 4B + C + 2M = 0, \\ 4A + D + 2N = 0, \\ 4B = 0, \\ 4A = -4, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M = 0, \\ N = 4, \\ C = 0, \\ D = -4, \\ B = 0, \\ A = -1. \end{array} \right.$$

$$\int \left(\frac{-1}{x^2} - \frac{4}{(x^2 + 2)^2} + \frac{4}{x^2 + 2} \right) dx =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - 4 \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \left| \begin{array}{l} \text{рекурентна формула (4.3)} \\ n = 2, \quad a = 2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{x} + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{x^2 + 2} + C. \quad \blacksquare$$

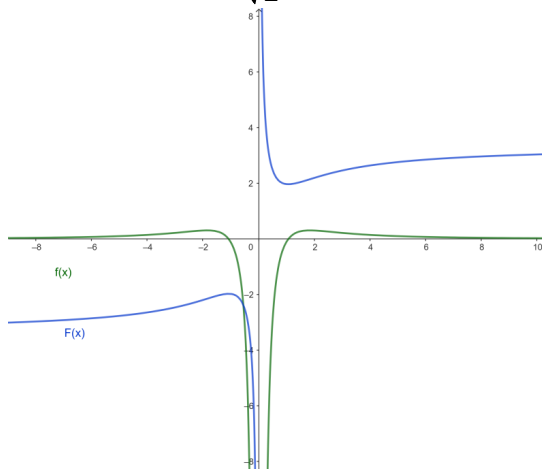


Рис. 4.10

Завдання для самостійного розв'язування

З1. Обчислити інтеграли (знаменник має лише дійсні різні корені):

$$1) \int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx;$$

$$2) \int \frac{x^3-7x+18}{x^2-3x+2} dx;$$

$$3) \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx;$$

$$4) \int \frac{3x-1}{x^3-x^2-2x} dx;$$

$$5) \int \frac{2x^2+3x+8}{(x+1)(2x+3)(3x+4)} dx; \quad 6) \int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x} dx.$$

З2. Обчислити інтеграли (знаменник має лише дійсні корені, деякі корені кратні):

$$1) \int \frac{x^4}{(x+1)^2(x-2)} dx;$$

$$2) \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3};$$

$$3) \int \frac{x^5-x+1}{x^6-x^5} dx;$$

$$4) \int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} dx.$$

З3. Обчислити інтеграли (знаменник має комплексні різні корені):

$$1) \int \frac{x dx}{x^3-1};$$

$$2) \int \frac{x^2 dx}{1-x^4};$$

$$3) \int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}; \quad 4) \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx;$$

$$5) \int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx;$$

$$6) \int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8};$$

$$7) \int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} dx;$$

$$8) \int \frac{2x^4-2x^3-x^2+2}{2x^3-4x^2+3x-1} dx.$$

4. Обчислити інтеграли (знаменник має комплексні кратні корені):

$$1) \int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx;$$

$$2) \int \frac{dx}{x(x^2+4)^2(x^2+1)};$$

$$3) \int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2};$$

$$4) \int \frac{(x+1)^4 dx}{(x^2+2x+2)^3};$$

$$5) \int \frac{dx}{(x^2+9)^3};$$

$$6) \int \frac{dx}{(x^2+1)^4}.$$

5. Обчислити інтеграли методом Остроградського:

$$1) \int \frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3} dx;$$

$$2) \int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^3} dx;$$

$$3) \int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3};$$

$$4) \int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} dx;$$

$$5) \int \frac{x(2x^2+2x-1)dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}.$$

§ 5. Інтегрування ірраціональних функцій

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Ірраціональні функції	Irrational functions
Метод раціоналізації інтегрування ірраціональних і трансцендентних функцій	A method for rationalizing the integration of irrational and transcendental functions
Інтегрування квадратичних ірраціональностей	Integration of quadratic irrationalities
Підстановки Ейлера	Euler substitutions
Біномний диференціал	Binomial differential

1. Який основний метод інтегрування ірраціональних і трансцендентних функцій?

Основний метод інтегрування ірраціональних і трансцендентних функцій.

Метод раціоналізації, який полягає в знаходженні підстановки, що дозволить перейти від певних класів ірраціональних і трансцендентних функцій до раціональних функцій. В таких міркуваннях важливу роль відіграє раціональна функція $R(x, y)$ від двох змінних.

2. Як інтегруються функції вигляду $f(x) = R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)$,

$$f(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \quad f(x) = R(x, x^{r_1}, x^{r_2}, \dots, x^{r_k}), \quad r_i \in \mathbb{Q}, i = \overline{1, k}?$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right) dx = \left| \begin{array}{l} ax+b=t^n, \\ x=\frac{1}{a}(t^n-b), \\ dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt \end{array} \right| = \frac{n}{a} \int R\left(\frac{1}{a}(t^n-b), t^m\right) t^{n-1} dt =$$

$$= \int R_1(t) dt.$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \frac{ax+b}{cx+d}=t^n, \left|\frac{ab}{cd}\right| \neq 0, \\ x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, \\ dx=\frac{nt^{n-1}(am-bc)}{(a-ct^n)^2} dt \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{mt^n-b}{a-ct^n}, t\right) \frac{nt^{n-1}(am-bc)}{(a-ct^n)^2} dt = \int R_1(t) dt.$$

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx = \left| \begin{array}{l} x=t^s \\ s=HCK(n_1, n_2, \dots, n_k) \\ dx=st^{s-1}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(t^s, t^{l_1}, t^{l_2}, \dots, t^{l_k}\right) st^{s-1} dt = \int R_1(t) dt,$$

$$\text{оскільки } x^{\frac{m_1}{n_1}} = \left(t^s\right)^{\frac{m_1}{n_1}} = t^{l_1}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}} = \left(t^s\right)^{\frac{m_k}{n_k}} = t^{l_k}.$$

3. Як інтегруються функції вигляду $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ (квадратичні ірраціональності)?

Інтегрування квадратичних ірраціональностей.
Підстановки Ейлера:

1) $a > 0$. Тут покладемо $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} \pm t$, де знаки можна брати в довільній комбінації.

2) Нехай квадратний тричлен має дійсні корені x_1, x_2 , тобто $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 – дійсні корені квадратного тричлена.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(\frac{x_1 t^2 - ax_2}{t^2 - a}, \left(\frac{x_1 t^2 - ax_2}{t^2 - a} - x_1\right)t\right) dt.$$

$$\frac{2x_1 t(t^2 - a) - 2t(x_1 t^2 - ax^2)}{(t^2 - a)^2} dt = \int R_1(t) dt.$$

3) $c > 0$. Покладемо $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, де знаки також можна брати в довільній комбінації.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x - m)\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \left| \begin{array}{l} x - m = \frac{1}{t}, \quad x = m + \frac{1}{t}, \quad dx = \frac{-dt}{t^2}, \\ ax^2 + bx + c = a\left(m + \frac{1}{t}\right)^2 + b\left(m + \frac{1}{t}\right) + c = \\ = \frac{(am^2 + bm + c)t^2 + (2am + b)t + a}{t^2} \end{array} \right| \\ &= \int t \cdot \frac{t}{\sqrt{(am^2 + bm + c)t^2 + (2am + b)t + a}} \cdot \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int \frac{dt}{\sqrt{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}}, \end{aligned}$$

де $a_1 = am^2 + bm + c$, $b_1 = 2am + b$, $c_1 = a$.

4. Як інтегрують біномний диференціал $x^m(a + bx^n)^p dx$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$? Назвати три випадки і відповідні підстановки.

Інтегрування біномних диференціалів вигляду

$x^m (a + bx^n)^p dx$, де $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Інтеграл від біномного диференціала виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:

1) $p - \text{ціле число}$ і введено підстановку $x = t^s$, де s – спільний знаменник дробів m і n ;

2) $\frac{m+1}{n} - \text{ціле число}$ і введено підстановку $a + bx^n = t^s$,

де s – знаменник дробу p ;

3) $\frac{m+1}{n} + p - \text{ціле число}$ і введено підстановку $ax^{-n} + b = t^s$,

де s – знаменник дробу p .

5. Ознайомитись з біографією швейцарського математика Л. Ейлера.

Приклади розв'язування вправ

Задача 5.1. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 1}};$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5}};$

3) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{4x+7}}.$

Розв'язання.

1) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 1}}.$

Тут підінтегральна функція є раціональною відносно змінних $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{4}}$: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} = R\left(x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{4}}\right).$

Тому раціоналізуючою підстановкою буде $x = t^4$, $4 = HCK(2; 4)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3+1}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^4 \Rightarrow t = \sqrt[4]{x} \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 4t^3 dt}{t^3+1} = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1} \right) dt = \\ &= 4 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3} \ln|t^3+1| + C \right) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3} \ln(\sqrt[4]{x^3+1}) + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

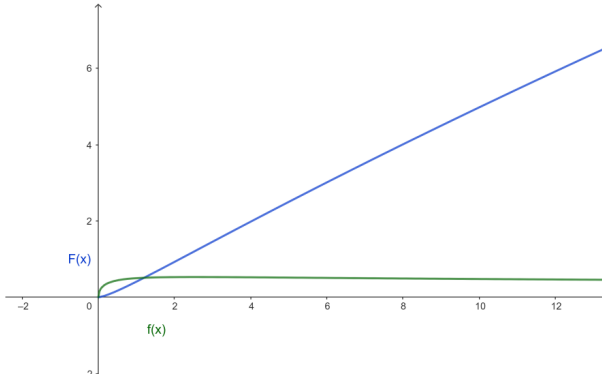


Рис. 5.1

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$$

Виконаємо елементарні перетворення підінтегральної функції:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3} \frac{1}{(x+2)^2} = R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right).$$

Значить функція $f(x)$ є раціональною відносно змінних x і

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Тому раціоналізуючою підстановкою буде $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \int \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3} \frac{1}{(x+2)^2} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+2}{x-1} = t^4, \quad x = \frac{t^4+2}{t^4-1} \\ dx = \frac{-12t^3 dt}{(t^4-1)^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^3}{\left(\frac{t^4+2}{t^4-1} + 2\right)^2} \frac{-12t^3 dt}{(t^4-1)^2} = -\frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C. \quad \blacksquare$$

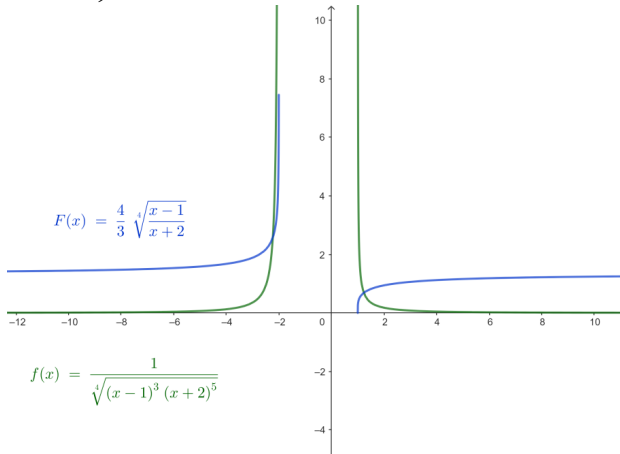


Рис. 5.2

3) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{4x+7}}.$

Функція $\frac{x}{\sqrt[3]{4x+7}}$ є раціональною відносно змінних x і $\sqrt[n]{(ax+b)^m}$. Тому раціоналізуючою підстановкою буде $\sqrt[n]{ax+b} = t$ ($\sqrt[3]{4x+7} = t$):

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{4x+7}} &= \left| \begin{array}{l} 4x+7 = t^3 \\ dx = t^2 dt \\ x = \frac{1}{4}(t^3 - 7) \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{4}(t^3 - 7) \cdot \frac{3}{4} t^2 dt}{\sqrt[3]{t^3}} = \frac{3}{16} \int t(t^3 - 7) dt = \\ &= \frac{3}{16} \int (t^4 - 7t) dt = \frac{3}{16} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{7t^2}{2} \right) + C = \frac{3}{80} \sqrt[3]{(4x+7)^5} - \\ &- \frac{21}{32} \sqrt[3]{(4x+7)^2} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

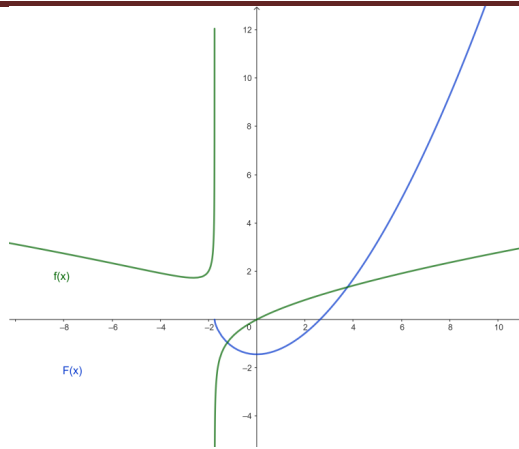


Рис. 5.3

Задача 5.2. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}};$$

$$2) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Розв'язання.

$$1) \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x+1} = t, \quad 6 = HCK(2,3) \\ x = t^6 - 1; \quad dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^6 - 1)6t^5 dt}{t^3 + t^2} =$$

$$= 6 \int \frac{(t+1)(t^2 - t + 1)(t^3 - 1)t^3}{t+1} dt =$$

$$= 6 \int (t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3) dt = 6 \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} \right) + C =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + \frac{6}{7} \sqrt[6]{(x+1)^7} - (x+1) + \frac{6}{5} \sqrt[5]{(x+1)^5} -$$

$$- \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} + C. \quad \blacksquare$$

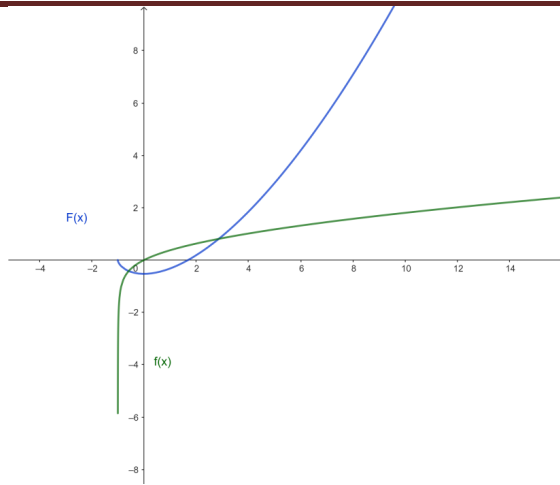


Рис. 5.4

$$2) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Введемо заміну:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t \Rightarrow (1+x)t^2 = 1-x \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}.$$

Тоді:

$$I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int t \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{4t^2 dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}.$$

Підінтегральну функцію подамо у вигляді суми простих дробів:

$$\begin{aligned} \frac{4t^2}{(t+1)(t-1)(t^2+1)} &= \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1} = \\ &= \frac{A(t-1)(t^2+1) + B(t+1)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2-1)}{(t+1)(t-1)(t^2+1)} \end{aligned}$$

і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t у чисельниках:

$$\begin{matrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ t^0 \end{matrix} \left| \begin{array}{l} A+B+C=0, \\ -A+B+D=4, \\ A+B-C=0, \\ -A+B-D=0, \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} A=-1, \\ B=1, \\ C=0, \\ D=2. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1} + \frac{2}{t^2+1} \right) dt = -\ln|t+1| + \ln|t-1| + 2\operatorname{arctg} t + C = \\ &= \left| t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right| = \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right| + 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

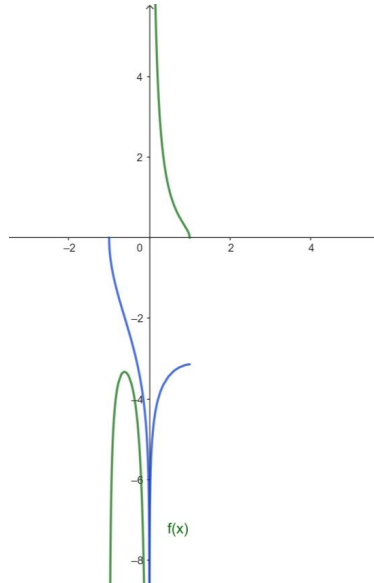


Рис. 5.5

Задача 5.3. Обчислити інтеграли за допомогою підстановок

Ейлера:

$$1) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}; \quad 2) \int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}; \quad 3)$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}.$$

Розв'язання.

$$1) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = \left| \begin{array}{l} a=1>0, \\ \sqrt{x^2+4x-4}=u-x, \\ x=\frac{u^2+4}{2u+4}, \\ dx=\frac{u^2+4u-4}{2(u+2)^2} du \end{array} \right| = \int \frac{2u+4}{u^2+4} \cdot \frac{1}{u-\frac{u^2+4}{2u+4}} \times$$

$$\times \frac{u^2+4u-4}{2(u+2)^2} du = \int \frac{2du}{u^2+4} = \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + C = \operatorname{arctg} \frac{x+\sqrt{x^2+4x-4}}{2} + C. \blacksquare$$

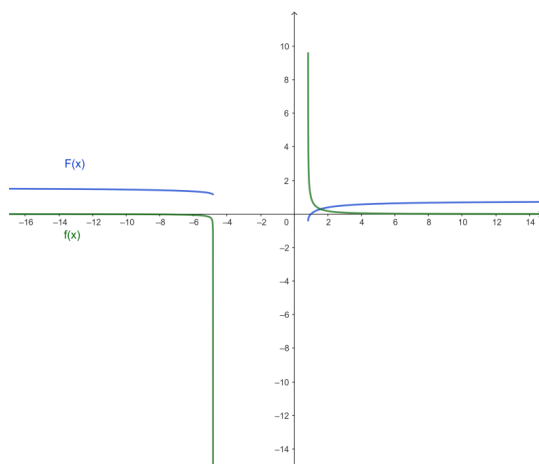


Рис. 5.6

$$2) \int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{\frac{8tdt}{(1+t^2)^2}}{\left(\frac{8t^2}{1+t^2}-3\right)\left(4-\frac{4t^2}{1+t^2}\right)t} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{5t^2-3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{\frac{3}{5}}}{t+\sqrt{\frac{3}{5}}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}t-\sqrt{3}}{\sqrt{5}t+\sqrt{3}} \right| + C =$$

$$= \left| t = \sqrt{\frac{x}{4-x}} \right| = \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{\sqrt{5x} - \sqrt{3(4-x)}}{\sqrt{5x} + \sqrt{3(4-x)}} \right| + C. \quad \blacksquare$$

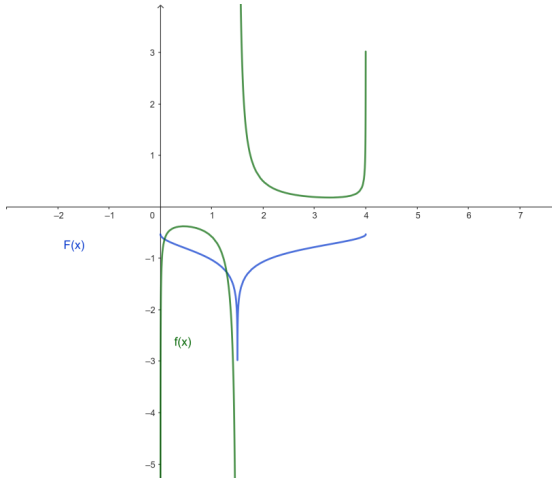


Рис. 5.7

$$\begin{aligned}
 3) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}} &= \left. \begin{aligned} &a = -1 < 0, c = 1 > 0, \text{ третя підстановка} \\ &\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1, \quad 1+x-x^2 = t^2x^2 - 2tx + 1, \\ &x = \frac{1+2t}{t^2+1}, \quad dx = \frac{2(1-t-t^2)dt}{(t^2+1)^2} \\ &\sqrt{1+x-x^2} = \frac{t(1+2t)}{t^2+1} - 1 = \frac{t^2+t-1}{t^2+1} \end{aligned} \right| = \\
 &= \int \frac{2(1-t-t^2)(t^2+1)^2 dt}{(t^2+1)^2 (t^2+2t+2)(t^2+t-1)} = -2 \int \frac{dt}{t^2+2t+2} = -2 \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \\
 &= -2 \operatorname{arctg}(t+1) + C = -2 \operatorname{arctg} \frac{x+1+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

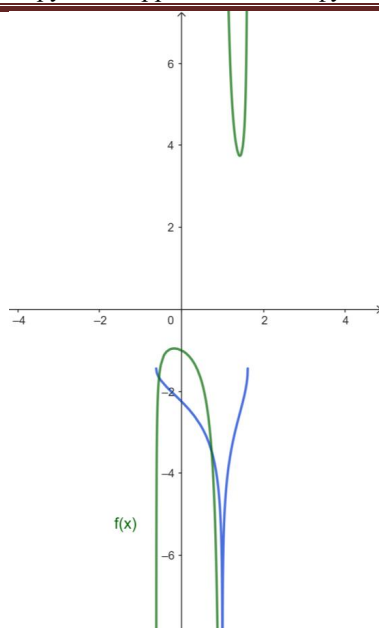


Рис. 5.8

Зауваження. Підстановки Ейлера на практиці, зазвичай, приводять до громіздких обчислень, і тому ними можна користуватися лише у випадку, коли інших шляхів інтегрування немає.

Варто пам'ятати, що

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C. \quad (5.1)$$

Обчислення ж інтегралів типу

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, & \int \frac{dx}{(x \pm m)\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \\ & \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, & \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

краще проводити не з допомогою підстановок Ейлера, а так, як показано в лекції 5 (приклади 5–9) [8, с. 43–44].

Задача 5.4. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 6}};$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}.$$

Розв'язання.

1) Виділимо в знаменнику квадрат двочлена з квадратного тричлена і використаємо табличний інтеграл (5.1).

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 + 2}} = \ln \left| x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 6} \right| + C. \blacksquare$$

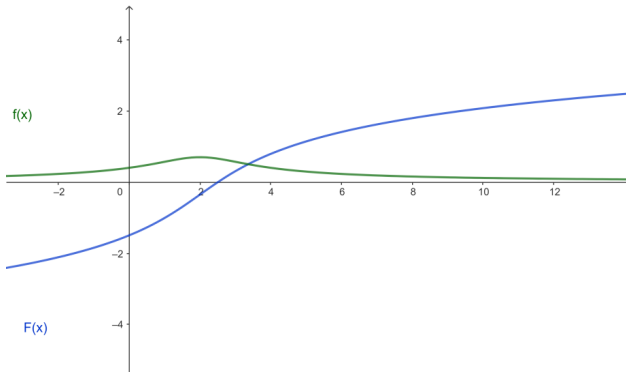


Рис. 5.9

2) Також у знаменнику дробу виділимо квадрат двочлена:

$$3 + 2x - x^2 = 4 - (x-1)^2.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{4 - (x-1)^2}} = \arcsin \frac{x-1}{2} + C. \blacksquare$$

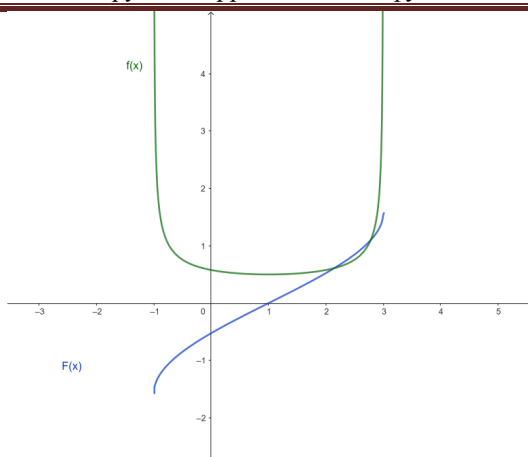


Рис. 5.10

Задача 5.5. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1+2x-x^2}};$$

$$2) \int \frac{(2x+1)dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+2}};$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{5x^2-2x+1}}.$$

Розв'язання.

1) В інтегралах типу $\int \frac{dx}{(x \pm m)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ заміна $x \pm m = \frac{1}{t}$

приводить до інтегралів з прикладу 3.

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1+2x-x^2}} = \left. \begin{aligned} x-2 &= \frac{1}{t} \\ dx &= -\frac{dt}{t^2} \\ x &= \frac{1}{t} + 2 \end{aligned} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{2}{t}+4-\left(\frac{1}{t}+2\right)^2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{-dt}{\sqrt{t^2 - 2t - 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2 - 2}} = -\ln \left| t - 1 + \sqrt{t^2 - 2t - 1} \right| + C = \\
 &= -\ln \left| \frac{1}{x-2} - 1 + \sqrt{\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} - 1} \right| + C = \\
 &= -\ln \left| \frac{3-x+\sqrt{1+2x-x^2}}{x-2} \right| + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

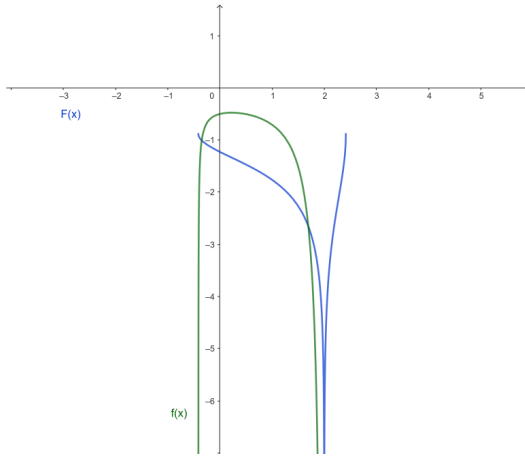


Рис. 5.11

2) В інтегралах виду $\int \frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ раціональну функцію

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ розкладаємо на суму найпростіших дробів і зводимо інтеграл

до інтегралів з прикладів 3 і 4.1):

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{(2x-2)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}.$$

$$\int \frac{(2x+1)dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+2}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+2}} + 3 \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+2}} = 2I_1 + 3I_2.$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 - 2}} = \ln \left| x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 2} \right| + C;$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \left| \begin{array}{l} x-1 = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{t \sqrt{\left(\frac{1}{t} + 1\right)^2 - 4\left(\frac{1}{t} + 1\right) + 2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1 - 2t - t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2 - (t+1)^2}} = -\arcsin \frac{t+1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$-\arcsin \frac{x}{(x-1)\sqrt{2}} + C. \quad \blacksquare$$

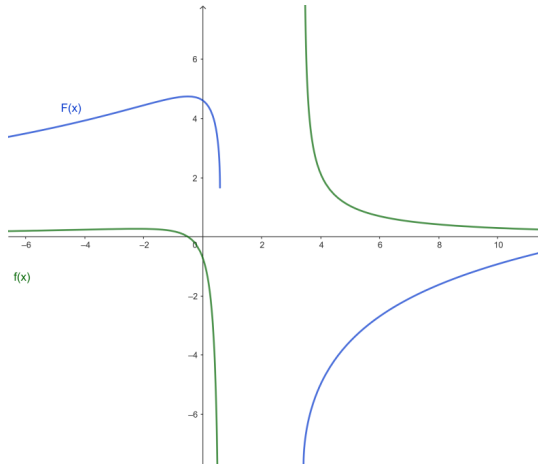


Рис. 5.12

3) За допомогою підстановки $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$ вихідний інтеграл зведемо до інтегралу типу $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, в чисельнику

якого варто спочатку виділити похідну квадратного тричлена: $(t^2 - 2t + 5)' = 2t - 2$, після чого використати табличний інтеграл

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2\sqrt{u} + C.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{5x^2 - 2x + 1}} &= -\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - 2t + 5}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(2t - 2)dt}{\sqrt{t^2 - 2t + 5}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2 + 4}} = \\ &= -\sqrt{t^2 - 2t + 5} - \ln \left| t - 1 + \sqrt{t^2 - 2t + 5} \right| + C = -\frac{1}{x} \sqrt{5x^2 - 2x + 1} - \\ &- \ln \left| \frac{1 - x + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{x} \right| + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

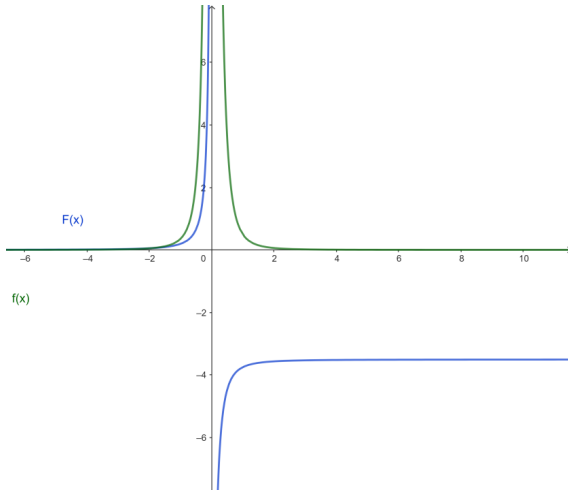


Рис. 5.13

Задача 5.6. Обчислити інтеграли:

$$1) I_1 = \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx; \quad 2) I_2 = \int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx; \quad 3) I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

Розв'язання.

Запишемо підінтегральні вирази у формі біномних диференціалів:

$$x^m (a + bx^n)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q},$$

і використаємо підстановки, які дозволяють виразити інтеграл від біномного диференціала через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної.

$$1) I_1 = \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx.$$

$$I_1 = \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^4 dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} p = 4 \in \mathbb{Z} \quad HCK(2, 3) = 6, \\ x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t^3 (1 + t^2)^4 6t^5 dt = 6 \int t^8 (1 + 4t^2 + 6t^4 + 4t^6 + t^8) dt =$$

$$= \left(\frac{6t^9}{9} + 24 \frac{t^{11}}{11} + 36 \frac{t^{13}}{13} + 24 \frac{t^{15}}{15} + 6 \frac{t^{17}}{17} \right) + C = |t = \sqrt[6]{x}| =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{24}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + \frac{36}{13} \sqrt[6]{x^{13}} + \frac{8}{5} \sqrt{x^5} + \frac{6}{17} \sqrt[6]{x^{17}} + C. \quad \blacksquare$$

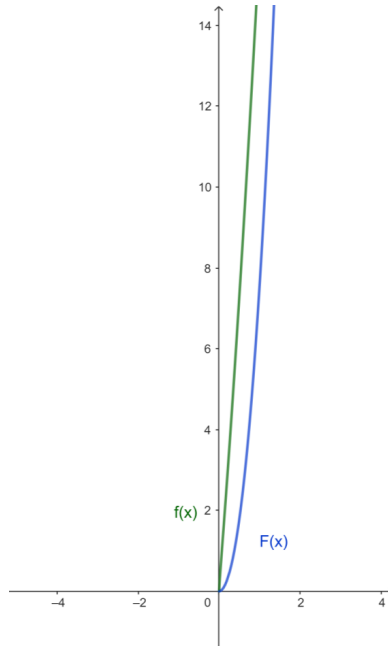


Рис. 5.14

$$2) I_2 = \int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx.$$

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx = \int x^{-5} (1-x^4)^{\frac{1}{2}} dx = \left. \begin{array}{l} p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, m = -5, n = 4, \\ \frac{m+1}{n} = \frac{-5+1}{4} = -1 \in \mathbb{Z}, \\ 1-x^4 = t^2, x = (1-t^2)^{\frac{1}{4}}, \\ dx = -\frac{1}{2} t (1-t^2)^{-\frac{3}{4}} dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (1-t^2)^{-\frac{5}{4}} t \cdot t (1-t^2)^{-\frac{3}{4}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2}.$$

Підінтегральна функція тут є раціональною відносно нової змінної t , а знаменник розкладається на множники:

$$(t^2-1)^2 = (t-1)^2(t+1)^2.$$

Отже підінтегральну функцію розкладемо на прості дробі:

$$\frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2},$$

де числа A, B, C, D знаходимо методом невизначених коефіцієнтів:

$$A = B = D = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{4} \text{ і обчислимо невизначений інтеграл:}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2} \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{8} \left(\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} - \ln|t+1| - \frac{1}{t+1} \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{8} \left(\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{2t}{t^2-1} \right) + C = \left| t = \sqrt{1-x^4} \right| =$$

$$= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^4}+1}{\sqrt{1+x^4}-1} \right| - \frac{\sqrt{1-x^4}}{4x^4} + C. \quad \blacksquare$$

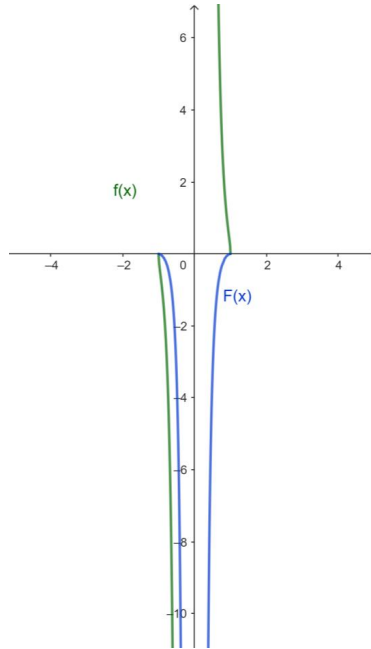


Рис. 5.15

3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int x^0 (1+x^3)^{-\frac{1}{3}} dx$. Тут $p = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, $m = 0$, $n = 3$,

$$\frac{m+1}{n} = \frac{0+1}{3} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} + p = 0 \in \mathbb{Z}.$$

Отже, використаємо третю підстановку Чебишева: $a + bx^n = t^s x^n$, де s – знаменник дробу p .

$$1+x^3 = t^3 x^3, \quad x^3 = \frac{1}{t^3-1}, \quad x = (t^3-1)^{-\frac{1}{3}}, \quad dx = -t^2 (t^3-1)^{-\frac{4}{3}} dt.$$

Тоді інтеграл:

$$I_3 = -\int (t^3(t^3-1)^{-1})^{-\frac{1}{3}} t^2 (t^3-1)^{-\frac{4}{3}} dt = -\int \frac{tdt}{t^3-1} = -\int \frac{tdt}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{3}\int \frac{(t-1)dt}{t^2+t+1} = -\frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \Big|_{t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}} = \frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^2} + x^3\sqrt{1+x^3} + x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2} - 2x\sqrt{1+x^3} + x^2} -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3} + x}{x\sqrt{3}} + C. \quad \blacksquare$$

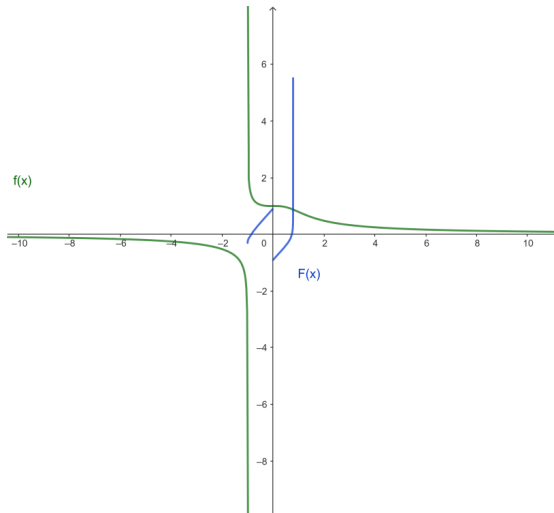


Рис. 5.16

Завдання для самостійного розв'язування

З1. Обчислити інтеграли $\left(\int R(x, x^{\tau_1}, \dots, x^{\tau_k}) dx\right)$:

1) $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}};$

2) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3} + 1};$

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}};$

4) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}};$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + \sqrt[3]{x^5}}};$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{x + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}}.$$

2. Обчислити інтеграли $\left(\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \right)$:

$$1) \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x};$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx;$$

$$3) \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{x\left(2 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)};$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}};$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

3. Обчислити інтеграли за допомогою підстановок Ейлера:

$$1) \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}};$$

$$2) \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}};$$

$$5) \int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx;$$

$$6) \int \sqrt{1-4x-x^2} dx.$$

4. Обчислити інтеграли (частинні випадки квадратичних ірраціональностей):

$$1) \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}};$$

$$3) \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 - 2x - 1}};$$

$$4) \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}};$$

$$5) \int \frac{x^3 dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}};$$

$$6) \int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

5. Обчислити інтеграли $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ за допомогою підстановок Чебишева:

$$1) \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx;$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2};$$

$$3) \int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1 + 3\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$4) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx}{\sqrt{x}};$$

$$5) \int \frac{\sqrt[3]{1 + x^3} dx}{x^2};$$

$$6) \int x \sqrt{1 + x^4} dx;$$

$$7) \int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx;$$

$$8) \int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1 + x^4}}.$$

§ 6. Інтегрування тригонометричних функцій

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Тригонометричні функції	Trigonometric functions
Метод раціоналізації інтегрування тригонометричних функцій	A method for rationalizing the integration of trigonometric functions
Універсальна тригонометрична підстановка	Universal trigonometric substitution
Частинні випадки інтегрування тригонометричних функцій	Special cases of integrating trigonometric functions

1. Як інтегруються функції вигляду $R(\sin x, \cos x)$?

Пригадайте універсальну тригонометричну підстановку.

$R(\sin x, \cos x)$ – універсальна тригонометрична підстановка.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \text{ тоді } \sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\text{Отже, } \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt.$$

2. Пригадайте частинні випадки інтегрування функцій вигляду $R(\sin x, \cos x)$.

Частинні випадки

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тобто раціональна функція непарна відносно $\cos x$. Раціоналізуюча підстановка $\sin x = t$.

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тобто функція непарна відносно $\sin x$. Раціоналізуюча підстановка $\cos x = t$.

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тобто функція не змінює знак при заміні $\sin x$ і $\cos x$ відповідно на $-\sin x$ і $-\cos x$. Раціоналізуюча підстановка $\operatorname{tg} x = t$.

3. Як інтегруються функції вигляду:

$\sin^m x$, $\cos^m x$, $\sin^m x \cos^n x$?

Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x dx, \text{ де } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

1. Якщо, $\alpha = m$, $\beta = n \in \mathbb{Z}$ цілі числа, то до інтегралу:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx \quad (6.2)$$

можна використовувати всі вищеперераховані у п.2 перестановки. Можна також обчислювати інтеграли вигляду (6.2), вивівши певні рекурентні співвідношення.

2. Якщо $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, то

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x dx = \left| \frac{\sin x = t}{\cos x dx = dt} \right| = \int \sin^\alpha x (1 - \sin^2 x)^{\frac{\beta-1}{2}} \cos x dx = \int t^\alpha (1 - t^2)^{\frac{\beta-1}{2}} dt$$

Отримали інтеграл від біомного диференціала, який обчислюється в скінченному вигляді лише, якщо одне з чисел $\frac{\beta-1}{2}$,

$\frac{\alpha+1}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ є цілими.

3. Варто зауважити, що інтеграл вигляду (6.4) інтегрується через елементарні функції, якщо якесь з чисел α або $\beta \in \mathbb{Z}$ цілим.

4. Як інтегруються функції вигляду $\sin \alpha x \sin \beta x$, $\cos \alpha \cos \beta x$, $\cos \alpha x \cos \beta x$?

Тут використовуємо відомі з шкільного курсу математики формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму.

$$\begin{aligned} \int \sin mx \cos nx \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) \, dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos mx \cos nx \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin mx \sin nx \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right) + C \end{aligned}$$

де $m \neq \pm n$, $m \neq 0$, $n \neq 0$.

Приклади розв'язування вправ

Задача 6.1. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$.

Розв'язання.

Оскільки функції $\sin x$ і $\cos x$ стоять у невеликих степенях, то зручно використати універсальну тригонометричну підстановку.

$$I = \int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad -\pi < x < \pi, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 - \frac{8t}{1+t^2} + \frac{3-3t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + C. \quad \blacksquare$$

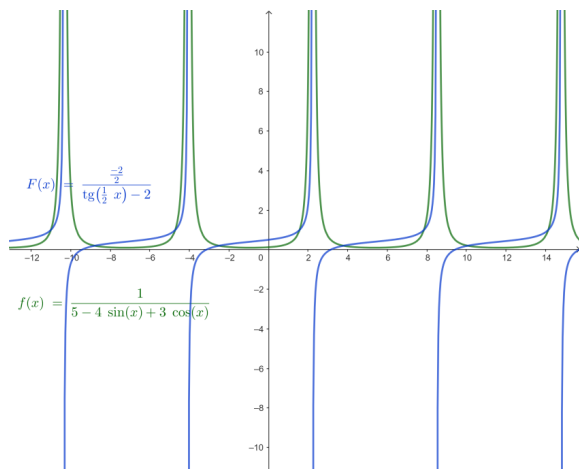


Рис. 6.1

Задача 6.2. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція є непарною відносно $\cos x$:

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{-\cos x} = -\frac{1}{\cos x} = -R(\sin x, \cos x), \quad \text{отже, тут}$$

використовується раціоналізуюча підстановка $\sin x = t$.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left| \sin x = t \right| \cos x dx = dt = \int \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1 - t^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C =$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{-\sin x + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \right| + C =$$

$$= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \quad \blacksquare$$

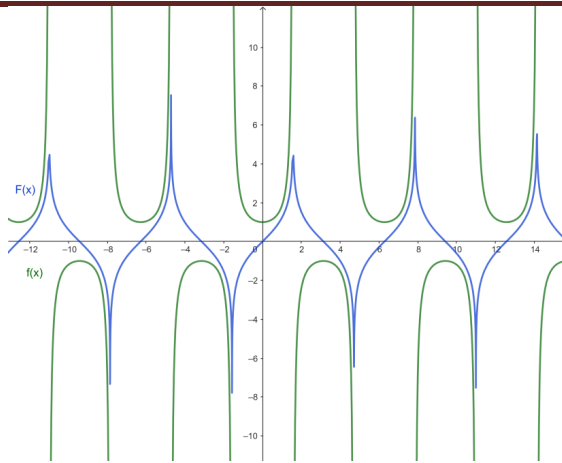


Рис. 6.2

Задача 6.3. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}$.

Розв'язання.

Цей приклад цікавий тим, що до нього можна застосувати всі три частинні випадки інтегрування тригонометричних функцій, оскільки підінтегральна функція має властивості:

$$I. R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{(-\sin x)^5 \cos x} = -\frac{1}{\sin^5 x \cos x} = -R(\sin x, \cos x), \text{ тобто}$$

функція непарна відносно $\sin x$;

$$II. R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{\sin^5 x (-\cos x)} = -\frac{1}{\sin^5 x \cos x} = -R(\sin x, \cos x),$$

тобто функція непарна також і відносно $\cos x$;

$$III. R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\sin x)^5 (-\cos x)} = \frac{1}{\sin^5 x \cos x} = R(\sin x, \cos x),$$

тобто при заміні $\sin x$ і $\cos x$ відповідно на $-\sin x$ і $-\cos x$ функція не змінює знак.

Отже, до неї можна використати підстановки відповідно $\cos x = t$, $\sin x = t$, $\operatorname{tg} x = t$. Розглянемо всі ці випадки.

I випадок.

$$I = \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x} = \left| \begin{array}{l} \cos x = t, \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = - \int \frac{-\sin x dx}{(1 - \cos^2 x)^3 \cos x} = - \int \frac{dt}{(1 - t^2)^3 t} =$$

$$= \int \frac{dt}{t(t-1)^3(t+1)^3}.$$

Підінтегральна функція є правильним дробом, знаменник якого має дійсні корені $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$ кратностей відповідно 1, 3 і 3. Тому її можна подати у вигляді суми семи простих дробів:

$$\frac{1}{t(t-1)^3(t+1)^3} = \frac{A}{t} + \frac{B_1}{t-1} + \frac{B_2}{(t-1)^2} + \frac{B_3}{(t-1)^3} + \frac{C_1}{t+1} + \frac{C_2}{(t+1)^2} + \frac{C_3}{(t+1)^3},$$

звідки

$$1 = A(t^2 - 1)^3 + B_1 t(t-1)^2(t+1)^3 + B_2 t(t-1)(t+1)^3 + B_3 t(t+1)^3 +$$

$$+ C_1 t(t-1)^3(t+1)^2 + C_2 t(t-1)^3(t+1) + C_3 t(t-1)^3.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях змінної t :

$$\left. \begin{array}{l} t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{array} \right\} \begin{cases} A + B_1 + C_1 = 0, \\ B_1 + B_2 - C_1 + C_2 = 0, \\ -3A - 2B_1 + 2B_2 + B_3 - 2C_1 - 2C_2 + C_3 = 0, \\ -2B_1 + 3B_3 + 2C_1 - 3C_3 = 0, \\ 3A + B_1 - 2B_2 + 3B_3 + C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0, \\ B_1 - B_2 + B_3 - C_1 - C_2 - C_3 = 0, \\ -A = 1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{звідки } A = -1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = -\frac{5}{16}, B_3 = \frac{1}{8}, C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{5}{16}, C_3 = \frac{1}{8}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{5}{16}}{(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{(t-1)^3} + \frac{\frac{1}{2}}{(t+1)} + \frac{\frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{(t+1)^3} \right) dt = \\
 &= -\ln|t| + \frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{2} \ln|t+1| - \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{t+1} - \\
 &\quad - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(t+1)^2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| + \frac{19}{8 \sin^2 x} - \frac{1 + \cos^2 x}{8 \sin^4 x} + C = \\
 &\quad \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1 + 2 \sin^2 x}{4 \sin^4 x} + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

II випадок.

$$I = \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x} = \left| \frac{\sin x = t}{dt = \cos x dx} \right| = \int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x (1 - \sin^2 x)} = \int \frac{dt}{t^5 (1 - t^2)}.$$

Підінтегральна функція є правильним дробом, який має дійсні корені $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$ кратностей відповідно 5, 1 і 1. Тому її можна подати у вигляді суми семи простих дробів першого і другого типів:

$$\frac{1}{t^5 (1-t)(1+t)} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{A_3}{t^3} + \frac{A_4}{t^4} + \frac{A_5}{t^5} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t},$$

звідки:

$$\begin{aligned}
 1 &= A_1 t^4 (1 - t^2) + A_2 t^3 (1 - t^2) + A_3 t^2 (1 - t^2) + A_4 t (1 - t^2) + \\
 &\quad + A_5 (1 - t^2) + B t^5 (1 + t) + C t^5 (1 - t).
 \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної t :

$$\begin{array}{l}
 t^6 \\
 t^5 \\
 t^4 \\
 t^3 \\
 t^2 \\
 t^1 \\
 t^0
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 -A_1 + B - C = 0, \\
 -A_2 + B + C = 0, \\
 A_1 - A_3 = 0, \\
 A_2 - A_4 = 0, \\
 A_3 - A_5 = 0, \\
 A_4 = 0, \\
 A_5 = 1,
 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 A_1 = 1, \\
 A_2 = 0, \\
 A_3 = 1, \\
 A_4 = 0, \\
 A_5 = 1, \\
 B = 1/2, \\
 C = -1/2.
 \end{array} \right.$$

Отже,

$$I = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^5} + \frac{1}{1-t} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+t} \right) dt = \ln|t| - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{2} \ln|1-t| -$$

$$-\frac{1}{2} \ln|1+t| + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1+2\sin^2 x}{4\sin^4 x} + C. \quad \blacksquare$$

III випадок.

$$I = \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x} = \int \frac{dx}{\frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} \cdot \cos^6 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^5 x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^5} (1+t^2)^2 dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^5} \right) dt =$$

$$= \ln|t| - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{4t^4} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1+2\sin^2 x}{4\sin^4 x} + C. \quad \blacksquare$$

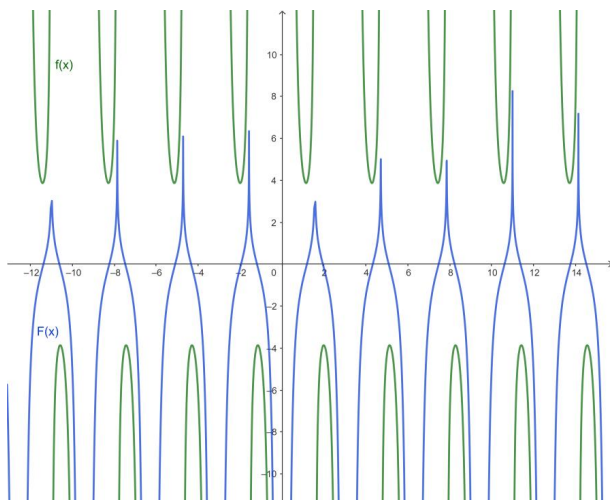


Рис. 6.3

Задача 6.4. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція не змінюється при зміні знаку одночасно перед $\sin x$ і $\cos x$:

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\sin x)^4 (-\cos x)^2} = \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} = R(\sin x, \cos x).$$

Отже, тут використовується раціоналізуюча підстановка $\operatorname{tg} x = t$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \end{array} \right| = \int \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} \right)^2 \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \int \left(\frac{1 + t^2}{t^2} \right)^2 dt = \int (t^{-4} + 2t^{-2} + 1) dt = \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{2}{t} + t + C = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \operatorname{ctg}^3 x - 2 \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

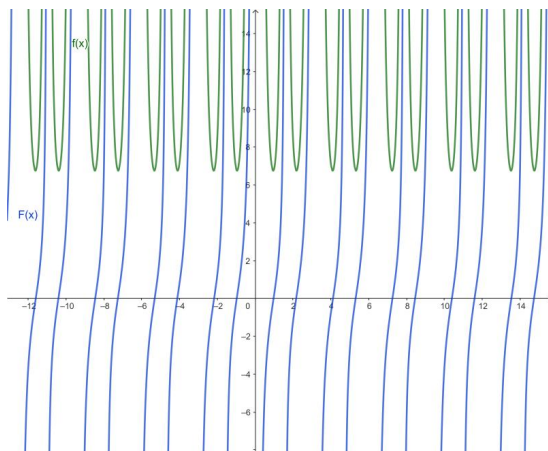


Рис. 6.4

Зауваження. Багато інтегралів від тригонометричних функцій можна обчислювати не тільки вищевказаними методами,

але й за допомогою деяких елементарних перетворень підінтегральної функції. Для таких перетворень не можна дати ніяких загальних правил, а кожний раз індивідуальні особливості підінтегральної функції повинні підказати ті перетворення, які ведуть до мети більш простим і коротким шляхом.

Задача 6.5. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}$.

Розв'язання.

Такий інтеграл можна обчислити, використавши універсальну підстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Однак є й інший шлях, якщо здійснити елементарні перетворення підінтегральної функції.

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1 + \sin x} &= \frac{\sin x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1. \\ \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \\ &+ \int 1 \cdot dx = \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x + x + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

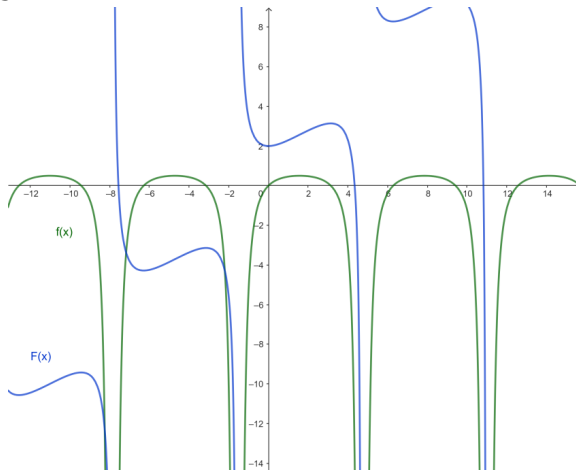


Рис. 6.5

Зауваження. При обчисленні інтегралів вигляду

$\int \frac{dx}{\sin^{2k} x \cos^{2m} x}, k, m \in \mathbb{N}$ у чисельнику варто число 1 записувати як «тригонометричну одиницю» $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ у відповідному степені.

Задача 6.6. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$.

Розв'язання.

В чисельнику число 1 запишемо як «тригонометричну одиницю»: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \\ &= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

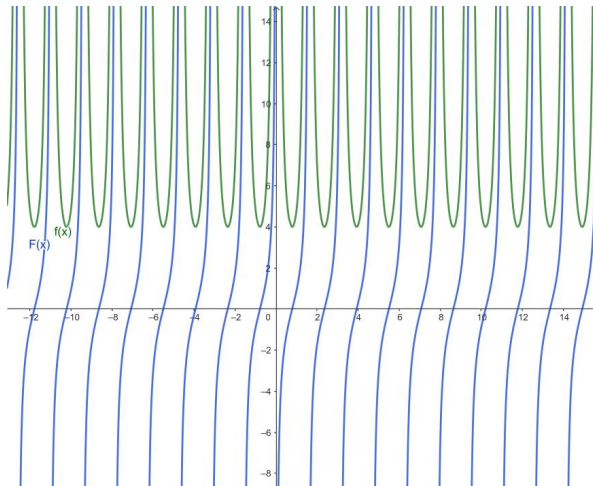


Рис. 6.6

Задача 6.7. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x}$.

Розв'язання.

В чисельнику число 1 запишемо як квадрат «тригонометричної одиниці»:

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x} = \int \frac{\cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x}{\cos^4 x \sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx =$$

$$= -\operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = -\operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C. \quad \blacksquare$$

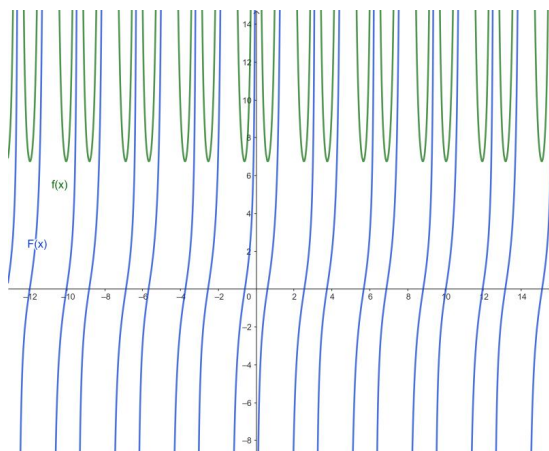


Рис. 6.7

Задача 6.8. Обчислити інтеграли:

1) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$;

2) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

Розв'язання.

1) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \left| \begin{array}{l} 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \end{array} \right| = \int \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

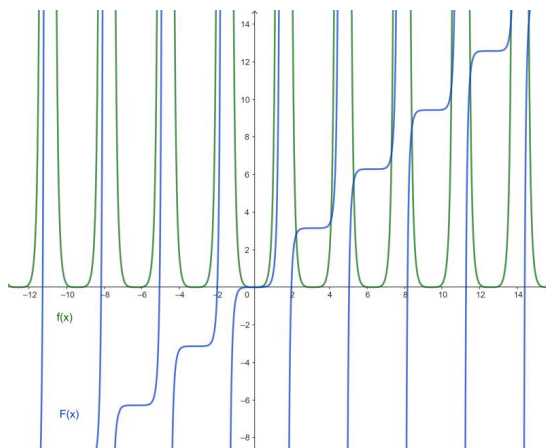


Рис. 6.8

2) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^5 x dx &= \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot d(\operatorname{tg} x) - \\ &- \int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \int \operatorname{tg} x dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

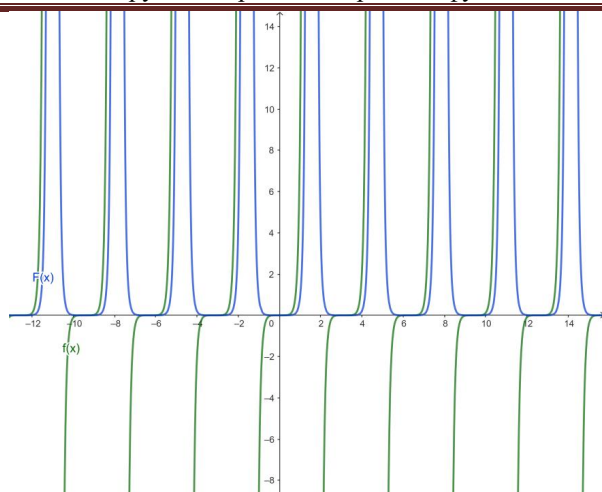


Рис. 6.9

Задача 6.9. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x} &= \int \frac{\cos^8 x}{\sin^8 x} dx = \int \frac{\cos^7 x \cdot \cos x dx}{\sin^8 x} = \left| \begin{array}{l} u = \cos^7 x, \quad dv = \frac{\cos x dx}{\sin^8 x} \\ v = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^8 x} = \frac{-1}{7 \sin^7 x} \\ du = -7 \cos^6 x \cdot \sin x dx \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x - \int \frac{\cos^6 x \cdot \sin x dx}{\sin^7 x} = -\frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x - \int \frac{\cos^6 x dx}{\sin^6 x} = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \cos^5 x, \quad dv = \frac{\cos x dx}{\sin^6 x} \\ v = \frac{-1}{5 \sin^5 x}, \quad du = -5 \cos^4 x \cdot \sin x dx \end{array} \right| = -\frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \\ &+ \int \frac{\cos^5 x \cdot \cos x dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^4 x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{l} u = \cos^3 x, \quad dv = \frac{\cos x dx}{\sin^4 x} \\ v = \frac{-1}{3\sin^3 x}, \quad du = -3\cos^2 x \cdot \sin x dx \end{array} \right| = -\frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \\
 &\quad - \int \frac{\cos^2 x \cdot \sin x dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad dv = \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} \\ v = \frac{-1}{\sin x}, \quad du = -\sin x dx \end{array} \right| = -\frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + \\
 &\quad + \int \frac{\sin x dx}{\sin x} = -\frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

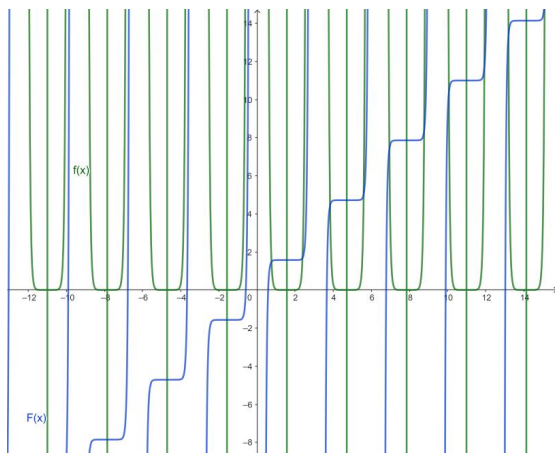


Рис. 6.10

Задача 6.10. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & dv = \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} \\ v = \frac{1}{2\cos^2 x} & du = \cos x dx \end{array} \right| = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \int \frac{\cos x dx}{2\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos x} = \\
 &= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \\
 &= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \\
 &= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \\
 &= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

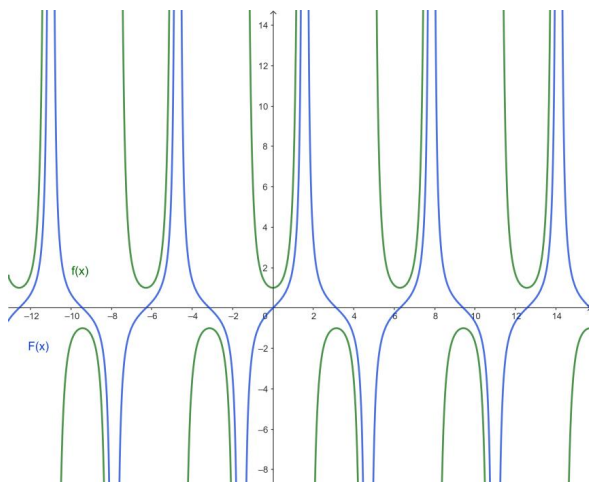


Рис. 6.11

Задача 6.11. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 2 + \cos^2 x \right) dx = \operatorname{tg} x - 2x + \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \\
 &= \operatorname{tg} x - \frac{3x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

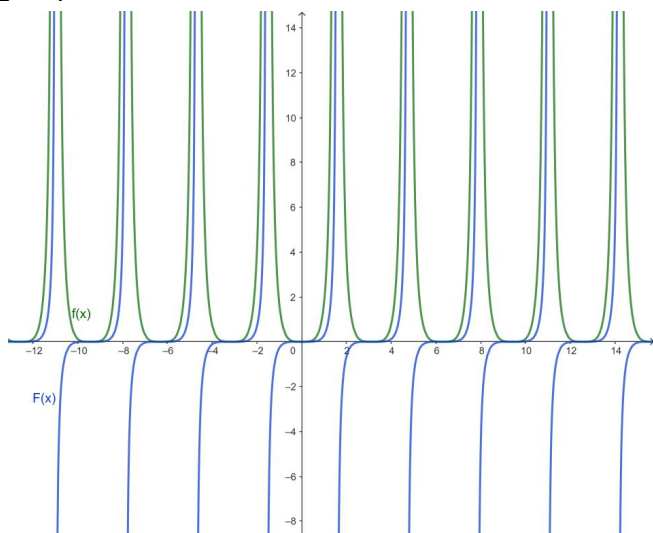


Рис. 6.12

Задача 6.12. Обчислити інтеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{\sin^7 x} = \left| \begin{array}{l} u = \cos^2 x, \quad dv = \frac{\cos x dx}{\sin^7 x} \\ v = -\frac{1}{6\sin^6 x}, \quad du = -2\cos x \sin x dx \end{array} \right| = \\
 &= -\frac{\cos^2 x}{6\sin^6 x} - \frac{1}{6} \int \frac{2\cos x \sin x dx}{\sin^6 x} = -\frac{\cos^2 x}{6\sin^6 x} + \frac{1}{3} \int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x} = \\
 &= -\frac{\cos^2 x}{6\sin^6 x} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \frac{1}{\sin^4 x} + C = -\frac{\cos^2 x}{6\sin^6 x} - \frac{1}{12\sin^4 x} + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

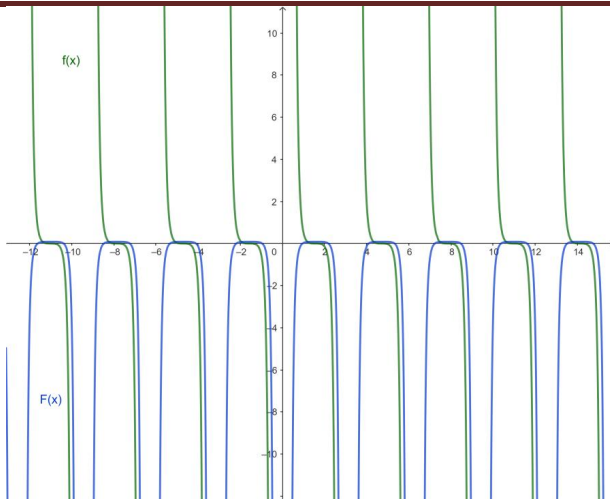


Рис. 6.13

Завдання для самостійного розв'язування

✎ 1. Обчислити інтеграли:

1) $\int \sin 2x \sin 3x dx$;

2) $\int \sin 7x \sin 15x dx$;

3) $\int \sin 3x \cos 8x dx$;

4) $\int \cos 4x \cos 9x dx$;

5) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$;

6) $\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx$.

✎ 2. Обчислити інтеграли, використовуючи універсальну підстановку $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right)$:

1) $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 3 \cos x}$;

2) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$;

3) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$;

4) $\int \frac{(1 + \sin x) dx}{\sin x (1 + \cos x)}$.

З3. Обчислити інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:

$$1) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x};$$

$$2) \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x};$$

$$3) \int \sin^7 2x \cos^5 2x dx;$$

$$4) \int \frac{\sin 3x dx}{\cos x};$$

$$5) \int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^{10} x};$$

$$6) \int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^2 x};$$

$$7) \int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{\sin^4 x - 1};$$

$$8) \int \frac{(\cos^5 x + 2 \cos^3 x) dx}{\sin^4 x + \sin^2 x}.$$

З4. Обчислити інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:

$$1) \int \frac{\cos^2 x \sin^2 x dx}{\sin^8 x + \cos^8 x};$$

$$2) \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x};$$

$$3) \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x};$$

$$4) \int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x};$$

$$5) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x};$$

$$6) \int \operatorname{ctg}^6 x dx;$$

$$7) \int \frac{(2 \operatorname{tg} x + 3) dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x};$$

$$8) \int \frac{(3 \cos x - 8 \sin x) dx}{7 \cos x + 4 \sin x};$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$$

§ 7. Інтегрування трансцендентних функцій

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Тригонометричні функції	Trigonometric functions
Метод раціоналізації інтегрування тригонометричних функцій	A method for rationalizing the integration of trigonometric functions
Універсальна тригонометрична підстановка	Universal trigonometric substitution
Частинні випадки інтегрування тригонометричних функцій	Special cases of integration of trigonometric functions

1. Як інтегруються функції вигляду $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$?

Пригадайте підстановку $\operatorname{th} \frac{x}{2}$.

Інтеграли від гіперболічних функцій

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Інтеграли вигляду

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx,$$

де $R(u, v)$ – раціональна функція змінних u і v , завжди можна звести до раціональної функції за допомогою гіперболічної підстановки $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$. Тоді:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

Основні співвідношення між гіперболічними функціями:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx = \left. \begin{array}{l} \operatorname{th} \frac{x}{2} = t, \\ \operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \\ \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \\ dx = \frac{2dt}{1-t^2}, \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}; \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \frac{2dt}{1-t^2} = \int R_1(t) dt.$$

2. Назвати частинні випадки інтегрування функцій $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$.

При обчисленні інтегралів вигляду $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$ також зручно користуватися іншими підстановками у частинних випадках, якщо задана функція непарна відносно змінних $\operatorname{sh} x$ або

$\operatorname{ch} x$, або не змінює знак при зміні $\operatorname{sh} x$ і $\operatorname{ch} x$ на протилежний:

I. $R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, підстановка $t = \operatorname{ch} x$.

II. $R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, підстановка $t = \operatorname{sh} x$.

III. $R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, підстановка $t = \operatorname{th} x$.

Приклади розв'язування вправ

Задача 7.1. Вивести рекурентні співвідношення для інтегралів:

$$1) I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x dx;$$

$$2) I_n = \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n};$$

$$3) I_n = \int \ln^n x dx.$$

Розв'язання.

У всіх випадках використаємо метод інтегрування частинами.

$$1) I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \cos^{n-1} x; \quad du = (n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x) dx, \\ dv = \sin^m x \cos x dx = \sin^m x d(\sin x), \\ v = \int \sin^m x d(\sin x) = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \int \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} (n-1) \cos^{n-2} x \sin x dx = \\
 &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \\
 &+ \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \\
 &+ \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x dx.
 \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n}.$$

звідки:
$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2},$$

$m+n \neq 0.$ ■

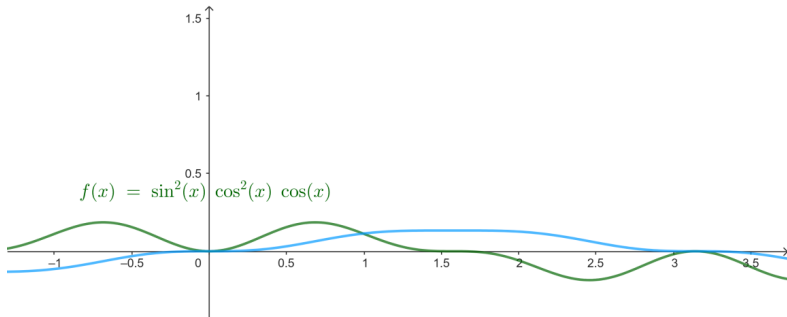


Рис. 7.1

$$2) I_n = \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = (a \sin x + b \cos x)^{-(n+1)}, \quad dv = (a \sin x + b \cos x) dx \\ du = \frac{(n+1)(b \sin x - a \cos x) dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n+2}}, \quad v = -a \cos x + b \sin x \end{array} \right| =$$

$$\frac{-a \cos x + b \sin x}{(a \sin x + b \cos x)^{n+1}} - (n+1) \int \frac{(b \sin x - a \cos x)^2 dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n+2}}.$$

З тотожності $(b \sin x - a \cos x)^2 + (a \sin x + b \cos x)^2 = a^2 + b^2$, яка доводиться безпосереднім виконанням дій в лівій частині, визначимо перший доданок і підставимо в підінтегральну функцію останньої рівності. Будемо мати:

$$I_n = \frac{b \sin x - a \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n+1}} - (n+1) \int \frac{(a^2 + b^2) - (a \sin x + b \cos x)^2 dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n+2}} =$$

$$= \frac{b \sin x - a \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n+1}} - (n+1)(a^2 + b^2)I_{n+2} + (n+1)I_n,$$

звідки

$$I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(a^2 + b^2)} \left(nI_n + \frac{b \sin x - a \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n+1}} \right),$$

або, перепозначивши індекс: $n+2 = m$, $n+1 = m-1$, $n = m-2$,

остаточно матимемо:

$$I_m = \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^m} = \frac{1}{(m-1)(a^2 + b^2)} \left(\frac{b \sin x - a \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{m-1}} + (m-2)I_{m-2} \right),$$

що й треба було довести.

Зокрема, використовуючи рекурентну формулу, обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3} &= \left| \begin{matrix} m=3, \\ a=1, b=2 \end{matrix} \right| = \frac{1}{1(1+4)} \left(\frac{2 \sin x - \cos x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} + \right. \\ &+ (3-2) \int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x} \Bigg) = \left| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \frac{2 \sin x - \cos x}{10(\sin x + 2 \cos x)^2} - \\ &+ \frac{1}{10} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}} = \frac{2 \sin x - \cos x}{10(\sin x + 2 \cos x)^2} - \\ &- \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{5}} \right| + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

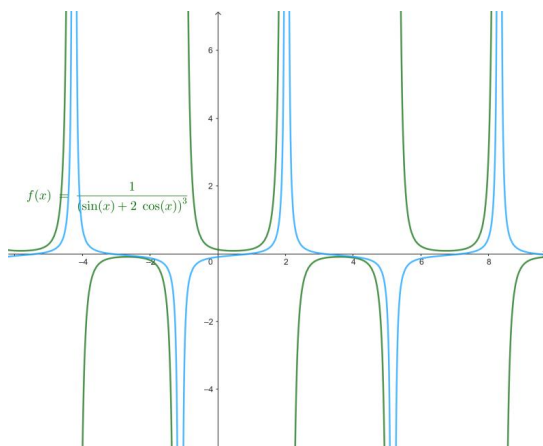


Рис. 7.2

$$3) I_n = \int \ln^n x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^n x & dv = dx \\ du = \frac{\ln^{n-1} x dx}{x} & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx = x \ln^n x - n I_{n-1}, \text{ або } I_n = \int \ln^n x dx = x \ln^n x - n I_{n-1},$$

$$n \in \mathbb{N}, I_0 = x.$$

Використаємо до інтеграла I_{n-1} останню формулу ще $n-1$ разів, отримаємо:

$$I_n = x \ln^n x - n \left(x \ln^{n-1} x - (n-1) I_{n-2} \right) = x \ln^n x - n x \ln^{n-1} x +$$

$$+ n(n-1) \left(x \ln^{n-2} x - (n-2) I_{n-3} \right). \quad \blacksquare$$

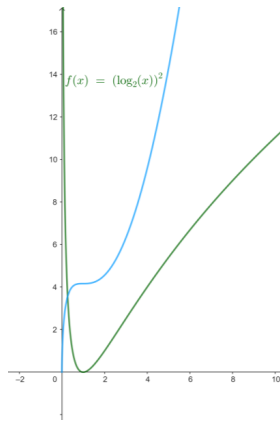


Рис. 7.3

Задача 7.2. Обчислити інтеграли:

$$1) I = \int \frac{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x}{4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} dx;$$

$$2) \int \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^3 x} dx.$$

Розв'язання.

1) I спосіб. Використаємо підстановку $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}{4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x} dx = \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{4t + 3 + 3t^2}{8t + 5 + 5t^2} \cdot \frac{2dt}{1-t^2} = \\
 &= -\frac{2}{9} \int \left(\frac{10t + 8}{5t^2 + 8t + 5} - \frac{2t}{t^2 - 1} - \frac{7}{t^2 - 1} \right) dt = -\frac{2}{9} \left(\ln(5t^2 + 8t + 5) - \ln|t^2 - 1| + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{7}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C = -\frac{2}{9} \ln \left| \frac{5\operatorname{th}^2 \frac{x}{2} + 8\operatorname{th} \frac{x}{2} + 5}{\operatorname{th}^2 \frac{x}{2} - 1} \right| - \frac{7}{9} \ln \left| \frac{\operatorname{th} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{th} \frac{x}{2} + 1} \right| + C = \\
 &= -\frac{2}{9} \ln(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x) + \frac{7}{9} x + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

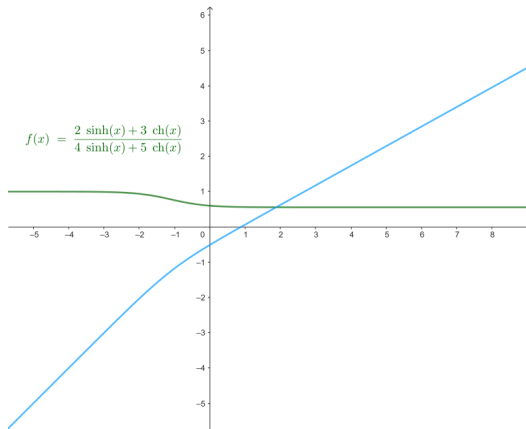


Рис. 7.4

II спосіб. Подамо чисельник підінтегральної функції у вигляді лінійної комбінації знаменника і похідної знаменника:

$$2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x = \alpha(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x) + \beta(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x)'$$

Числа α і β знаходимо, прирівнявши коефіцієнти при $\operatorname{sh} x$ і $\operatorname{ch} x$:

$$\begin{cases} \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{cases} \begin{cases} 4\alpha + 5\beta = 2, \\ 5\alpha + 4\beta = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2-4\alpha}{5}, \\ 9\alpha = 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 7/9, \\ \beta = -2/9. \end{cases}$$

Отже,

$$I = \int \frac{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}{4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x} dx = \int \frac{7/9(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x)}{4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x} dx - \int \frac{2/9(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x)'}{4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x} dx =$$

$$\frac{7}{9}x - \frac{2}{9}\ln(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x) + C. \quad \blacksquare$$

2) Підінтегральна функція непарна відносно $\operatorname{ch} x$:

$$R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = \frac{\operatorname{sh}^4 x}{(-\operatorname{ch} x)^3} = -\frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^3 x} = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x).$$

Отже, раціоналізуючою підстановкою є $\operatorname{sh} x = t$.

$$\int \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{sh} x = t \\ \operatorname{ch} x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^4 x} dx = \int \frac{t^4 dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \right) dt = t - \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t & dv = \frac{t dt}{(1+t^2)^2} \\ du = dt & v = -\frac{1}{2(1+t^2)} \end{array} \right| = t - \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(1+t^2)} - \int \frac{dt}{2(1+t^2)} =$$

$$= \operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} \operatorname{sh} x + C. \quad \blacksquare$$

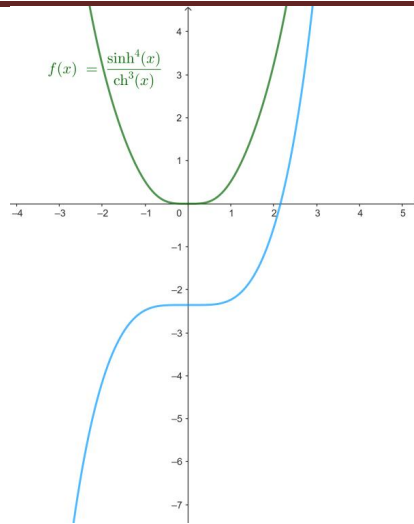


Рис. 7.5

Задача 7.3. Обчислити інтеграли:

1) $I = \int \frac{dx}{e^x(1-e^x)},$

2) $\int x^{\frac{2}{3}} (\ln x)^2 dx,$

3) $\int \operatorname{sh}^3 x dx,$

4) $\int \operatorname{th}^4 x dx.$

Розв'язання.

У всіх випадках використаємо метод інтегрування частинами та заміни змінних.

$$1) I = \int \frac{dx}{e^x(1-e^x)} = \left| e^x = t, \quad dx = \frac{dt}{t} \right|_{x = \ln t} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t(1-t)} = \int \frac{dt}{t^2(1-t)} =$$

$$= -\frac{1}{t} + \ln |t| + \ln |1-t| + C = -\frac{1}{e^x} + x + \ln |1-e^x| + C. \quad \blacksquare$$

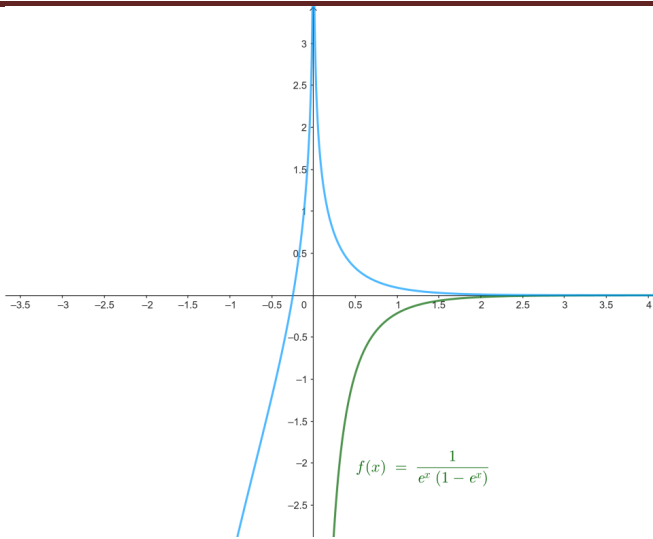


Рис. 7.6

$$2) \int x^{\frac{2}{3}} (\ln x)^2 dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t, \quad x = e^t \\ dx = e^t dt \end{array} \right| = \int (e^t)^{\frac{3}{2}} t^2 e^t dt = \int t^2 e^{\frac{5}{2}t} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t^2 & du = 2t dt \\ dv = e^{\frac{5}{2}t} & v = \frac{2}{5} e^{\frac{5}{2}t} \end{array} \right| = \frac{2t^2}{5} e^{\frac{5}{2}t} - \frac{8t}{25} e^{\frac{5}{2}t} + \frac{16}{125} e^{\frac{5}{2}t} + C.$$

$$I = \left(\frac{2}{5} t^2 - \frac{8}{25} t + \frac{16}{125} \right) e^{\frac{5}{2}t} + C.$$

Повертаємось до заміни, будемо мати:

$$\int x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 dx = \left(\frac{2 \ln^2 x}{5} - \frac{8 \ln x}{25} + \frac{16}{125} \right) x^{\frac{5}{2}} + C. \quad \blacksquare$$

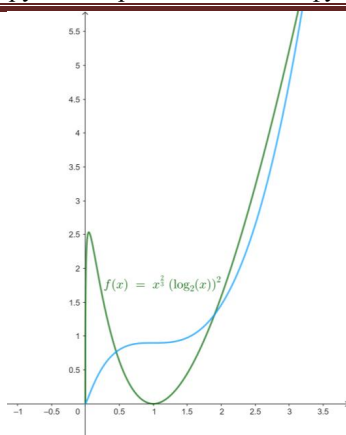


Рис. 7.7

$$\begin{aligned}
 3) \int \operatorname{sh}^3 x dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1 \\ \operatorname{sh} x dx = d(\operatorname{ch} x) \end{array} \right| = \int (\operatorname{ch}^2 x - 1) d(\operatorname{ch} x) = \\
 &= \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x + C. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

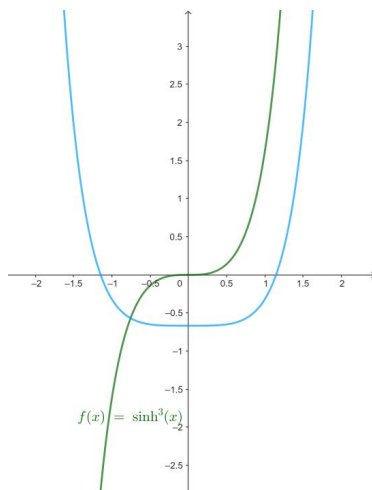


Рис. 7.8

$$4) \int \operatorname{th}^4 x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{th} x = u, \\ du = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = (1 - \operatorname{th}^2 x) dx = (1 - u^2) dx \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{u^4}{1 - u^2} du = -u - \frac{u^3}{3} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + C = -\operatorname{th} x - \frac{\operatorname{th}^3 x}{3} + x + C. \quad \blacksquare$$

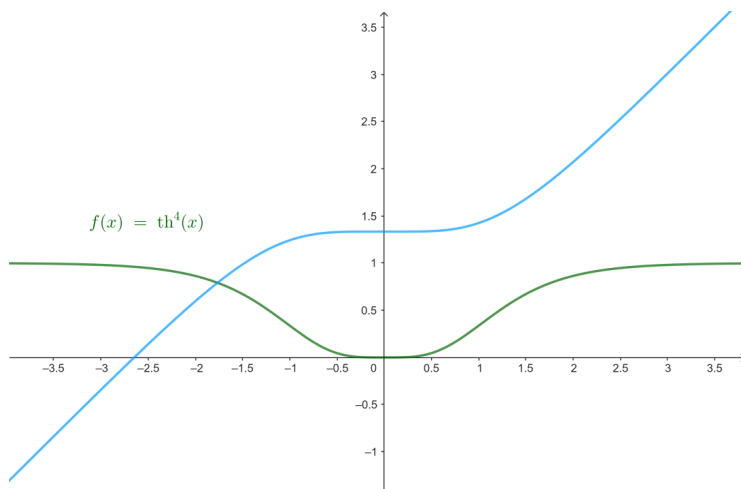


Рис. 7.9

Завдання для самостійного розв'язування

✎1. Вивести рекурентні співвідношення для інтегралів:

1) $I_n = \int \sin^n x dx;$

2) $I_n = \int \cos^n x dx;$

3) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x};$

4) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x};$

$$5) I_n = \int (a^2 - x^2)^n dx; \quad 6) I_n = \int \frac{dx}{(a \cos x + c)^n}, \quad |a| \neq |c|, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$7) I_n = \int x^n e^{ax} dx, \quad a \neq 0; \quad 8) I_n = \int \operatorname{tg}^n x dx.$$

✍2. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2};$$

$$2) \int xe^{\sqrt{x}} dx;$$

$$3) \int \frac{x \sin x dx}{\sqrt{(4 - \sin^2 x)^3}};$$

$$4) \int \frac{(1 + \sin x)e^x dx}{1 + \cos x}.$$

✍3. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 7x dx;$$

$$2) \int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x \operatorname{ch} 5x dx;$$

$$3) \int \operatorname{sh}^3 x dx;$$

$$4) \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^4 x};$$

$$6) \int \frac{\operatorname{ch}^3 x dx}{\operatorname{sh}^4 x}.$$

Завдання для самостійних і контрольних робіт з теми «Невизначений інтеграл»

№1. Обчислити інтеграл, використовуючи елементарні перетворення і таблицю інтегралів:

1. $\int \frac{\sqrt[7]{x^2} - x\sqrt[3]{x} + 2x}{x^2} dx;$

2. $\int \frac{\sqrt[9]{x^4} - \sqrt[3]{x}e^{2x} + x^2 + 2x}{\sqrt[3]{x}} dx;$

3. $\int \frac{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt{x} \sin x + \sqrt[5]{x^2} - 3}{\sqrt{x}} dx;$

4. $\int \frac{x^2 - x^3 \cos 4x + \sqrt[3]{x^4} - 3}{x^3} dx;$

5. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;$

6. $\int \frac{\sqrt{x^2+9} + x^2 + 9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} dx;$

7. $\int \frac{\sqrt{16-x^2} - 16 + x^2}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}} dx;$

8. $\int \frac{25 + x\sqrt{x^2-25} - x^2}{x(x^2-25)} dx;$

9. $\int \frac{x^3 + 2x^4 \cos 6x + \sqrt[7]{x^2} - 10}{x^4} dx;$

10. $\int \frac{\sqrt[8]{x^9} + 3\sqrt[3]{x} \sin 2x + \sqrt[6]{x^5} - 4}{\sqrt[3]{x}} dx;$

11. $\int \frac{36 + x\sqrt{x^2+36} - x^2}{x(36-x^2)\sqrt{x^2+36}} dx;$

12. $\int \frac{x^3 + x\sqrt{x^2+4} + 4x}{x(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} dx;$

13. $\int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{2}{3}} \operatorname{ctg} \frac{x}{4} - 5}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$

14. $\int \frac{\sqrt[9]{x^4} + x^{\frac{7}{2}} \operatorname{tg} 5x + 6}{\sqrt{x^7}} dx;$

15. $\int \frac{\sqrt[5]{x^3} + x \sin 2x + x\sqrt{x^2+9}}{x} dx;$

16. $\int \frac{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{3}} \sin 4x + x^{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2+4}}{\sqrt[3]{x}} dx;$

17. $\int \frac{x^5 + x^3 \cos 6x + \sqrt[3]{x^5} - 7}{x^3} dx;$

18. $\int \frac{\sqrt[4]{x^7} + \sqrt[4]{x^3} \cos \frac{x}{2} + x^9 - 8}{\sqrt[4]{x^3}} dx;$

19. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + x^{\frac{1}{5}} \sin 2x + \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt[5]{x}} dx;$
20. $\int \frac{x^{12} + x^{\frac{2}{7}} \sin 6x + \sqrt[7]{x^2} \cdot \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt[7]{x^2}} dx;$
21. $\int \frac{\sqrt{x} - x^7 e^{-3x} - x^{11} + 4}{x^7} dx;$
22. $\int \frac{x^8 - \sqrt[7]{x^4} e^{2x} - \sqrt[11]{x} - 4}{\sqrt[7]{x^4}} dx;$
23. $\int \frac{x^{\frac{7}{4}} - x^{\frac{5}{4}} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + 4}{\sqrt[4]{x^5}} dx;$
24. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[5]{x^4} \operatorname{tg} 3x - 4x}{\sqrt[5]{x^4}} dx;$
25. $\int \frac{\sqrt{x^{11}} - x^2 \sqrt{x^9} + 2}{x^3} dx;$
26. $\int \frac{x^3 + \sqrt[4]{x^3} e^{4x} + 2x - 3}{\sqrt[4]{x^3}} dx;$
27. $\int \frac{\sqrt[15]{x^{13}} - \sqrt[15]{x^8} \sin 8x + \sqrt[5]{x^2} - 3}{\sqrt[15]{x^8}} dx;$
28. $\int \frac{2x^6 - x^7 \cos 12x + \sqrt[4]{x^5} - 4}{x^7} dx;$
29. $\int \frac{25x^9 - \sqrt[7]{x^8} e^{5x} + 3x^2 - 4x}{\sqrt[7]{x^8}} dx;$
30. $\int \frac{\sqrt{4 + x^2} - \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{16 - x^4}} dx.$

№2. Обчислити інтеграл, використовуючи метод заміни змінної:

1. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x - 1};$
2. $\int \frac{\ln(\ln x) dx}{x};$
3. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx;$
4. $\int \frac{x dx}{x^2 + x + 1};$
5. $\int \frac{x dx}{x^4 + 4};$
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}};$
7. $\int \frac{\ln^2 x dx}{x};$
8. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx;$
9. $\int \frac{dx}{\sin x};$
10. $\int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1 + x^2};$
11. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 6e^x + 13};$
12. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}};$
13. $\int \sqrt{e^x - 1} dx;$
14. $\int x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} dx;$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)};$
16. $\int x e^{-x^2} dx;$
17. $\int \sin^5 x \cos x dx;$
18. $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx;$

19. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x};$	20. $\int \frac{3^{\arctg x}}{1+x^2} dx;$	21. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}};$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\ln \sqrt{x})};$	23. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}};$	24. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}};$
25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}};$	26. $\int \frac{2^{\ln x} dx}{x(1+4^{\ln x})};$	27. $\int \frac{\sin 5x dx}{1+\cos^2 5x};$
28. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx;$	29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-7)};$	30. $\int \frac{dx}{(1+x^2)(\arctg x-3)}.$

З3. Обчислити інтеграл, використовуючи метод інтегрування частинами:

1. $\int \arctg \sqrt{2x-1} dx;$	2. $\int \frac{\arctg x}{x^2} dx;$	3. $\int \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$
4. $\int x^2 \ln \sqrt{1-x} dx;$	5. $\int x e^{-x} dx;$	6. $\int x^2 \cos 2x dx;$
7. $\int \arccos x dx;$	8. $\int \ln x dx;$	9. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx;$
10. $\int x^3 e^{-x^2} dx;$	11. $\int x^2 \sin 2x dx;$	12. $\int \arcsin x dx;$
13. $\int \arccos x dx;$	14. $\int x^3 \arctg x dx;$	15. $\int x^2 \cdot 2^x dx;$
16. $\int (x^2+3) e^{-2x} dx;$	17. $\int (x+2) \ln x dx;$	18. $\int x \ln(1+x^2) dx;$
19. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx;$	20. $\int x^2 \cos 3x dx;$	21. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx;$
22. $\int \sqrt{x} \ln x dx;$	23. $\int (1-x) \sin x dx;$	24. $\int \arctg \sqrt{x} dx;$
25. $\int (x^2+3) \cos x dx;$	26. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x};$	27. $\int x^3 e^{x^2} dx;$
28. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x};$	29. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx;$	30. $\int e^{2x} \sin 2x dx.$

§4. Обчислити невизначений інтеграл:

1. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx;$	2. $\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx;$
3. $\int \frac{x^3 - 17}{x^3 - 4x + 3} dx;$	4. $\int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx;$
5. $\int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx;$	6. $\int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx;$
7. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx;$	8. $\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx;$
9. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx;$	10. $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)(x-3)} dx;$
11. $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx;$	12. $\int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{(x-1)(x-2)x} dx;$
13. $\int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx;$	14. $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx;$
15. $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx;$	16. $\int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx;$
17. $\int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx;$	18. $\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx;$
19. $\int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx;$	20. $\int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx;$
21. $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx;$	22. $\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{x(x+3)(x-1)} dx;$
23. $\int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx;$	24. $\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx;$
25. $\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx;$	26. $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx;$

$$27. \int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx; \quad 28. \int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx;$$

$$29. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx; \quad 30. \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x+1)(x-3)} dx.$$

№5. Обчислити невизначений інтеграл:

$$1. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx; \quad 2. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx;$$

$$3. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx; \quad 4. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx;$$

$$5. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx; \quad 6. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx;$$

$$7. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx; \quad 8. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx;$$

$$9. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx; \quad 10. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3} dx;$$

$$11. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} dx; \quad 12. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} dx;$$

$$13. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} dx; \quad 14. \int \frac{x^3 + x + 2}{x^3(x+2)} dx;$$

$$15. \int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx; \quad 16. \int \frac{2x^3 + x + 1}{x^3(x+1)} dx;$$

$$17. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} dx; \quad 18. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx;$$

$$19. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} dx; \quad 20. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3} dx;$$

$$21. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx;$$

$$22. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x-2)(x+2)^3} dx;$$

$$23. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} dx;$$

$$24. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x-2)(x+2)^3} dx;$$

$$25. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} dx;$$

$$26. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3} dx;$$

$$27. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} dx;$$

$$28. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx;$$

$$29. \int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} dx;$$

$$30. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

№6. Обчислити інтеграл від дробово-раціональних функцій:

$$1. \int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx;$$

$$2. \int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx;$$

$$3. \int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx;$$

$$4. \int \frac{(4x^2+3x+17)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)};$$

$$5. \int \frac{(4x-x^2-12)dx}{x^3+8};$$

$$6. \int \frac{(6-9x)dx}{x^3+8};$$

$$7. \int \frac{(2x^2+7x+7)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)};$$

$$8. \int \frac{(3x-1)dx}{(x+3)(x^2-4x+17)};$$

$$9. \int \frac{(4x^2+x+9)dx}{x^3+27};$$

$$10. \int \frac{(x^2+6x+12)dx}{x^3-27};$$

$$11. \int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx;$$

$$12. \int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx;$$

$$13. \int \frac{(9x-9)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)};$$

$$14. \int \frac{4x+2}{x^4+4x^2} dx;$$

$$15. \int \frac{(x^2 - 13x + 40)dx}{(x+1)(x^2 - 4x + 29)};$$

$$16. \int \frac{(4x - 10)dx}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)};$$

$$17. \int \frac{(19x - x^2 - 34)dx}{(x+1)(x^2 - 4x + 8)};$$

$$18. \int \frac{(2x^2 + 4x + 20)dx}{(x+1)(x^2 - 2x + 10)};$$

$$19. \int \frac{(4x^2 + 7x + 4)dx}{(x-3)(x^2 - 2x + 5)};$$

$$20. \int \frac{(5x^2 + 17x + 14)dx}{(x+1)(x^2 + 6x + 34)};$$

$$21. \int \frac{(12 - 6x)dx}{(x+1)(x^2 - 4x + 3)};$$

$$22. \int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} dx;$$

$$23. \int \frac{(7x - 10)dx}{x^3 + 8};$$

$$24. \int \frac{(x^2 - 5x + 40)dx}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)};$$

$$25. \int \frac{(3 - 9x)dx}{x^3 - 1};$$

$$26. \int \frac{(x^2 + 23)dx}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)};$$

$$27. \int \frac{(4x^2 + 28)dx}{(x+3)(x^2 - 2x + 10)};$$

$$28. \int \frac{(5x + 13)dx}{(x+3)(x^2 + 8x + 20)};$$

$$29. \int \frac{(3x^2 + 2x + 9)dx}{x^3 + 64};$$

$$30. \int \frac{(2x + 16)dx}{(x-4)(x^2 - 2x + 26)}.$$

З7. Обчислити невизначений інтеграл:

$$1. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)^2} dx;$$

$$2. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 1)^2} dx;$$

$$3. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2 + x + 1)^2} dx;$$

$$4. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)^2} dx;$$

$$5. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)^2} dx;$$

$$6. \int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2 + 2x + 3)^2} dx;$$

7. $\int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2+2)^2} dx;$
8. $\int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^2(x^2+3)^2} dx;$
9. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2+4)^2} dx;$
10. $\int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)^2} dx;$
11. $\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)^2} dx;$
12. $\int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2-x+1)^2} dx;$
13. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} dx;$
14. $\int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2+9)^2} dx;$
15. $\int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)^2} dx;$
16. $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)^2} dx;$
17. $\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)^2} dx;$
18. $\int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)^2} dx;$
19. $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2+x+1)^2(x^2+x+2)^2} dx;$
20. $\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 9}{(x^2+x+1)^2(x^2+x+2)^2} dx;$
21. $\int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)^2} dx;$
22. $\int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2+2)^2(x^2+2x+2)^2} dx;$
23. $\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2-x+1)^2(x^2+1)^2} dx;$
24. $\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2-x+1)^2(x^2+1)^2} dx;$
25. $\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2-x+1)^2(x^2+1)^2} dx;$
26. $\int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2-x+1)^2(x^2+1)^2} dx;$
27. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)^2} dx;$
28. $\int \frac{x + 4}{(x^2+x+2)^2(x^2+2)^2} dx;$
29. $\int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2+x+1)^2(x^2+1)^2} dx;$
30. $\int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2+x+3)^2(x^2+2x+3)^2} dx.$

№8. Обчислити інтеграл від ірраціональних функцій:

$$1. \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{(1 + \sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx;$$

$$2. \int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx;$$

$$3. \int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx;$$

$$4. \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}} dx;$$

$$5. \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx;$$

$$6. \int \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx;$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1}} dx;$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx;$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3}} dx;$$

$$10. \int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx;$$

$$11. \int \frac{\sqrt{x+3}}{1 + \sqrt[3]{x+3}} dx;$$

$$12. \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx;$$

$$13. \int \frac{\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x+3}} dx;$$

$$14. \int \frac{x+1 + \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1 + \sqrt[3]{x+1})} dx;$$

$$15. \int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}} dx;$$

$$16. \int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}} dx;$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}};$$

$$18. \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 1} dx;$$

$$19. \int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[4]{x}} dx;$$

$$20. \int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1} - \sqrt[3]{3x+1}} dx;$$

$$21. \int \frac{\sqrt{x}}{x - 4\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$22. \int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx;$$

$$23. \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$24. \int \frac{\sqrt{x}}{3x + \sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$25. \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$26. \int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})} dx;$$

$$27. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx;$$

$$28. \int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{2+\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}} dx;$$

$$29. \int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$30. \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}} dx.$$

З9. Обчислити інтеграли, використовуючи підстановки Ейлера:

$$1. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}};$$

$$2. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}};$$

$$3. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}};$$

$$4. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}};$$

$$5. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$$

$$6. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$7. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$8. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}};$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}};$$

$$10. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}};$$

$$11. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}};$$

$$12. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}};$$

$$13. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}};$$

$$14. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}};$$

$$15. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$16. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}};$$

$$17. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}};$$

$$18. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$19. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}};$$

$$20. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-1}};$$

$$21. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}};$$

$$22. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}};$$

$$23. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}};$$

$$24. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}};$$

$$25. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}};$$

$$26. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}};$$

$$27. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}};$$

$$28. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 3x + 2}}; \quad 29. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}; \quad 30. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}.$$

№10. Обчислити невизначений інтеграл:

$$1. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4\sqrt{x^3}} dx;$$

$$2. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3\sqrt{x^2}} dx;$$

$$3. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx;$$

$$4. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^9\sqrt{x^4}} dx;$$

$$5. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9\sqrt{x^8}} dx;$$

$$6. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x^9\sqrt{x^5}} dx;$$

$$7. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\sqrt[9]{x}} dx;$$

$$8. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^6\sqrt{x^5}} dx;$$

$$9. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx;$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}} dx;$$

$$11. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x^8\sqrt{x^7}} dx;$$

$$12. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x^{12}\sqrt{x^7}} dx;$$

$$13. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\sqrt[6]{x}} dx;$$

$$14. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}} dx;$$

$$15. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx;$$

$$16. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\sqrt[4]{x}} dx;$$

$$17. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x^{10}\sqrt{x^9}} dx;$$

$$18. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x^5\sqrt{x^3}} dx;$$

$$19. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx;$$

$$20. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2 \sqrt[20]{x^7}} dx;$$

$$21. \int \frac{\sqrt[5]{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[25]{x^{11}}} dx;$$

$$22. \int \frac{\sqrt[5]{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx;$$

$$23. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx;$$

$$24. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2 \sqrt[3]{x}} dx;$$

$$25. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx;$$

$$26. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{x \sqrt[3]{x}} dx;$$

$$27. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^2}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx;$$

$$28. \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx;$$

$$29. \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x \sqrt[6]{x^5}} dx;$$

$$30. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x}}}{x^{15} \sqrt{x^4}} dx.$$

№11. Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій:

$$1. \int \cos^4 3x \sin^2 3x dx;$$

$$2. \int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cos^3 x dx;$$

$$3. \int \cos^3 x \sin^8 x dx;$$

$$4. \int \cos^4 x \sin^3 x dx;$$

$$5. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}};$$

$$6. \int \sqrt[6]{\sin^3 2x} \cos^3 2x dx;$$

$$7. \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx;$$

$$8. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx;$$

$$9. \int \frac{3 \sin^3 x}{\cos^4 x} dx;$$

$$10. \int \sin^5 x \cos^4 x dx;$$

$$11. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx;$$

$$12. \int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx;$$

$$13. \int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos^3 x dx;$$

$$14. \int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \sin^3 2x dx;$$

$$15. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}};$$

16. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx;$	17. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx;$	18. $\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \sin^3 x dx;$
19. $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx;$	20. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx;$	21. $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx;$
22. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx;$	23. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx;$	24. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx;$
25. $\int \sin^3 x \cos^8 x dx;$	26. $\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x} dx;$	27. $\int \sin^5 x \sqrt[5]{\cos^3 x} dx;$
28. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx;$	29. $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx;$	30. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx.$

№12. Обчислити інтеграли, використовуючи універсальну тригонометричну підстановку:

1. $\int \frac{dx}{5 + 2\sin x + 3\cos x};$	2. $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 2\cos x};$
3. $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{1 + \cos x} dx;$	4. $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x - 5\sin x};$
5. $\int \frac{dx}{5\cos x + 10\sin x};$	6. $\int \frac{dx}{3 + 2\cos x - \sin x};$
7. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x};$	8. $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x};$
9. $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x};$	10. $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3};$
11. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x};$	12. $\int \frac{dx}{8 + 4\cos x};$
13. $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x};$	14. $\int \frac{dx}{7\sin x - 3\cos x};$
15. $\int \frac{dx}{2 + 4\sin x + 3\cos x};$	16. $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x};$
17. $\int \frac{2 - \sin x + 3\cos x}{1 + \cos x} dx;$	18. $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3\cos x};$

19. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5};$

21. $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x};$

23. $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x};$

25. $\int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x};$

27. $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x};$

29. $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x};$

20. $\int \frac{7 + 6\sin x - 5\cos x}{1 + \cos x} dx;$

22. $\int \frac{6\sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx;$

24. $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x};$

26. $\int \frac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x};$

28. $\int \frac{dx}{4 - 4\sin x + 3\cos x};$

30. $\int \frac{dx}{2 - 3\cos x + \sin x}.$

§ 8. Означення визначеного інтеграла. Інтегральна сума та суми Дарбу

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Інтегральна сума, діаметр розбиття	Integral sum, split diameter
Визначений інтеграл	Definite integral
Підінтегральна функція	Subintegral function
Підінтегральний вираз	Subintegral expression
Межі інтегрування	Limits of integration
Суми Дарбу, критерій Дарбу	Darboux sums, Darboux criterion
Класи інтегровних функцій	Classes of integral functions

1. Які задачі приводять до поняття визначеного інтеграла?

Задача про площу криволінійної трапеції, про визначення шляху точки.

2. Що таке розбиття відрізка $[a;b]$? Що таке інтегральна сума функції $f(x)$ на відріжку $[a;b]$?

Нехай на відріжку $[a;b]$ визначено функцію $y = f(x)$. Множину точок $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, де $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$ називають τ -розбиттям відрізка $[a;b]$ на частини.

Позначимо через $\lambda(\tau)$ найбільшу довжину усіх елементарних відрізків:

$$\lambda(\tau) = \max_{k=0, n-1} (x_{k+1} - x_k) = \max_{k=0, n-1} \Delta x_k - \text{діаметр розбиття.}$$

В кожному з елементарних відрізків $[x_k; x_{k+1}]$ візьмемо точку

ξ_k і знайдемо значення функції $f(\xi_k)$, $k = \overline{0, n-1}$. Складемо суму попарних добутків значень функції $f(\xi_k)$ на довжину відповідного відрізка Δx_k :

$$\sigma(\tau) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Суму $\sigma(\tau)$ називають **інтегральною сумою**, побудованою для функції $f(x)$ по розбиттю τ і вибраних точках ξ_k .

3. Сформулювати означення визначеного інтеграла, інтегровної функції. Який геометричний зміст має визначений інтеграл?

Якщо існує $\lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sigma(\tau)$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на частини, ні від вибору точок на кожному з елементарних відрізків, то її називають **визначеним інтегралом Рімана (або просто інтегралом)** функції $y = f(x)$ на відріжку $[a; b]$ і позначають:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла.

Інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ від функції $y = f(x)$, яка неперервна на проміжку $[a; b]$ і набуває на цьому проміжку лише невід'ємних значень, є площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком цієї функції та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$.

4. Ознайомитись з біографією французького математика Жана Гастона Дарбу.

5. Сформулювати означення нижньої і верхньої сум Дарбу, сформулювати та довести їх властивості.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і обмежена на відрізку $[a, b]$ і нехай τ – деяке розбиття цього відрізка. Для кожного τ -розбиття побудуємо такі дві суми:

$$s(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad - \text{нижня сума Дарбу},$$

$$S(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \quad - \text{верхня сума Дарбу},$$

де $m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\}$, $M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\}$,

Геометричний зміст сум Дарбу для невід'ємної неперервної функції $f(x)$ на $[a, b]$ (рис. 8.1):

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = \min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x).$$



Рис. 8.1

Верхня сума Дарбу дорівнює площі ступінчатої фігури, яка міститься в криволінійній трапеції зображеної на рисунку 8.2.

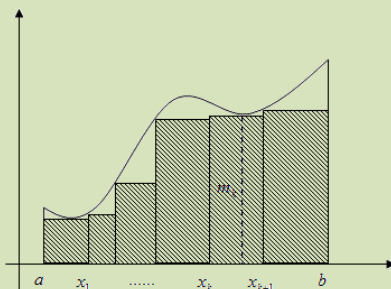


Рис. 8.2

Нижня сума Дарбу дорівнює площі ступінчатої фігури, яка

міститься в криволінійній трапеції зображеної на рисунку.

Для довільного τ -розбиття відрізка і для довільного вибору точок ξ_k виконується нерівність:

$$s(\tau) \leq \sigma(\tau) \leq S(\tau).$$

Якщо маємо два розбиття τ_1 і τ_2 відрізка $[a, b]$, причому $\tau_1 \subset \tau_2$ але $\tau_1 \neq \tau_2$, то τ_2 – розбиття називають подрібненням τ_1 – розбиття.

Якщо τ_2 -розбиття є подрібненням τ_1 -розбиття, то:

$$s(\tau_1) \leq s(\tau_2) \leq S(\tau_2) \leq S(\tau_1)$$

тобто, якщо до даного розбиття додати нові точки, то нижні суми Дарбу не можуть спадати, а верхні – зростати.

Якщо τ_1 і τ_2 довільні розбиття відрізка $[a; b]$, то:

$$s(\tau_1) \leq S(\tau_2)$$

або нижня сума Дарбу не може перевищувати верхню суму Дарбу, навіть якщо вони взяті для різних розбиттів.

6. Сформулювати та довести критерій інтегровності функції на відрізку. Назвати класи інтегровних функцій.

Необхідні і достатні умови інтегровності функції (Критерій Дарбу).

Для того, щоб визначена і обмежена на відрізку $[a, b]$ функція $y = f(x)$ була інтегровною на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб:

$$\lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} (S(\tau) - s(\tau)) = 0.$$

Класи інтегровних функцій.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Якщо функція $f(x)$ визначена і монотонна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на ньому.

Нехай функція $f(x)$ визначена і обмежена на відрізку $[a, b]$.

Якщо для $\forall \varepsilon > 0$ можна вказати скінченне число інтервалів, які покривають всі точки розриву функції і мають загальну суму довжин, меншу ε , то функція $f(x)$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$.

Приклади розв'язування вправ

Задача 8.1. Скласти формулу обчислення інтегральної суми для функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a; b]$, поділивши відрізок інтегрування на n рівних частин. Значення функції обчислити в правому та лівому кінцях кожного елементарного відрізка. Застосувати отримані формули для інтегралів:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx, \quad \xi_k = x_{k+1}; \quad 2) \int_{-1}^4 (1+2x) \, dx, \quad \xi_k = x_k.$$

Розв'язання.

$$\text{За означенням: } \int_a^b f(x) \, dx := \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Поділимо відрізок інтегрування $[a; b]$ на n рівних частин, тоді довжина кожного відрізка буде рівна $\Delta x_k = h = \frac{b-a}{n}$, а координати точок поділу: $x_0 = a$; $x_1 = a + h$; $x_2 = a + 2h$; ...; $x_k = a + kh$; ...; $x_n = a + nh = b$.

Якщо $\xi_k = x_{k+1}$ (правий кінець елементарного відрізка), то $f(\xi_k) = f(x_{k+1}) = f(a + (k+1)h)$, $k = 0; n-1$, інтегральна сума дорівнюватиме $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1)h)h$, а визначений інтеграл:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1)h)} \quad (8.1)$$

Якщо ж за точки ξ_k виберемо ліві кінці елементарних відрізків ($\xi_k = x_k$), то інтегральна сума дорівнюватиме $S_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh)$, а визначений інтеграл:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh)} \quad (8.2)$$

До визначеного інтегралу $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ застосуємо формулу (8.1),

у якій $h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{n} = \frac{\pi}{2n}$; $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2n}$, $x_2 = \frac{2\pi}{2n}, \dots$, $x_k = \frac{k\pi}{2n}, \dots$,

$x_n = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$, $\xi_k = x_{k+1} = \frac{\pi(k+1)}{2n}$, отже

$$\begin{aligned} S_n &= h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{\pi(k+1)}{2n} = \\ &= \frac{\pi}{2n} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right). \end{aligned}$$

Проведемо елементарні перетворення в сумі S_n , для цього помножимо ліву і праву частину останньої рівності на $2 \sin \frac{\pi}{4n}$ і використаємо відому з тригонометрії формулу перетворення добутку функцій в суму: $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$:

$$\begin{aligned} 2S_n \sin \frac{\pi}{4n} &= \frac{\pi}{2n} \left(2 \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{2n} + 2 \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + 2 \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2n} \left(\left(\sin \frac{3\pi}{4n} - \sin \frac{\pi}{4n} \right) + \left(\sin \frac{5\pi}{4n} - \sin \frac{3\pi}{4n} \right) + \dots + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(\sin \frac{(2n-1)\pi}{4n} - \sin \frac{(2n-3)\pi}{4n} \right) \Bigg) = \frac{\pi}{2n} \left(\sin \frac{(2n-1)\pi}{4n} - \sin \frac{\pi}{4n} \right),$$

звідки:

$$2S_n \sin \frac{\pi}{4n} = \frac{\pi \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{(n-1)\pi}{4n}}{n}, \quad \text{або} \quad S_n = \frac{\pi \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{(n-1)\pi}{4n}}{2n \sin \frac{\pi}{4n}}.$$

Знайдемо границю інтегральної суми при $n \rightarrow \infty$
 $(\lambda(\tau) = h \rightarrow 0)$.

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{2n} \cos \xi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{(n-1)\pi}{4n}}{2n \sin \frac{\pi}{4n}},$$

але границя знаменника дорівнює $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{2}$, а границя

чисельника дорівнює:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{(n-1)\pi}{4n} = \sin \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)\pi}{4n} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{тому} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\pi \sin^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = 1. \quad \blacksquare$$

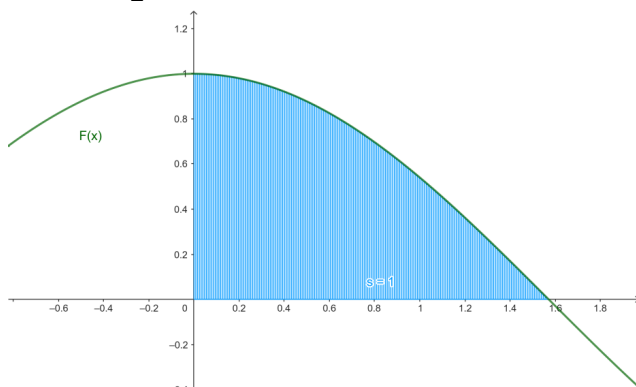


Рис. 8.3

2) До інтегралу $\int_{-1}^4 (1+2x)dx$ застосуємо формулу (8.2), тоді

$$h = \frac{4 - (-1)}{n} = \frac{5}{n}; \quad x_0 = -1; \quad \dots; \quad x_k = -1 + \frac{5k}{n}; \dots; \quad x_n = -1 + \frac{5n}{n} = 4,$$

$$\xi_k = x_k = -1 + \frac{5k}{n}.$$

Складемо інтегральну суму:

$$\begin{aligned} S_n &= h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh) = \frac{5}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + 2 \left(-1 + \frac{5k}{n} \right) \right) = \frac{5}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-1 + \frac{10k}{n} \right) = \\ &= \frac{5}{n} \left(-n + \frac{10}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \right) = -5 + \frac{50}{n^2} \cdot \frac{1+n-1}{2} (n-1) = -5 + \frac{25(n-1)}{n}. \end{aligned}$$

Знайдемо визначений інтеграл як границю інтегральної суми:

$$\int_{-1}^4 (1+2x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-5 + \frac{25(n-1)}{n} \right) = -5 + 25 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 20. \quad \blacksquare$$

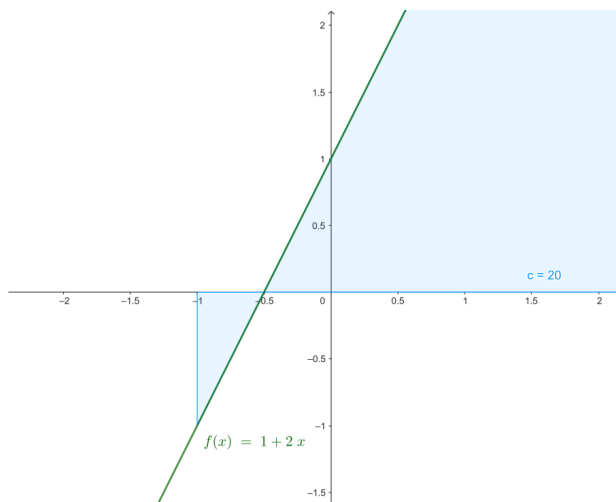


Рис. 8.4

Задача 8.2. Скласти формулу для обчислення інтегральної суми для функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a; b]$, поділивши відрізок інтегрування на n елементарних відрізків так, щоб

Означення визначеного інтеграла. Інтегральна сума та суми Дарбу
абсциси точок поділу утворювали геометричну прогресію. Значення функції обчислити в лівих кінцях кожного елементарного відрізка. Застосувати отриману формулу для інтегралів:

$$1) \int_a^b x^m dx, \quad 0 < a < b, \quad m \neq -1; \quad 2) \int_a^b \frac{dx}{x}, \quad (a > 0; b > 0).$$

Розв'язання.

Позначимо знаменник геометричної прогресії через q ($q > 1$), тоді абсциса кінця відрізка $[a; b]$ дорівнюватиме $b = aq^n$, звідки $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, а абсциси точок поділу: $x_0 = a$; $x_1 = aq = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$; ...;

$$x_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}; \dots; x_n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n}} = b.$$

Знайдемо довжини елементарних відрізків:

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0 = aq - a = a(q - 1); \quad \Delta x_1 = x_2 - x_1 = aq^2 - aq = aq(q - 1);$$

$$\dots; \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k = aq^{k+1} - aq^k = aq^k(q - 1) = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right); \quad \dots;$$

$\Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1} = aq^{n-1}(q - 1)$. Очевидно, що найбільшим з елементарних відрізків буде Δx_{n-1} . Інтегральна сума дорівнює сумі добутків значень функції $f(x_k) = f(aq^k)$ у довільній точці елементарного відрізка (тут ми взяли $\xi_k = x_k$) на довжини відповідних елементарних відрізків:

$$S_n = f(a)a(q - 1) + f(aq)aq(q - 1) + \dots + f(aq^k)aq^k(q - 1) + \dots +$$

$$+ f(aq^{n-1})aq^{n-1}(q - 1) = a(q - 1) \sum_{k=0}^{n-1} f(aq^k)q^k.$$

Визначений інтеграл знайдемо як границю інтегральної суми:

$$\int_a^b f(x) dx = a \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (q \rightarrow 1)}} \sum_{k=0}^{n-1} (q - 1) f(aq^k) q^k = a \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (q \rightarrow 1)}} (q - 1) \sum_{k=0}^{n-1} f(aq^k) q^k. \quad (8.3)$$

1) Скористаємося формулою (8.3), складемо інтегральну суму для функції $y = x^m$ на відрізку $[a; b]$:

$$S_n(f) = a(q-1) \sum_{k=0}^{n-1} f(aq^k) q^k = a^{m+1} \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{k(m+1)}{n}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{геом. прогресія} \\ q_1 = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{m+1}{n}} \end{array} \right| = (b^{m+1} - a^{m+1}) \frac{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{m+1}{n}} - 1},$$

після чого обчислюємо визначений інтеграл як границю інтегральної суми:

$$\int_a^b x^m dx = \lim_{\substack{\lambda(\tau) \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} S_n(f) = (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{m+1}{n}} - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} a^x - 1 \sim x \ln a, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right| =$$

$$= (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln \frac{b}{a}}{\frac{m+1}{n} \ln \frac{b}{a}} = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Таким чином, $\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}, \quad 0 < a < b, \quad m \neq -1.$

Якщо ж обчислити цей інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_a^b = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

то бачимо, що застосування цієї формули набагато швидше приводить до потрібного результату. ■

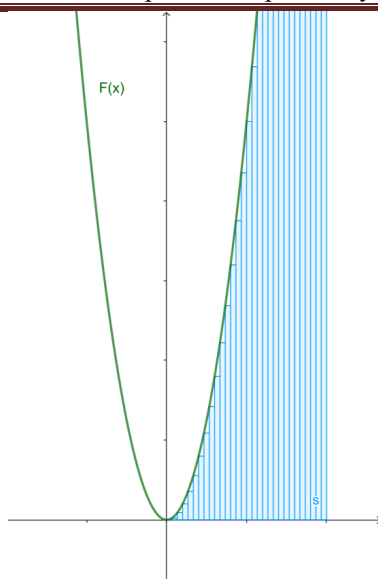


Рис. 8.5

2) Аналогічно випадку 1) будемо мати:

$$S_n(f) = a(q-1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{aq^k} q^k = a(q-1) \frac{n}{a} = n \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right);$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln \frac{b}{a}.$$

Обчислимо інтеграл 2) ще й за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}. \quad \blacksquare$$

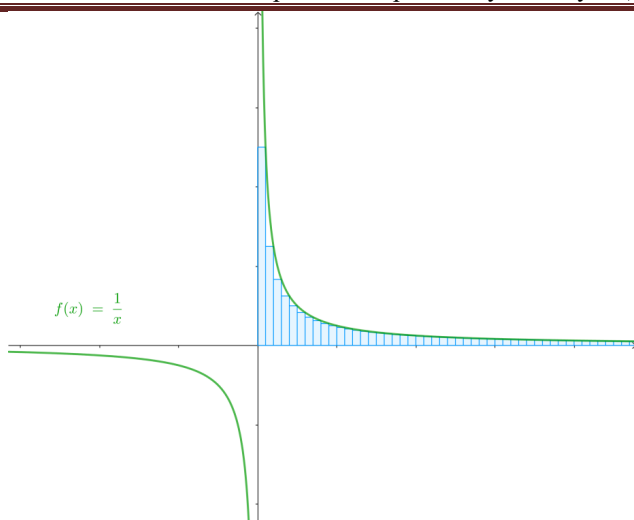


Рис. 8.6

Задача 8.3. Для функції $\sin x$ обчислити верхні і нижні суми Дарбу, що відповідають розбиттю відрізка $[0; \pi]$ на n рівних частин ($n=3, n=6$). Оцінити визначений інтеграл $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$.

Розв'язання.

Нижні і верхні суми Дарбу обмеженої функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ мають вигляд:

$$s(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad S(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$

де $m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$. Зокрема, для неперервної функції $m_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $M_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$.

В умовах нашої задачі відрізок $[0; \pi]$ розіб'ємо на три рівних частини $\left(\Delta x_k = \frac{\pi - 0}{3} = \frac{\pi}{3} \right)$ точками $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \pi$.

1) на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ функція $\sin x$ монотонно зростає, і тому маємо:

$$m_0 = \sin 0 = 0, \quad M_0 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) на відрізку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ найменше значення функції $m_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а найбільше $M_1 = \sin \frac{2\pi}{3} = 1$.

3) на відрізку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ функція $\sin x$ монотонно спадає, тому $m_2 = \sin \pi = 0$, $M_2 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Знаходимо нижню суму Дарбу:

$$s(\tau) = \sum_{k=0}^2 m_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3} \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,907,$$

після чого знаходимо верхню суму Дарбу:

$$S(\tau) = \sum_{k=0}^2 M_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi(\sqrt{3}+1)}{3} \approx 2,86.$$

Зауважимо, що нижня сума Дарбу $s(\tau) = 0,907$ менша верхньої суми Дарбу $S(\tau) = 2,86$, тобто їх різниця складає $2,86 - 0,907 = 1,953$.

При розбитті відрізка $[0; \pi]$ на 6 рівних частин довжина кожного елементарного відрізка дорівнює $\Delta x_k = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$, а точки розбиття: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, $x_4 = \frac{2\pi}{3}$, $x_5 = \frac{5\pi}{6}$, $x_6 = \pi$.

Аналогічно до попередніх міркувань обчислюємо значення m_k і M_k :

$$m_0 = 0,$$

$$M_0 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$m_1 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$M_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$m_2 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$M_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$m_3 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$M_3 = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$m_4 = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$M_4 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$m_5 = \sin \pi = 0,$$

$$M_5 = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Знаходимо нижню суму Дарбу:

$$s_1(\tau) = \frac{\pi}{6}(m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) = \frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3}) \approx 1,43.$$

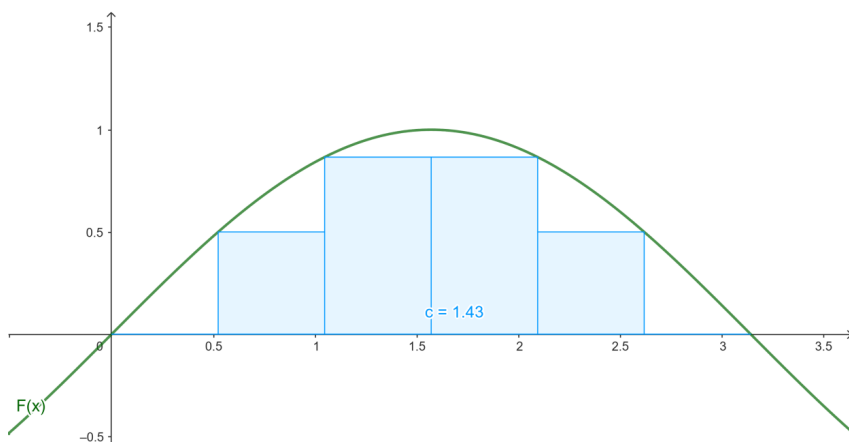


Рис. 8.7

Знаходимо верхню суму Дарбу:

$$S_1(\tau) = \frac{\pi}{6}(M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5) = \frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3}) \approx 2,48.$$

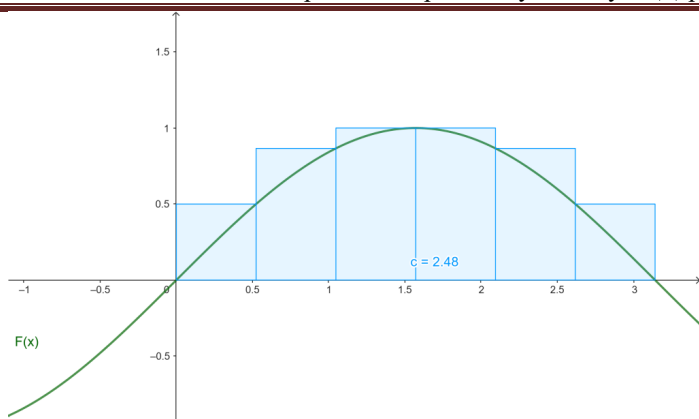


Рис. 8.8

Бачимо, що при подрібненні розбиття різниця верхньої і нижньої сум Дарбу дорівнює $2,48 - 1,43 = 1,05$.

Отримані результати дають можливість констатувати, що виконується нерівність:

$$0,907 \leq 1,43 \leq \int_0^{\pi} \sin x dx \leq 2,48 \leq 2,86,$$

або

$$s(\tau) \leq s_1(\tau) \leq \int_0^{\pi} \sin x dx \leq S_1(\tau) \leq S(\tau).$$

Робимо висновок, що якщо до даного розбиття додати нові точки, то нижні суми Дарбу зростають, а верхні – спадають. ■

Задача 8.4. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчислити:

$$1) I_1 = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, a > 0;$$

$$2) I_2 = \int_{-1}^3 ||x| - 2| dx;$$

$$3) I_3 = \int_{-1}^1 \arccos x dx.$$

Розв'язання.

Визначений інтеграл від невід'ємної функції на відрізку – це площа криволінійної трапеції. Тому в усіх трьох випадках нарисуємо криволінійні трапеції і знайдемо їхні площі, використовуючи відомі формули з геометрії.

1) Графік функції $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ є верхнє півколо радіуса a з центром у початку координат (рис.8.9). Таким чином вихідний шуканий інтеграл дорівнює площі півкруга з тим же радіусом,

тобто $I_1 = \frac{\pi a^2}{2}$. ■

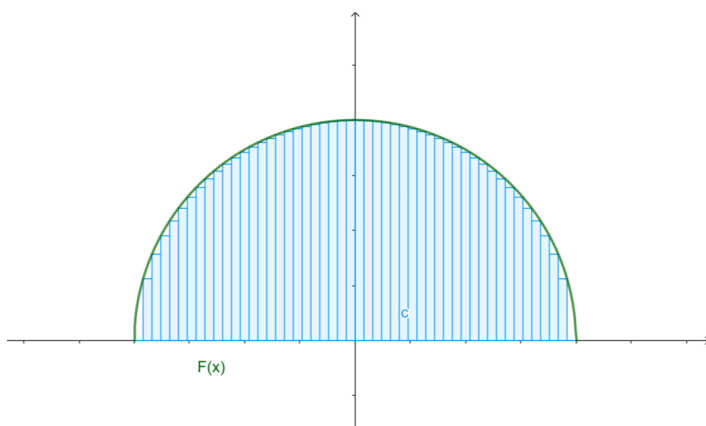


Рис. 8.9

2) Графік функції $y = ||x| - 2|$, визначеної на відрізку $[-1; 3]$, показано на рис. 8.10. Отже, величина шуканого інтеграла дорівнює сумі площ прямокутної трапеції і двох прямокутних трикутників.

Таким чином, $I_2 = \frac{1+2}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 4$. ■

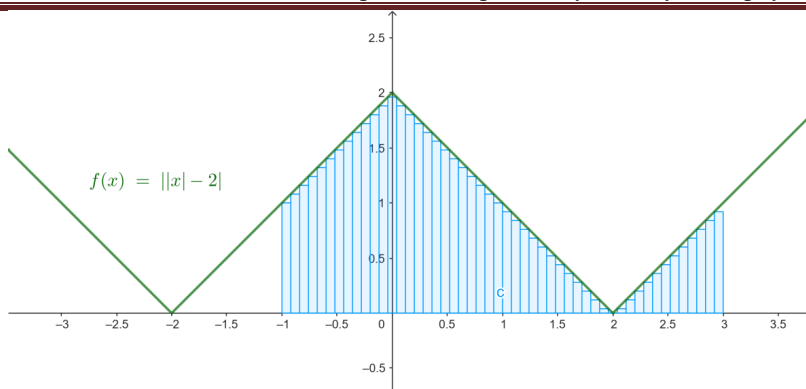


Рис. 8.10

3) Визначений інтеграл I_3 чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, показаної на рис. 8.11. Якщо доповнити криволінійну трапецію до прямокутника зі сторонами $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \pi$, площа якого дорівнює $S = 2\pi$, то за рахунок симетрії графіка функції $y = \arccos x$ і цього прямокутника відносно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ випливає, що число I_3 дорівнює половині площі прямокутника, тому $I_3 = \pi$. ■

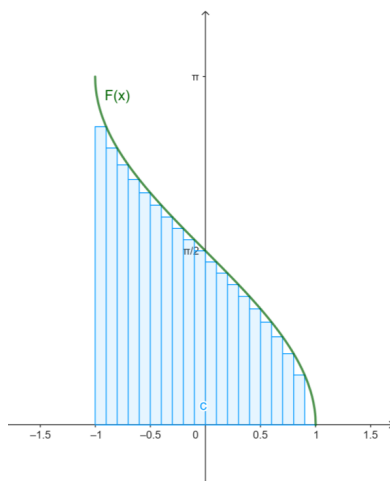


Рис. 8.11

Задача 8.5. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^x dx$.

Розв'язання.

І спосіб (використовуючи означення).

Відрізок $[0,1]$ поділимо на n рівних частин, тобто $\tau = \left\{ 0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots; \frac{n-1}{n}; 1 \right\}$, а за точки ξ_k візьмемо ліві кінці елементарних відрізків $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \right]$, $k = \overline{0, n-1}$, $\Delta x_k = \frac{1}{n}$. Складемо інтегральну суму:

$$\sigma(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}},$$

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{n}, \quad \lambda(\tau) \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty. \text{ Тоді}$$

$$\lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sigma(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = (1 - e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \left(1 - e^{\frac{1}{n}} \right)} = e - 1.$$

Отже, $\int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1,71$. ■

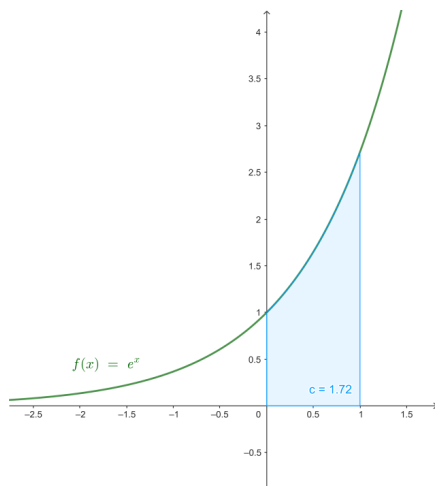


Рис. 8.12

II спосіб (формула Ньютона-Лейбніца).

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1 \approx 2,71828 - 1 = 1,71828. \quad \blacksquare$$

III спосіб (за допомогою програми GeoGebra, як границя інтегральних сум).

Для обчислення визначеного інтеграла за означенням в GeoGebra необхідно створити три повзунки: n – кількість проміжків, a – нижня межа, b – верхня межа. Обчислюємо нижню суму c . Для цього в рядку введення пишемо *Нижня Сума* $[f, a, b, n]$ (рис. 8.13).

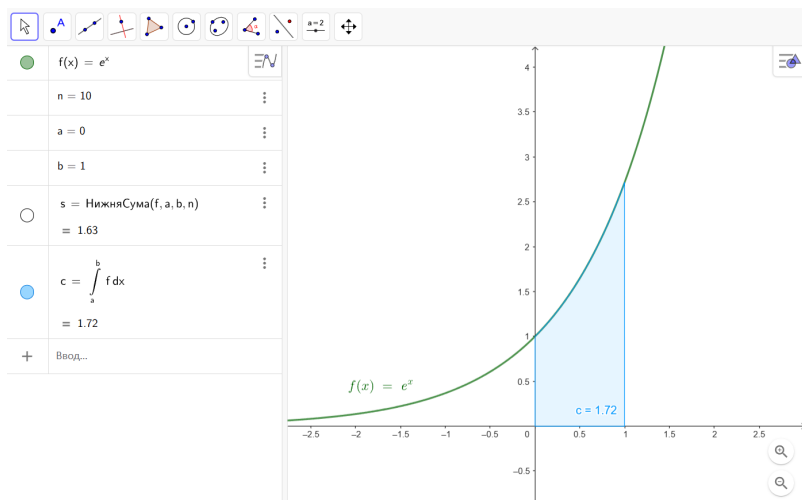


Рис. 8.13. Обчислення визначеного інтеграла в GeoGebra

Збільшуючи значення n ми показуємо зменшення похибки. Наприклад, при $n=10$ нижня сума $c=1,63$, а при $n=100$ нижня сума $c=1,71$.

Як бачимо, похибка зменшилася на 0,08 (рис. 8.14). ■

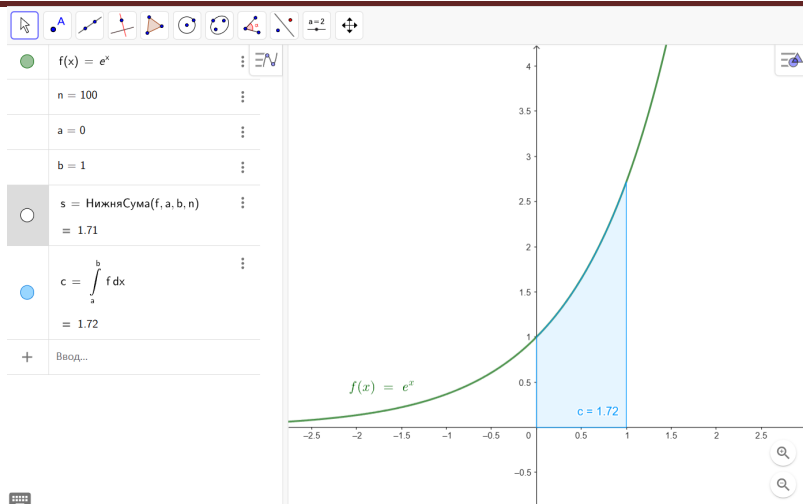


Рис. 8.14. Обчислення визначеного інтеграла в GeoGebra

Завдання для самостійного розв'язування

✎1. Обчислити визначені інтеграли як границі інтегральних сум Рімана, розбивши відрізок інтегрування на n рівних частин:

$$1) \int_0^1 e^x dx;$$

$$2) \int_0^2 x^2 dx;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx;$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx;$$

$$5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$$

$$6) \int_0^2 [x^2] dx.$$

✎2. Обчислити визначені інтеграли як границі інтегральних сум Рімана, розбивши відрізок інтегрування точками, які утворюють геометричну прогресію:

$$1) \int_1^2 x^3 dx;$$

$$2) \int_a^b \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$3) \int_1^2 x^m dx, m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\};$$

$$4) \int_1^2 x \ln x dx.$$

З3. Обчислити верхні і нижні інтегральні суми, що відповідають розбиттю відрізка $[a; b]$ на n рівних частин:

$$1) \int_{-2}^2 (x^3 - 3x^2 + 3x + 2) dx, \quad n = 4; \quad 2) \int_{-2}^1 (3x^4 + 4x^3 + 1) dx, \quad n = 3;$$

$$3) \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}, \quad n = 5; n = 10; \quad 4) \int_0^1 \sqrt{x} dx, \quad n = k;$$

$$5) \int_{-2}^1 \operatorname{sgn} x dx, \quad n = 3k; \quad 6) \int_{-5}^0 [x] dx, \quad n = 5k.$$

З4. Обчислити інтегральні суми для функції $f(x) = x^3$ на відрітку $[1; 3]$, якщо:

$$1) x_k = 1 + \frac{2k}{n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad \xi_k = x_{k-1}, \quad k = \overline{1, n};$$

$$2) x_k = 1 + \frac{2k}{n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad \xi_k = x_k, \quad k = \overline{1, n};$$

$$3) x_k = 1 + \frac{2k}{n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad \xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \quad k = \overline{1, n};$$

$$4) x_k = \left(\sqrt[n]{3}\right)^k, \quad k = \overline{0, n}, \quad \xi_k = x_{k-1}, \quad k = \overline{1, n};$$

$$5) x_k = \left(\sqrt[n]{3}\right)^k, \quad k = \overline{0, n}, \quad \xi_k = x_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

З5. Користуючись геометричним змістом інтегралу, обчислити:

$$1) \int_1^2 \sqrt{2x - x^2} dx;$$

$$2) \int_0^2 \sqrt{4x - x^2} dx;$$

$$3) \int_{-1}^5 \sqrt{5 + 4x - x^2} dx;$$

$$4) \int_{-1}^0 \left(\sqrt{1 - x^2} - 1 - x \right) dx;$$

$$5) \int_{0,5}^1 \arcsin x dx;$$

$$6) \int_{-2}^4 ||x - 2| - 1| dx.$$

§ 9. Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегрування частинами та замінною змінних у визначеному інтегралі

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Основна теорема інтегрального числення – формула Ньютона-Лейбніца	The basic theorem of integral calculus – the Newton-Leibniz formula
Інтегрування частинами визначеного інтеграла	Integration by parts of a definite integral
Інтегрування заміною змінних визначеного інтеграла	Integration by replacing the variables of a definite integral

1. Сформулювати основну теорему інтегрального числення – формулу Ньютона-Лейбніца.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і $\Phi(x)$ – деяка первісна для $f(x)$ на $[a; b]$, то:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

2. Вивчити правила інтегрування частинами та заміною змінних у визначеному інтегралі та всі зауваження, що стосуються цих правил.

Інтегрування частинами.

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом зі своїми похідними на відрізку $[a; b]$, то:

Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегрування частинами та заміною змінних у визначеному інтегралі

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Заміна змінних у визначеному інтегралі.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, а відрізок $[a; b]$ є множиною значень деякої функції $\varphi(t)$, яка визначена, неперервна і диференційовна на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому $\forall t \in [\alpha; \beta] : a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\beta) = b$, то:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Основні методи обчислення визначених інтегралів узагальнено та подано у вигляді інтелект-карти (ментальної карти) (рис. 9.1).

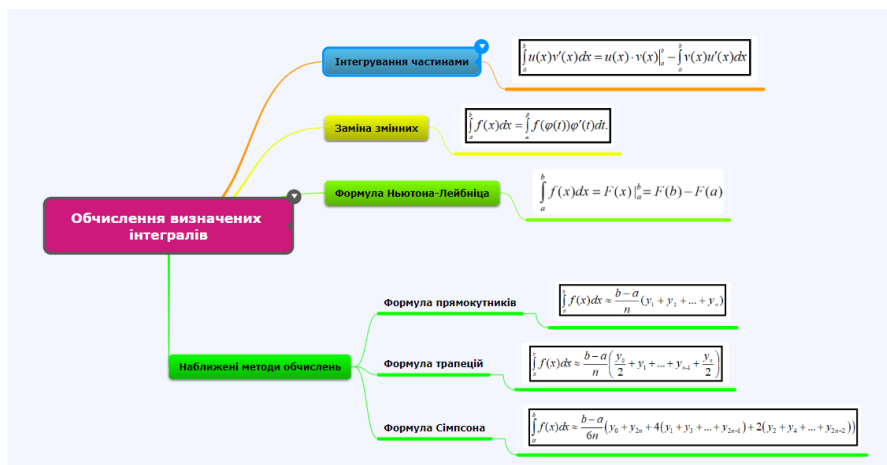


Рис. 9.1

Приклади розв'язування вправ

Задача 9.1. Обчислити інтеграли, користуючись формулою Ньютона-Лейбніца:

$$1) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx;$$

$$2) \int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}};$$

$$4) \int_0^2 |1-5x| dx.$$

Розв'язання.

У завданнях 1)-4) використаємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (9.1)$$

де $F(x)$ – первісна для підінтегральної функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Згідно з цією формулою для обчислення визначеного інтеграла потрібно: 1) знайти деяку первісну функцію $F(x)$ для підінтегральної функції; 2) обчислити її значення у верхній і нижній межах інтегрування та одержані результати відняти.

Звертаємо Вашу увагу, що формула Ньютона-Лейбніца правильна лише тоді, коли для неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ рівність $F'(x) = f(x)$ має місце для всіх $x \in [a; b]$. Наприклад, рівність

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-5)^2} = \left(-\frac{1}{x-5} \right) \Big|_a^b$$

правильна для довільних значень a і b таких, що відрізок $[a; b]$ не містить точки $x = 5$, але якщо $a < 5 < b$, то остання формула не має змісту, оскільки у точці $x = 5$ підінтегральна функція не визначена.

$$1) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx.$$

І спосіб. Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів та сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx = \int_1^2 x^2 dx - 2 \int_1^2 x dx + 3 \int_1^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - 2 \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + 3x \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} - (2^2 - 1^2) + 3(2 - 1) = \frac{7}{3} - 3 + 3 = \frac{7}{3}. \quad \blacksquare$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = x^2 - 2x + 3$;

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = 1$, $b = 2$ (рис. 9.2). $\blacksquare$

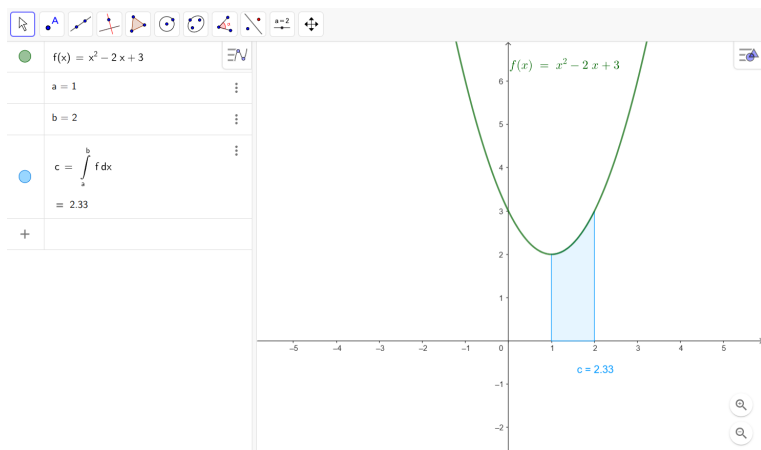


Рис. 9.2

$$2) \int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx.$$

I спосіб. Підінтегральні функції запишемо у вигляді степеневих і використаємо табличні інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 + \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \left(1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{3}{5} \left(1^{\frac{5}{3}} - 0^{\frac{5}{3}} \right) = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{19}{15}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$;

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = 0$, $b = 1$ (рис. 9.3);

3) отримане значення $c = 1,27$ є розв'язком інтеграла. ■

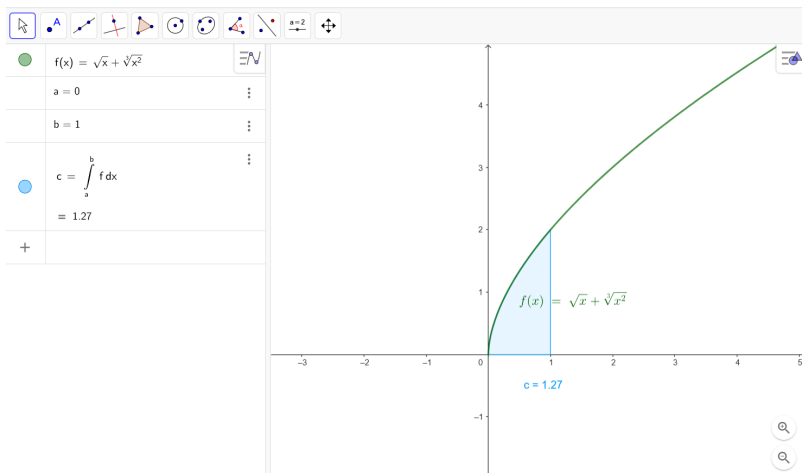


Рис. 9.3

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}.$$

I спосіб. Скористаємося відомою у невизначеному інтегралі формулою для диференціала: $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$, $a \neq 0$, а підінтегральну функцію запишемо у вигляді степеневій:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}} &= -\frac{1}{3} \int_0^1 (4-3x)^{-\frac{1}{2}} d(4-3x) = -\frac{2}{3} \sqrt{4-3x} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{2}{3} (\sqrt{1} - \sqrt{4}) = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-3x}}$;

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = 0$, $b = 1$ (рис. 9.4);

3) отримане значення $c = 0,67$ є розв'язком інтеграла. ■

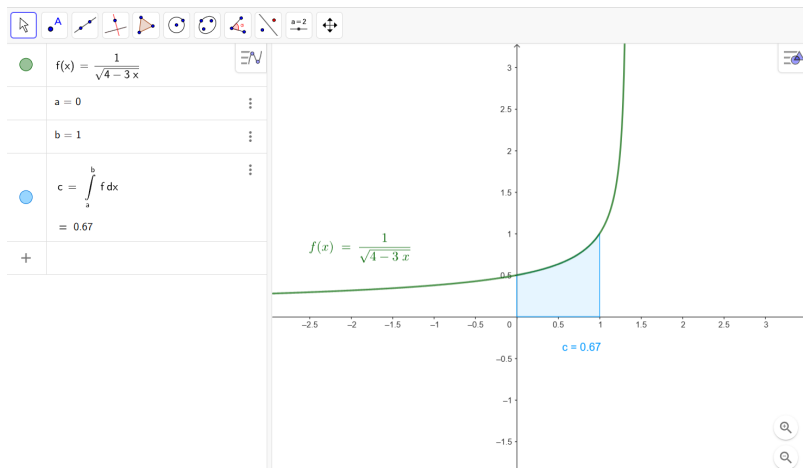


Рис. 9.4

$$4) \int_0^2 |1-5x| dx.$$

І спосіб. Скористаємося означенням модуля для підінтегральної функції:

$$|1-5x| = \begin{cases} 1-5x, & x \leq \frac{1}{5}, \\ 5x-1, & x > \frac{1}{5}, \end{cases}$$

та властивістю адитивності для визначеного інтегралу. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^2 |1-5x| dx &= \int_0^{\frac{1}{5}} (1-5x) dx + \int_{\frac{1}{5}}^2 (5x-1) dx = \frac{1}{5} - 5 \int_0^{\frac{1}{5}} x dx + 5 \int_{\frac{1}{5}}^2 x dx - \int_{\frac{1}{5}}^2 dx = \\ &= \frac{1}{5} - 5 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{5}} + 5 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{5}}^2 - \left(2 - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5} - 5 \frac{1}{25 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4}{2} - \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 25} - \frac{9}{5} = \end{aligned}$$

$$= \frac{10 - 5 + 500 - 5 - 90}{2 \cdot 25} = \frac{410}{50} = \frac{41}{5}. \quad \blacksquare$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

- 1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = |1 - 5x|$;
- 2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = 0$, $b = 2$ (рис. 9.5);
- 3) отримане значення $c = 8,2$ є розв'язком інтеграла. $\blacksquare$

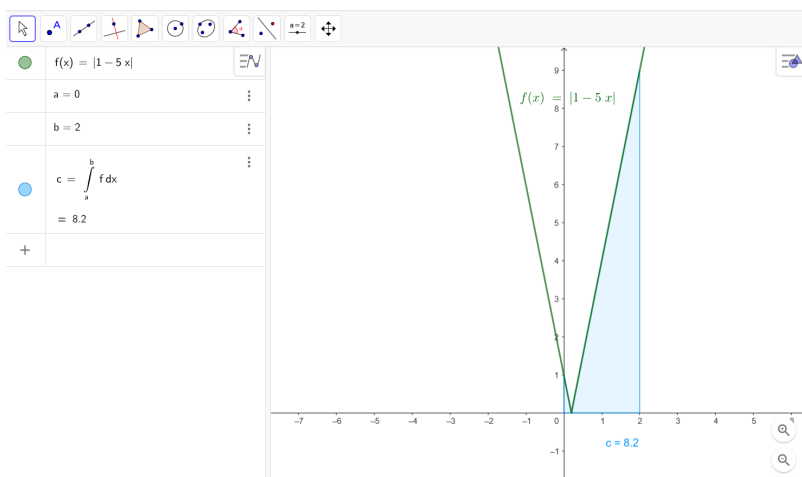


Рис. 9.5

Задача 9.2. Знайти всі значення параметра a , $a > 0$, для яких правильною є нерівність:

$$1) \int_{-a}^a e^x dx > \frac{3}{2};$$

$$2) \int_1^2 (a^2 - (4 - 4a)x + 4x^3) dx \leq 12.$$

Розв'язання.

$$1) \int_{-a}^a e^x dx > \frac{3}{2}.$$

І спосіб. Оскільки $\int_{-a}^a e^x dx = e^x \Big|_{-a}^a = e^a - e^{-a}$, то вихідна

нерівність рівносильна нерівності $e^a - e^{-a} > \frac{3}{2}$, звідки

$\frac{2e^{2a} - 3e^a - 2}{2e^a} > 0$. Вираз $e^a > 0$ для всіх значень a , тому

$2e^{2a} - 3e^a - 2 > 0$, або $e^a > 2$. З останньої нерівності і знаходимо всі значення параметра a , які задовольняють першу нерівність, врахувавши, що показникова функція з основою e зростає: $a > \ln 2$.

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) Створюємо повзунок a , ($a > 0$);

2) у рядок введення записуємо функції: $f(x) = e^x$ та $g(x) = \frac{3}{2}$;

3) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл*[f, a, b], де $a = -a$, $b = a$;

4) у рядок введення записуємо нерівність $b > g(x)$; рухаючи повзунок ми змінюємо параметр a та бачимо розв'язки нерівності.

У випадку коли $a \in (0; 0,6]$ нерівність неправильна (рис. 9.6).

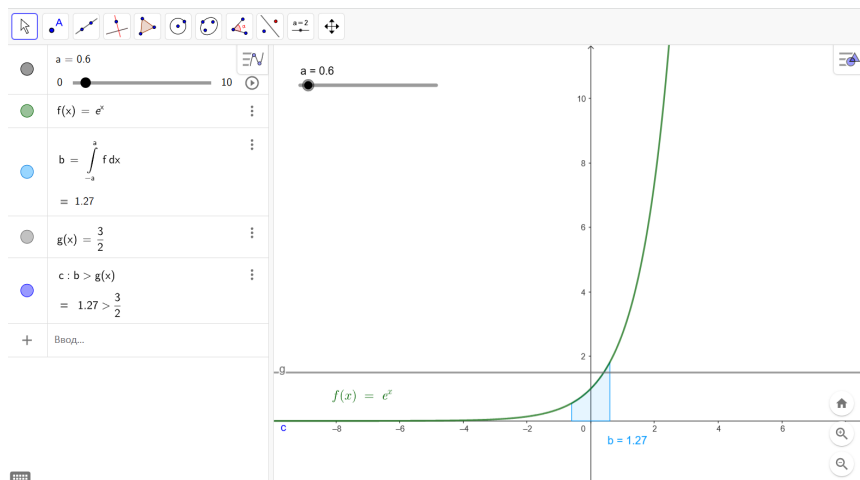


Рис. 9.6

У випадку коли $a \in (0, 6; +\infty)$ нерівність правильна (рис. 9.7).

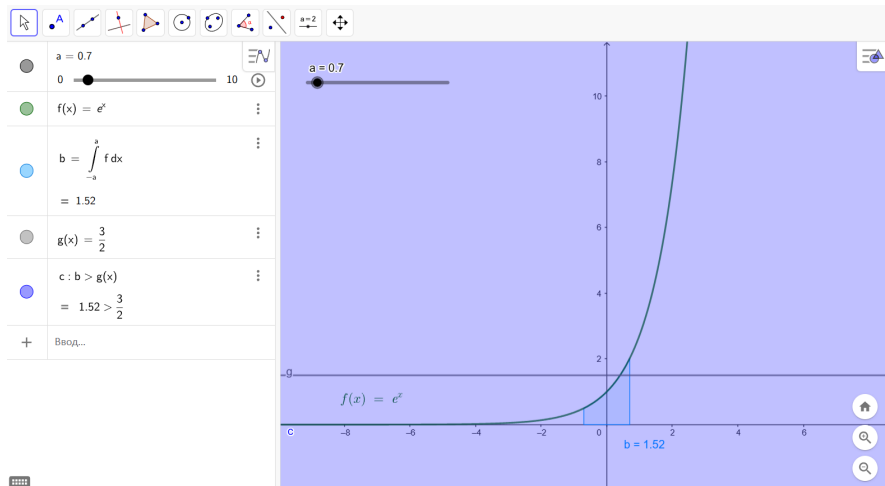


Рис. 9.7

Отже, нерівність буде правильною коли $a \in (0, 6; +\infty)$. ■

$$2) \int_1^2 (a^2 - (4 - 4a)x + 4x^3) dx \leq 12.$$

I спосіб. Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів і сталий множник виносимо за знак інтеграла:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (a^2 - (4 - 4a)x + 4x^3) dx &= a^2 \int_1^2 dx - (4 - 4a) \int_1^2 x dx + 4 \int_1^2 x^3 dx = a^2 - \\ &- (4 - 4a) \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + 4 \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = a^2 - 8 + 8a + 2 - 2a + 15 = a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2. \end{aligned}$$

Таким чином, всі шукані значення параметра a мають задовольняти нерівність $(a + 3)^2 \leq 12$, звідки, використовуючи умову, що $a > 0$, отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ (a+3)^2 \leq 12, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ a+3 \leq 2\sqrt{3}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ a \leq 2\sqrt{3}-3, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$a \in (0; 2\sqrt{3}-3]. \quad \blacksquare$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) Створюємо повзунок a , ($a > 0$) ;

2) у рядок введення записуємо функції:

$$f(x) = a^2 - (4-4a)x + 4x^3 \text{ та } g(x) = 12;$$

3) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a=1$, $b=2$;

4) у рядок введення записуємо нерівність $b \leq g(x)$; рухаючи повзунок, ми змінюємо параметр a та бачимо розв'язки нерівності.

У випадку коли $a \in (0; 0,46]$ наша нерівність правильна (рис. 9.8).

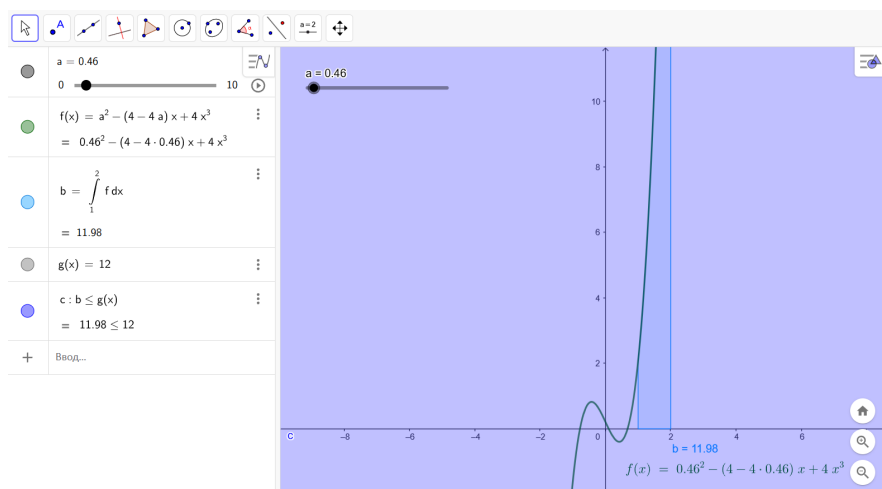


Рис. 9.8

У випадку коли $a \in (0, 46; +\infty)$ нерівність неправильна (рис. 9.9).

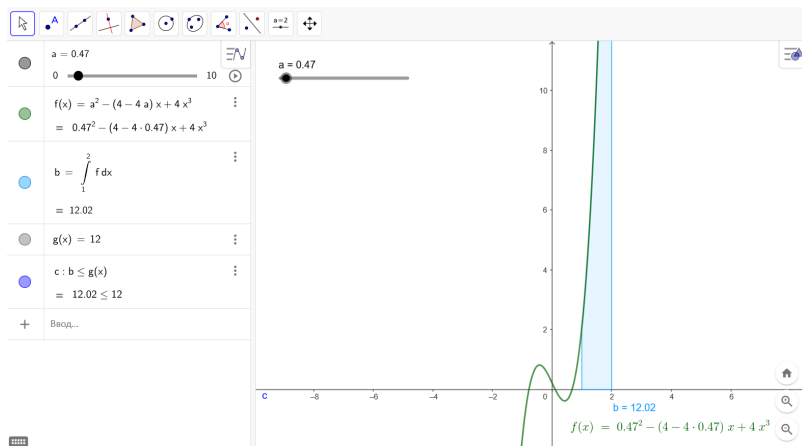


Рис. 9.9

Отже, наша нерівність правильна коли $a \in (0; 46]$. ■

Задача 9.3. Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

$$1) \int_1^e \ln x dx;$$

$$2) \int_0^1 x^3 \arctg x dx.$$

Розв'язання.

$$1) \int_1^e \ln x dx.$$

І спосіб. Для обчислення цього інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами визначеного інтеграла:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

де функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$ разом зі своїми похідними $u'(x)$ та $v'(x)$. Нагадаємо, що типи функцій, які інтегруються частинами, розглянуто у параграфі 3 (Пригадайте!).

У нашому випадку будемо мати:

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = e \ln e - 1 \cdot \ln 1 -$$

$$- \int_1^e dx = e - x \Big|_1^e = 1. \quad \blacksquare$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = \ln x$;

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = 1$, $b = e$ (рис. 9.10);

3) отримане значення $c = 1$ є розв'язком інтеграла. $\blacksquare$

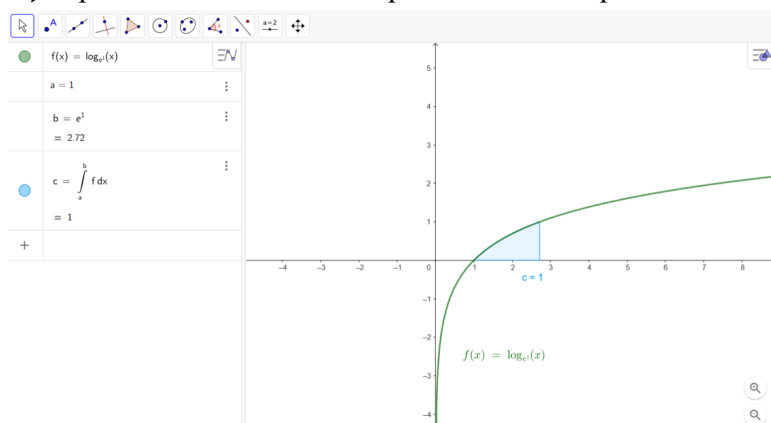


Рис. 9.10

2) $\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx.$

I спосіб.

$$\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = x^3 dx, \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{4}(\operatorname{arctg} 1 - 0) - \frac{1}{4} \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - x \Big|_0^1 + \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 \right) =$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} = \frac{1}{6} \approx 1,1667. \quad \blacksquare$$

II спосіб (за допомогою програми Gran1).

1) В меню «Список об'єктів» встановлюємо тип «Явна функція $y=y(x)$ »;

2) задаємо аналітичний вираз функції «Об'єкт» «Створити» та задаємо функцію $y = x^3 \cdot \operatorname{atg}(x)$;

3) обираємо пункт меню «Графік» «Побудувати»;

4) звертаємося до пункту меню «Операції» «Інтеграл», після чого з'являється вікно, де задаємо межі інтегрування $A=0$, $B=1$ (рис. 9.11);

5) отримане значення $I \approx 0,17$ є розв'язком інтеграла. ■

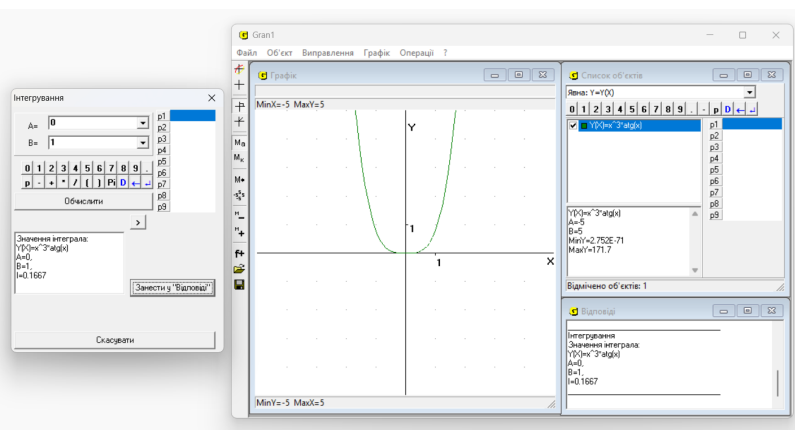


Рис 9.11

III спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$;

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = 0$, $b = 1$ (рис. 9.12);

3) отримане значення $c = 0,17$ є розв'язком інтеграла. ■

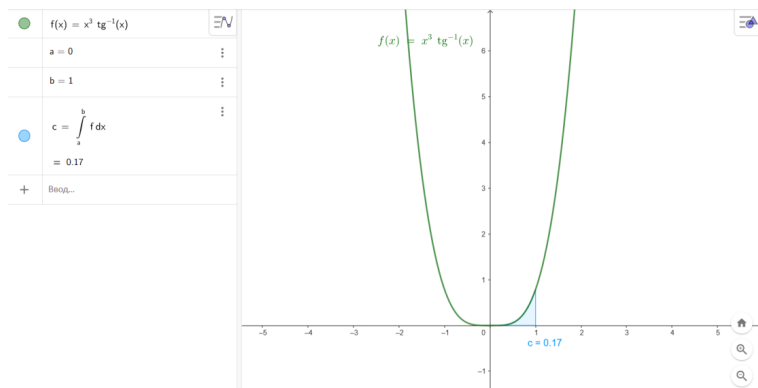


Рис. 9.12

Задача 9.4. Обчислити інтеграли, користуючись правилами заміни змінної:

$$1) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx;$$

$$2) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$$

Розв'язання.

$$1) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

I спосіб. Для обчислення цього інтеграла використаємо теорему про заміну змінної, тобто якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, а відрізок $[a; b]$ є множиною значень деякої функції $\varphi(t)$, яка визначена, неперервна і диференційовна на

відрізку $[\alpha; \beta]$, причому $\forall t \in [\alpha; \beta]: a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\beta) = b$

(якщо функція є монотонною), то: $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Якщо ж функція $x = \varphi(t)$ не є монотонною, то може статися так, що система $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ матиме декілька різних розв'язків. У цьому випадку потрібно взяти будь-який з розв'язків системи, який визначає відрізок $[\alpha; \beta]$, і на якому функція $x = \varphi(t)$ є монотонною.

Важливо відмітити, що заміна змінної у визначеному інтегралі приводить у загальному випадку до інтеграла з новими межами інтегрування. Ці межі знаходяться так: у рівність $x = \varphi(t)$ (9.2) підставляється спочатку нижня межа a заданого інтеграла і розв'язується рівняння $a = \varphi(t)$. Знайдене значення t і буде новою нижньою межею α . Потім для визначення нової верхньої межі у рівність (9.2) підставляється верхня межа b і розв'язується рівняння $b = \varphi(t)$. Знайдене значення $t = \beta$ з цього рівняння буде новою верхньою межею.

Після того, як ми зробили заміну змінної і змінили межі інтегрування, обчислюємо визначений інтеграл, але вже не повертаємося до заміни (як у невизначеному інтегралі), оскільки у цьому немає потреби.

У першому випадку $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$, використаємо заміну змінної

$x = \cos t$, оскільки:

1) функція $x = \varphi(t) = \cos t$ неперервна на $\mathbb{R}$;

2) коли змінна t змінюється на відрізку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, то значення

попередньої змінної $x = \varphi(t)$ пробігає відрізок $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;

3) $\varphi'(t) = -\sin t$ - неперервна на відрізку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$;

4) $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, таким чином, виконуються всі

умови теореми про заміну змінної.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \left. \begin{array}{l} x = \cos t, \quad dx = -\sin t dt \\ \text{межі інтегрування:} \\ \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} (-\sin t) dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t) dt = t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \sin t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) +$$

$$+ \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacksquare$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = 0$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 9.13);

3) отримане значення $c = 1,08$ є розв'язком інтеграла. $\blacksquare$

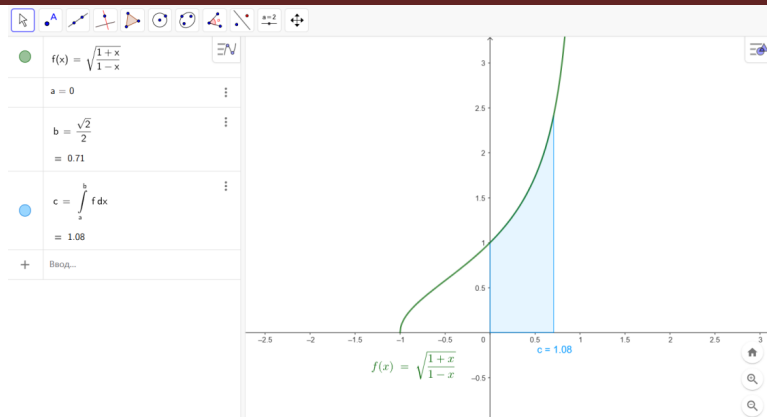


Рис. 9.13

$$2) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$$

І спосіб. Використаємо підстановку $\sqrt{e^x - 1} = t$, звідси $x_1 = 0$, $t_1 = 0$, при $x_2 = \ln 5$, $t_2 = 2$. Тоді, коли x змінюється на відріжку $[0; \ln 5]$, нова змінна t приймає всі значення з відрізка $[0; 2]$. Функція $x = \ln(1 + t^2)$, обернена до функції $t = \sqrt{e^x - 1}$, є монотонною, неперервною разом з похідною $x'_t = \frac{2t}{1+t^2}$ на цьому відріжку. Тому використаємо правило підстановки.

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{e^x - 1} = t \Rightarrow e^x = t^2 + 1 \Rightarrow \\ x = \ln(t^2 + 1), \quad dx = \frac{2t dt}{t^2 + 1} \\ \text{межі інтегрування:} \\ x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{e^0 - 1} = 0, \\ x = \ln 5 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt = 2 \left(t - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_0^2 = 4 - \pi. \quad \blacksquare$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}$;

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = 0$, $b = \ln 5$ (рис. 9.14);

3) отримане значення $c = 0,86$ є розв'язком інтеграла. $\blacksquare$

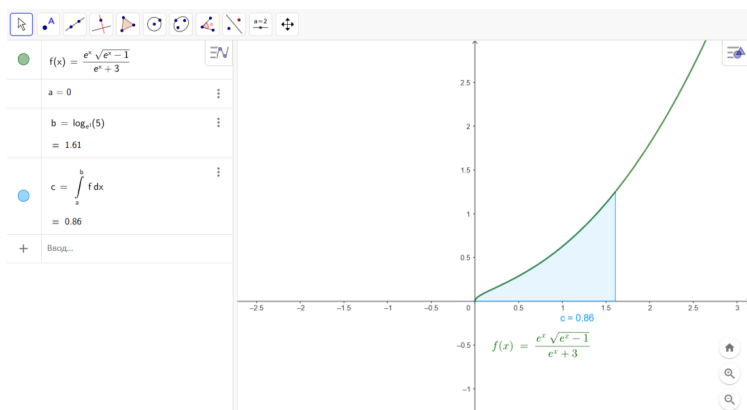


Рис. 9.14

Задача 9.5. Обчислити $I = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

Розв'язання.

I спосіб. Виконаємо заміну змінної: $x = \sin t$, тоді $dx = \cos t dt$.

Нові межі інтегрування знаходимо з системи:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{2}, \\ \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \beta = (-1)^m \frac{\pi}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Візьмемо, наприклад, пару чисел $(\alpha; \beta) = \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$. На відрізку

$\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ функція $x = \sin t$ є монотонною. Отже, нові межі

інтегрування рівні $\alpha = \frac{\pi}{6}$ і $\beta = \frac{\pi}{3}$, а визначений інтеграл:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\sin t \sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\sin t \cos t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln \frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

Можна взяти іншу пару чисел $(\alpha; \beta)$, наприклад $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$.

Тоді і в цьому випадку функція $x = \sin t$ є зростаючою, однак $\cos t < 0$, тому

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = - \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\sin t \cos t} = - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| \Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} = \ln \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

На відрізку $[\alpha; \beta] = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$ функція $x = \sin t$ не є монотонною.

Тому числа $\alpha = \frac{\pi}{6}$ і $\beta = \frac{2\pi}{3}$ не можуть бути новими межами інтегрування. ■

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$;

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 9.15);

3) отримане значення $c = 0,77$ є розв'язком інтеграла. ■

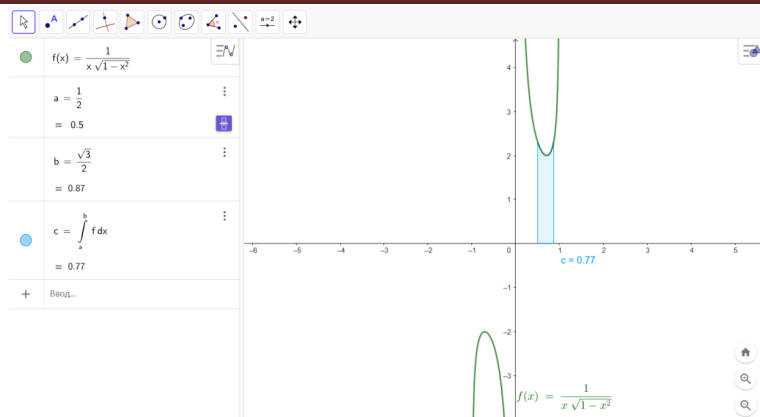


Рис. 9.15

Задача 9.6. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4} dx$.

Розв'язання.

I спосіб.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4} dx &= \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} - \text{монотонна на } \left[\frac{1}{3}; 1\right], dx = -\frac{dt}{t^2} \\ \text{межі інтегрування:} \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 3, \quad 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_3^1 t^4 \sqrt[3]{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}} \cdot \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \\ &= \int_1^3 t^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{t^2-1}{t^3}} dt = \int_1^3 t \sqrt[3]{t^2-1} dt = \left. \begin{array}{l} u = t^2-1, du = 2t dt \\ t=1 \Rightarrow u=0 \\ t=3 \Rightarrow u=8 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^8 \sqrt[3]{u} du = \\ &= \frac{3u^{\frac{4}{3}}}{8} \Big|_0^8 = \frac{3}{8} \left(8^{\frac{4}{3}} - 0^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{8} (16 - 0) = 6. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}$;

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо $\text{Інтеграл}[f, a, b]$, де $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$ (рис. 9.16);

3) отримане значення $c = 6$ є розв'язком інтеграла. ■

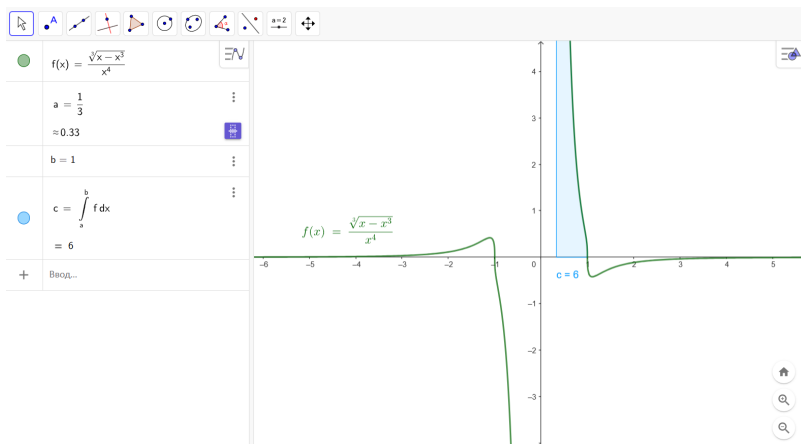


Рис. 9.16

Задача 9.7. Довести, що $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$.

Отриманий результат застосуйте до інтегралу $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ (*).

Доведення.

Використаємо підстановку:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \left. \begin{array}{l} x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt \\ \text{межі інтегрування:} \\ x = 0 \Rightarrow t = \pi \\ x = \pi \Rightarrow \pi = \pi - t \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = - \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \pi f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt = |t = x| = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx.$$

Отже, випишемо початок і кінець останнього перетворення:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx,$$

звідки:

$$\boxed{\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx,}$$

що й треба було довести.

I спосіб. Використаємо останню рівність до обчислення інтеграла (*):

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \int_0^{\pi} x \cdot \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx = \left| f(t) = \frac{t}{2 - t^2} \right| = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{-d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos x) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2} (\operatorname{arctg}(\cos \pi) - \operatorname{arctg}(\cos 0)) = \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}$;

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = 0$, $b = \pi$ (рис. 9.17);

3) отримане значення $c = 2,47$ є розв'язком інтеграла. ■

Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегрування частинами та заміною змінних у визначеному інтегралі

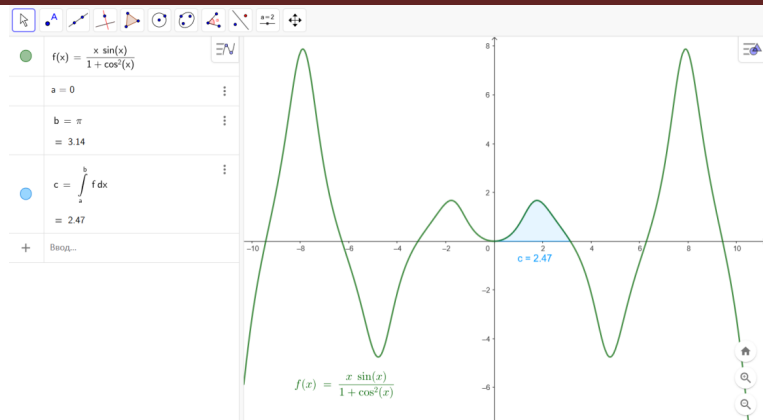


Рис. 9.17

Задача 9.8. Довести, що $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$.

Доведення.

Виконаємо підстановку в правому інтегралі $x = \frac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$

. При $x = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$ при $x = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$. Тоді:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx,$$

що й потрібно було довести. ■

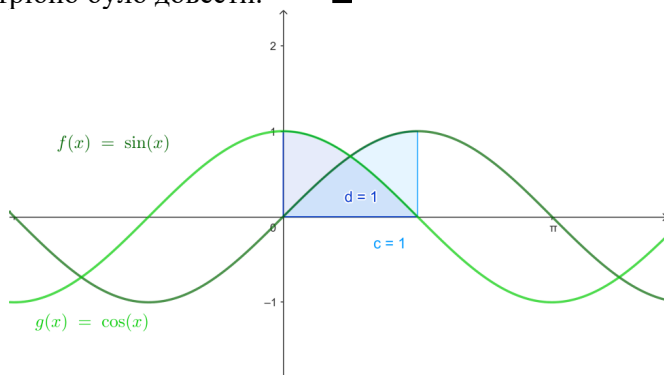


Рис. 9.18

Зауваження. При інтегруванні можна використовувати послідовно метод заміни змінної і метод інтегрування частинами.

Задача 9.9. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx$.

Розв'язання.

I спосіб.

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = \left. \begin{array}{l} u = t, \quad du = dt, \\ dv = \sin t dt, \\ v = -\cos t \end{array} \right| =$$

$$= -2t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = -2 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2. \quad \blacksquare$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

- 1) У рядок введення записуємо функцію $f(x) = \sin \sqrt{x}$;
- 2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо Інтеграл $[f, a, b]$, де $a = 0$, $b = \frac{\pi^2}{4}$ (рис. 9.19);

3) отримане значення $c = 2$ є розв'язком інтеграла. $\blacksquare$

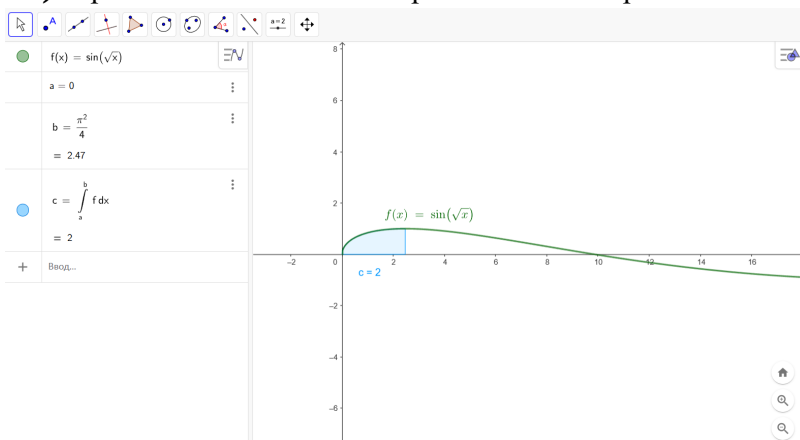


Рис. 9.19

За допомогою визначених інтегралів можна знаходити
границі багатьох числових послідовностей. Розглянемо декілька
задач.

Задача 9.10. З допомогою визначених інтегралів знайти
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, якщо:

1) $S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2};$

2) $S_n = \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right);$

3) $S_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$

Розв'язання.

1) Розглянемо функцію $f(x) = x$ на відрізку $[0;1]$. Розіб'ємо
цей відрізок на n рівних частин, довжина кожного елементарного
відрізка дорівнює $\Delta x_k = \frac{1}{n}$, а точки поділу: $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n},$
 $\dots, x_n = 1$. Інтегральна сума в цьому випадку дорівнює:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = |\xi_k = x_k| = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}.$$

Тепер обчислимо її границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

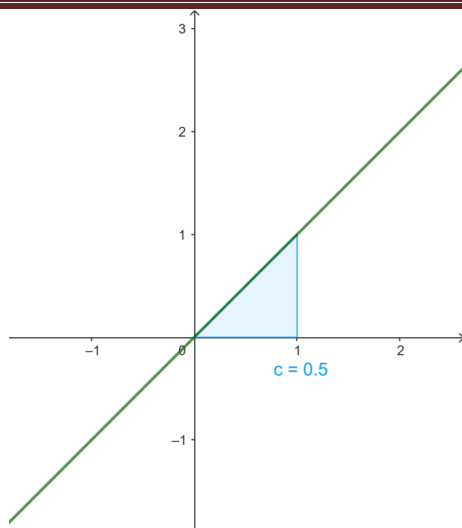


Рис. 9.20

2) Аналогічно до попереднього розглянемо функцію $f(x) = \sin \pi x$ на відрізку $[0; 1]$. Виконавши всі дії попереднього пункту, одержимо

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi k}{n} = \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}. \quad \blacksquare$$

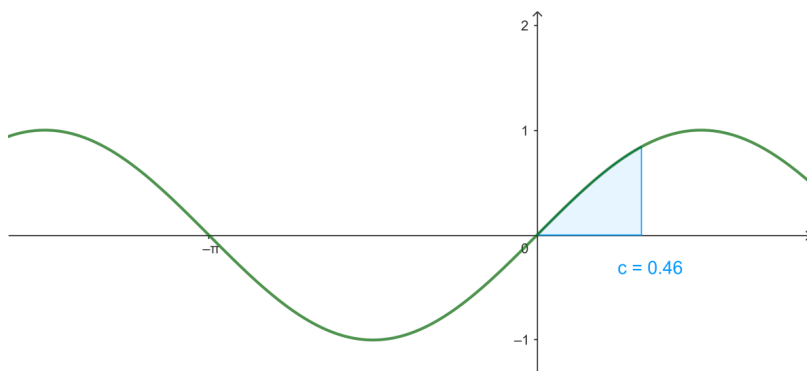


Рис. 9.21

3) Ця задача дещо складніша, оскільки потрібно подати функцію $f(x)$ у нестандартному вигляді. З цією метою здійснимо деякі перетворення в сумі S_n :

$$S_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{\frac{\ln \sqrt[n]{n!}}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln n! - \ln n} = e^{\frac{1}{n} \ln n! - \frac{1}{n} \ln n^n} = e^{\frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n}} = e^{\frac{1}{n} \ln \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}} = e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}};$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}}$. Для суми, яка стоїть у правій частині останньої рівності, беремо функцію $f(x) = \ln x$ на відрізку $[0;1]$. Оскільки сама функція неінтегровна на відрізку $[0;1]$, але інтегровна на довільному відрізку $[\varepsilon;1]$, $\varepsilon > 0$, то виберемо довільну послідовність (ε_n) , збіжну до точки 0 і визначимо:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_n}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} (x \ln x - 1) \Big|_{\varepsilon_n}^1 = -1 + \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} (\varepsilon_n - \varepsilon_n \ln \varepsilon_n) = -1,$$

оскільки за другим правилом Лопіталя границя:

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \varepsilon_n \ln \varepsilon_n = (0 \cdot \infty) = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon_n}{\frac{1}{\varepsilon_n}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_n}{-\frac{1}{\varepsilon_n^2}} = -\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \varepsilon_n = 0.$$

Тому остаточно отримаємо такий результат: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e^{-1} = \frac{1}{e}$. ■

Завдання для самостійного розв'язування

№1. Обчислити інтеграли, користуючись формулою Ньютона-Лейбніца:

$$1) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx;$$

$$2) \int_{-2}^0 (2x + 5) dx;$$

$$3) \int_{-3}^4 \left(5 - \frac{x}{3}\right) dx;$$

$$4) \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{u^7}{2} - \frac{1}{u^5}\right) du;$$

$$5) \int_{-3}^{-1} \frac{y^5 - 2y}{y^3} dy;$$

$$6) \int_0^1 \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x^2+1)} dx;$$

$$7) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^7 - 2x^5 + 3x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx;$$

$$8) \int_1^2 \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2} dx;$$

$$9) \int_{-2}^{-1} \frac{x^4 - x^2 + 5}{x^2} dx;$$

$$10) \int_1^{32} x^{-\frac{6}{5}} dx.$$

✎2. Обчислити інтеграли, користуючись формулою Ньютона-Лейбніца:

$$1) \int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx;$$

$$2) \int_1^4 (2\sqrt{x} - x)^2 dx;$$

$$3) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2 + \sqrt{t}}{t^2} dt;$$

$$4) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$5) \int_0^1 \frac{x^5}{x^{12} + 1} dx;$$

$$6) \int_1^2 |4x - 1| dx;$$

✎3. Обчислити інтеграли, користуючись формулою Ньютона-Лейбніца:

$$1) \int_1^2 \frac{e^x - x^3}{x^3 e^x} dx;$$

$$2) \int_1^2 \frac{e^x + x^3}{x^3 e^x} dx;$$

$$3) \int_2^4 x^{\pi-1} dx;$$

$$4) \int_{-1}^0 \pi^{x-1} dx;$$

$$5) \int_0^{\pi} (1 + \cos x) dx;$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \sec u \operatorname{tg} u du;$$

$$7) \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sec x + \operatorname{tg} x)^2 dx;$$

$$8) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt.$$

4. Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

$$1) \int_0^1 \arctg x dx;$$

$$2) \int_1^2 x^2 \ln x dx;$$

$$3) \int_0^1 \ln(1+x) dx;$$

$$4) \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx;$$

$$5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx;$$

$$6) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^2} dx;$$

$$7) \int_0^{0,125} (32x+4)e^{8x} dx;$$

$$8) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (3x+4) \cos 2x dx.$$

5. Обчислити інтеграли, користуючись правилом заміни змінної:

$$1) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}};$$

$$2) \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$$

$$3) \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}};$$

$$4) \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} dx}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}};$$

$$5) \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9} dx}{x^4};$$

$$6) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x};$$

$$8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x};$$

$$9) \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx;$$

$$10) \int_0^2 \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx.$$

✎6. Пояснити, чому формальна заміна змінної приводить до неправильного результату:

$$1) \int_{-1}^1 dx, \quad t = x^{\frac{2}{3}};$$

$$2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad x = \frac{1}{t};$$

$$3) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

✎7. Довести, що якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізьку інтегрування, то:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$2) \int_{-1}^1 \sin x f(\cos x) dx = 0;$$

$$3) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx;$$

$$4) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(1+x) dx;$$

$$5) \int_0^1 x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x f(x) dx;$$

$$6) \int_{-1}^1 \cos x f(x^2) dx = 2 \int_0^1 \cos x f(x^2) dx.$$

8. Довести, що числова послідовність (S_n) має границю, і знайти цю границю, якщо:

$$1) S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n};$$

$$2) S_n = \frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \dots + \frac{(4n-1)^3}{n^4};$$

$$3) S_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}};$$

$$4) S_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4n}} + \dots + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi n}{4n}} \right);$$

$$5) S_n = \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}};$$

$$6) S_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}};$$

$$7) S_n = n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right);$$

$$8) S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

§ 10. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Основні властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Інтеграл зі змінною верхньою (нижньою) межею інтегрування	Integral with a variable upper (lower) limit of integration
Основні властивості визначеного інтеграла	Basic properties of a definite integral
Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів	The integral of a sum is equal to the sum of integrals
Сталий множник можна виносити за знак інтеграла	The constant factor can be taken out of the sign of the integral
Адитивна властивість інтеграла	The additive property of the integral
Теорема про середнє	Theorems about the average

1. Сформулювати означення інтеграла із змінною верхньою межею, змінною нижньою межею, перерахувати їх властивості.

Функцію $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ називають **інтегралом із змінною верхньою межею** для інтегровної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$.

Аналогічно функцію $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ називають **інтегралом із**

змінною нижньою межею для інтегровної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$.

Основні властивості інтеграла зі змінною верхньою (нижньою) межею.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$, неперервна в точці $x \in (a, b)$, то функція $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ диференційовна в точці x і $F'(x) = f(x)$ або

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad (10.1)$$

(значить, функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $(a; b)$).

Теорема 2. Якщо виконуються умови теореми 1, то функція $G(x) = \int_x^b f(t) dt$ неперервна на $[a, b]$, диференційовна в точці $x \in (a; b)$ і:

$$G'(x) = -f(x) \Leftrightarrow \left(\int_x^b f(t) dt \right)' \Big|_{x=x_0} = -f(x). \quad (10.2)$$

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, функції $\varphi(u)$ і $\psi(u)$ приймають значення з $[a, b]$ і диференційовні на $[a, b]$, то:

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x). \quad (10.3)$$

2. Сформулювати основні властивості визначеного інтеграла.

Основні властивості визначеного інтеграла.

1. Якщо функція стала на відрізку, то:

$$\int_a^b C dx = C(b-a).$$

2. Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

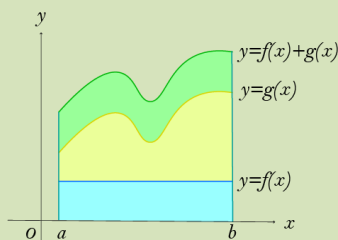


Рис. 10.1

3. Сталій множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx, C \in \mathbb{R}.$$

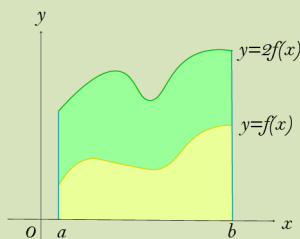


Рис. 10.2

4. Розглянемо підінтегральну функцію $f(x)$ на відрізку $[-a; a]$, симетричному відносно початку координат. Якщо:

1) $f(x)$ – непарна, тобто $f(-x) = -f(x)$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

2) $f(x)$ – парна, тобто $f(-x) = f(x)$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

5. Нехай $f(x)$ – періодична функція на множині дійсних чисел з періодом T : $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, тоді $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

3. Сформулювати властивості визначеного інтеграла, пов'язані з нерівностями.

Властивості визначеного інтеграла, пов'язані з нерівностями.

1. Якщо $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2. Якщо $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

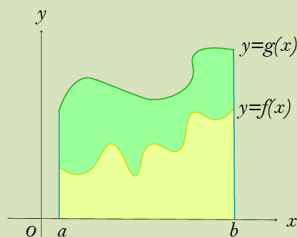


Рис. 10.3

3. Модуль інтеграла не перевищує інтеграла модуля:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

4. Сформулювати властивості адитивності та теореми про середнє для визначеного інтеграла.

Адитивна властивість. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізках $[a, c]$ і $[c, b]$, то вона інтегровна і на відрізку $[a, b]$, причому має місце рівність $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, і навпаки.

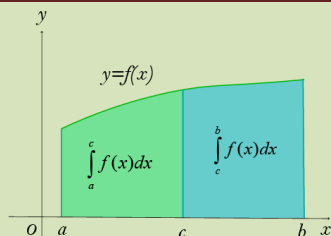


Рис. 10.4

Теорема про середнє. Якщо $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, тобто між числами m і M існує число μ таке, що $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. Якщо ж підінтегральна функція $f(x)$ ще й неперервна на відрізку $[a, b]$, то існує така точка $\xi \in (a, b)$, що $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. Число $f(\xi)$ називають середнім значенням функції на відрізку.

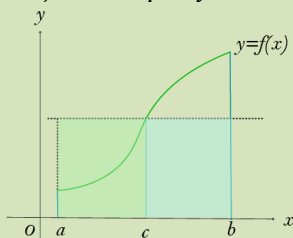


Рис. 10.5

Узагальнена теорема про середнє значення. Якщо $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$, функція $g(x)$ не змінює знак на $[a, b]$: $g(x) \geq 0$ (або $g(x) \leq 0$), тоді існує таке число μ , що $m \leq \mu \leq M$ і $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$. Якщо ж функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то існує точка $\xi \in [a, b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Приклади розв'язування вправ

Розглянемо спочатку задачі на використання інтеграла із змінною верхньою (нижньою) межею інтегрування.

Задача 10.1. Знайти похідну функції $F(x)$, якщо:

1) $F(x) = \int_1^x \ln t dt, \quad x > 0;$

2) $F(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt;$

3) $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t} dt$ на $[0;1];$

4) $F(x) = \int_{\cos x}^{\pi} (t^2 + t|t|) dt$ на $[0;\pi].$

Розв'язання.

1) $F(x) = \int_1^x \ln t dt, \quad x > 0.$

Функція $f(x) = \ln x$ задовольняє всі умови теореми 1, тому

$$F'(x) = \left(\int_1^x \ln t dt \right)' = \ln x, \quad x > 0. \quad \blacksquare$$

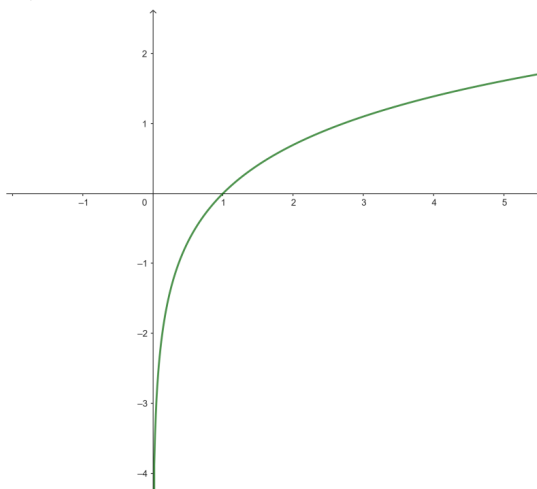


Рис. 10.6

$$2) F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt.$$

Функція $f(x) = \cos x^2$ задовольняє всі умови теореми 3, тому

$$F'(x) = \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt \right)' = \cos(\sqrt{x})^2 \cdot (\sqrt{x})' - \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2}. \quad \blacksquare$$

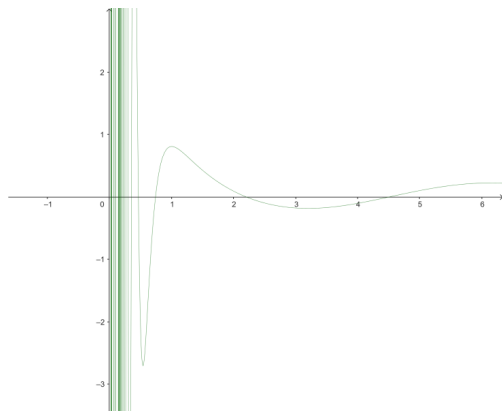


Рис. 10.7

$$3) F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t} dt \text{ на } [0;1].$$

Аналогічно до прикладу 1) маємо:

$$F'(x) = \left(\int_0^{x^2} e^{-t} dt \right)' = 2xe^{-x^2}. \quad \blacksquare$$

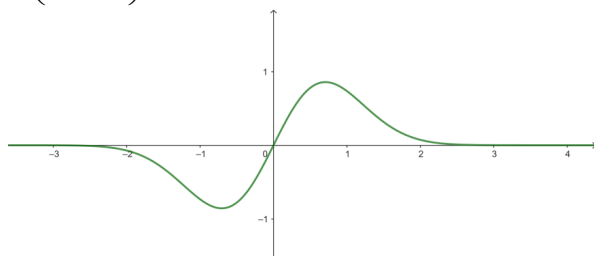


Рис. 10.8

$$4) F(x) = \int_{\cos x}^{\pi} (t^2 + t|t|) dt \text{ на } [0; \pi].$$

Функція $f(x) = x^2 + x|x|$ задовольняє всі умови теореми 2 на відрізку $[0; \pi]$, тому:

$$F'(x) = \left(\int_{\cos x}^{\pi} (t^2 + t|t|) dt \right)' = -(\cos^2 x + \cos x |\cos x|)(-\sin x) =$$

$$= \begin{cases} 2\cos^2 x \sin x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{якщо } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases} \quad \blacksquare$$

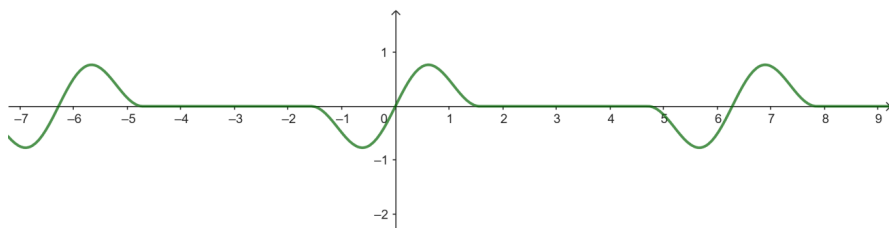


Рис. 10.9

Задача 10.2. Знайти найменше і найбільше значення функції $F(x)$, якщо:

$$1) F(x) = \int_0^{e^x} \frac{t^4 - 16}{t + 1} dt, \quad x > 0; \quad 2) F(x) = \int_{13}^{x^4 - 2x^2 + 5} e^t dt, \quad [-2; 2].$$

Розв'язання.

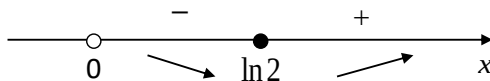
У випадку 1) шукаємо локальний екстремум, а у випадку 2) – глобальний екстремум.

$$1) F(x) = \int_0^{e^x} \frac{t^4 - 16}{t + 1} dt, \quad x > 0.$$

Функція $f(x) = \frac{x^4 - 16}{x + 1}$ неперервна для всіх $x > 0$, отже функція $F(x)$ диференційовна, тому знайдемо її похідну і стаціонарні точки:

$$F'(x) = \left(\int_0^{e^x} \frac{t^4 - 16}{t + 1} dt \right)' = \frac{(e^{4x} - 16)e^x}{e^x + 1},$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^{4x} - 16)e^x}{e^x + 1} = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2 > 0.$$



т. min
Рис. 10.10

Таким чином,

$$F_{\min} = F(\ln 2) = \int_0^{\ln 2} \frac{t^4 - 16}{t + 1} dt = \int_0^2 \left(t^3 - t^2 + t - 1 - \frac{15}{t + 1} \right) dt = \frac{4}{3} - 15 \ln 3. \quad \blacksquare$$

$$2) F(x) = \int_{13}^{x^4 - 2x^2 + 5} e^t dt, [-2; 2].$$

Функція $\psi(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ визначена і диференційовна на відрізку $[-2; 2]$, причому множиною її значень є відрізок $[4; 13]$.

Підінтегральна функція $f(x) = e^x$ неперервна на відрізку $[4; 13]$.

Отже, функція $\Phi(u) = \int_{13}^u e^t dt = - \int_u^{13} e^t dt$ диференційовна на цьому

відрізку.

$$\text{Значить, складена функція } F(x) = \Phi(x^4 - 2x^2 + 5) = \int_{13}^{x^4 - 2x^2 + 5} e^t dt$$

визначена і диференційовна на відрізку $[-2; 2]$. Для знаходження її найменшого і найбільшого значення на цьому відрізку достатньо знайти критичні точки з відрізка $[-2; 2]$ та значення функції $F(x)$ у цих точках і на кінцях відрізка:

$$F'(x) = e^{x^4 - 2x^2 + 5} (4x^3 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1,$$

$$F(-1) = F(1) = \int_{13}^{1-2+5} e^t dt = e^4 - e^{13}, \quad F(0) = \int_{13}^{0-0+5} e^t dt = e^5 - e^{13},$$

$$F(-1) = F(1) = \int_{13}^{1-2+5} e^t dt = e^4 - e^{13},$$

$$F(-2) = F(2) = \int_{13}^{16-8+5} e^t dt = 0.$$

З одержаних значень вибираємо найменше і найбільше:

$$\min_{[-2;2]} F(x) = F(-1) = F(1) = e^4 - e^{13}, \quad \max_{[-2;2]} F(x) = F(-2) = F(2) = 0. \quad \blacksquare$$

Наступний цикл задач передбачає застосування властивостей визначеного інтеграла, частину з яких ми вже використовували, зокрема (в усіх властивостях передбачається, що підінтегральні функції інтегровні на відрізку).

Задача 10.3. Обчислити інтеграл:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^{12} \sin 4x + 2015 \cos \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^{15} \frac{x}{2} \right) dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^{12} \sin 4x + 2015 \cos \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^{15} \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{12} \sin 4x dx + 2015 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{15} \frac{x}{2} dx. \end{aligned}$$

Функції $x^{12} \sin 4x$ і $\operatorname{tg}^{15} \frac{x}{2}$ є непарними функціями, функція

$\cos \frac{x}{2}$ є парною і проміжок інтегрування симетричний відносно початку координат. Тому згідно з властивістю 4 визначеного інтеграла будемо мати:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{12} \sin 4x dx = 0, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{15} \frac{x}{2} dx = 0, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx.$$

Звідси вихідний інтеграл дорівнює:

$$I = 4030 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = 4030 \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4030\sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

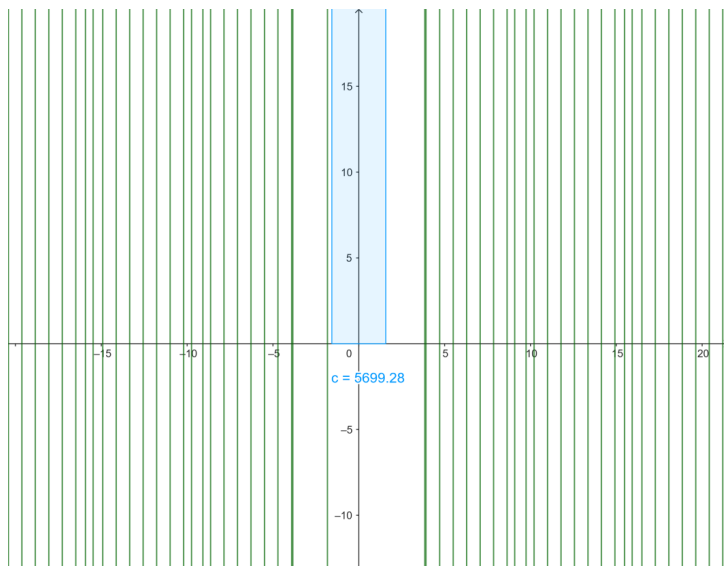


Рис. 10.11

Задача 10.4. Порівняти інтеграли $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ і $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x dx$.

Розв'язання.

Оскільки на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функції $\cos^2 x$ і $\cos^{10} x$ неперервні

(а, отже інтегровні), а на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується строга нерівність $\cos^2 x > \cos^{10} x$, то за властивістю 2 визначеного інтеграла, пов'язаною з нерівностями, будемо мати:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x dx. \quad \blacksquare$$

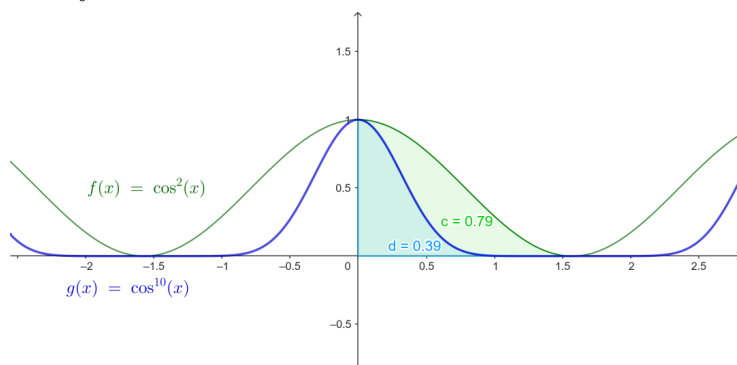


Рис. 10.12

Задача 10.5. Довести нерівності:

$$1) \frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx < \frac{5\pi}{8};$$

$$2) \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x}} < \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

Доведення.

1) використаємо нерівність $1 < \sqrt{1+t} < 1 + \frac{1}{2}t$, яка правильна

для всіх $t > 0$. У нашому випадку $t = \cos^2 x > 0$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тому:

$$1 < \sqrt{1 + \cos^2 x} < 1 + \frac{1}{2} \cos^2 x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

За теоремою про середнє одержимо, що:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 x\right) dx.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 x\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{5\pi}{8} + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x d(2x) = \frac{5\pi}{8} + \frac{1}{8} (\sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{8}, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. ■

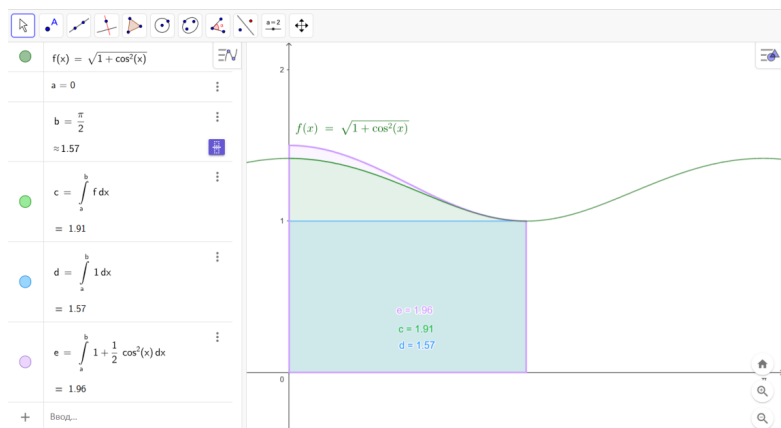


Рис. 10.13

2) функція $g(x) = \sqrt{1+x}$ зростає на області визначення ($x > -1$), отже, з того, що $0 < x < 1$, будемо мати нерівність:

$$\sqrt{1+0} < \sqrt{1+x} < \sqrt{1+1},$$

$$1 < \sqrt{1+x} < \sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{1+x}} < 1 \cdot x^n > 0,$$

$$\frac{x^n}{\sqrt{2}} < \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} < x^n.$$

За теоремою про середнє будемо мати оцінку:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^n dx < \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx < \int_0^1 x^n dx.$$

Оскільки $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$, то остання нерівність буде

мати вигляд: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x}} < \frac{1}{n+1}$, що й треба було довести. ■

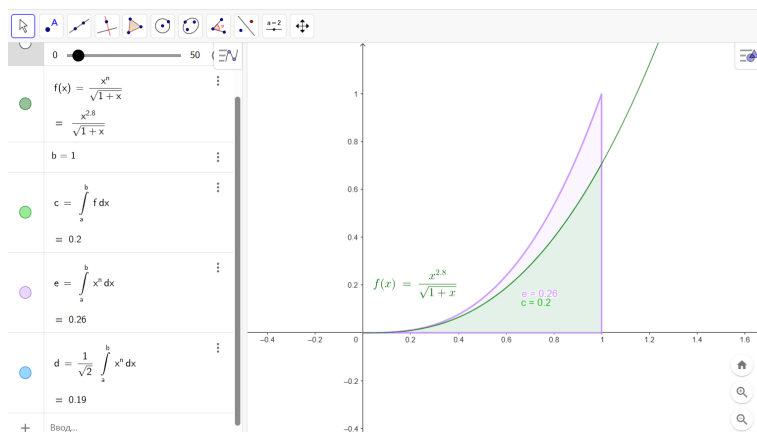


Рис. 10.14

Задача 10.6. Оцінити інтеграли:

$$1) I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5 \cos x};$$

$$2) I = \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$$

Розв'язання.

1) I спосіб. За властивістю адитивності вихідний інтеграл запишемо через два інтеграли:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+0.5 \cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5 \cos x} = I_1 + I_2.$$

Обчислимо спочатку другий інтеграл, використовуючи заміну змінної:

$$I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = 2\pi - x, dx = -dt \\ t_{\pi} = 2\pi - \pi = \pi, \\ t_{2\pi} = 2\pi - 2\pi = 0 \end{array} \right| = - \int_{\pi}^0 \frac{dt}{1+0,5\cos(2\pi - t)} =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+0,5\cos t} = I_1. \text{ Таким чином, } I = 2I_1 = 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x}. \text{ Оцінимо}$$

підінтегральну функцію на відрізку $[0; \pi]$:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \pi &\Rightarrow \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \mid \cdot 0,5 > 0 &\Rightarrow \\ -0,5 \leq 0,5\cos x \leq 0,5 \mid +1 &\Rightarrow \\ 0,5 \leq 1+0,5\cos x \leq 1,5 &\Rightarrow \\ \frac{2}{3} \leq \frac{1}{1+0,5\cos x} \leq 2. & (*) \end{aligned}$$

До нерівності $(*)$ застосуємо теорему про середнє:

$$\frac{4}{3}(\pi - 0) \leq 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x} \leq 4(\pi - 0), \text{ або } \frac{4\pi}{3} \leq I \leq 4\pi. \quad \blacksquare$$

II спосіб. Підінтегральна функція $f(x)$ неперервна на $[0; \pi]$, тоді за теоремою про середнє для неперервної функції будемо мати:

$$I = 2f(\xi)(\pi - 0) = \frac{2\pi}{1+0,5\cos\xi}, \quad \xi \in [0; \pi].$$

До останнього виразу використаємо нерівність $(*)$, одержимо потрібний результат. $\blacksquare$

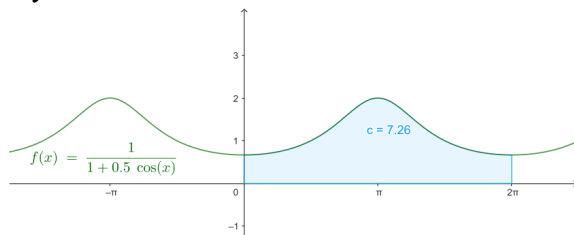


Рис. 10.15

2) З того, що функції $f(x) = e^{-x}$ і $g(x) = \frac{1}{x+100}$ неперервні

на відрізку $[0;100]$, то до I можна використати другу теорему про середнє. Будемо мати:

$$I = \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx = \frac{1}{\xi+100} \int_0^{100} e^{-x} dx = -\frac{1}{\xi+100} e^{-x} \Big|_0^{100} = \frac{1}{\xi+100} \cdot (1 - e^{-100}),$$

$0 < \xi < 100$. Для оцінки першого множника використаємо властивість монотонності функції $g(x)$ на заданому відрізку:

$$0 \leq \xi \leq 100 \mid +100$$

$$100 \leq \xi + 100 \leq 200,$$

$$\frac{1}{200} \leq \frac{1}{\xi+100} \leq \frac{1}{100} \mid \cdot (1 - e^{-100}) > 0$$

$$0,005 \approx \frac{1 - e^{-100}}{200} \leq I \leq \frac{1 - e^{-100}}{100} \approx 0,01. \quad \blacksquare$$

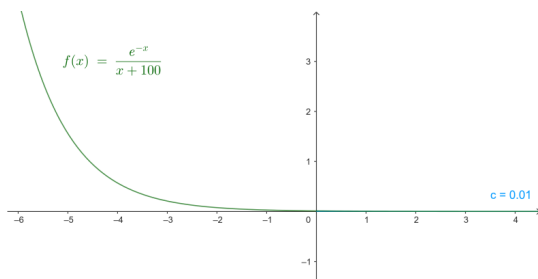


Рис. 10.16

Задача 10.7. Знайти середні значення функцій у вказаних проміжках:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $[0;100]$;

2) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x$, $[0;2\pi]$.

Розв'язання.

Середнє значення функції будемо знаходити за формулою:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

$$1) f(\xi) = \frac{1}{100-0} \int_0^{100} \sqrt{x} dx = \frac{2}{300} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{100} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

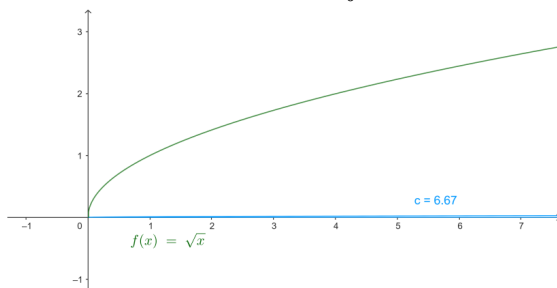


Рис. 10.17

$$2) f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (10 + 2\sin x + 3\cos x) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} (10x - 2\cos x + 3\sin x) \Big|_0^{2\pi} = 10. \quad \blacksquare$$

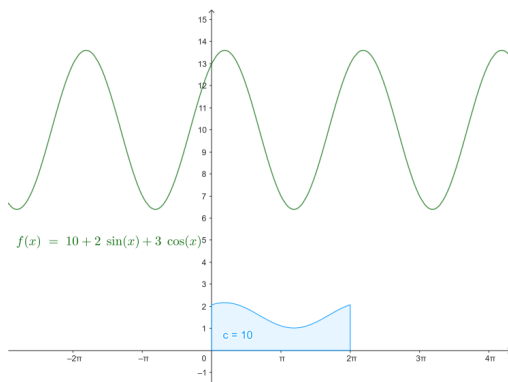


Рис. 10.18

Задача 10.8. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}$.

Розв'язання.

Застосуємо теорему про середнє для визначеного інтеграла:

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{(n+1)(1+\xi)}, \quad 0 < \xi < 1; \text{ тому}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(1+\xi)} = 0. \quad \blacksquare$$

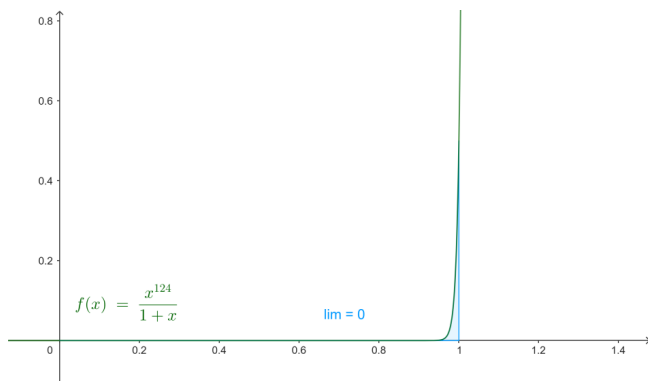


Рис. 10.19

Завдання для самостійного розв'язування

№1. Знайти найменше і найбільше значення функції:

1) $F(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt, \quad [0; 2];$

2) $F(x) = \int_0^{e^x} \frac{t^4 - 16}{t+1} dt, \quad [0; \ln 3];$

3) $F(x) = \int_1^{x^2} t(\ln t - 1) dt, \quad [1; 2];$

4) $F(x) = \int_0^{\frac{x-1}{x+1}} t dt, \quad [0; 4].$

2. Довести тотожності:

$$1) \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} = 0, \quad x > 0;$$

$$2) \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4};$$

$$3) \int_0^x \sin t dt + \int_0^{\sin x} \arcsin t dt - x \sin x = 0, \quad [-1; 1].$$

3. Довести, що кожний з інтегралів дорівнює нулю:

$$1) \int_{-3}^3 x \sqrt{9-x^2} dx;$$

$$2) \int_{-10}^{10} \lg(x + \sqrt{1+x^2}) dx;$$

$$3) \int_{-2}^2 (|x-1| + |x+1| - 2|x|) dx;$$

$$4) \int_0^1 (2 \arcsin x - \arccos(1-2x^2)) dx;$$

$$5) \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \arccos x - \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right) dx;$$

$$6) \int_{-1/2}^{1/2} \cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx;$$

$$7) \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx;$$

$$8) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x^2 + x^2) \sin x dx; \quad 9) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 x - \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{3}{8} \right) dx.$$

✎4. Порівняти інтеграли:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \text{ і } \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx; & \quad 2) \int_{-2}^0 x^3 2^x dx \text{ і } \int_0^2 x^3 2^x dx; \\ 3) \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \text{ і } \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx; & \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx \text{ і } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx; \\ 5) \int_1^2 \ln x dx \text{ і } \int_1^2 (\ln x)^2; & \quad 6) \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \text{ і } \int_0^1 x dx. \end{aligned}$$

✎5. Оцінити інтеграли:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx; & \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}; \\ 3) \int_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{1+x}}; & \quad 4) \int_{100}^{200} \frac{x^3 dx}{x^4 + x + 1}; \\ 5) \int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} dx; & \quad 6) \int_0^2 e^{x^2-x} dx; \\ 7) \int_{-1}^2 \frac{2^x dx}{(x^2+1)(x+2)}; & \quad 8) \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx. \end{aligned}$$

✎6. Довести нерівності:

$$1) 0,5 \leq \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{\pi}{6}; n \in N; \quad 2) 0 < \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{x^2+2}} \leq \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{3}} < \int_{-1}^1 \frac{\cos x \, dx}{2+x^2} \leq 1;$$

$$4) 10^{-6} < \int_{-2}^2 2^{x^2-5x+4} \, dx \leq 10^{-3};$$

$$5) \frac{1}{100} < \int_0^3 \left(\frac{1}{3} \right)^{|x^2-2|x|-3|} \, dx \leq 3;$$

$$6) 0 < \int_0^1 \sin(\operatorname{arctg} x) \, dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. Знайти середні значення функцій у вказаних проміжках:

$$1) f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, [0; 4];$$

$$2) f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12, \left[0; \frac{9}{2} \right];$$

$$3) f(x) = \sin 2x \cdot \cos \frac{x}{3}, [0; 2\pi];$$

$$4) f(x) = x \cos \pi x, [0; 2\pi].$$

8. Довести, що якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ строго опукла і зростає, то:

$$(b-a) \cdot \frac{f(a) - f(b)}{2} < \int_a^b f(x) \, dx < (b-a) f(x).$$

Записати відповідну нерівність, якщо функція $f(x)$ на $[a; b]$ строго вгнута.

9. Знайти границю:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\varepsilon x^3 + 1} \, dx;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \, dx, \quad p > 0;$$

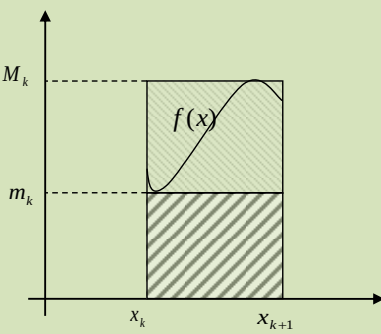
$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-nx} x^p \, dx, \quad p > 0.$$

§ 11. Застосування визначених інтегралів до обчислення площ плоских фігур і довжин плоских кривих

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Площа криволінійної трапеції	Area of a curvilinear trapezoid
Площа плоскої фігури в декартових координатах	Area of a plane figure in Cartesian coordinates
Площа плоскої фігури, заданої параметрично	Area of a plane figure defined parametrically
Площа плоскої фігури в полярних координатах	Area of a plane figure in polar coordinates
Довжина плоскої кривої	The length of a plane curve

1. Сформулювати означення плоскої фігури, квадратної фігури. Що називають площею плоскої фігури?



The diagram shows a coordinate system with x and y axes. A curve labeled $f(x)$ is plotted. A vertical rectangle is defined by x_k and x_{k+1} on the x-axis. The height of the rectangle is m_k . The area under the curve $f(x)$ from x_k to x_{k+1} is shaded with diagonal lines. The area under the horizontal line $y = m_k$ from x_k to x_{k+1} is shaded with a different pattern of diagonal lines. The maximum value of the function $f(x)$ in this interval is labeled M_k on the y-axis.

Плоска фігура – це обмежена частина площини. Ця частина може бути обмежена лініями, кривими або їх комбінацією. Формально, плоску фігуру можна визначити як множину точок на площині, що задовольняють певній умові.

Площа плоскої фігури – це числова характеристика, яка визначає розмір цієї фігури.

Розглянемо криволінійну трапецію:

$A = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ і довільне τ -розбиття відрізка $[a, b]$:

$\tau = \{a = x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n = b\}$ Для кожного відрізка $[x_k, x_{k+1}]$

будемо розглядати криволінійну трапецію:

$A_k = \{(x, y) | x_k \leq x \leq x_{k+1}, 0 \leq y \leq f(x)\}$, а також вписаний і описаний навколо трапеції прямокутники з основами $[x_k, x_{k+1}]$ і висотами $m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$ та $M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$ відповідно (рис.11.1).

Позначимо суму площ всіх вписаних прямокутників у криволінійну трапецію через $U(f, \tau)$, а описаних - через $V(f, \tau)$.

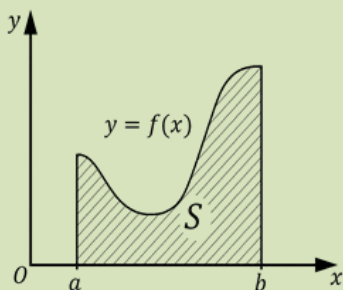
Величина $S_* = \sup_{\tau} U(f, \tau)$ називається внутрішньою площею (або внутрішньою мірою) криволінійної трапеції A , а величина $S^* = \inf_{\tau} V(f, \tau)$ зовнішньою площею (або зовнішньою мірою).

Якщо $S_* = S^*$, то трапеція A називається квадровною, а число $S = S_* = S^*$ називається площею криволінійної трапеції.

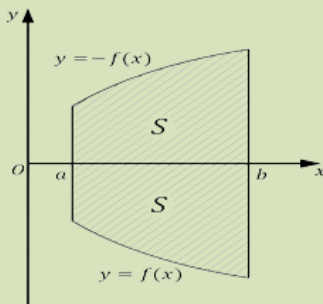
2. За якими формулами обчислюють площу фігури?

Обчислення площ плоских фігур

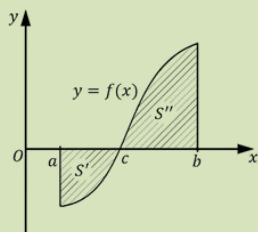
1) крива задана в декартових коефіцієнтах.



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

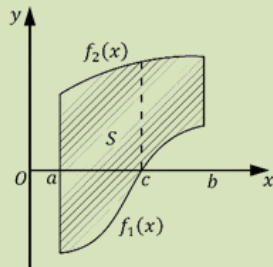


$$S = - \int_a^b f(x) dx$$



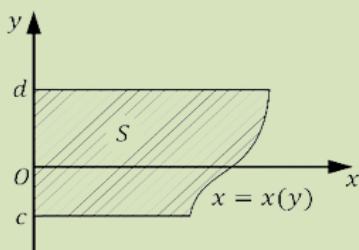
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$$S = S' + S'' = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

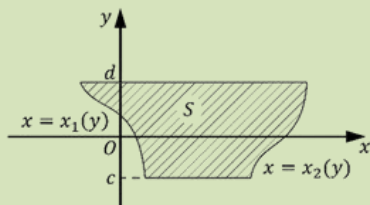


$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

2) крива задана в декартових координатах.



$$S = \int_c^d x(y) dy$$

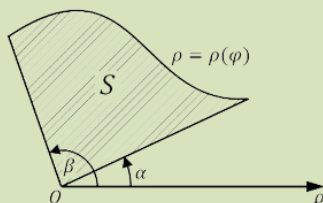


$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y)) dy,$$

в параметричній формі:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) y'(t) dt.$$

3) крива задана в полярних координатах.



Площа криволінійного сектора обмеженого графіком функції $\rho = \rho(\varphi)$ і відрізками променів $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, дорівнює:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

4) крива задана параметрично рівняннями.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \in C_{[\alpha, \beta]}^1, \\ y = \psi(t) \in C_{[\alpha, \beta]}, \end{cases} \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad \varphi'(t) \geq 0, \quad \psi(t) \geq 0.$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

4. За якими формулами обчислюють довжину кривої?

1) крива задана параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \in C_{[\alpha, \beta]}^1, \\ y = \psi(t) \in C_{[\alpha, \beta]}. \end{cases}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

2) крива задана явно рівнянням: $y = f(x) \in C_{[\alpha, \beta]}^1$.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

3) крива задана в полярних координатах рівняннями:

$$\rho = \rho(\varphi) \in C_{[\alpha, \beta]}^1, \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

4) обчислення довжини просторової кривої:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), & x(t), y(t), z(t) \in C_{[\alpha, \beta]}^1 \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

5. Ознайомитись з біографією французького математика Марі Енмон Каміля Жордана.

Приклади розв'язування вправ

Задача 11.1. Знайти площу криволінійних трапецій, зображених на рисунках.

Розв'язання.

В усіх випадках будемо використовувати формулу а) $\int_a^b f(x) dx$

з таблиці:

1)

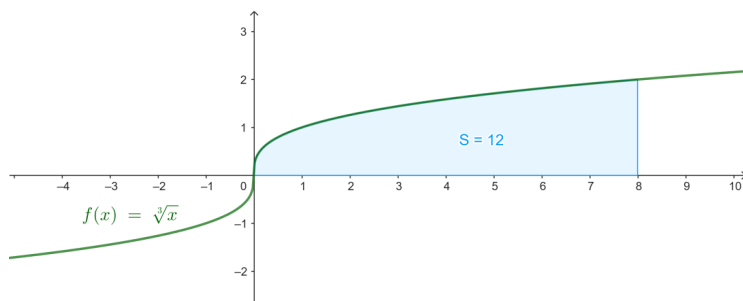


Рис. 11.1

$$S_1 = \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \Big|_0^8 = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{8^4} - 0) = 12 \text{ (кв. од.)} \quad \blacksquare$$

2)

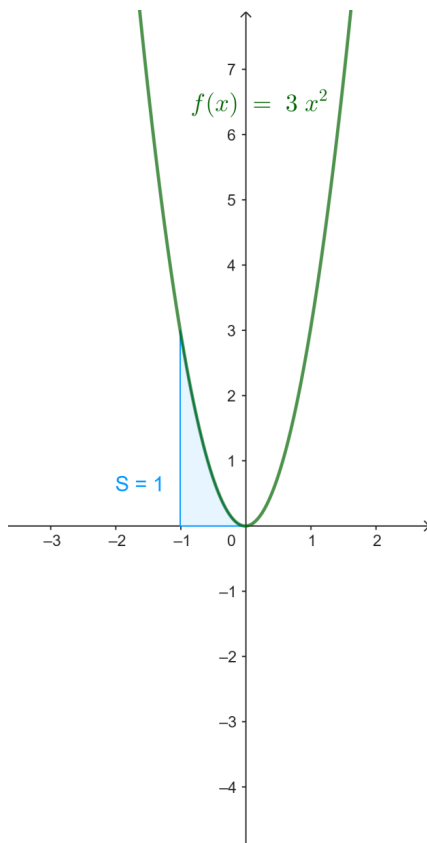


Рис. 11.2

$$S_2 = \int_{-1}^0 3x^2 dx = x^3 \Big|_{-1}^0 = 0 - (-1)^3 = 1 \text{ (кв. од.)} \quad \blacksquare$$

3)

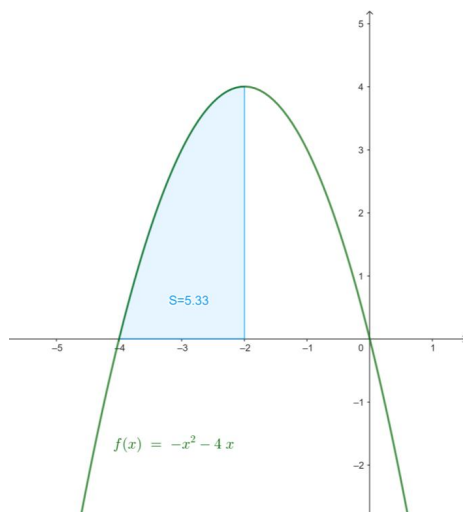


Рис. 11.3

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \int_{-4}^{-2} (-x^2 - 4x) dx = - \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-4}^{-2} + 2x^2 \Big|_{-4}^{-2} \right) = \\
 &= - \left(-\frac{8}{3} + \frac{64}{3} + 8 - 32 \right) = -\frac{56}{3} + 24 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (кв. од.)} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

4)

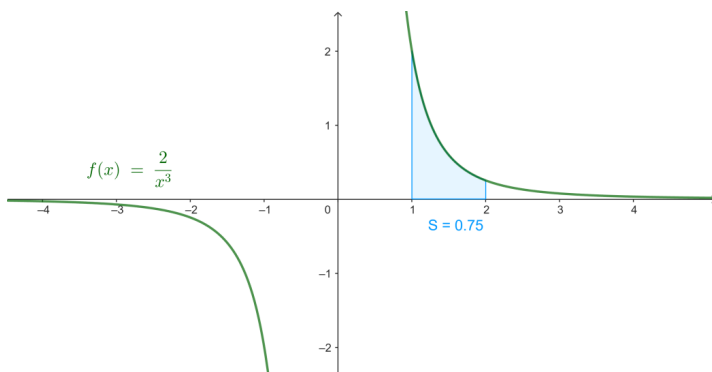


Рис. 11.4

$$S_4 = \int_1^2 \frac{2}{x^3} dx = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^2 = -\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3}{4} \text{ (кв. од.)} \quad \blacksquare$$

5)

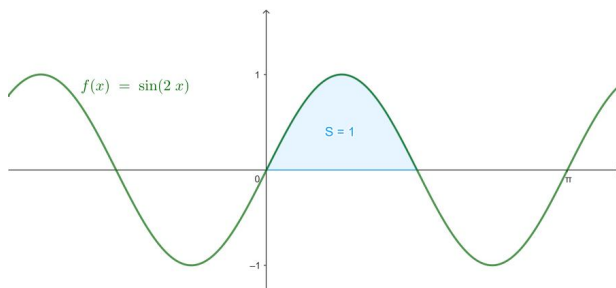
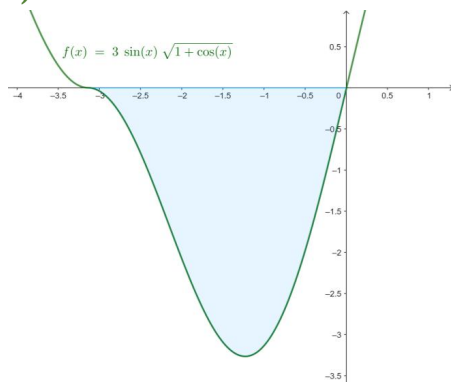


Рис. 11.5

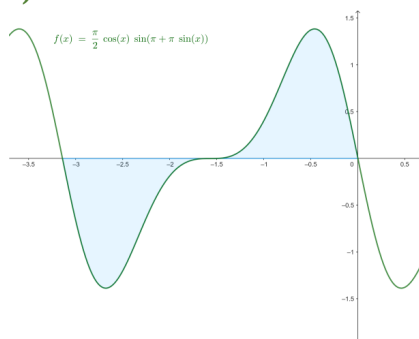
$$S_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos 0) = 1 \text{ (кв. од.)} \quad \blacksquare$$

Задача 11.2. Знайти площу плоскої фігури, зображеної на рис. 11.6.

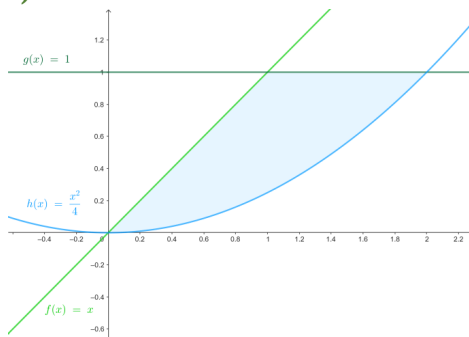
1)



2)



3)



4)

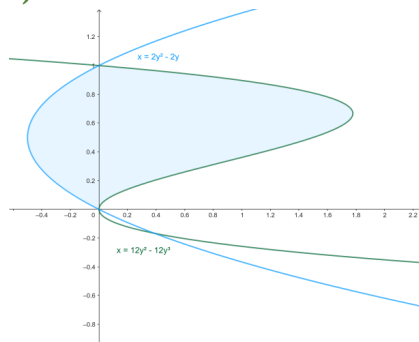


Рис. 11.6

Розв'язання.

1) використаємо формулу б) $S = -\int_a^b f(x) dx$ з таблиці:

$$S_1 = -\int_{-\pi}^0 3 \sin x \sqrt{1 + \cos x} dx = \left. \begin{array}{l} \text{Заміна:} \\ t = 1 + \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ t_{\text{н}} = 1 + \cos(-\pi) = 0 \\ t_{\text{б}} = 1 + \cos 0 = 2 \end{array} \right| = 3 \int_0^2 \sqrt{t} dt = 2\sqrt{t^3} \Big|_0^2 =$$

$$= 4\sqrt{2} \text{ (кв. од.)} \quad \blacksquare$$

2) на відрізку $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ будемо використовувати формулу б)

таблиці, а на $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ – формулу а):

$$S_2 = S_2' + S_2'' = -\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos x \cdot \sin(\pi + \pi \sin x) dx +$$

	<i>I заміна</i>	<i>II заміна</i>	
	$t = \sin x$	$t = \sin x$	
	$dt = \cos x dx$	$dt = \cos x dx$	
$+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\pi}{2} \cos x \cdot \sin(\pi + \pi \sin x) dx =$	$t_u = \sin(-\pi) = 0$	$t_u = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$	$=$
	$t_\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$	$t_\theta = \sin 0 = 0$	

$$= -\frac{\pi}{2} \int_0^{-1} \sin(\pi + \pi t) dt + \frac{\pi}{2} \int_{-1}^0 \sin(\pi + \pi t) dt = \pi \int_{-1}^0 \sin(\pi + \pi t) dt =$$

$$= -\pi \cdot \frac{1}{\pi} \cos(\pi + \pi t) \Big|_{-1}^0 = -(\cos \pi - \cos 0) = 2 \text{ (кв. од.)} \quad \blacksquare$$

3) використаємо властивість адитивності для площі плоскої фігури і формулу в) таблиці:

$$S_3 = S_3' + S_3'' = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{12} \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 - \frac{x^3}{12} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + (2-1) - \frac{1}{12}(8-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{6} \text{ (кв. од.)} \quad \blacksquare$$

4) використаємо формулу г) таблиці для функцій $x = x_1(y)$ і $x = x_2(y)$:

$$S_4 = \int_0^1 (12y^2 - 12y^3 - (2y^2 - 2y)) dy = 4y^3 \Big|_0^1 - 3y^4 \Big|_0^1 - \frac{2y^3}{3} \Big|_0^1 + y^2 \Big|_0^1 =$$

$$= 4 - 3 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (кв. од.)} \quad \blacksquare$$

Задача 11.3. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій:

1) $y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4;$

2) $y = \frac{6}{x+5}, \quad y = |x|;$

3) $(y - x)^2 = x^3, \quad x = 1;$

4) $y^2 = 2x + 1, \quad x - y - 1 = 0.$

Розв'язання.

1) Знайдемо абсциси точок перетину даних кривих і побудуємо плоску фігуру, обмежену графіками параболи і прямої:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases},$$

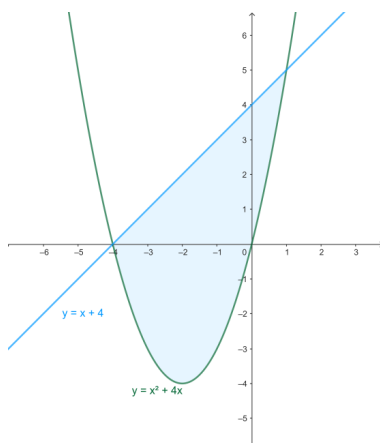


Рис. 11.7

За формулою г) знаходимо площу фігури.

$$S = \int_{-4}^1 ((x+4) - (x^2 + 4x)) dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2) dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^1 =$$

$$= \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-16 - 24 + \frac{64}{3} \right) = 44 - \frac{139}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. од.)}. \quad \blacksquare$$

2) Нарисуємо графіки функцій $y = \frac{6}{x+5}$, $y = |x|$ і знайдемо їх точки перетину:

$$\begin{cases} x < 0, \\ y = \frac{6}{x+5}, \\ y = -x, \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{x+5} = -x \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = -3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ y = \frac{6}{x+5}, \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6, \\ x = 1, \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

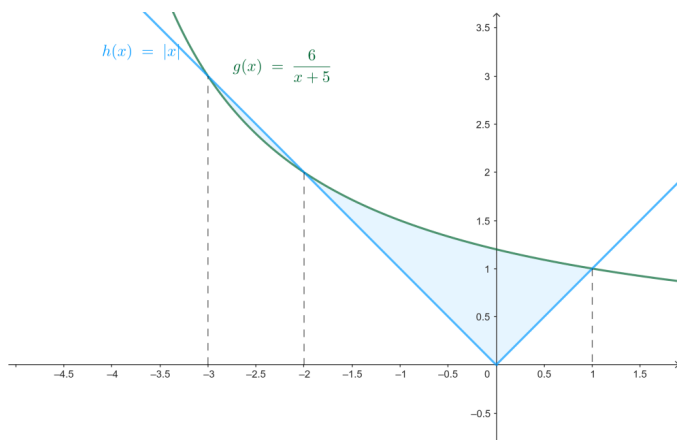


Рис. 11.8

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-3}^{-2} \left(-x - \frac{6}{x+5} \right) dx + \int_{-2}^0 \left(\frac{6}{x+5} + x \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{6}{x+5} - x \right) dx = \\
 &= -\frac{x^2}{2} \Big|_{-3}^{-2} - 6 \ln|x+5| \Big|_{-3}^{-2} + 6 \ln|x+5| \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + 6 \ln|x+5| \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \\
 &= 6 \ln \frac{4}{3} \text{ (кв. од.)}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

$$3) (y-x)^2 = x^3 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y = x + x\sqrt{x}, \\ y = x - x\sqrt{x}. \end{cases}$$

Обидві вітки графіка перетинаються у точці $(0;0)$. При цьому верхня вітка $y = x + x\sqrt{x}$ монотонно зростає, залишаючись завжди над віссю Ox , а нижня вітка перетинає вісь Ox у точках:

$$\begin{cases} y = 0, \\ x - x\sqrt{x} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

На проміжку $0 \leq x \leq 1$ маємо: $y = x(1 - \sqrt{x}) \geq 0$, а для всіх $x > 1$ маємо: $y < 0$. За формулою г) знаходимо площу фігури.

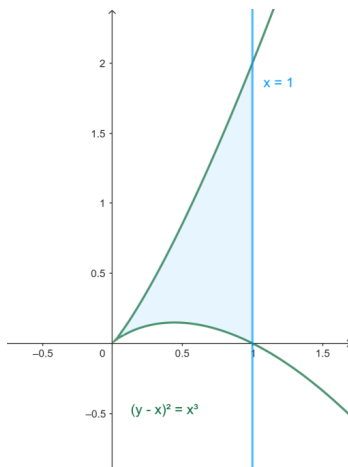


Рис. 11.9

$$S = \int_0^1 \left((x + x\sqrt{x}) - (x - x\sqrt{x}) \right) dx = 2 \int_0^1 x\sqrt{x} dx = 2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{5} \text{ (кв. од.)}. \quad \blacksquare$$

4) Графіком функції $y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ є парабола з віссю симетрії

Ox , знайдемо точки перетину параболи і прямої $y = x - 1$:

$$\begin{cases} 2x = y^2 - 1, \\ x = y + 1, \\ x \geq -\frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y^2 - 1}{2} = y + 1, \\ x = y + 1, \\ x \geq -\frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3, \\ y = -1. \end{cases}$$

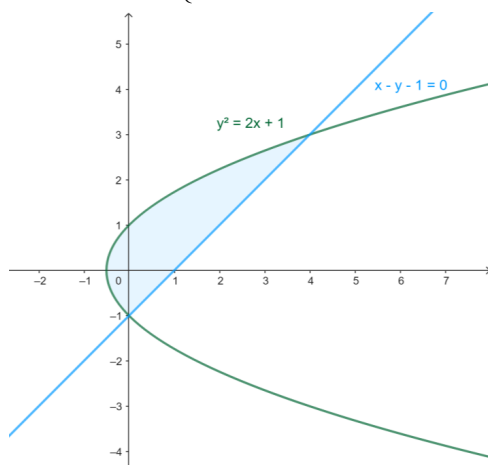


Рис. 11.10

Бачимо, що у цьому випадку зручніше використовувати формулу б).

$$S = \int_{-1}^3 \left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2} \right) dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{-1}^3 + \frac{3}{2} y \Big|_{-1}^3 - \frac{y^3}{6} \Big|_{-1}^3 = 4 + 6 - \frac{14}{3} =$$

$$= 5\frac{1}{3} \text{ (кв. од.)} \quad \blacksquare$$

Задача 11.4. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = -x^2 + 4x - 3$ і дотичними до цього графіка у точках $M_1(0; -3)$ і $M_2(3; 0)$.

Розв'язання.

Знайдемо рівняння дотичних l_1 і l_2 до графіка функції у точці $(x_0; y_0)$ за формулою: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Похідна функції дорівнює: $f'(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4$.

Для точки $M_1(0; -3)$ будемо мати: $f(x_0) = y(0) = -3$;
 $f'(x_0) = y'(0) = 4$, $l_1: y + 3 = 4(x - 0) \Rightarrow y = 4x - 3$.

Для точки $M_2(3; 0)$ будемо мати: $f(x_0) = y(3) = 0$,
 $f'(x_0) = y'(3) = -2$,
 $l_2: y - 0 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 6$.

Знайдемо абсцису точки перетину прямих l_1 і l_2 :

$$\begin{cases} y = 4x - 3, \\ y = -2x + 6, \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Фігура, обмежена параболою і дотичними, зображена на рисунку 11.11.

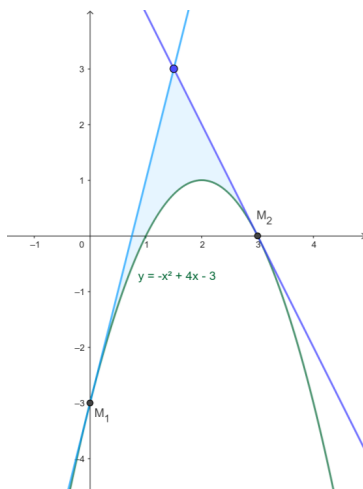


Рис. 11.11

Використаємо властивість адитивності площ плоских фігур і формулу г):

$$\begin{aligned}
 S = S_1 + S_2 &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left(4x - 3 - (-x^2 + 4x - 3) \right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 \left(-2x + 6 - (-x^2 + 4x - 3) \right) dx = \\
 &= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\frac{3}{2}} + \left. \frac{x^3}{3} \right|_{\frac{3}{2}}^3 + 9x \left|_{\frac{3}{2}}^3 = \frac{9}{4} \quad (\text{кв. од.}). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Задача 11.5. При якому значенні k площа фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + px + q$ і прямою $y = kx + b$, буде найменшою (p, q, b – сталі числа, $b \geq q$)?

Розв'язання.

Маємо параболу, напрямлену вітками вгору, і пряму з кутовим коефіцієнтом k ($k > 0$ або $k < 0$), тому плоска фігура, обмежена графіками цих функцій, завжди існує (рис.11.12, рис.11.13). Знайдемо точки перетину графіків.

$$\begin{cases} y = x^2 + px + q, \\ y = kx + b, \end{cases} \Rightarrow x^2 + (p - k)x + (q - b) = 0 \Rightarrow$$

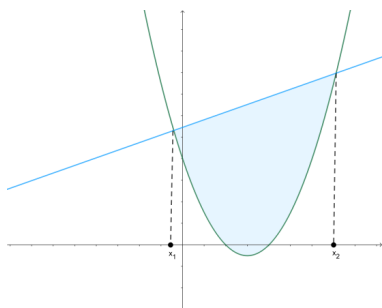


Рис. 11.12

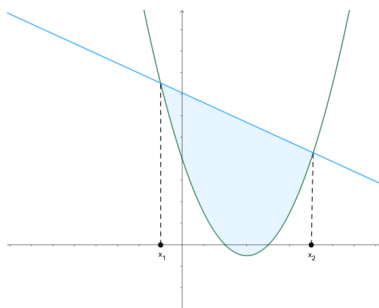


Рис. 11.13

$$\begin{cases} D = (p-k)^2 + 4(b-q) > 0, \\ x_1 = \frac{k-p - \sqrt{(p-k)^2 + 4(b-q)}}{2}, \\ x_2 = \frac{k-p + \sqrt{(p-k)^2 + 4(b-q)}}{2}. \end{cases}$$

Отже, площа S шуканої фігури дорівнює:

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} (kx + b - x^2 - px - q) dx = -\frac{x^3}{3} \Big|_{x_1}^{x_2} + (k-p) \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} + (b-q)x \Big|_{x_1}^{x_2} = \\ &= -\frac{1}{3}(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + \frac{k-p}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (b-q)(x_2 - x_1) = \\ &= (x_2 - x_1) \left(-\frac{1}{3}((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2) + \frac{k-p}{2}(x_2 + x_1) + (b-q) \right) = \end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{За теоремою Піфагора:} \\ x_2 + x_1 = k - p, \\ x_2x_1 = q - b, \\ x_2 - x_1 = \sqrt{(p-k)^2 + 4(b-q)} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(p-k)^2 + 4(b-q)} \left(-\frac{1}{3}(k-p)^2 + \frac{1}{3}(q-b) + \frac{(k-p)^2}{2} + (b-q) \right) = \\ &= \sqrt{(p-k)^2 + 4(b-q)} \left(\frac{(k-p)^2}{6} + \frac{2(b-q)}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \sqrt{(p-k)^2 + 4(b-q)} \left(\frac{(k-p)^2}{6} + \frac{2(b-q)}{3} \right)} \quad (*)$$

Цю функцію потрібно дослідити на мінімум відносно змінної k . Для простоти введемо нову змінну і параметр: $k - p = t$, $b - q = a \geq 0$. Тому функція набере вигляду:

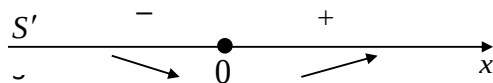
$$S = \sqrt{t^2 + 4a} \left(\frac{x^2}{6} + \frac{2a}{3} \right).$$

Використаємо першу похідну для дослідження функції на екстремум:

$$1^0. S'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4a}} \left(\frac{t^2}{6} + \frac{2a}{3} \right) + \sqrt{t^2 + 4a} \frac{t}{3} = \frac{t \left(\frac{t^2}{2} + 2a \right)}{\sqrt{t^2 + 4a}};$$

$$2^0. S'(t) = 0 \Rightarrow t = 0, \text{ а вирази } \frac{t^2}{2} + 2a \text{ і } \sqrt{t^2 + 4a} \text{ додатні.}$$

3⁰. Дослідимо зміну знаку похідної при переході через стаціонарну точку $t_0 = 0$.



т. min
Рис. 11.14

Точка $t = 0$ є точкою мінімуму функції $S(t)$, а, значить, і $k = p$ є точкою мінімуму функції (*).

Отже, площа плоскої фігури буде найменшою, якщо $k = p$ ($y = x^2 + px + q$, $y = px + b$, $b > q$) і $S = \frac{4}{3} \sqrt{(b - q)^3}$. ■

Задача 11.6. Нехай $y = ax^2 + bx + c > 0$ при $x_1 \leq x \leq x_2$.

Довести, що площа фігури, заданої нерівностями $0 \leq y \leq y(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, дорівнює:

$$S = \frac{1}{6} (x_2 - x_1) (y_1 + y_2 + 4y_0),$$

де $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$, $y_0 = y\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ (формула Сімпсона).

Доведення.

Криволінійна трапеція, обмежена параболою $y = ax^2 + bx + c > 0$, прямими $x = x_1$, $x = x_2$ і віссю абсцис може мати вигляд, зображений на рисунках 11.15 і 11.16.

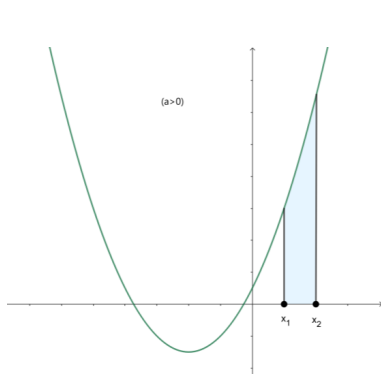


Рис. 11.15

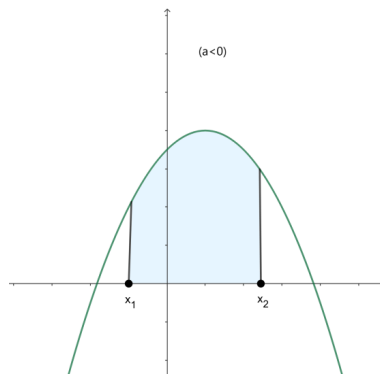


Рис. 11.16

В обох випадках площа цієї трапеції дорівнює:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} x^3 \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{b}{2} x^2 \Big|_{x_1}^{x_2} + c x \Big|_{x_1}^{x_2} = \\
 &= (x_2 - x_1) \left(\frac{a}{3} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + \frac{b}{2} (x_2 + x_1) + c \right) = \\
 &= \frac{x_2 - x_1}{6} \left((ax_1^2 + bx_1 + c) + (ax_2^2 + bx_2 + c) + \right. \\
 &\quad \left. + 4 \left(a \left(\frac{x_1}{2} \right)^2 + a \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 + 2a \frac{x_1 x_2}{4} + b \left(\frac{x_1}{2} \right) + b \left(\frac{x_2}{2} \right) + c \right) \right) = \frac{x_2 - x_1}{6} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(y(x_1) + y(x_2) + 4 \left(a \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right)^2 + b \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right) + c \right) \right) = \\ & = \frac{x_2 - x_1}{6} (y_1 + y_2 + 4y_0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 11.7. Знайти відношення площ фігур, на які круг $x^2 + y^2 \leq 2ax$ розділений параболою $y^2 = 2ax - a^2$.

Розв'язання.

Якщо у рівнянні кола $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ виділити квадрат двочлена, то матимемо коло з центром у точці $(a; 0)$ радіуса a .

Парабола $y^2 = 2ax - a^2 = 2a \left(x - \frac{a}{2} \right)$ симетрична відносно осі Ox з вершиною у точці $\left(\frac{a}{2}; 0 \right)$.

Знайдемо точки перетину кола і параболи :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax, \\ y^2 = 2ax - a^2, \\ x \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2ax - x^2, \\ y^2 = 2ax - a^2, \\ x \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ax - x^2 = 2ax - a^2, \\ x \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(a; a), \\ B(a; -a). \end{cases}$$

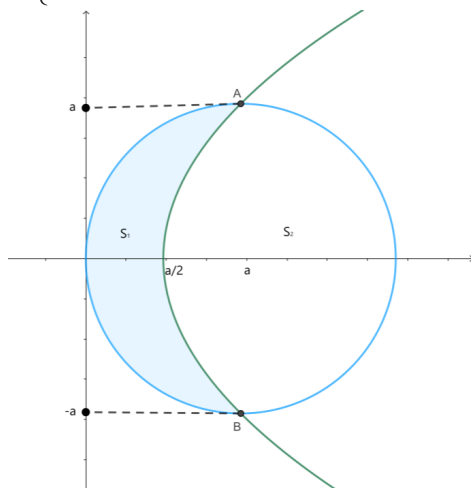


Рис. 11.17

Площу S_1 знайдемо, використовуючи формулу 3 б) (тоді

рівняння параболи – $x = \frac{y^2 + a^2}{2a}$, а кола – $x = a - \sqrt{a^2 - y^2}$:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int_0^a \left(\frac{y^2 + a^2}{2a} - a + \sqrt{a^2 - y^2} \right) dy = \frac{y^3}{3a} \Big|_0^a - ay \Big|_0^a + a^2 \left(\arcsin \frac{y}{a} + \frac{y}{a^2} \sqrt{a^2 - y^2} \right) \Big|_0^a = \\ &= \frac{a^2}{3} - a^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{-2a^2}{3} + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{a^2(3\pi - 4)}{6} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Отже, відношення площ, на які парабола ділить круг, дорівнюватиме:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{6}a^2(3\pi - 4)}{\frac{1}{6}a^2(3\pi + 4)} = \frac{3\pi - 4}{3\pi + 4}. \quad \blacksquare$$

Задача 11.8. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю абсцис і однією аркою циклоїди:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (a > 0).$$

Розв'язання.

Циклоїда утворюється при обертанні кола, яке котиться вздовж прямої (рис. 11.18), тоді параметр (тобто кут) t змінюється від $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$, а абсциса змінюється від $x_1 = 0$ до $x_2 = 2\pi a$, ордината $y \geq 0$. Функція $x(t) = a(t - \sin t)$ неперервна на відрізку $[0; 2\pi]$, а її похідна $x'(t) = a(1 - \cos t) \geq 0$, тому $x(t)$ зростає.

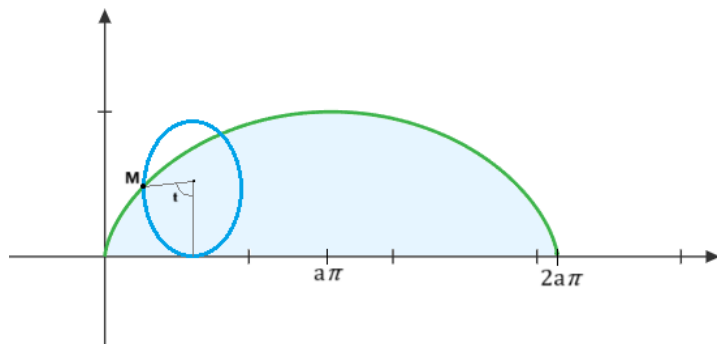


Рис. 11.18

Отже, площу фігури можна обчислити за формулою:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \\
 &= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \text{ (кв.од.)}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Задача 11.9. Обчислити площу фігури, обмеженої замкненою кривою $x = a \sin t$, $y = b \sin 2t$.

Розв'язання.

Ця крива симетрична відносно обох осей і початку координат. Для з'ясування форми кривої достатньо побудувати її частину, що лежить в першій чверті, а потім скористатися симетрією. Симетрія фігури (рис. 11.19) також дозволяє обчислити площу фігури, розміщеної в першій чверті, а потім результат помножити на 4.

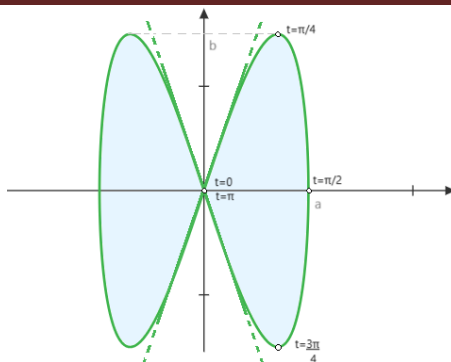


Рис. 11.19

$$S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin 2t \cdot a \cos t dt = -8ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \cos t =$$

$$= -\frac{8}{3} ab \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} ab \text{ (кв.од.)}. \quad \blacksquare$$

Задача 11.10. Знайти площу петлі кривої:

$$x = \frac{t}{3}(6-t), \quad y = \frac{t^2}{8}(6-t).$$

Розв'язання.

Із рівнянь видно, що областю існування функцій $x(t)$ і $y(t)$ є множина всіх дійсних чисел $(-\infty; +\infty)$. Знайдемо ті значення параметра t , при яких дана крива перетинає вісь OX .

$$y = 0 \Rightarrow \frac{t^2}{8}(6-t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0, \\ t_2 = 6. \end{cases}$$

Знайдемо найбільше значення абсциси петлі кривої: $x'_t = 0$, тобто

$$2 - \frac{2}{3}t = 0, \text{ звідси } t = 3 \text{ і } x(3) = \frac{3}{3}(6-3) = 3.$$

Площу фігури, обмеженої даною кривою, можна розглядати як різницю площ двох криволінійних трапецій.

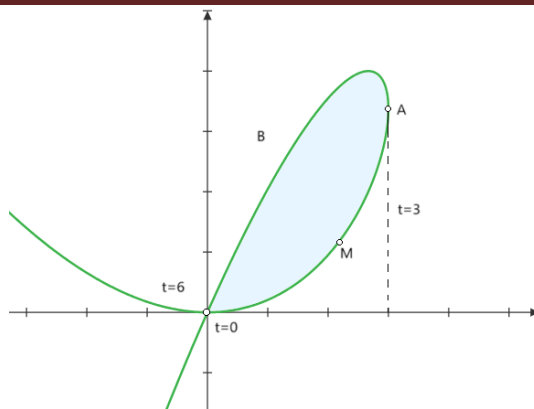


Рис. 11.20

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^3 y_1(x) dx - \int_0^3 y_2(x) dx = \int_6^3 y(t) \cdot x'(t) dt - \int_0^3 y(t) \cdot x'(t) dt = \\
 &= \int_6^3 y(t) \cdot x'(t) dt + \int_3^0 y(t) \cdot x'(t) dt = \\
 &= \int_6^0 y(t) \cdot x'(t) dt = \int_6^0 \frac{t^2}{8} (6-t) \frac{2}{3} (3-t) dt = \\
 &= \frac{1}{12} \int_6^0 (18t^2 - 9t^3 + t^4) dt = \frac{1}{12} \left(6t^3 - \frac{9}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 \right) \Big|_6^0 = \frac{27}{5} \quad (\text{кв.од.}). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Задача 11.11. Знайти площу петлі кривої:

$$x = \frac{at}{2}(t^2 - 3), \quad y = \frac{b}{2}(t^2 - 2) \quad (a > 0, b > 0).$$

Розв'язання.

Із рівнянь видно, що областю існування функцій $x(t)$ і $y(t)$ є множина всіх дійсних чисел $(-\infty; +\infty)$, також зі зміною знаку параметра t функція $y(t)$ не змінюється, а $x(t)$ змінює знак. Це показує, що дана крива симетрична відносно осі OY (рис. 11.21).

$$Ox: y=0 \Rightarrow t^2-2=0 \Rightarrow t=\pm\sqrt{2}, M_1\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};0\right), M_2\left(\frac{a}{\sqrt{2}};0\right).$$

$$Oy: y=0 \Rightarrow t(t^2-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=0, \\ t_{2,3}=\pm\sqrt{3}, \end{cases} M_3(0;-b), M_4\left(0;\frac{b}{2}\right).$$

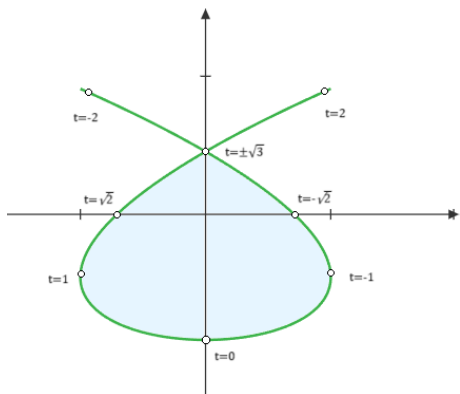


Рис. 11.21

Зауважимо, що через точку $M_4\left(0;\frac{b}{2}\right)$ крива проходить двічі

при $t=\pm\sqrt{3}$, утворюючи петлю. Враховуючи симетрію фігури відносно осі OY , достатньо визначити половину шуканої площі.

Використаємо формулу $S = \int_c^d x(y)dy$.

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-b}^{\frac{b}{2}} x dy = 2 \int_0^{-\sqrt{3}} x \cdot y'_t dt = 2 \int_0^{-\sqrt{3}} \frac{at}{2} (t^2-3) \cdot btdt = ab \int_0^{-\sqrt{3}} (t^4-3t^2) dt = \\ &= ab \left(\frac{1}{5} t^5 - t^3 \right) \Big|_0^{-\sqrt{3}} = \frac{6}{5} \sqrt{3} ab \text{ (кв.од.)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 11.12. Визначити площу фігури, обмеженої кривою

$$\rho = a \cos^3 \varphi \quad (a > 0).$$

Розв'язання.

Крива проходить через початок координат і симетрична відносно полярної осі (в силу парності функції $\cos \varphi$).

$$\rho \geq 0 \Rightarrow \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Отже, крива розташована в першій і четвертій чвертях (рис. 11.22).

В силу симетрії кривої відносно полярної осі достатньо визначити площу верхньої частини фігури і результат подвоїти.

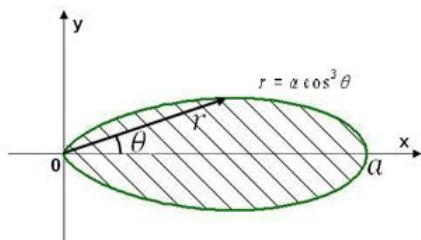


Рис. 11.22

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi) d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = a^2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32} \pi a^2 \text{ (кв.од).}$$

Тут ми скористалися формулою:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } n = 2m, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{якщо } n = 2m+1. \end{cases}$$

Задача 11.13. Визначити площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ ($a > 0$).

Розв'язання.

По вигляду самої функції $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ можна встановити, що: **1)** графік її симетричний відносно полярної осі (в силу парності $\cos 2\varphi$); **2)** дана функція періодична, її період дорівнює π , тому достатньо вивчити її поведінку на проміжку довжиною в період; **3)** графік її також симетричний відносно полюса 0, оскільки при

зміні φ на $\varphi + \pi$ (що рівносильно повороту ρ на кут π) полярний радіус ρ не змінюється.

Із рівняння кривої випливає, що при збільшенні кута φ від $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$ полярний радіус ρ , змінюючись від 0 до 0, опише петлю кривої, що розташована (в першій та четвертій чвертях) симетрично відносно полярної осі (рис. 11.23).

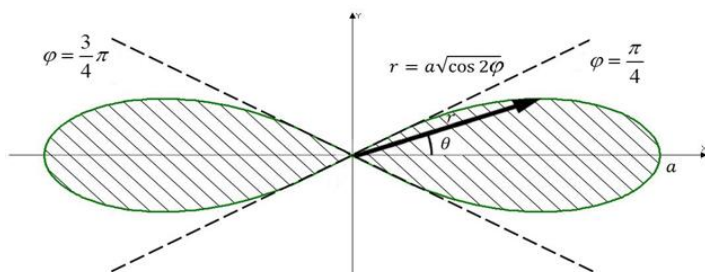


Рис. 11.23

В силу цієї симетрії достатньо побудувати по точках половину вказаної петлі, що відповідає зміні кута φ від 0 до $\frac{\pi}{4}$. Із періодичності даної функції випливає, що при зміні кута φ від $\frac{3}{4}\pi$ до $\frac{5}{4}\pi$ полярний радіус ρ , також опише другу петлю кривої, що розташована у другій і третій чвертях. Таким чином, вся крива знаходиться в двох вертикальних кутах між прямими, проведеними під кутами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ і $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ і до полярної осі і перетинає сама себе в полюсі 0.

Оскільки фігура, обмежена даною кривою, складається із чотирьох однакових частин, то достатньо визначити площу однієї

з них, наприклад, тієї, яка відповідає зміні кута φ від 0 до $\frac{\pi}{4}$ (в першій чверті), і результат домножити на 4.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2. \quad \blacksquare$$

Задача 11.14. Визначити площу частини фігури, обмеженої замкнутою кривою $\rho = a \cos 3\varphi$, що лежать всередині кола

$$\rho = \frac{a}{2} \quad (a > 0).$$

Розв'язання.

Ця крива симетрична (в силу парності функції $\cos 3\varphi$) відносно полярної осі. Функція $\rho = a \cos 3\varphi$ періодична, а період дорівнює $\frac{2\pi}{3}$. Тому достатньо побудувати її графік на проміжку довжиною в період.

$$\rho \geq 0 \Rightarrow \cos 3\varphi \geq 0 \Rightarrow 2\pi k - \frac{\pi}{2} \leq 3\varphi \leq 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}, \quad \text{або} \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}, \quad \text{або} \quad \frac{7\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

На відрізку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ полярний радіус ρ , змінюючись від 0 до a і знову до 0, опише петлю кривої, що розміщується в першій і четвертій чверті симетрично відносно полярної осі. Враховуючи цю симетрію, практично достатньо по точках побудувати половину вказаної петлі, що відповідає зміні кута φ від 0 до $\frac{\pi}{6}$ (у першій чверті). Аналогічно, коли кут φ змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{6}$, то

полярний радіус ρ , змінюючись від 0 через a до 0, опише другу петлю кривої, що розташована в другій чверті, а при зміні кута φ від $\frac{7}{6}\pi$ до $\frac{3}{2}\pi$ полярний радіус, змінюючись від 0 через a до 0, опише третю петлю кривої, що розташована в третій чверті. Цю криву прийнято називати трилистником (рис. 11.24). Побудова кола $\rho = \frac{a}{2}$ очевидна.

Визначимо тепер площу фігури, обмеженої даними кривими. Оскільки вся фігура складається із шести однакових частин, то нам достатньо знайти площу однієї з них, наприклад ту, яка лежить в першій чверті, і результат помножити на 6.

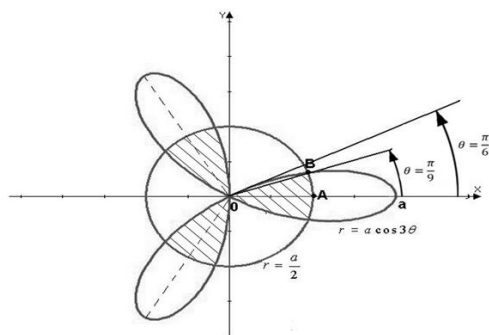


Рис. 11.24

Із рисунка 11.24 видно, що площу цієї частини можна подати як площу двох секторів, один із яких обмежений дугою AB кола і двома відрізками прямих OA і OB ; друга – дугою трилистника і відрізком прямої OB . Щоб визначити площу кожної із них, очевидно, ми повинні знати полярний кут точки B , в якій перетинаються криві. Розв'язуючи систему рівнянь:

$$\rho = a \cos 3\varphi, \quad \rho = \frac{a}{2}, \quad \text{знаходимо, що полярний кут точки } B \text{ дорівнює}$$

$\frac{\pi}{9}$. Тоді, враховуючи все сказане вище, площа шуканої фігури

дорівнює:

$$\begin{aligned} S &= 6 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{9}} \frac{a^2}{4} d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi \right) = 3a^2 \left(\frac{1}{4} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{9}} + \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi d\varphi \right) = \\ &= 3a^2 \left(\frac{\pi}{36} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi \right) = 3a^2 \left(\frac{\pi}{36} + \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} \right) = \\ &= 3a^2 \left(\frac{\pi}{36} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6} \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 3a^2 \left(\frac{\pi}{36} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right) \right) = \\ &= \frac{3a^2}{2} \left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right) = \frac{3a^2}{2} \left(\frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 11.15. Знайти довжину дуги AOB півкубічної параболи

$ay^2 = x^3$ ($a > 0$), де точки A і B мають однакові абсциси: $x = 5a$.

Розв'язання.

Крива $y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a}} \in C_{[0;5a]}^1$ задана в декартовій системі координат.

Отже, її довжину знайдемо, використавши формулу:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

З рівняння кривої видно, що вона симетрична відносно осі абсцис (рис. 11.25).

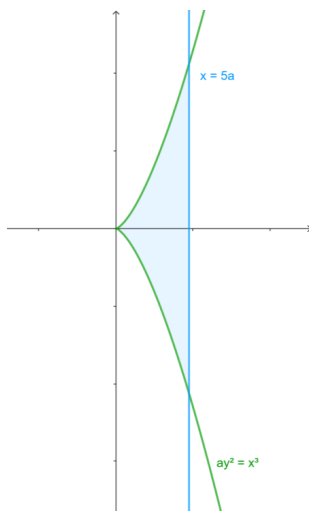


Рис. 11.25

Тому достатньо обчислити довжину однієї вітки кривої, а потім результат подвоїти:

$$y = \frac{1}{\sqrt{a}} x^{\frac{3}{2}}; \quad y' = \frac{3}{2\sqrt{a}} x^{\frac{1}{2}}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{9x}{4a} = \frac{4a + 9x}{4a}.$$

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^{5a} \sqrt{\frac{4a + 9x}{4a}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{9} \frac{2}{3} (9x + 4a)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{5a} = \\ &= \frac{2}{27\sqrt{a}} \left((49a)^{\frac{3}{2}} - (4a)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{670a}{27} \text{ (лін.од.)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 11.16. Знайти довжину дуги кривої:

$$y = 2a \ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} - 4\sqrt{ax}, \quad 0 \leq x \leq x_0 < a.$$

Розв'язання.

Знайдемо похідну:

$$y' = 2a \frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} \right)' - 4 \frac{a}{2\sqrt{ax}} = \frac{2a}{\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{a}}{a-x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) = \frac{2\sqrt{ax}}{a-x};$$

і складемо вираз:

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{4ax}{(a-x)^2} = \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^2.$$

Обчислимо довжину дуги (якщо межі вказані, то рисунок можна не робити):

$$L = \int_0^{x_0} \frac{a+x}{a-x} dx = \int_0^{x_0} \left(\frac{2a}{a-x} - 1 \right) dx = -2a \ln|x-a| \Big|_0^{x_0} - x \Big|_0^{x_0} = 2a \ln \frac{a}{a-x_0} - x_0.$$

$$L = 2a \ln \frac{a}{a-x_0} - x_0. \quad \blacksquare$$

Задача 11.17. Знайти довжину дуги кривої $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ від

точки $y=1$ до точки $y=2$.

Розв'язання.

Крива L задана в декартовій системі координат рівнянням $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, отже, її довжину знайдемо за формулою:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2(y)} dy.$$

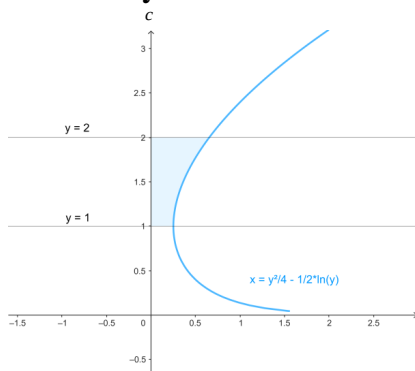


Рис. 11.26

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, \quad x'(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2y}, \quad 1 + x'^2(y) = 1 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left(y^2 - 2 + \frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{4}\left(y^2 + 2 + \frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{y}\right)^2.$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{y}\right)^2} dy = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(y + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} + \ln y\right) \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{3}{4} + \ln \sqrt{2} \text{ (лін. од.)}. \quad \blacksquare$$

Задача 11.18. Знайти радіус кола з центром у початку координат, яке ділить дугу астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$ на три дуги однакової довжини.

Розв'язання.

Запишемо рівняння астроїди (рис. 11.27) у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

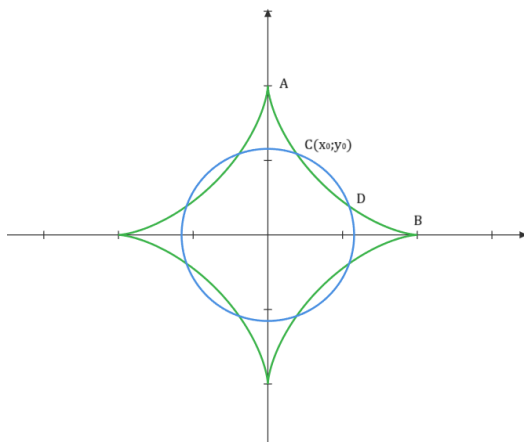


Рис. 11.27

Обчислимо довжину дуги AC , де точки A відповідає параметр $t = 0$, а точки $C - t_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, за формулою:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \text{ де}$$

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t,$$

$$y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t,$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t.$$

$$L = \int_0^{t_0} 3a \sin t \cos t dt = 3a \int_0^{t_0} \sin t d(\sin t) = \frac{3a}{2} \cdot \sin^2 t \Big|_0^{t_0} = \frac{3a}{2} \cdot \sin^2 t_0.$$

Довжина всієї дуги $AB \left(t_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ дорівнює $AB = \frac{3a}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{3a}{2}$.

Отже, довжина дуги AC , яка згідно з умовою задачі, становить третину дуги AB , дорівнює $\frac{a}{2}$ при $t = t_0$:

$$\frac{a}{2} = \frac{3a}{2} \sin^2 t_0 \Rightarrow \sin^2 t_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos t_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Точка $C(x_0, y_0)$ лежить на астроїді, тому $x_0 = \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}, y_0 = \frac{a}{3\sqrt{3}}$,

$OC = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Таким чином, радіус кола дорівнює

$$R = OC = \frac{a}{\sqrt{3}}, \text{ а рівняння кола: } x^2 + y^2 = \frac{a^2}{3}. \quad \blacksquare$$

Задача 11.19. Обчислити довжину петлі кривої $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$.

Розв'язання.

Дослідимо функції $x(t)$ і $y(t)$ залежно від параметра $t \in (-\infty; \infty)$.

$x = \sqrt{3}t^2$	$y = y - t^3$
1. $D(x) = (-\infty; +\infty)$. 2. $x(-t) = \sqrt{3}(-t)^2 = \sqrt{3}t^2 = x(t)$, отже функція $x(t)$ парна. 3. $E(x) = [0; +\infty)$, тобто абсциса x приймає лише невід'ємні значення. 4. Знайдемо значення параметра t, коли $x = 0$: $0 = \sqrt{3}t^2 \Rightarrow t = 0.$ 5. Дослідимо функцію на монотонність: $x'(t) = 2\sqrt{3}t$, $x'(t) = 0 \Rightarrow t = 0$. $x(0) = 0$ $\begin{array}{c} x' \quad - \quad + \\ x \quad \searrow \quad \nearrow \\ t \end{array}$	1. $D(y) = (-\infty; \infty)$. 2. $y(-t) = -(t - t^3) = -y(t)$, отже функція $y(t)$ непарна. 3. $E(y) = (-\infty; \infty)$. 4. $y = 0$: $0 = t - t^3 \Rightarrow t = 0$, або $t = 1$, або $t = -1$. 5. Дослідимо функцію на монотонність: $y'(t) = 1 - 3t^2$, $y'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ або } t = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$ $y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$ $\begin{array}{c} y' \quad - \quad + \quad - \\ y \quad \searrow \quad \nearrow \quad \searrow \\ t \end{array}$

Дослідимо тепер поведінку параметрично заданої функції
 $y = y(x)$, $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$.

Оскільки абсциса $x = \sqrt{3}t^2$ є парною функцією, то крива
 $y = y(x)$ симетрична відносно осі Ox .

Знайдемо точки перетину графіка з віссю абсцис:

$$Ox: \begin{cases} y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t = \pm 1, \end{cases} \\ x_1 = (0), \quad x(1) = x(-1) = \sqrt{3} \end{cases}$$

Одержані точки запишемо в таблицю:

t	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; -\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0)$	0	$(0; \frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$x'(t)$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$x(t)$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$
$y'(t)$	$-$		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$
$y(t)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$

Побудуємо графік функції $y = y(x)$ для додатних значень t , а
потім відобразимо його симетрично осі абсцис (рис. 11.28).

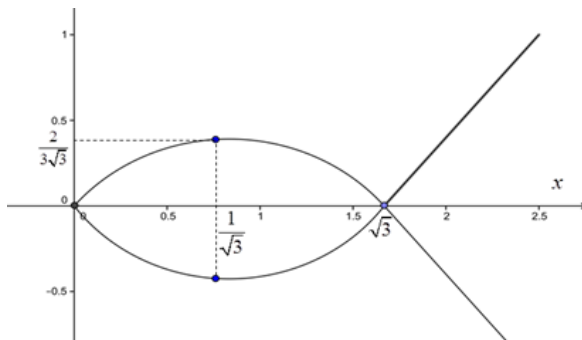


Рис. 11.28

Обчислимо довжину дуги при значеннях $t \in [0; 1]$ і результат
помножимо на 2:

$$L = 2 \int_0^1 \sqrt{(2\sqrt{3}t)^2 + (1-3t^2)^2} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{12t^2 + 1 - 6t + 9t^4} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{(1+3t)^2} dt =$$

$$= 2 \left(t + \frac{3t^2}{2} \right) \bigg|_0^1 = 5 \text{ (лін. од.)}. \quad \blacksquare$$

Задача 11.20. Обчислити довжину замкненої кривої

$$\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$$

Розв'язання.

Функція $\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ парна, отже її графік буде симетричний відносно полярної осі ($\rho(-\varphi) = \rho(\varphi)$). Період функції дорівнює 4π , причому при зміні параметра φ від 0 до 2π значення $\sin^4 \frac{\varphi}{4}$ зростає від 0 до 1, а при зміні φ від 2π до 4π значення $\sin^4 \frac{\varphi}{4}$ спадає від 1 до 0 (рис. 11.29).

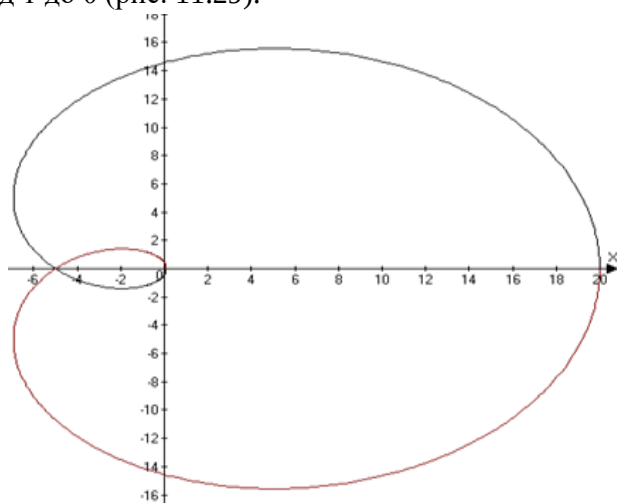


Рис. 11.29

Як і в попередньому прикладі знайдемо довжину дуги, якій відповідає зміна кута φ від 0 до 2π , а результат подвоїмо. Тут

використаємо формулу $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$.

$$\rho'(\varphi) = 4a \sin^3 \frac{\varphi}{4} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \frac{1}{4} = a \sin^3 \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4};$$

$$\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi) = a^2 \sin^8 \frac{\varphi}{4} + a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4} = a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{4}.$$

$$L = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{4}} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{\varphi}{4}\right) \sin \frac{\varphi}{4} d\varphi =$$

$$= 2a \left(-4 \cos \frac{\varphi}{4} \Big|_0^{2\pi} + 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{4} d \left(\cos \frac{\varphi}{4} \right) \right) =$$

$$= 2a \left(4 + 4 \frac{\cos^3 \frac{\varphi}{4}}{3} \Big|_0^{2\pi} \right) = 2a \left(4 + \frac{4}{3} (0 - 1) \right) = \frac{16}{3} a. \quad \blacksquare$$

Довжину дуги кривої можна обчислювати за допомогою програми **Gran1**. Для цього використовується вкладка **Операції, Інтеграли <Довжина дуги>**

Задача 11.21. Знайти довжину дуги кривої $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ від

точки $y=1$ до точки $y=2$.

Розв'язання.

І спосіб (без використання програмного засобу)

Крива задана в декартовій системі координат рівнянням $x = x(y)$, $y \in [c; d]$, отже, її довжину знайдемо за формулою

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2(y)} dy.$$

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, \quad x'(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2y}, \quad 1 + x'^2(y) = 1 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left(y^2 - 2 + \frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{4}\left(y^2 + 2 + \frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{y}\right)^2.$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{y}\right)^2} dy = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(y + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} + \ln y\right) \Big|_1^2 = \frac{3}{4} + \ln \sqrt{2} \approx 1,097. \quad \blacksquare$$

II спосіб (за допомогою програми Gran1)

1) в меню «Список об'єктів» обираємо тип «Явна функція
 $y = y(x)$ »;

2) задаємо аналітичний вираз функції «Об'єкт» «Створити»
та вводимо функцію: $y = 1/4 * (x \wedge 2) - (1/2) * \ln x$;

3) обираємо пункт меню «Графік» «Побудувати»;

4) звертаємося до пункту меню «Операції» «Інтеграл»,
«Довжина дуги». Задаємо межі інтегрування $A=1$, $B=2$, після
чого з'являється вікно з відповідями (Рис. 11.30).

Застосування визначених інтегралів до обчислення площ плоских фігур і довжин плоских кривих

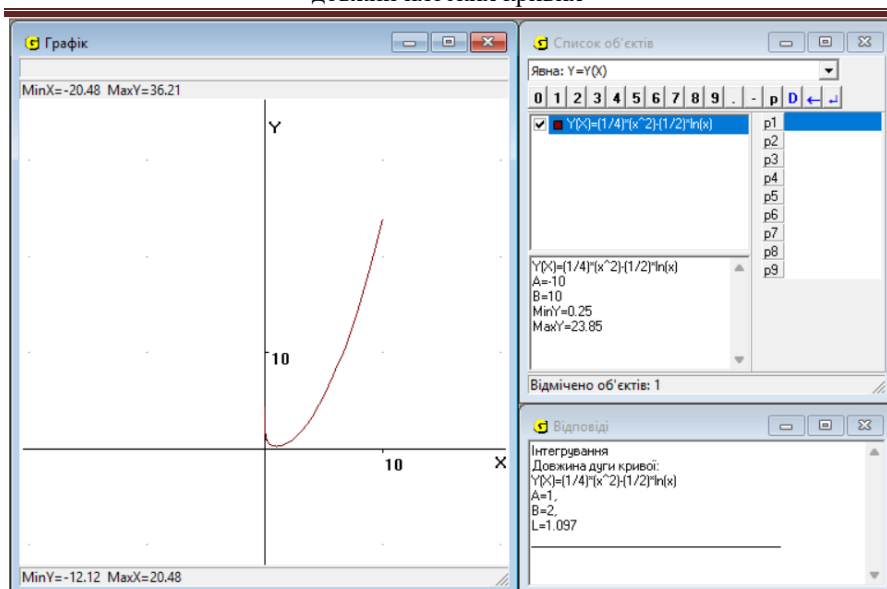
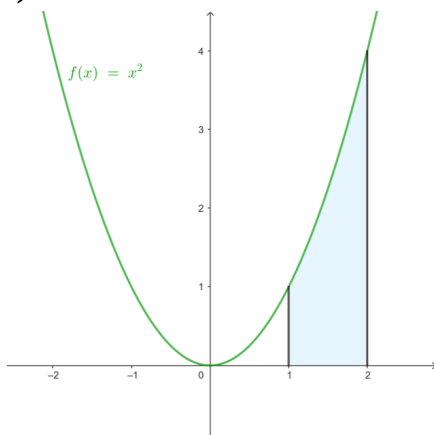


Рис. 11.30. Вікно з відповідями програми Gran1

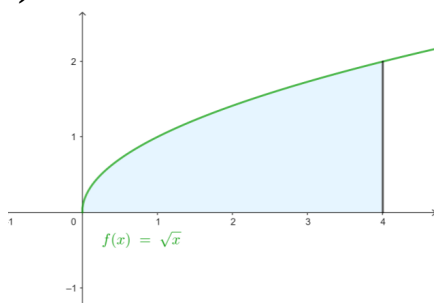
Завдання для самостійного розв'язування

З1. Знайти площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунках.

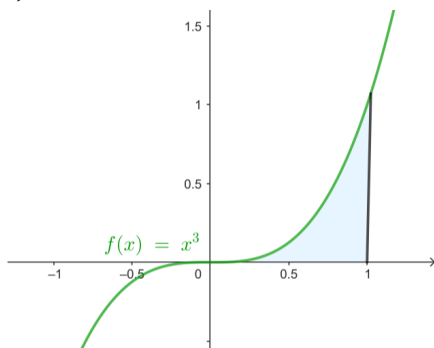
1)



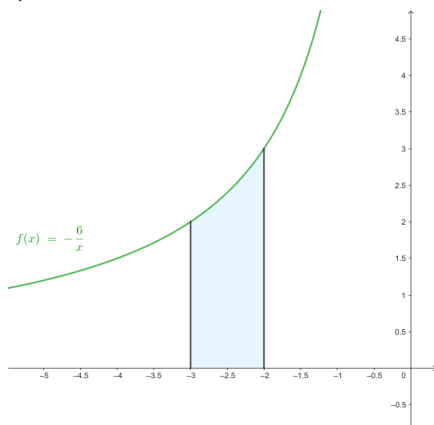
2)



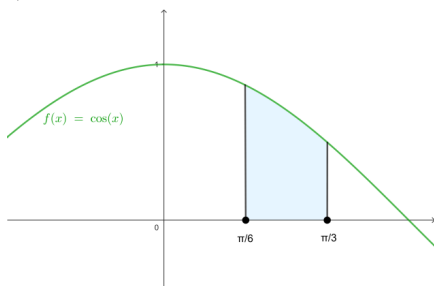
3)



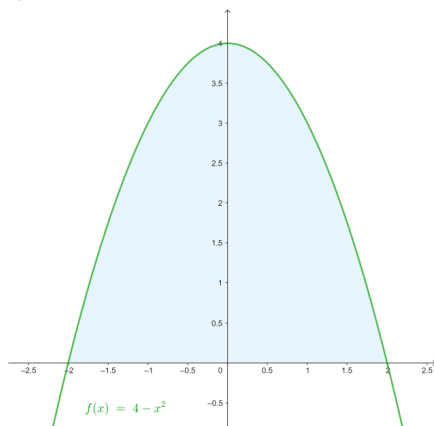
4)



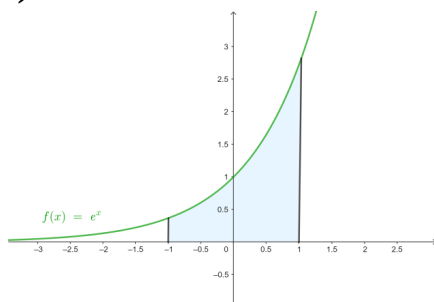
5)



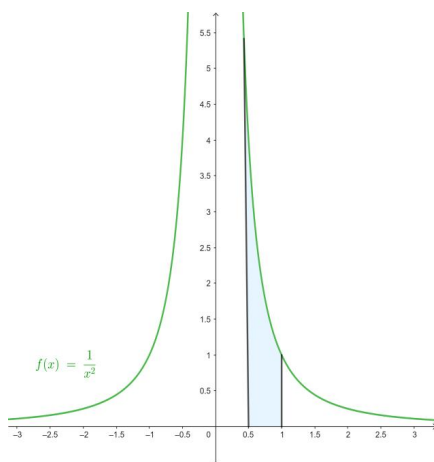
6)



7)

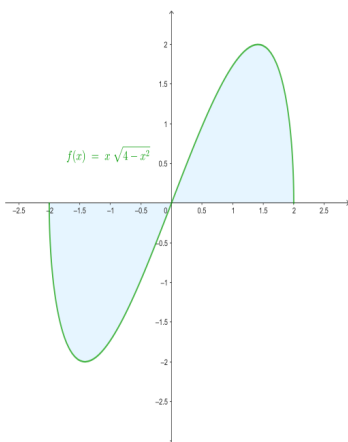


8)

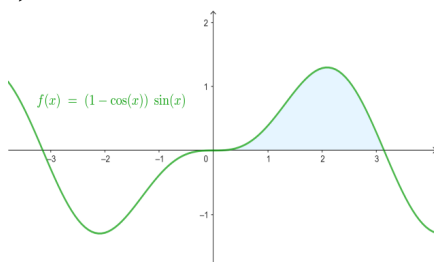


З2. Знайти площу криволінійної трапеції, зображеної на
рисунках.

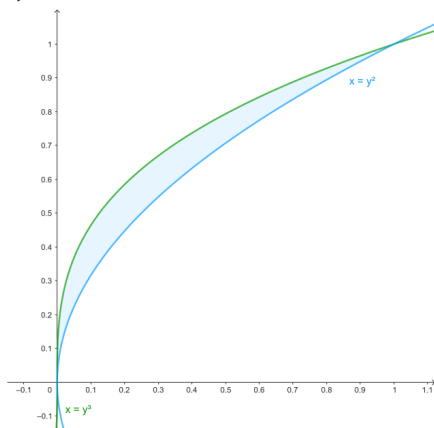
1)



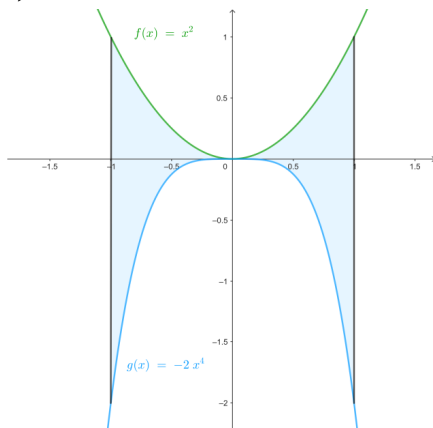
2)



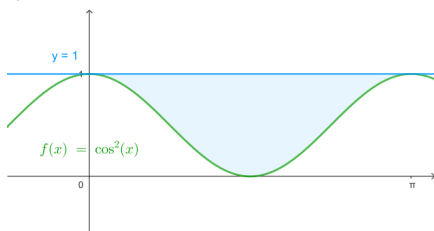
3)



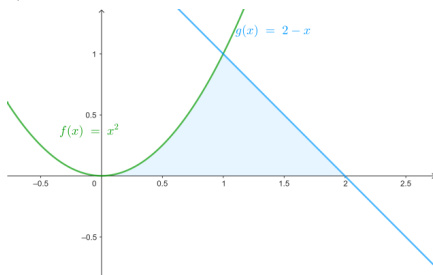
4)



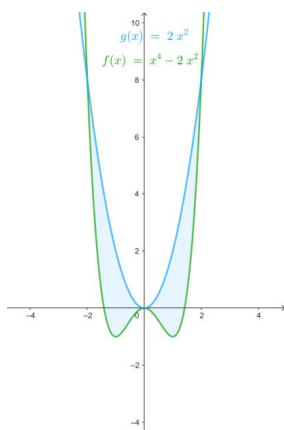
5)



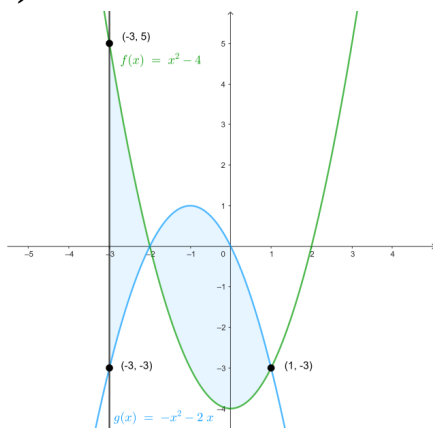
6)



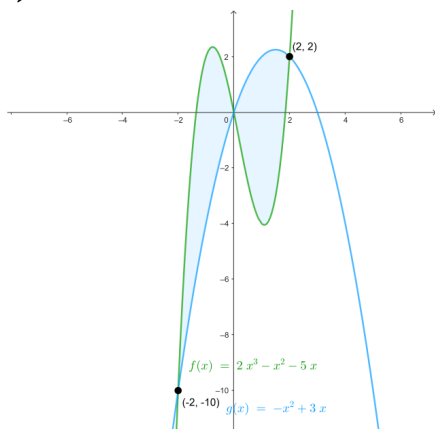
7)



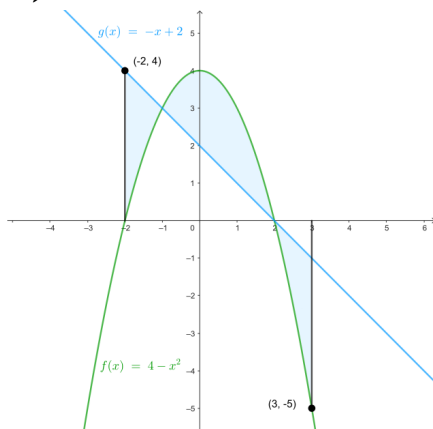
8)



9)



10)



З3. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій:

1) $y = x^3$, $x = 1$, $x = 3$;

2) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$;

3) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 3x$;

4) $y = x^2 + 1$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 2$;

5) $y = -x^2 - 4x$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -1$;

6) $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$;

7) $y = 4(x-2)$, $y = (x-1)^2$, $y = 0$;

8) $y = -x^2 + 2$, $y = x + 2$; 9) $y = 7x - 2x^2$, $y = \frac{7}{2} - x$;

10) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 4 - 2x$; 11) $y = x^2 - 2x - 4$, $y = -x^2$;

12) $y = \sin x$, $y = x^2 - \pi x$;

13) $y = \ln(1+x)$, $y = -xe^{-x}$, $x = 1$;

14) $y = 6x^2 - 5x + 1$, $y = \cos \pi x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$;

15) $y = \frac{6}{x+5}$, $y = |x|$, $x \geq -2$;

16) $y = \sin 2x$, $y = \sin x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$;

17) $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $x = 0$;

18) $y = \arctg \sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.

4. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції:

1) $y = 2x^2 - 8x$, дотичною до цього графіка в точці $(2; -8)$ і віссю ординат;

2) $y = x^2 - 2x + 2$, дотичною до цього графіка в точці $(0; 2)$ і прямою $x = 1$;

3) $y = e^{3x}$, дотичною до цього графіка в точці $(0; 1)$ і прямою $x = 3$;

4) $y = \arcsin x$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$;

5) $y = x^2 + 4x + 9$ і дотичними до цього графіка у точках з абсцисами $x_1 = -3$, $x_2 = 0$;

6) $y = 4x - x^2 + 1$ і дотичними до цього графіка у точках з абсцисами $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

5. До параболи у її вершині A проведена дотична. З точки B параболи опущено перпендикуляр BC на цю дотичну. Довести, що

площа параболічного прямокутного трикутника ABC дорівнює $\frac{ab}{3}$, де $a = AC$, $b = BC$.

№6. Пряма дотикається до параболі в точці A , друга пряма, паралельна осі параболі, перетинає першу пряму в точці B , а параболу – в точці C . Довести, що площа трикутника ABC , обмеженого дугою AC параболі і відрізками AB і BC , дорівнює $\frac{1}{3} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC$.

№7. Пряма дотикається до параболі в точці A , хорда BC параболі паралельна цій прямій. Довести, що площа параболічного сегменту, обмеженого хордою BC і дугою BAC параболі, дорівнює $\frac{4}{3}$ площі трикутника ABC (Архімед).

№8. Обчислити площу фігури, заданої параметрично:

1) $x = at - t^2$, $y = at^2 - t^3$, $a > 0$;

2) $x = t^2 - a^2$, $y = t^3 - a^2t$, $a > 0$;

3) $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$, $c^2 = a^2 - b^2$ (еволюта еліпса);

4) $x = a \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, $y = \frac{2at}{(1+t^2)^2}$ (равлик);

5) $x = \frac{t(1-t^2)}{1+3t^2}$, $y = \frac{4t^2}{1+3t^2}$;

6) $x = r(ncost - \cos nt)$, $y = r(nsint - \sin nt)$, $n-1 \in \mathbb{N}$

(епіциклоїда);

7) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (циклоїда);

8) $x = a \sin 2t$, $y = a \sin t$; $0 \leq t \leq \pi$;

9) $x = a(1 - \cos t) \cos t$, $y = a(1 - \cos t) \sin t$ (кардіоїда);

10) $x = \frac{a \sin 3t}{\sin t}$, $y = \frac{a \sin 3t}{\cos t}$, $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

№9. Обчислити площу фігури, заданої в полярних координатах:

1) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (кардіоида);

2) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемніската Бернуллі);

3) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}$;

4) $\rho = \frac{a}{2\pi} \varphi$ (один виток архімедової спіралі);

5) $\rho = 2\sqrt{3} \cos \varphi$, $\rho = 2a \sin \varphi$;

6) $\rho = a \cos \varphi$, $\rho = a \cos \varphi + a \sin \varphi$.

№10. Обчислити площу фігури, перейшовши до полярних координат:

1) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$;

2) $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4$;

3) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$;

4) $x^4 + y^4 = a^2 (x^2 + y^2)$.

№11. Знайти площу між кривими на площині, використовуючи наступні кроки:

а. Побудувати графіки функцій, щоб побачити, як вони виглядають і скільки точок перетину вони мають.

б. За допомогою чисельного розв'язувача рівнянь знайти усі точки перетину.

с. Проінтегрувати за послідовними парами значень точок перетину.

д. Підсумувати інтеграли, знайдені в частині (с).

1) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$, $g(x) = x - 1$;

2) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 10$, $g(x) = 8 - 12x$;

3) $f(x) = x + \sin 2x$, $g(x) = x^3$;

4) $f(x) = x^2 \cos x$, $g(x) = x^3 - x$.

№12. Знайти довжину кривої:

$$1) y = 2x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 11;$$

$$2) y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}, \quad 0 \leq x \leq 9;$$

$$3) y = \sqrt{2x - x^2} - 1, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq 1; \quad 4) y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad a \leq x \leq b;$$

$$5) y = \ln(\cos x), \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{3};$$

$$6) y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$7) y = \arcsin e^x, \quad -\ln 7 \leq x \leq -\ln 2;$$

$$8) y = 2\left(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}\right), \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$9) y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad x = 0, \quad x = a.$$

№13. Обчислити довжину дуги кривої, заданої параметрично:

$$1) x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad t \in [0; 2\pi];$$

$$2) x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0; 2\pi];$$

$$3) x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1), \quad t \in [0; 1];$$

$$4) x = a \cos^3 t, \quad y = b \sin^3 t, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$5) x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t;$$

$$6) x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t;$$

$$7) x = t^2, \quad y = t \left(\frac{1}{3} - t^2 \right);$$

$$8) x = 2t^3(1 - t^2), \quad y = \sqrt{15}t^4.$$

№14. Обчислити довжину дуги кривої, заданої в полярних координатах:

$$1) \rho = \alpha \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$2) \rho = 1 + \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$3) \rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3};$$

$$4) \rho = \frac{a}{1 + \cos \varphi}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

§ 12. Наближені методи обчислення визначених інтегралів. Творчий проєкт

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Наближені методи інтегрування	Approximate methods of integration
Метод прямокутників	The method of rectangles
Метод трапецій	Method of trapezoids
Метод Сімпсона	Simpson's method
Похибка при наближених обчисленнях визначеного інтеграла	Error in the approximate calculation of the definite integral
Абсолютна похибка	Absolute error
Відносна похибка	Relative error

1. Які є наближені методи обчислення визначених інтегралів?

Виділяють такі наближені методи обчислення визначених інтегралів:

- 1) метод прямокутників;
- 2) метод трапецій;
- 3) метод Сімпсона.

2. У чому полягає суть наближеного методу прямокутників?

Формула прямокутників.

Відрізок $[a, b]$ поділимо на n рівних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ і побудуємо n прямокутників з

основами $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ і висотами відповідно:

$$y_0 = f(a) = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_k = f(x_k), \quad \dots, \quad y_{n-1} = f(x_{n-1}).$$

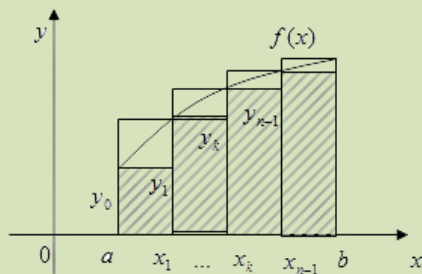


Рис. 12.1

Визначений інтеграл наближено дорівнює сумі площ прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}).$$

Якщо ж взяти за висоти прямокутників значення функції у правих кінцях відрізків $[x_k; x_{k+1}]$:

$$y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_k = f(x_k), \quad \dots, \quad y_n = f(b) = f(x_n), \quad \text{то}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

3. У чому полягає суть наближеного методу трапецій?

Формула трапецій.

Поділимо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин і побудуємо n трапецій з однаковими висотами $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ і основами y_k і y_{k+1} ($k = \overline{0, n-1}$).

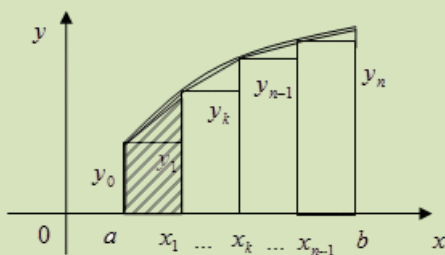


Рис. 12.2

Визначений інтеграл наближено дорівнює сумі площ трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right).$$

4. У чому полягає суть наближеного методу Сімпсона?

Формула Сімпсона (параболічна формула).

Поділимо відрізок $[a, b]$ на $2n$ рівних частини точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} = b$. Ординати цих точок тоді будуть $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$. Формула Сімпсона набере вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})).$$

5. Записати похибку для кожного наближеного методу обчислення визначених інтегралів.

Похибка формули прямокутників:

$$R_n = f'(\xi) \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Похибка формули трапецій:

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Похибка формули Сімпсона:

$$R_n = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 12.1. Обчислити методами прямокутників, трапецій і Сімпсона визначений інтеграл $\int_0^1 e^x dx$, обчислення проводити з п'ятьма десятковими знаками після коми. Відрізок інтегрування поділити на 8 рівних частин.

Розв'язання.

Знайдемо точний розв'язок з допомогою формули Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1 \approx 2,71828 - 1 = 1,71828.$$

Далі обчислимо наближено цей інтеграл методами прямокутників, трапецій та Сімпсона.

I. Метод прямокутників. Використаємо формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})). \quad (12.1)$$

Якщо $n=8$, то $\frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8} = 0,125$, а точками поділу будуть: $x_0 = 0$, $x_1 = 0,125$, $x_2 = 0,250$, $x_3 = 0,375$, $x_4 = 0,500$, $x_5 = 0,625$, $x_6 = 0,750$, $x_7 = 0,875$, $x_8 = 1$.

Обчислимо значення функції у точках поділу:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= e^0 \approx 1,00000, & f(x_1) &= e^{0,125} \approx 1,13315, \\ f(x_2) &= e^{0,250} \approx 1,28402, & f(x_3) &= e^{0,375} \approx 1,45499, \\ f(x_4) &= e^{0,500} \approx 1,64872, & f(x_5) &= e^{0,625} \approx 1,86824, \\ f(x_6) &= e^{0,750} \approx 2,11700, & f(x_7) &= e^{0,875} \approx 2,39888, \\ f(x_8) &= f(1) \approx 2,71828 & \sum_{k=0}^{8-1} f(x_k) &= 12,90500. \end{aligned}$$

Підставимо одержані значення у формулу (12.1), одержимо наближене значення інтеграла: $I \approx 0,125 \cdot 12,90500 = 1,61312$.

Абсолютна величина похибки складає $\Delta = |1,71828 - 1,61312| = 0,10516$, а відносна – $\delta = \frac{0,10516}{1,71828} \cdot 100 = 6,12$

%. Така точність явно недостатня. Отже, щоб досягти бажаної точності потрібно збільшити кількість точок поділу, що приведе до збільшення кількості обчислень.

Похибка при наближеному обчисленні визначених інтегралів методом прямокутників знаходиться за формулою:

$$R_n = f'(\xi) \frac{(b-a)^2}{2n} \quad (12.2)$$

Оцінимо для інтеграла залишковий член:

$$R_n = e^\xi \cdot \frac{1}{2 \cdot n} < \frac{2,8}{2n} = \frac{1,4}{n} < \frac{1}{100000} = 10^{-5}, \text{ звідки } n > 140000.$$

Отже, щоб забезпечити точність до п'ятого знаку після коми, потрібно взяти 140001 точку поділу! ■

II. Метод трапецій. Використаємо формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (12.3)$$

Кількість точок поділу така сама: $n=8$, $\frac{b-a}{n} = 0,125$, відповідно точки поділу і значення функції ті ж самі, що і в методі прямокутників.

Обчислимо:

$$\frac{y_0 + y_8}{2} \approx \frac{1}{2} (1,00000 + 2,71828) = 1,85914, \quad \sum_{k=1}^7 y_k = 11,90500.$$

Підставимо значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n-1}$ у формулу (12.3), одержимо наближене значення інтеграла: $I \approx 0,125 \times (1,85914 + 11,90500) = 1,72052$. Абсолютна величина похибки складає 0,00224, а відносна – 0,13%. Робимо висновок, що метод

Наближені методи обчислення визначених інтегралів. Творчий проєкт трапецій швидше приводить до потрібного результату, ніж метод прямокутників.

Похибка при наближеному обчисленні визначених інтегралів методом трапецій знаходиться за формулою:

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \xi \in [a, b] \quad (12.4)$$

Оцінимо для інтеграла залишковий член:

$$R_n = e^{\xi} \cdot \frac{1}{12n^2} < \frac{2,8}{12n^2} = \frac{7}{30n^2} < \frac{1}{100000} = 10^{-5}, \text{ звідки } n > 152,7.$$

Отже, щоб забезпечити точність до п'ятого знаку після коми, потрібно взяти вже лише 153 точки поділу! ■

Обчислення визначеного інтеграла за допомогою програми GeoGebra

Для обчислення площі криволінійної трапеції використовується вкладка *Трапецеїдальна сума* [*Функція*], [*Початкове значення*], [*Кінцеве значення*], [*Число трапецій*].

- 1) В рядок введення пишемо функцію $f(x) = e^x$;
- 2) Створюємо повзунок n – кількість трапецій, $a=0$, $b=1$ – межі інтегрування;

- 3) Обчислюємо площу. Для цього серед функцій знаходимо:

Трапецеїдальна сума [f , a , b , n] (Рис 12.3).

Рухаючи повзунок ми змінюємо кількість трапецій і бачимо, як змінюється значення нашого інтегралу та легко можемо оцінити похибку обчислень. При $n=1$ наша похибка досить велика – 0,138.

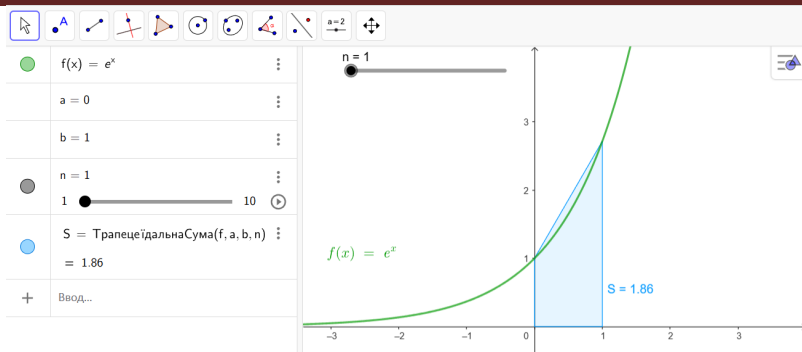


Рис 12.3. Обчислення визначеного інтеграла методом трапецій у Geogebra

Чим більша кількість трапецій ти менша похибка обчислень. При $n \geq 5$ наближене значення інтеграла $a=1,72$ (Рис. 12.4)

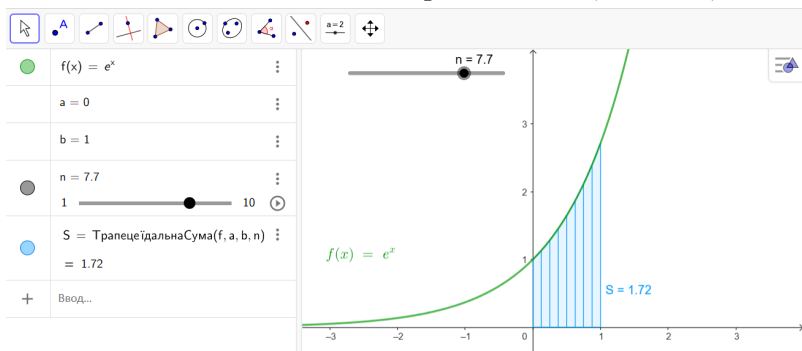


Рис. 12.4. Обчислення визначеного інтеграла методом трапецій у Geogebra

III. Метод Сімпсона. Використаємо формулу (12.5):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}))$$

Відрізок поділено на 8 рівних частин, тому $2n=8$, $n=4$,

$$\frac{b-a}{6n} = \frac{1}{24} = 0,041667, \quad S_1 = y_0 + y_8 \approx 3,71828,$$

$$S_2 = 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) \approx 4 \cdot 6,85526 = 27,42104,$$

$$S_3 = 2(y_2 + y_4 + y_6) \approx 2 \cdot 5,04974 = 10,09948.$$

Підставимо значення S_1, S_2, S_3 у формулу (12.5), одержимо наближене значення інтеграла:

$$I \approx 0,041667 \cdot (3,71828 + 27,42104 + 10,09948) = 1,71829.$$

Робимо висновок, що після коми тут уже маємо правильних чотири цифри, в той час, як формула трапецій давала лише одну правильну цифру. Абсолютна величина похибки складає 0,00001, а відносна – 0,0006%, а це є досить висока точність результату.

Похибка при наближеному обчисленні визначених інтегралів методом Сімпсона знаходиться за формулою:

$$R_n = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (12.6)$$

Оцінимо для інтеграла залишковий член:

$$R_n = e^\xi \cdot \frac{1}{180n^4} < \frac{2,8}{180n^4} = \frac{7}{450n^2} < \frac{1}{100000} = 10^{-5}, \text{ звідки } n > 6,3.$$

Отже, щоб забезпечити точність до п'ятого знаку після коми, потрібно взяти вже лише 8 точок поділу (оскільки число точок поділу у формулі Сімпсона має бути парним числом)! ■

Задача 12.2. *Знайти число π , користуючись визначеним інтегралом $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ (з шістьма правильними знаками число $\frac{\pi}{4} \approx 0,785398$).*

Розв'язання.

Відрізок інтегрування поділимо на $n=10$ рівних частин точками: $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,2$; $x_3 = 0,3$; $x_4 = 0,4$; $x_5 = 0,5$; $x_6 = 0,6$; $x_7 = 0,7$; $x_8 = 0,8$; $x_9 = 0,9$; $x_{10} = 1,0$.

I. Метод прямокутників. Використаємо формулу (12.1).

Якщо $n=10$, то $\frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10} = 0,1$. Обчислимо значення

функції в точках поділу:

$$f(x_0) = \frac{1}{1+0^2} = 1,000000,$$

$$f(x_1) = \frac{1}{1+0,1^2} = \frac{1}{1,01} \approx 0,990099,$$

$$f(x_2) = \frac{1}{1+0,2^2} = \frac{1}{1,04} \approx 0,961538,$$

$$f(x_3) = \frac{1}{1+0,3^2} = \frac{1}{1,09} \approx 0,917431,$$

$$f(x_4) = \frac{1}{1+0,4^2} = \frac{1}{1,16} \approx 0,862069,$$

$$f(x_5) = \frac{1}{1+0,5^2} = \frac{1}{1,25} \approx 0,800000,$$

$$f(x_6) = \frac{1}{1+0,6^2} = \frac{1}{1,36} \approx 0,735294,$$

$$f(x_7) = \frac{1}{1+0,7^2} = \frac{1}{1,49} \approx 0,671141,$$

$$f(x_8) = \frac{1}{1+0,8^2} = \frac{1}{1,64} \approx 0,609756,$$

$$f(x_9) = \frac{1}{1+0,9^2} = \frac{1}{1,81} \approx 0,552486,$$

$$f(x_{10}) = \frac{1}{1+1,0^2} = \frac{1}{2,00} = 0,500000,$$

$$\sum_{k=0}^{10-1} f(x_k) \approx 7,099814.$$

Підставимо значення $f(x_k)$ у формулу (12.1), одержимо наближене значення числа π : $\frac{\pi}{4} \approx 0,1 \cdot 7,099814 = 0,70998$, $\pi \approx 3$.

Порівнюючи із значенням в умові задачі, бачимо, що абсолютна величина похибки складає 0,075418, а відносна – 9,6%. Така точність є незначною. Отже, щоб досягти бажаної точності потрібно збільшити кількість точок поділу, що приведе до збільшення кількості обчислень. ■

II. Метод трапецій. Використаємо формулу (12.3). Обчислимо:

$$\frac{y_0 + y_{10}}{2} \approx \frac{1}{2}(1,00000 + 0,500000) = 0,5 \cdot 1,5 = 0,750000,$$

$$\sum_{k=1}^9 y_k = 7,099814.$$

Підставимо значення $y_k = f(x_k)$ у формулу (12.3), одержимо наближене значення числа:

$$\frac{\pi}{4} \approx 0,1 \cdot (0,750000 + 7,099814) = 0,784881.$$

Якщо заокруглити це до трьох десяткових знаків після коми, то одержимо 0,785, або три правильні цифри, а число $\pi \approx 4 \cdot 0,784981 = 3,139924 \approx 3,14$. Абсолютна величина похибки складає 0,000517, а відносна – 0,066%. Робимо висновок, що метод трапецій швидше приводить до потрібного результату, ніж метод прямокутників. ■

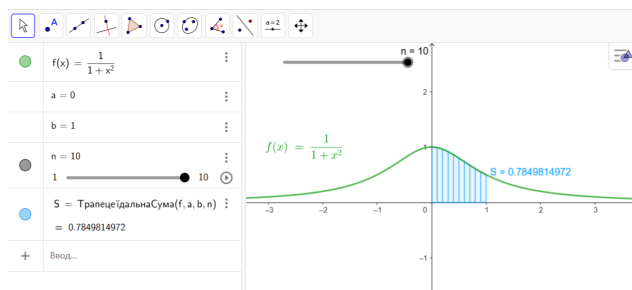


Рис. 12.5. Обчислення визначеного інтеграла методом трапецій у Geogebra

III. Метод Сімпсона. Використаємо формулу (12.5). Відрізок

поділено на 10 рівних частин, тому $2n=10$, $n=5$, $\frac{b-a}{6n} = \frac{1-0}{30}$,

$$S_1 = y_0 + y_{10} \approx 1,500000, \quad S_2 = 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) \approx 4 \cdot 3,931157 = 15,724628, \\ S_3 = 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) \approx 2 \cdot 3,168657 = 6,337314.$$

Підставимо значення S_1 , S_2 , S_3 у формулу (12.5), одержимо наближене значення числа:

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{30} \cdot (1,500000 + 15,724628 + 6,337314) = \frac{1}{30} \cdot 23,561942 = 0,785398,$$

тобто отримано значення числа $\frac{\pi}{4}$ з шістьма (!!!) правильними цифрами. $\pi = 4 \cdot 0,785398 = 3,141592$. ■

Задача 12.3. Обчислити число $\ln 2$ з похибкою 10^{-4} , користуючись визначенням інтегралом $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2$.

Розв'язання.

Використаємо формулу прямокутників:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2} \right), \quad (12.6)$$

яка використовується на практиці, а залишковий член знаходиться за формулою:

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (12.7)$$

Оцінимо другу похідну підінтегральної функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на

відрізка $[1; 2]$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $|f''(x)| = \frac{2}{x^3} \leq 2$, отже

$$R_n \leq \frac{1}{24n^2} \cdot 2 \leq 10^{-4}, \quad \text{звідки} \quad n^2 \geq \frac{10000}{36} \cdot 3 = 833,33, \quad \text{або} \quad n \geq 28,8.$$

Тому достатньо взяти $n=29$, тобто розбити відрізок на 29 рівних частин.

Оцінимо тепер залишковий член за допомогою формули Сімпсона:

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}, \quad \left| f^{(4)}(x) \right| = \frac{24}{x^5} \leq 24, \quad \text{отже}$$

$$R_n \leq \frac{24}{180n^4} \leq 10^{-4}, \quad \text{звідки } n^4 \geq \frac{4000}{3} = 1333, (3), \quad \text{або } n \geq 6,04. \quad \text{Тому}$$

достатньо взяти $n=8$, тобто розбити відрізок на 8 рівних частин. Бачимо, що в цьому випадку число точок поділу відрізка значно менше ($8 < 29$), тому обчислення проведемо за формулою Сімпсона

з $n=8$ і п'ятьма знаками після коми. Точки поділу: $x_0=1$; $x_1=1,125$; $x_2=1,250$; $x_3=1,375$; $x_4=1,500$; $x_5=1,625$; $x_6=1,750$; $x_7=1,875$; $x_8=2,000$, а значення функції в точках поділу рівні: $y_0=1,00000$; $y_1=0,88889$; $y_2=0,80000$; $y_3=0,72777$; $y_4=0,66667$; $y_5=0,61538$; $y_6=0,57146$; $y_7=0,53333$; $y_8=0,50000$.

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx \frac{1}{24} \left((y_0 + y_8) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) \right) = \\ &= \frac{1}{24} (1,50000 + 2 \cdot 2,03809 + 4 \cdot 2,76487) = 0,6931525 \approx 0,6931. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язування

№1. Обчислити інтеграли наближено за формулою прямокутників з кроком h та оцінити похибку:

$$1) \int_0^2 x^4 dx, \quad h=0,2;$$

$$2) \int_0^{\pi} \sin x dx, \quad h=\frac{\pi}{6};$$

$$3) \int_1^5 \frac{dx}{x}, \quad h=0,4;$$

$$4) \int_1^5 \frac{dx}{1+x^4}, \quad h=0,5;$$

$$5) \int_0^2 e^{x^2} dx, \quad h = 0,2;$$

$$6) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx, \quad h = 0,2.$$

З2. Обчислити наближено за формулою трапецій з кроком h інтеграли та оцінити похибку:

$$1) \int_2^9 \frac{dx}{x-1}, \quad h = 1;$$

$$2) \int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}, \quad h = 1;$$

$$3) \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx, \quad h = \frac{1}{8};$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, \quad h = 0,1;$$

$$5) \int_2^5 \ln^2 x dx, \quad h = 0,5;$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0,25\sin^2 x} dx, \quad h = \frac{\pi}{12}.$$

З3. Обчислити наближено за формулою Сімпсона з кроком h інтеграли та оцінити похибку:

$$1) \int_1^3 \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx, \quad h = 0,5;$$

$$2) \int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx, \quad h = 0,1;$$

$$3) \int_0^2 e^{-x^2} dx, \quad h = 0,5;$$

$$4) \int_0^2 e^{x^2} dx, \quad h = 0,2.$$

З4. Обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца, а також наближено за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона інтеграли та оцінити похибку:

$$1) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx; \quad n = 4;$$

$$2) \int_0^{0,8} \cos x dx; \quad n = 10;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; \quad n = 6;$$

$$4) \int_{0,1}^{0,7} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad n = 8.$$

Творчий проєкт

«Обчислення визначених інтегралів»

Інструкція і план для написання творчого проєкту з обчислень визначених інтегралів для студентів СВО Бакалавр спеціальностей Е7 Математика та А4.01 Середня освіта (Математика).

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли методами: Ньютона-Лейбніца, прямокутників, трапеції, Сімпсона, за допомогою програм Geogedra та GRAN.

$$\begin{aligned}
 1) \quad I_1 &= m^2 \int_0^{\pi/m} (ax+b) \sin mx \, dx; & 2) \quad I_2 &= n^2 \int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} (Ax+B) \cos nx \, dx; \\
 3) \quad I_3 &= r^2 \int_0^{1/r} (px+q) e^{rx} \, dx; & 4) \quad I_4 &= \int_0^{1/c} (2Mx+N) \operatorname{arctg}(cx) \, dx; \\
 5) \quad I_5 &= \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + m) \, dx,
 \end{aligned}$$

де $a, b, m, A, B, n, p, q, r, M, N, c$ – відповідні параметри (табл.12.1), число k визначає викладач.

Таблиця 12.1

№	a	b	m	A	B	n	p	q	r	M	N	c
1	$k+2$	9	$2k+3$	$\frac{k+8}{k+3}$	6	$k+6$	$32k$	4	$8k$	$k+5$	5	$4k-1$
2	$k+9$	3	$3k+1$	$\frac{k+9}{k+8}$	2	$k+2$	$18k$	3	$6k$	$k+1$	7	$2k+1$
3	$k+3$	7	$5k-3$	$\frac{k+7}{k+6}$	4	$k+1$	$48k$	6	$8k$	$k+2$	5	$2k+3$

Схема дій

1. Обчислити інтеграли, використовуючи відомі методи інтегрування та формулу Ньютона-Лейбніца.

Приклад. 1) $I_1 = m^2 \int_0^{\pi/m} (ax + b) \sin mx \, dx; \quad k = 4, \quad a = 8, \quad b = 4,$

$m = 9.$

$$I_1 = 81 \int_0^{\pi/9} (8x + 4) \sin 9x \, dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} I_1 &= 9^2 \int_0^{\pi/9} (8x + 4) \sin 9x \, dx = 81 \int_0^{\pi/9} (8x \sin 9x + 4 \sin 9x) \, dx = \\ &= 81 \left(\int_0^{\pi/9} 8x \sin 9x \, dx + \int_0^{\pi/9} 4 \sin 9x \, dx \right) = 81 \left(8 \int_0^{\pi/9} x \sin 9x \, dx + 4 \int_0^{\pi/9} \sin 9x \, dx \right) = \\ &= \left| \begin{array}{ll} \int u \, dv = uv - \int v \, du \\ u = x & du = dx \\ dv = \sin 9x & v = \cos 9x \end{array} \right| = 81 \left(8 \left(-\frac{1}{9} x \cos 9x \right) \Big|_0^{\pi/9} + \frac{1}{9} \int_0^{\pi/9} \cos 9x \, dx \right) - \\ &- 4 \left(\frac{1}{9} \cos 9x \right) \Big|_0^{\pi/9} = 81 \left(8 \frac{\pi}{81} + \frac{1}{81} \sin 9x \Big|_0^{\pi/9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \right) = 8\pi + 72 = 97,13 \end{aligned}$$

Відповідь. $8\pi + 72.$

2. Обчислити інтеграл за допомогою програм: Geogebra та GRAN.

Приклад. Обчислимо визначений інтеграл

$$I_1 = 81 \int_0^{\pi/9} (8x + 4) \sin 9x \, dx \text{ за допомогою програм } \textbf{Geogebra} \text{ і } \textbf{GRAN}.$$

І спосіб (за допомогою програми GeoGebra)

1) у рядок введення записуємо функцію $f(x) = (8x + 4) \sin 9x;$

2) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих

функцій обираємо *Інтеграл* $[f, a, b]$, де $a = 0$, $b = \frac{\pi}{9}$;

3) оскільки біля інтегралу стоїть число, тому нам потрібно в рядок введення записати вираз $I = c \cdot 81$, одержимо $I = 97,13$ (рис. 12.6).

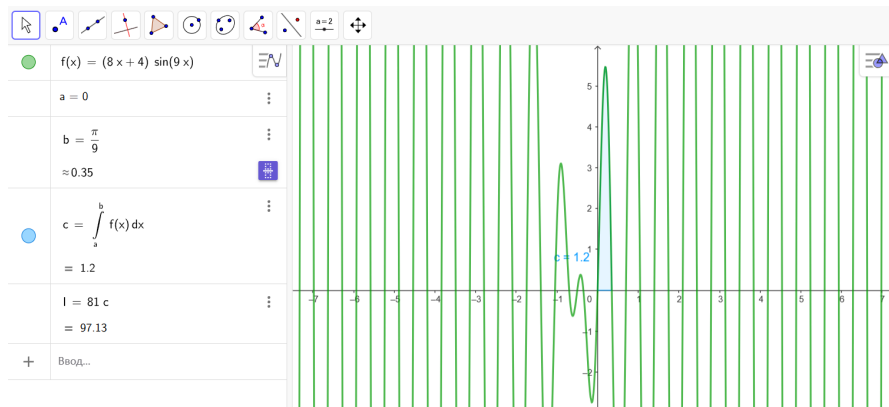


Рис. 12.6. Обчислення визначеного інтеграла у Geogebra

II спосіб (за допомогою програми GRAN)

1) в меню «Список об'єктів» встановлюємо тип «Явна функція $y=y(x)$ »;

2) задаємо аналітичний вираз функції «Об'єкт» «Створити», та записуємо функцію $y = (8 \cdot x + 4) \cdot \sin(9 \cdot x)$;

3) обираємо пункт меню «Графік» «Побудувати» (Рис. 12.7);

4) знову звертаємося до пункту меню натискаємо «Операції» «Інтеграл», після чого з'являється вікно, де задаємо межі інтегрування $A = 0$, $B = \pi / 9$ (Рис. 12.7). Оскільки біля інтегралу стоїть число необхідно дописати вираз: $I \cdot 81 = 97,11$

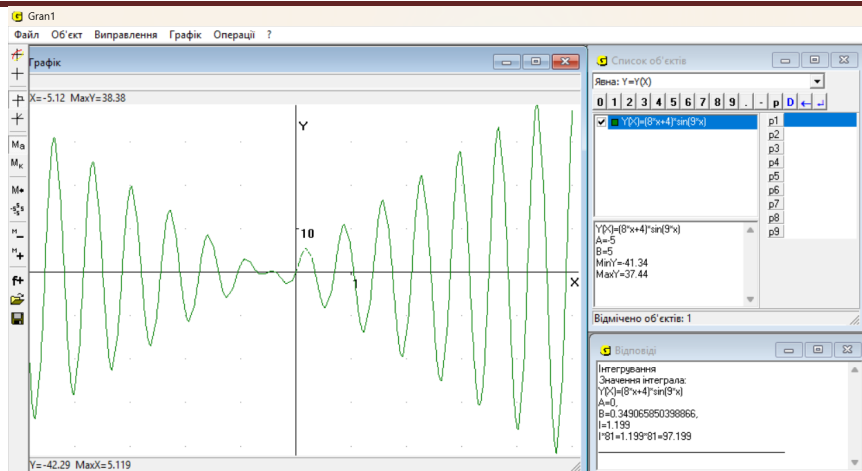


Рис. 12.7. Графік функції у Gran

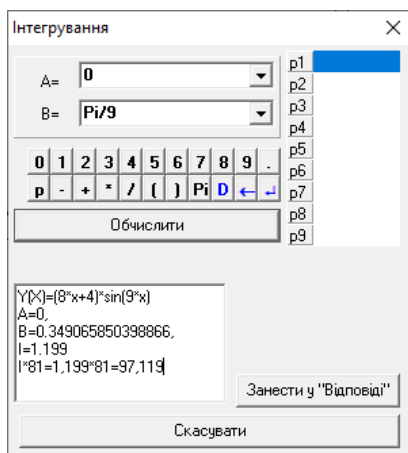


Рис. 12.8. Вікно відповідей у Gran

Як бачимо, за допомогою засобів комп'ютерної математики обчислювати визначені інтеграли набагато зручніше та швидше.

3. Обчислити похибку в середовищі Microsoft Excel для $n=5$ та $n=10$.

Приклад. (обчислення похибки в середовищі Microsoft Excel для $n=9$) (Рис. 12.9).

	A	B	C	D	E	F
	a	b	n	$(b-a)^3/(24 \cdot n^2)$	$f'(y)$	$f''(y)$
1						
2	0	0.34907	9	0.0000218789	$81 \cdot (8 \cdot \sin(9 \cdot x) + (8 \cdot x + 4) \cdot \cos(9 \cdot x))^9$	$81 \cdot (8 \cdot \cos(9 \cdot x) \cdot 9 + (8 \cdot \cos(9 \cdot x) + (8 \cdot x + 4) \cdot (-\sin(9 \cdot x) \cdot 9))^9$
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10					$f''(\xi)$	R_n
11					56229.76836	1.230246459
12						
13						
14						
15						

Рис. 12.9. Обчислення похибки в середовищі Microsoft Excel

При обчисленні похибок на практиці слід застосовувати

формули: $R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, – додатковий член формули

прямокутників, $R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, – додатковий член

формули трапецій, $R_n = -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, – додатковий член формули Сімпсона (параболічної формули).

Для обчислення похідних функцій зручно застосовувати середовище Advanced Grapher 2.2.

4. Виконати аналогічні операції з обчислення даного визначеного інтеграла методом трапецій та методом Сімпсона. У кожному випадку порівняти точний результат і три наближених для кожного інтеграла.

5. Зробити відповідні висновки.

Систематизувати наближені методи обчислення визначених інтегралів, зрозуміти їх практичне застосування. Проаналізувати та порівняти кожен з методів, визначити похибки при обчисленнях різними методами, встановити точність результату в залежності від розбиття даної підінтегральної функції на заданому проміжку. Порівняти методи обчислень визначених інтегралів. Набути практичних вмінь та навичок при користуванні програмним забезпеченням (Microsoft Office) та проаналізувати засоби комп'ютерної математики Geogebra і GRAN1.

Зразок виконання творчого проєкту студентами

Обчислити визначений інтеграл $I_2 = 9 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\frac{2}{7}x + 4) \cos 3x dx$

методами: Ньютона-Лейбніца, прямокутників, трапеції, Сімпсона, за допомогою програм Geogebra та GRAN.

Розв'язання.

$$I_2 = 9 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\frac{2}{7}x + 4) \cos 3x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \frac{2}{7}x + 4 & dv = \cos 3x dx \\ du = \frac{2}{7} dx & v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| =$$

$$= 9 \left(\frac{1}{3} \left(\frac{2}{7}x + 4 \right) \sin 3x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx \right) =$$

$$= 3 \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{\pi}{6} + 4 - \frac{2}{7} \cdot \frac{\pi}{6} + 4 + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} \cos 3x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \right) = 3 \left(8 + \frac{2}{21} (0 - 0) \right) = 24.$$

GeoGebra Графічний Калькулятор

ЗАВДАННЯ УВІЙТИ

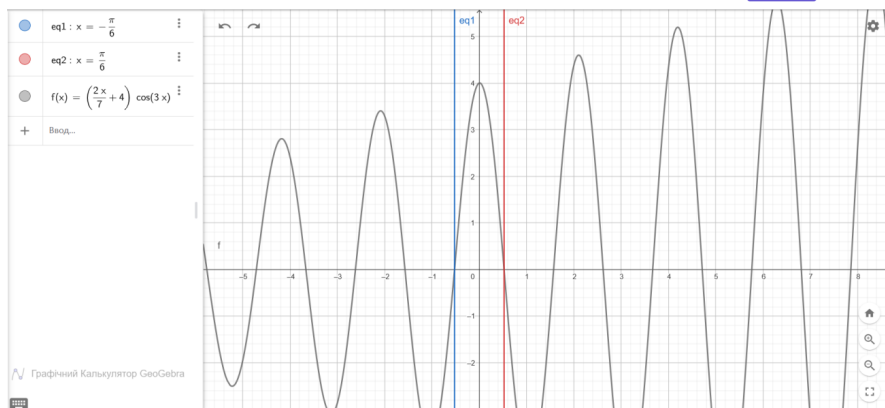


Рис. 12.10

Наближені методи обчислення визначених інтегралів. Творчий проєкт

n= 5		x		x(1/2,...)		y	
a = -pi/6	-0,5236	x0	-0,523598776	x(1/2)=	-0,41887902	y(x(1/2))=	10,79176419
b = pi/6	0,5236	x1	-0,314159265	x(3/2)=	-0,20943951	y(x(3/2))=	28,68890862
delta(x(k))	0,20944	x2	-0,104719755	x(5/2)=	-1,38778E-17	y(x(5/2))=	36
ksi	0,01	x3	0,104719755	x(7/2)=	0,20943951	y(x(7/2))=	29,56031497
		x4	0,314159265	x(9/2)=	0,41887902	y(x(9/2))=	11,4574594
		x5	0,523598776				
						I=	24,39937772
						Похибка =	-0,399377723
n= 10		x		x(1/2,...)		y	
a = 0	-0,5236	x0	-0,523598776	x(1/2)=	-0,471238898	y(x(1/2))=	5,442080157
b = pi/5	0,5236	x1	-0,41887902	x(3/2)=	-0,366519143	y(x(3/2))=	15,91578202
delta(x(k))	0,10472	x2	-0,314159265	x(5/2)=	-0,261799388	y(x(5/2))=	24,97982095
ksi	0,01	x3	-0,20943951	x(7/2)=	-0,157079633	y(x(7/2))=	31,71634036
		x4	-0,104719755	x(9/2)=	-0,052359878	y(x(9/2))=	35,42379821
		x5	0	x(11/2)=	0,052359878	y(x(11/2))=	35,68976231
		x6	0,104719755	x(13/2)=	0,157079633	y(x(13/2))=	32,43612938
		x7	0,20943951	x(15/2)=	0,261799388	y(x(15/2))=	25,93186729
		x8	0,314159265	x(17/2)=	0,366519143	y(x(17/2))=	16,77153396
		x9	0,41887902	x(19/2)=	0,471238898	y(x(19/2))=	5,821201326
		x10	0,523598776				
						I=	24,09898089
						Похибка =	-0,098980895
n= 5		x		y			
a = -pi/6	-0,5236	x0	-0,523598776	y(x(0))=	2,12279E-15		
b = pi/6	0,5236	x1	-0,314159265	y(x(1))=	20,68543375		
delta(x(k))	0,20944	x2	-0,104719755	y(x(2))=	33,98193469		
ksi	0,01	x3	0,104719755	y(x(3))=	34,49413449		
		x4	0,314159265	y(x(4))=	21,63510441		
		x5	0,523598776	y(x(5))=	2,28774E-15		
				I=	23,20518718		
				Похибка =	0,794812823		
n= 10		x		y			
a = -pi/6	-0,5236	x0	-0,523598776	y(x(0))=	2,12279E-15		
b = pi/6	0,5236	x1	-0,41887902	y(x(1))=	10,79176419		
delta(x(k))	0,10472	x2	-0,314159265	y(x(2))=	20,68543375		
ksi	0,01	x3	-0,20943951	y(x(3))=	28,68890862		
		x4	-0,104719755	y(x(4))=	33,98193469		
		x5	0	y(x(5))=	36		
		x6	0,104719755	y(x(6))=	34,49413449		
		x7	0,20943951	y(x(7))=	29,56031497		
		x8	0,314159265	y(x(8))=	21,63510441		
		x9	0,41887902	y(x(9))=	11,4574594		
		x10	0,523598776	y(x(10))=	2,28774E-15		
				I=	23,80228245		
				Похибка =	0,19771755		
n= 10		x		y			
a = -pi/6	-0,5236	x0	-0,523598776	y(x(0))=	2,12279E-15		
b = pi/6	0,5236	x1	-0,41887902	y(x(1))=	10,79176419		
delta(x(k))	0,10472	x2	-0,314159265	y(x(2))=	20,68543375		
ksi	0,01	x3	-0,20943951	y(x(3))=	28,68890862		
		x4	-0,104719755	y(x(4))=	33,98193469		
		x5	0	y(x(5))=	36		
		x6	0,104719755	y(x(6))=	34,49413449		
		x7	0,20943951	y(x(7))=	29,56031497		
		x8	0,314159265	y(x(8))=	21,63510441		
		x9	0,41887902	y(x(9))=	11,4574594		
		x10	0,523598776	y(x(10))=	2,28774E-15		
				I=	24,00131421		
				Похибка =	-0,001314208		

Рис. 12.11

Блакитний колір – метод прямокутників, жовтий колір – метод трапецій, зелений колір – метод Сімпсона.

§ 13. Застосування чисельних методів в інтегральному численні

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Чисельне інтегрування	Numerical Integration
Метод лівих, правих і центральних прямокутників	The Left, Right Hand Rule and The Midpoint Rule Methods
Формули Ньютона-Котеса	Newton–Cotes formulas
Метод (правило) трапецій	The Trapezoidal Rule
Метод (правило) Сімпсона	Simpson’s Rule
Квадратура Гаусса-Лежандра	Gauss-Legendre Quadrature
Квадратурна формула Чебишева	Chebyshev quadrature formula
Квадратура Річардсона-Ромберга	Richardson–Romberg quadrature
Графічне інтегрування	Graphical integration
Похибка обчислення (аналіз похибок)	Error Analysis

1. Постановка задачі чисельного інтегрування.

Нехай I_n – наближене значення, R_n – похибка обчислення (залишковий член) визначеного інтегралу $I = \int_a^b f(x) dx$. Відповідно $I = I_n + R_n$.

Основний спосіб наближеного обчислення визначених інтегралів полягає в інтерполяції підінтегральної функції $f(x)$ такою іншою $\Phi(x)$, щоб, по-перше, можна було просто її

проінтегрувати, по-друге, забезпечити необхідну точність результату. Відповідні формули чисельного інтегрування називаються **квадратурними**. Така назва пояснюється геометричним змістом знаходження визначеного інтегралу.

Квадратурні формули базуються на обчисленні функції $f(x)$ на певній сітці $\Omega = \{x_i, i=1, 2, \dots, n\}$ проміжка $[a, b]$. Найчастіше на практиці застосовуються квадратурні формули такого вигляду: $I_n = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$, де A_i та x_i називаються **ваговими коефіцієнтами** (множниками) та **вузлами** (абсцисами) квадратурної формули відповідно. Бажано, щоб коефіцієнти квадратурної формули були одного знаку. Тоді оцінка похибок заокруглень – мінімальна. Вузли x_i квадратурної формули попарно різні. Квадратурна формула називається **закритою**, якщо $x_0 = a$ та $x_n = b$, і **відкритою**, якщо $x_0 > a$ та $x_n < b$.

Всього в формулі $2(n+1)$ вільних параметрів A_i та x_i . Від їх вибору залежить похибка методу обчислення визначеного інтегралу, так щоб вона була найменша.

2. Теорема про інтерполяційні квадратурні формули.

Для того, щоб квадратурна формула була інтерполяційною, необхідно і достатньо, щоб вона була точною для будь-якого многочлена степеня не більше n .

3. Метод прямокутників.

За означенням визначений інтеграл є границею його інтегральних сум, тобто:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

де точки ξ_i вибирають довільно з проміжків розбиття, довжини яких позначаються числами Δx_i . Ідея методу полягає в розбитті

відрізку інтегрування на частини й побудові прямокутників, що опираються на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ й мають висоту $f(\xi_i)$.

Якщо розбиття відрізку рівномірне, то $x_i = a + ih$, де h – крок:
 $h = \frac{b-a}{n}$, $i = \overline{0, n}$. Інтеграл вважається наближено рівним сумі площ побудованих прямокутників.

Узагальнена квадратурна формула прямокутників:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

де $\xi_i \in (x_i - x_{i-1})$.

В залежності від вибору ξ_i розрізняють формули лівих, правих і середніх прямокутників.

Нехай $\xi_i = x_{i-1}$, **формула лівих прямокутників** має вигляд:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \text{для нерівновіддалених вузлів},$$

$$I_n = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) - \text{для рівновіддалених вузлів}.$$

Порядок точності формули – перший, $O(h)$.

Нехай $\xi_i = x_i$, **формула правих прямокутників** має вигляд:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \text{для нерівновіддалених вузлів},$$

$$I_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i) - \text{для рівновіддалених вузлів}.$$

Порядок точності формули – перший, $O(h)$.

Якщо $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, то **формула середніх прямокутників**:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) - \text{для нерівновіддалених вузлів},$$

$$I_n = h \sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) - \text{для рівновіддалених вузлів.}$$

Порядок точності формули – другий, $O(h^2)$.

Геометричний зміст формули прямокутників полягає у тому, що криволінійна трапеція замінюється східчастою фігурою, що складається з прямокутників.

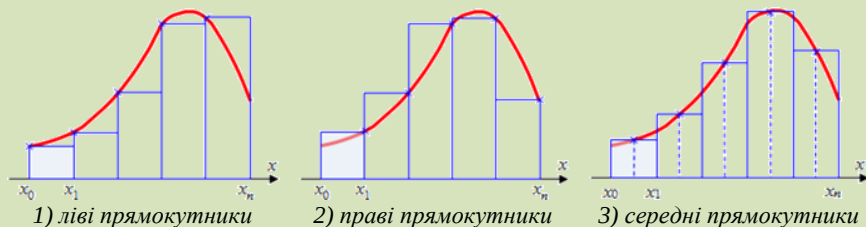


Рис. 13.1. Інтегрування методом прямокутників

Формули лівих та правих прямокутників можна використати для аналітично та графічно заданих функцій. Метод середніх прямокутників може бути використаний для знаходження визначеного інтеграла тільки від аналітично заданих функцій.

4. Формули Ньютона-Котеса.

Виберемо крок $h = \frac{b-a}{n}$ і розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин точками $x_0 = a, x_i = x_0 + ih, i = \overline{1, n-1}, x_n = b$. Позначимо $f_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$.

Замінімо функцію $f(x)$ під знаком інтеграла відповідним інтерполяційним многочленом Лагранжа для рівновіддалених точок (вузлів). Маємо:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i,$$

де A_i – сталі коефіцієнти.

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{t^{[n+1]}}{t-i} dx.$$

Якщо $t = \frac{x - x_0}{h}$, то $dt = \frac{dx}{h}$.

Зробимо заміну змінних у визначеному інтегралі:

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t^{[n+1]}}{t-i} dt, \quad i = \overline{0, n}.$$

Оскільки $h = \frac{b-a}{n}$, то вважатимемо $A_i = (b-a)H_i$,

$$\text{де } H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t^{[n+1]}}{t-i} dt, \quad i = \overline{0, n}$$

H_i – сталі, що називаються **коефіцієнтами Котеса**.

Квадратурна формула при цьому набуде вигляду:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i,$$

$$\text{де } h = \frac{b-a}{n} \text{ та } f_i = f_i(a + ih), i = \overline{0, n}.$$

Для коефіцієнтів Котеса справедливі співвідношення:

$$1) \sum_{i=0}^n H_i = 1; \quad 2) H_i = H_{n-i}.$$

Застосовуючи формулу коефіцієнтів Котеса на рівномірній сітці з кроком $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = \overline{0, n}$, $f_i = f_i(a + ih)$, $\xi \in [a, b]$ матимемо квадратурні формули Ньютона-Котеса різних порядків, де n – кількість відрізків розбиття.

Для 2 точок (метод трапецій), $n = 1$

$$I_1[f] \approx \frac{1}{2} h (f_0 + f_1),$$

$$R_1 = \frac{1}{12} h^3 f''(\xi), \text{ де } \xi \in [x_0, x_1].$$

Розділивши відрізок $[a, b]$ на n рівних частин $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ і до кожного застосувавши метод трапецій, маємо складену (узагальнену) формулу трапецій (правило трапецій).

Для 3 точок (метод Сімпсона), $n = 2$

$$I_2[f] \approx \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2),$$

$$R_2 = \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi), \text{ де } \xi \in [x_0, x_2].$$

Застосовуючи метод Сімпсона до кожного подвоєного проміжку $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{2m-2}, x_{2m}]$ довжини $2h$, отримаємо складену (узагальнену) формулу Сімпсона (параболічну формулу).

Формули Ньютона-Котеса вищих порядків**Для 4 точок (квадратурна формула Ньютона – правило трьох восьмих), $n = 3$**

$$I_3[f] \approx \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3),$$

$$R_3 = \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi), \text{ де } \xi \in [x_0, x_3].$$

При однаковому кроці формула Ньютона менш точна, ніж формула Сімпсона.

Для 5 точок (метод Буля), $n = 4$

$$I_4[f] \approx \frac{2}{45}h(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4),$$

$$R_4 = \frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi), \text{ де } \xi \in [x_0, x_4].$$

Для 6 точок, $n = 5$

$$I_5[f] \approx \frac{5}{288}h(19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5),$$

$$R_5 = \frac{275}{12096}h^7 f^{(6)}(\xi), \text{ де } \xi \in [x_0, x_5].$$

Для 7 точок, $n = 6$

$$I_6[f] \approx \frac{1}{140}h(41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 41f_6),$$

$$R_6 = \frac{9}{1400} h^9 f^{(8)}(\xi), \text{ де } \xi \in [x_0, x_6].$$

Для 8 точок, $n = 7$

$$I_7[f] \approx \frac{7}{17280} h(751f_0 + 3577f_1 + 1323f_2 + 2989f_3 + 2989f_4 + \\ + 1323f_5 + 3577f_6 + 751f_7),$$

$$R_7 = \frac{8183}{518400} h^9 f^{(8)}(\xi), \text{ де } \xi \in [x_0, x_7].$$

Для 9 точок, $n = 8$

$$I_8[f] \approx \frac{4}{14175} h(989f_0 + 5888f_1 - 928f_2 + 10496f_3 - 4540f_4 + \\ + 10496f_5 - 928f_6 + 5888f_7 + 989f_8),$$

$$R_8 = \frac{2368}{467775} h^{11} f^{(10)}(\xi), \text{ де } \xi \in [x_0, x_8].$$

Для 10 точок, $n = 9$

$$I_9[f] \approx \frac{9}{89600} h(2857f_0 + 15741f_1 + 1080f_2 + 19344f_3 + 5778f_4 + \\ + 5778f_5 + 19344f_6 + 1080f_7 + 15741f_8 + 2857f_9),$$

$$R_9 = \frac{173}{14620} h^{11} f^{(10)}(\xi), \text{ де } \xi \in [x_0, x_9].$$

5. Квадратурна формула Чебишева.

Квадратура Чебишова має вигляд:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{b-a}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)),$$

$$\text{де } x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \ (i = \overline{1, n}),$$

t_i мають указані в таблиці значення.

Числоординат n	Значення абсцис t_i
$n = 2$	$-t_1 = t_2 = 0,577350;$
$n = 3$	$-t_1 = t_3 = 0,707107;$ $t_2 = 0;$

$n = 4$	$-t_1 = t_4 = 0,794654;$ $-t_2 = t_3 = 0,187592;$
$n = 5$	$-t_1 = t_5 = 0,832498;$ $-t_2 = t_4 = 0,374541;$ $t_3 = 0;$
$n = 6$	$-t_1 = t_6 = 0,866247;$ $-t_2 = t_5 = 0,422519;$ $-t_3 = t_4 = 0,266635;$
$n = 7$	$-t_1 = t_7 = 0,883862;$ $-t_2 = t_6 = 0,529657;$ $-t_3 = t_5 = 0,323912;$ $t_4 = 0;$

При $n = 8$ серед вузлів(абсцис) x_i існують два комплексних.

При будь-яких $n \geq 10$ серед x_i також є комплексні.

Квадратура Чебишева використовується в кораблебудуванні.

6. Квадратурна формула Гаусса-Лежандра.

Квадратура Гаусса-Лежандра має вигляд:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) = \frac{b-a}{2} (A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n)),$$

$$\text{де } x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \quad (i = \overline{1, n}),$$

t_i та A_i мають указані в таблиці значення.

Число ординат n	Значення абсцис t_i	Значення вагових коефіцієнтів A_i
$n = 1$	$t_1 = 0;$	$A_1 = 2;$
$n = 2$	$-t_1 = t_2 = 0,57735027;$	$A_1 = A_2 = 1;$
$n = 3$	$-t_1 = t_3 = 0,77459667;$ $t_2 = 0;$	$A_1 = A_3 = 0,55555556;$ $A_2 = 0,88888889;$
$n = 4$	$-t_1 = t_4 = 0,86113631;$ $-t_2 = t_3 = 0,33998104;$	$A_1 = A_4 = 0,34785484;$ $A_2 = A_3 = 0,65214516;$

$n = 5$	$-t_1 = t_5 = 0,90617985;$ $-t_2 = t_4 = 0,53846931;$ $t_3 = 0;$	$A_1 = A_5 = 0,23692688;$ $A_2 = A_4 = 0,47862868;$ $A_3 = 0,56888889;$
$n = 6$	$-t_1 = t_6 = 0,93246951;$ $-t_2 = t_5 = 0,66120939;$ $-t_3 = t_4 = 0,23861919;$	$A_1 = A_6 = 0,17132450;$ $A_2 = A_5 = 0,36076158;$ $A_3 = A_4 = 0,46791394;$
$n = 7$	$-t_1 = t_7 = 0,94910791;$ $-t_2 = t_6 = 0,74153119;$ $-t_3 = t_5 = 0,40584515;$ $t_4 = 0;$	$A_1 = A_7 = 0,12948496;$ $A_2 = A_6 = 0,27970540;$ $A_3 = A_5 = 0,38183006;$ $A_4 = 0,41795918;$
$n = 8$	$-t_1 = t_8 = 0,96028986;$ $-t_2 = t_7 = 0,79666648;$ $-t_3 = t_6 = 0,52553242;$ $-t_4 = t_5 = 0,18343464.$	$A_1 = A_8 = 0,10122854;$ $A_2 = A_7 = 0,22238104;$ $A_3 = A_6 = 0,31370664;$ $A_5 = A_4 = 0,36268378.$

$$\text{Залишковий член } R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3 (2n+1)}.$$

Квадратурна формула Гаусса-Лежандра використовується в машинобудуванні.

7. Квадратурна формула Гаусса-Лагерра.

Квадратура Гаусса-Лагерра має вигляд:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n),$$

де x_i та A_i мають указані в таблиці значення.

Число ординат n	Значення абсцис x_i	Значення вагових коефіцієнтів A_i
$n = 2$	$x_1 = 0,585786;$ $x_2 = 3,414214;$	$A_1 = 0,853553;$ $A_2 = 0,146447;$
$n = 3$	$x_1 = 0,415775;$ $x_2 = 2,294280;$ $x_3 = 6,289945;$	$A_1 = 0,711093;$ $A_2 = 0,278518;$ $A_3 = 0,0103893;$

$n = 4$	$x_1 = 0,322548;$ $x_2 = 1,745761;$ $x_3 = 4,536620;$ $x_4 = 9,395071.$	$A_1 = 0,603154;$ $A_2 = 0,357419;$ $A_3 = 0,0388879;$ $A_4 = 0,000539295.$

Залишковий член $R_n = \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), (0 \leq \xi < +\infty), (\alpha > -1).$

8. Квадратурна формула Гаусса-Ерміта.

Квадратура Гаусса-Ерміта має вигляд:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n),$$

де x_i та A_i мають указані в таблиці значення.

Число ординат n	Значення абсцис x_i	Значення вагових коефіцієнтів A_i
$n = 2$	$-x_1 = x_2 = 0,707107;$	$A_1 = A_2 = 0,886227;$
$n = 3$	$-x_1 = x_3 = 1,224745;$ $x_2 = 0;$	$A_1 = A_3 = 1,181636;$ $A_2 = 0,295409;$
$n = 4$	$-x_1 = x_4 = 0,524648;$ $-x_2 = x_3 = 1,650680.$	$A_1 = A_4 = 0,804914;$ $A_2 = A_3 = 0,0813128.$

Залишковий член: $R_n = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi), (-\infty < \xi < +\infty).$

9. Формули деяких модифікованих квадратур.

Квадратурою Гаусса-Радая (або квадратура Радая) називають таку n точкову квадратуру, яка точна для поліномів порядку не вище $2n-3$, але початкова точка інтервалу інтегрування включена в список вузлів квадратури, тоді як визначається решта $n-1$ вузол. Формула для інтеграла на проміжку $[-1,1]$ з l -ю ваговою функцією подається у вигляді:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_1 f(-1) + \sum_{i=2}^n A_i f(x_i) = A_1 f(-1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n),$$

де x_i та A_i мають указані в таблиці значення.

Число ординат n	Значення абсцис x_i	Значення вагових коефіцієнтів A_i
$n = 2$	$x_1 = -1;$ $x_2 = 0,33333333;$	$A_1 = 0,5;$ $A_2 = 1,6;$
$n = 3$	$x_1 = -1;$ $x_2 = 0,28989795;$ $x_3 = 0,68989795;$	$A_1 = 0,22222222;$ $A_2 = 1,02497165;$ $A_3 = 0,75280613;$
$n = 4$	$x_1 = -1;$ $x_2 = -0,575319;$ $x_3 = 0,181066;$ $x_4 = 0,822824;$	$A_1 = 0,125;$ $A_2 = 0,657689;$ $A_3 = 0,776387;$ $A_4 = 0,440924;$
$n = 5$	$x_1 = -1;$ $x_2 = -0,72048;$ $x_3 = -0,167181;$ $x_4 = 0,446314;$ $x_5 = 0,885792.$	$A_1 = 0,08;$ $A_2 = 0,446208;$ $A_3 = 0,623653;$ $A_4 = 0,562712;$ $A_5 = 0,287427.$

Залишковий член: $R_n = \frac{2^{2n-1} n[(n-1)!]^4}{[(2n-1)!]^3} f^{(2n-1)}(\xi), (-1 < \xi < 1).$

Квадратура Гаусса-Лобатто (або **квадратура Лобатто**) – це така n точкова квадратура, яка точна для поліномів порядку не вище $2n-3$, але початкова і кінцева точки інтервалу інтегрування включені в список вузлів квадратури, тоді як визначається решта $n-2$ вузли. Формула для інтеграла на проміжку $[-1,1]$ з 1-ю ваговою функцією:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_1 f(-1) + A_n f(1) + \sum_{i=2}^{n-1} A_i f(x_i) =$$

$$= A_1 f(-1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_{n-1} f(x_{n-1}) + A_n f(1),$$

де x_i та A_i мають указані в таблиці значення.

Число ординат n	Значення абсцис x_i	Значення вагових коефіцієнтів A_i
$n = 3$	$-x_1 = x_3 = 1;$ $x_2 = 0;$	$A_1 = A_3 = 1,33333333;$ $A_2 = 0,33333333;$

$n = 4$	$-x_1 = x_4 = 1;$ $-x_2 = x_3 = 0,44721360;$	$A_1 = A_4 = 0,16666667;$ $A_2 = A_3 = 0,83333333;$
$n = 5$	$-x_1 = x_5 = 1;$ $-x_2 = x_4 = 0,65465367;$ $x_3 = 0;$	$A_1 = A_5 = 0,1;$ $A_2 = A_4 = 0,54444444;$ $A_3 = 0,71111111;$
$n = 6$	$-x_1 = x_6 = 1;$ $-x_2 = x_5 = 0,76505532;$ $-x_3 = x_4 = 28523151.$	$A_1 = A_6 = 0,66666667;$ $A_2 = A_5 = 0,37847496;$ $A_3 = A_4 = 0,55485838.$

$$\text{Залишковий член: } R_n = \frac{-n(n-1)^3 2^{2n-1} [(n-2)!]^4}{(2n-1)[(2n-2)!]^3} f^{(2n-2)}(\xi) (-1 < \xi < 1).$$

10. Квадратура Річардсона-Ромберга.

Квадратура Річардсона-Ромберга є алгоритмічною модифікацією формули трапецій, що забезпечує пришвидшення обчислень.

Для методу трапецій розкладання похибки наближеного інтегрування в степеневий ряд показує наявність в розкладі тільки парних степенів:

$$\Delta_d(h) = a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \dots = \sum_{i=1}^n a_i h^{2i}.$$

Значення коефіцієнтів розкладання a_i не залежить від значень кроку інтегрування h та положення вузлів сітки і можуть бути визначені як:

$$a_i = C_i \left(f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a) \right),$$

де C_i – коефіцієнт розкладання в ряд Тейлора функції:

$$\varphi(x) = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)}.$$

Розглянемо значення формули трапецій для кроків h та $\frac{h}{2}$

$$S_d(h) = S + \Delta_d(h) = S + a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \dots$$

$$S_d\left(\frac{h}{2}\right) = S + \Delta_d\left(\frac{h}{2}\right) = S + a_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^4 + a_3\left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots$$

Відніmemo від значення інтеграла для кроку h значення інтеграла для кроку $\frac{h}{2}$:

$$4S_d\left(\frac{h}{2}\right) - S_d(h) = 4S + \frac{4a_1h^2}{4} + \frac{4a_2h^4}{16} + \frac{4a_3h^6}{64} + \dots$$

$$\dots - S - a_1h^2 - a_2h^4 - a_3h^6 - \dots = 3S - \frac{3a_2h^4}{4} - \frac{7a_3h^6}{8} - \dots$$

Звідси:

$$S = \frac{4S_d\left(\frac{h}{2}\right) - S_d(h)}{3} = +\Delta', \Delta' = a_2 \frac{h^4}{4} + a_3 \frac{7h^6}{24} + \dots$$

Тобто, значення інтегралу зі зменшеною похибкою ($\Delta' < \Delta$) можна отримати не безпосереднім обчисленням завдяки зменшенню кроку інтегрування, а простими арифметичними перетвореннями значень інтегрування, що зроблені на попередніх кроках.

Ітераційна формула Ромберга має вигляд:

$$I_{d_k}(h) = \frac{2^{2k} I_{d_{k-1}}\left(\frac{h}{2}\right) - I_{d_{k-1}}(h)}{2^{2k} - 1}.$$

Послідовність дій інтегрування за методом Річардсона-Ромберга наведено в таблиці.

Таблиця. Алгоритм Річардсона-Ромберга

i		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
1	$I_d(h)$				
2	$I_d\left(\frac{h}{2}\right)$	$I_{d_1}(h)$	$I_{d_2}(h)$		
3	$I_d\left(\frac{h}{4}\right)$	$I_{d_1}\left(\frac{h}{2}\right)$		$I_{d_3}(h)$	
4	$I_d\left(\frac{h}{8}\right)$	$I_{d_1}\left(\frac{h}{4}\right)$	$I_{d_2}\left(\frac{h}{2}\right)$		

5	$I_d\left(\frac{h}{16}\right)$	$I_{d_1}\left(\frac{h}{8}\right)$	$I_{d_2}\left(\frac{h}{4}\right)$	$I_{d_3}\left(\frac{h}{2}\right)$	$I_{d_4}(h)$

11. Графічне інтегрування.

Задача графічного інтегрування полягає в тому, щоб за графіком неперервної функції $y = f(x)$ побудувати графік функції її первісної $F(x) = \int_a^x f(x)dx$.

Тобто, необхідно побудувати таку криву $y = F(x)$, ордината в кожній точці якої чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції з основою $[a; x]$, обмеженою заданою кривою $y = f(x)$.

Для наближеної побудови графіка первісної функції $y = F(x)$ розбиваємо площу відповідної криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, на вузькі вертикальні смужки за допомогою ординат, проведених у точках $x_0, x_1, \dots (a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots)$ (рис. 13.2).

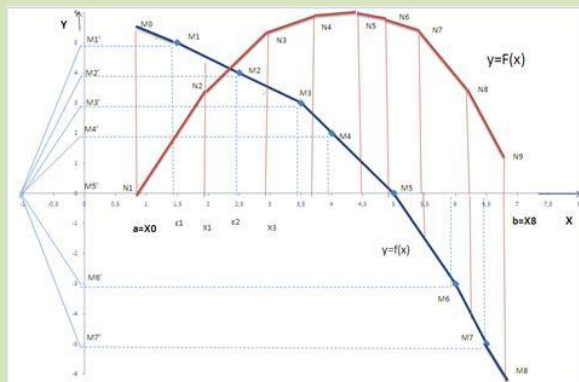


Рис. 13.2. Геометрична інтерпретація графічного інтегрування

Кожну з таких смужок замінюємо, використовуючи теорему про середнє значення, рівновеликим (по можливості) прямокутником з тією ж основою і висотою, що дорівнює $f(\xi_i)$, де $\xi_i (i=1,2,\dots)$ деяка проміжна точка i -го відрізка

$$[x_{i-1}; x_i], \text{ тобто: } \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

де $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ($i=1,2,\dots$).

Значення первісної функції $F(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx$ у точках x_i

можна знайти методом нагромадження: $F(x_0) = 0$;

$$F(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_{i-1}} f(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = F(x_{i-1}) + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$$(i = 1, 2, \dots).$$

Нехай $M_1(\xi_1; f(\xi_1))$, $M_2(\xi_2; f(\xi_2))$, ... - відповідні точки кривої $y = f(x)$. Проектуючи їх на вісь Оу одержимо точки $M'_1, M'_2, \dots$ (рис. 13.2).

Виберемо тепер еталонну точку P із відстанню $OP=1$ й проведемо промені $PM'_1, PM'_2, \dots$. Знаходимо первісну функції $y = f(x)$ - криву $y = F(x)$ наближено можна замінити ламаною $N_0N_1N_2N_3\dots$ з вершинами $N_0(x_0; 0)$, $N_1(x_1; F(x_1))$, $N_2(x_2; F(x_2))$, ... Послідовні ланки цієї ламаної будуть паралельними до відповідних променів, а саме:

$$N_0N_1 \parallel PM'_1, N_1N_2 \parallel PM'_2, N_2N_3 \parallel PM'_3, \dots$$

Справді, кутовий коефіцієнт ланки $N_{i-1}N_i$

$$k = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} = f(\xi_i).$$

У силу побудови кутовий коефіцієнт променів OM'_i , якщо

$$k'_i = \frac{f(\xi_i)}{1} = f(\xi_i).$$

Отже, $N_{i-1}N_i \parallel OM'_i$ ($i=1,2,\dots$).

Таким чином, побудова графіка функції $y = F(x)$ виконується так.

Із точки $N_0(x_0; 0)$ проводимо пряму N_0N_1 , паралельну променю OM_1' , до перетину в точці N_1 з вертикаллю $x = x_1$.

Із точки N_1 проводимо пряму N_1N_2 паралельну променю OM_2' , до перетину в точці N_2 з вертикаллю $x = x_2$ й т. д.

Зауважимо, що під час реалізації методу графічного інтегрування, точки x_i ($i = 0, 1, \dots$) не обов'язково брати рівновіддаленими.

Приклади розв'язування вправ

Зауважимо, що обчислення невизначених інтегралів у СКМ Махіта виконується функцією **integrate** (вираз, змінна інтегрування). Відповідь комп'ютер видає в наступному після задання рядку, але без довільної сталої C . Обчислення визначеного інтегралу здійснюється тією ж функцією **integrate** (вираз, змінна інтегрування, a, b), що і невизначеного, тільки після змінної інтегрування вказуються через кому нижня і верхня межі інтегрування.

Слід пам'ятати, що деякі математичні функції мають відмінне від звичного вираження, наприклад, **tg** замінено на **tan**, **ctg** – на **cot**, **arctg** – на **atan**. Функція **ln** має вигляд **log**, а логарифми за основами, відмінними від числа e , не розглядаються, або повинні бути приведені до основи e . Чудові числа, такі як те ж e , записуються зі значком **%** перед ними. Тобто, e записується як **%e**, π – як **%pi**. Всі функції записуються з маленької літери, а змінні у функціях вводяться в дужках. Наприклад, $\tan x$ записується як **tan(x)**. Знак множення вводиться знаком *****. Степінь вводиться за допомогою значка **^**.

Всі команди вводяться в поле **ВВЕДЕННЯ**, роздільником команд є символ **;** (крапка з комою). Після введення команди необхідно натиснути клавішу **Enter** для її обробки і виведення результату. У **wxMaxima** необхідно натиснути **Shift+Enter**. У ранніх версіях **Maxima** та деяких її оболонках (наприклад, **xMaxima**) наявність крапки з комою після кожної команди строго обов'язкова. Завершення введення символом **\$** (замість крапки з комою) дозволяє обчислити результат введеної команди, але не виводити його на екран.

Після введення кожній команді присвоюється порядковий номер (**%i1**), (**%i2**) і т. д. Результат обчислення також має порядковий номер, наприклад (**%o1**), (**%o2**) і т. д., де **i** скорочення від англ. **input** (введення), а **o** – англ. **output** (виведення).

Якщо в результаті виконання операції отримали деякий символічний вираз, а необхідно отримати конкретне числове значення у вигляді десяткової дробу, то розв'язати цю задачу дозволяє застосування прапорця **numer**. Зокрема, він дозволяє перейти від звичайних дробів до десяткових. Перетворення до форми з плаваючою комою здійснює також функція **float**. Кількість знаків десяткового числа задається командою **fpprintprec**.

При введенні назв змінних, функцій і констант важливий регістр букв, так змінні **x** і **X** дві різні змінні. Присвоєння значення змінній здійснюється з використанням символу **:** (двокрапка), наприклад **x:5**. Якщо необхідновидалити значення змінної (очистити її), то застосовується метод **kill**:

kill(x) – видалити значення змінної **x**;

kill(all) – видалити значення всіх раніше використовуваних змінних.

Присвоєння значення функції здійснюється з використанням символу **:=** (двокрапка ідорівнює), наприклад **f(x):=sin(x)**.

Задача 13.1. Обчислити за формулою Ньютона-Котеса, квадратурною формулою Чебишева, квадратурами Гаусса-Лежандра та Річардсона-Ромберга $\int_0^1 e^x dx$. Відрізок інтегрування поділити на 5 рівних частин.

Розв'язання. Знайдемо точний розв'язок з допомогою СКМ Maxima.

Задамо функцію $f(x)$

```
(%i1) f(x):=exp(x)$
```

Задамо кількість знаків десяткового числа розв'язку (надалі будемо користуватись цим заданням у всіх інших методах розв'язування без окремого оголошення цієї команди)

```
(%i2) fpprintprec: 8;
```

```
(%o2) 8
```

Обчислимо інтеграл (надалі будемо користуватись цим точним значенням в інших методах розв'язування без окремого оголошення цієї команди).

```
(%i3) J: integrate(f(x), x, 0, 1), numer;
```

```
(%o3) 1.7182818
```

Можливий інший варіант введення команди інтегрування. Використовуючи меню, клацнути по кнопкам «Аналіз/Інтегрувати». З'явиться вікно, яке потрібно заповнити і за командою «Гаразд» отримати результат:

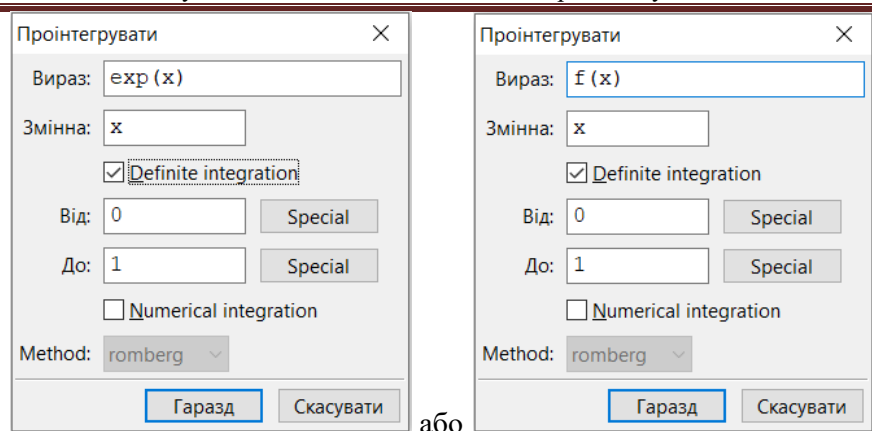


Рис. 13.3

Зокрема, наприклад коли інтеграл не виражається через елементарні функції, використовують методи чисельного інтегрування. Для цього в тому ж вікні потрібно встановити прапорець у віконці чисельне інтегрування і вибрати один з методів «romberg» або «quadpack» (краще перший) та отримати результат:

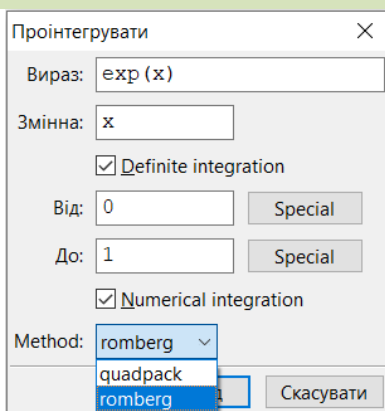


Рис. 13.4

```
(%i1)  romberg(f(x), x, 0, 1);
(%o1)  1.7182818
```

Далі обчислимо наближено цей інтеграл за формулою Ньютона-Котеса, квадратурною формулою Чебишева, квадратурами Гаусса-Лежандра та Річардсона-Ромберга.

І. Формула Ньютона-Котеса.

А) Використаємо формулу:

Для 6 точок, кількість відрізків $n = 5$

$$I_5[f] \approx \frac{5}{288} h(19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5).$$

Задамо функцію $f(x)$

(%i1) $f(x) := \exp(x)$

Задамо кількість відрізків розбиття підінтегральної області та межі інтегрування.

(%i4) $n:5$ $x0:0$ $x5:1$

Знайдемо крок розбиття підінтегральної області на 5 відрізків

(%i5) $h:(x5-x0)/n;$

(%o5) $\frac{1}{5}$

Знайдемо точки поділу

(%i9) $x1:x0+h; x2:x0+2*h; x3:x0+3*h; x4:x0+4*h;$

(%o6) $\frac{1}{5}$

(%o7) $\frac{2}{5}$

(%o8) $\frac{3}{5}$

(%o9) $\frac{4}{5}$

Підставивши одержані значення у формулу Ньютона-Котеса для $n = 5$, одержимо наближене значення інтеграла:

(%i10) $I:5/288*h*(19*f(x0)+75*f(x1)+50*f(x2)+50*f(x3)+75*f(x4)+19*f(x5)), numer;$

(%o10) 1.7182823

Абсолютна величина похибки (нев'язка) складає

```
(%i11) R:abs(J-I);
```

```
(%o11) 4.8453144 10-7
```

Відносна похибка складає

```
(%i12) abs((R)/J)*100;
```

```
(%o12) 2.8198601 10-5
```

Б) Напишемо програмний код для наближеного обчислення визначеного інтеграла на відрізку $[a, b]$ за формулою Ньютона-Котеса при $n = 5$.

Введемо кінці відрізка інтегрування.

```
(%i2) a:0;b:1;
```

```
(%o1) 0
```

```
(%o2) 1
```

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками на n відрізків довжиною h :

```
(%i4) n:5; h:(b-a)/n;
```

```
(%o3) 5
```

```
(%o4)  $\frac{1}{5}$ 
```

i введемо координати точок розбиття:

```
(%i5) create_list(x[i]: a + h*i, i, 0, n);
```

```
(%o5)  $[0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1]$ 
```

Для табличної функції

```
(%i6) ft: create_list([x[i], f(x[i])], i, 0, n);
```

```
(%o6)  $[[0, 1], [\frac{1}{5}, \%e^{\frac{1}{5}}], [\frac{2}{5}, \%e^{\frac{2}{5}}], [\frac{3}{5}, \%e^{\frac{3}{5}}], [\frac{4}{5}, \%e^{\frac{4}{5}}], [1, \%e]]$ 
```

визначимо універсальні коефіцієнти Котеса за формулою

```
(%i7) H(i):=1/n*(-1)^(n-i)/(i!*(n-i)!)*integrate(product((q-k),  
k, 0, n)/(q-i), q, 0, n);
```

```
(%o7) 
$$H(i) := \frac{1}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{\prod_{k=0}^n (q-k)}{q-i} dq$$

```

Знайдемо ці коефіцієнти

```
(%i8) create_list(H(i), i, 0, n);
```

$$(\%o8) \quad \left[\frac{19}{288}, \frac{25}{96}, \frac{25}{144}, \frac{25}{144}, \frac{25}{96}, \frac{19}{288} \right]$$

За формулою Ньютона-Котеса отримаємо наближене значення визначеного інтеграла

$$(\%i9) \quad I: (b-a) * \text{sum}(H(i) * f(x[i]), i, 0, n), \text{numer};$$

$$(\%o9) \quad 1.7182823$$

Зазначимо, що для обчислення визначеного інтеграла для іншої функції на тому ж інтервалі й з тим же числом точок розбиття, достатньо знайти значення нової функції у точках розбиття й обчислити попередню суму. Якщо кількість точок розбиття інша, обов'язко це число треба вказати в тілі програми.

II. Квадратурна формула Чебишева.

Поділ відрізка $[a, b]$ на 5 рівних частин дає 6 точок розбиття

Для $n=6$ точок використаємо формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{b-a}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

$$\text{де } x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \quad (i=1, 6), \text{ а } t_i \text{ мають указані в таблиці значення}$$

$$-t_1 = t_6 = 0,866247; -t_2 = t_5 = 0,422519; -t_3 = t_4 = 0,266635.$$

Задамо функцію $f(x)$

$$(\%i1) \quad f(x):=\exp(x)$$

Задамо межі інтегрування та кількість точок розбиття

$$(\%i4) \quad a:0; b:1; n:6;$$

$$(\%o2) \quad 0$$

$$(\%o3) \quad 1$$

$$(\%o4) \quad 6$$

Задамо табличні значення t_i для квадратури Чебишова

$$(\%i10) \quad t1:-0.866247;$$

$$t2:-0.422519;$$

$$t3:-0.266635;$$

$$t4:-t3;$$

$$t5:-t2;$$

$$t6:-t1;$$


```
(%o5)      -0.866247
(%o6)      -0.422519
(%o7)      -0.266635
(%o8)       0.266635
(%o9)       0.422519
(%o10)      0.866247
```

Підставивши одержані значення у квадратурну формулу Чебишева для $n = 6$, одержимо наближене значення інтеграла:

```
(%i11)      I:(b-a)/n*(f((b+a)/2+(b-a)/2*t1)+f((b+a)/2+
              +(b-a)/2*t2)+f((b+a)/2+(b-a)/2*t3)+f((b+a)/2+
              +(b-a)/2*t4)+f((b+a)/2+(b-a)/2*t5)+f((b+a)/2+(b-a)/2*t6));
(%o11)      1.718281855470728
```

Абсолютна величина похибки (нев'язка) складає

```
(%i12)      R:abs(J-I);
(%o12)      2.701168210 10-8
```

Відносна похибка складає

```
(%i13)      abs((R)/J)*100;
(%o13)      1.572017 10-6
```

III. Квадратура Гаусса-Лежандра.

Для $n = 6$ точок використаємо формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) = \frac{b-a}{2} (A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n)),$$

де $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$ ($i = \overline{1,6}$), t_i та A_i мають значення (див. табл.)

$$-t_1 = t_6 = 0,93246951; \quad A_1 = A_6 = 0,17132450;$$

$$-t_2 = t_5 = 0,66120939; \quad A_2 = A_5 = 0,36076158;$$

$$-t_3 = t_4 = 0,23861919; \quad A_3 = A_4 = 0,46791394.$$

Задамо функцію $f(x)$

```
(%i1)      f(x):=exp(x)$
```

Задамо межі інтегрування

```
(%i2)      a:0$
(%i3)      b:1$
```

Задамо значення t_i та A_i для квадратури Гаусса-Лежандра.

```
(%i9)  t1:-0.93246951;
        t2:-0.66120939;
        t3:-0.23861919;
        t4:-t3;
        t5:-t2;
        t6:-t1;

(%o4)  -0.93246951
(%o5)  -0.66120939
(%o6)  -0.23861919
(%o7)   0.23861919
(%o8)   0.66120939
(%o9)   0.93246951

(%i12) A1:A6:0.17132450;
        A2:A5:0.36076158;
        A3:A4:0.46791394;

(%o10) 0.1713245
(%o11) 0.36076158
(%o12) 0.46791394
```

Підставивши одержані значення в квадратурну формулу Гаусса-Лежандра для $n = 6$, одержимо наближене значення інтеграла:

```
(%i13) I:(b-a)/2*(A1*f((b+a)/2+(b-a)/2*t1)+A2*f((b+a)/2+
        +(b-a)/2*t2)+A3*f((b+a)/2+(b-a)/2*t3)+A4*f((b+a)/2+
        +(b-a)/2*t4)+A5*f((b+a)/2+(b-a)/2*t5)+A6*f((b+a)/2+
        +(b-a)/2*t6));

(%o13) 1.718281863767455
```

Абсолютна величина похибки (нев'язка) складає

```
(%i14) R:abs(J-I);
(%o14) 3.5308409 10-8
```

Відносна похибка складає

```
(%i15) abs((R)/J)*100;
(%o15) 2.0548671 10-6
```

Задача 13.2. Обчислити за формулою прямокутників, трапецій, і формули Сімпсона $\int_0^1 e^x dx$ з точністю $\xi = 0,001$.

Результат порівняти зі значенням квадратури Річардсона-Ромберга.

Розв'язання.

I. Формула лівих прямокутників. Використаємо формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$

Задамо функцію $f(x)$ та межі інтегрування

```
(%i1) f(x):=exp(x)$ numer: true; a:0$ b:1$
```

Потрібно знайти наближене значення інтеграла від функції $f(x)$ трьома методами. Похибка результату не повинна перевищувати

```
(%i2) epsilon:0.001;
```

```
(%o2) 0.001
```

Для порівняння використаємо вбудовану в програму wxMaxima функцію для наближеного обчислення визначеного інтеграла

```
(%i3) J:romberg(f(x),x,a,b);
```

```
(%o3) 1.71828184221844
```

Запишемо праву частину формули лівих прямокутників як функцію від числа відрізків n . Оскільки $x_i = a + ih = a + \frac{b-a}{n}i$, то

```
(%i4) Il(n):=ev((b-a)/n*sum(f(a+(b-a)/n*i),i,0,n-1), numer);
```

```
(%o4) Il(n):=ev\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right), numer\right);
```

Функція **ev** є основною функцією, що обробляє вираз. Синтаксис виклику: **ev(expr, arg1, ..., argn)**. Функція **ev** обчислює вираз **expr** у середовищі, обумовленому аргументами **arg1, ..., argn**. Аргументи можуть бути ключами (булевими прапорцями, присвоюваннями, рівняннями і функціями). Функція **ev** повертає результат (інший вираз). На вираз **expr** типово діє функція

*спрощення. Функція **sum** реалізує цикл підсумовування. Пропорції **float** і **numer** визначають формат подання раціональних чисел (у вигляді дробів або із рухомою крапкою) і результатів обчислення математичних функцій.*

Розглянемо цикл, в якому перевіряється точність обчислення визначеного інтеграла за формулою $\frac{|I_h - I_{2h}|}{2^k - 1} < \xi$ залежно від числа відрізків n відповідно для формули прямокутників, трапецій, і формули Сімпсона.

```
(%i7)  n:1; while abs(I(n)-I(2*n))>epsilon do n: n+1;  n;
(%o5)  1
(%o6)  done
(%o7)  430
```

Необхідна точність була досягнута на 430 кроці. Наближене значення інтеграла з заданою точністю **epsilon** за формулою лівих прямокутників дорівнює:

```
(%i8)  I(2*n);
(%o8)  1.71728302100084
```

Абсолютна величина похибки (нев'язка) складає:

```
(%i9)  R:abs(J-I(2*n));
(%o9)  9.988212176001987 10-4
```

II. Формула правих прямокутників. Використаємо формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Відповідно до формули реалізуємо алгоритм в програмі wxMaxima та порівняємо із значенням, знайденим за допомогою функції для наближеного обчислення визначеного інтеграла «**romberg**».

```
(%i1)  f(x):=exp(x)$ numer: true; a:0$ b:1$
(%i2)  epsilon:0.001;
(%o2)  0.001
(%i3)  J:romberg(f(x),x,a,b);
(%o3)  1.71828184221844
```

```
(%i4) Ip(n):=ev((b-a)/n*sum(f(a+(b-a)/n*i),i,1,n), number);
(%o4) 
$$Ip(n) := ev\left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right), number\right);$$

(%i7) n:1; while abs(Ip(n)-Ip(2*n))>epsilon do n: n+1; n;
(%o5) 1
(%o6) done
(%o7) 430
(%i8) Ip(2*n);
(%o8) 1.719281023126955
```

Абсолютна величина похибки (нев'язка) складає

```
(%i9) R:abs(J-Ip(2*n));
(%o9) 9.991809085148073 10-4
```

III. Формула середніх прямокутників. Використаємо

формулу: $I_n = h \sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$

```
(%i1) f(x):=exp(x)$ numer: true; a:0$ b:1$
(%i2) epsilon:0.001;
(%o2) 0.001
(%i3) J:romberg(f(x),x,a,b);
(%o3) 1.71828184221844
(%i4) Ic(n):=ev((b-a)/n*sum(f((a+(b-a)/n*i+a+(b-a)/n*(i+1))/2),
i,0,n-1),number);
(%o4) 
$$Ic(n) := ev\left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{a + \frac{b-a}{n} i + a + \frac{b-a}{n} (i+1)}{2}\right), number\right);$$

(%i7) n:1; while abs(Ic(n)-Ic(2*n))>epsilon do n: n+1; n;
(%o5) 1
(%o6) done
(%o7) 8
(%i8) Ic(2*n);
(%o8) 1.71800219205266
```

Абсолютна величина похибки (нев'язка) складає

(%i9) R:abs(J-Ic(2*n));

(%o9) 2.796501657795769 10⁻⁴

IV. Формула трапецій. Використаємо формулу:

$$I_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) = h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_n) \right).$$

(%i1) f(x):=exp(x)\$ numer: true; a:0\$ b:1\$

(%i2) epsilon:0.001;

(%o2) 0.001

(%i3) J:romberg(f(x),x,a,b);

(%o3) 1.71828184221844

(%i4) It(n):=ev((b-a)/n*(f(a)/2+f(b)/2+sum(f(a+(b-a)/n*i),
i,1,n-1)),numer);

(%o4) $It(n) := ev \left(\frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f \left(a + \frac{b-a}{n} i \right) \right), numer \right);$

(%i7) n: 1;while abs(Jt(n)-Jt(2*n))/(2^2-1) > epsilon do n : n+1; n;

(%o5) 1

(%o6) done

(%o7) 6

(%i8) It(2*n);

(%o8) 1.719276089446386

Абсолютна величина похибки (нев'язка) складає

(%i9) R:abs(J-It(2*n));

(%o9) 9.942472279456105 10⁻⁴

V. Формула Сімпсона (параболічна формула). Використаємо формулу:

$$I_n = \frac{b-a}{6n} (f_0 + f_{2n} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}))$$

(%i1) f(x):=exp(x)\$ numer: true; a:0\$ b:1\$

(%i2) epsilon:0.001;

(%o2) 0.001

(%i3) J:romberg(f(x),x,a,b);

(%o3) 1.71828184221844

```
(%i4) Js(n):=ev((b-a)/(6*n)*(f(a)+f(b)+
4*sum(f(a+(b-a)/(2*n)*(2*i+1)),i,0,n-1)+
2*sum(f(a+(b-a)/(2*n)*(2*i)),i,1,n-1)),numer);

(%o4) Is(n) := ev  $\left( \frac{b-a}{6n} \left( f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f \left( a + \frac{b-a}{2n} (2i+1) \right) + \right. \right.$ 
 $\left. \left. 2 \sum_{i=1}^{n-1} f \left( a + \frac{b-a}{2n} \cdot 2i \right) \right), numer \right);$ 

(%i7) n: 1; while abs(Js(n)-Js(2*n))/(2^4-1)>epsilon do n : n+1; n;
(%o5) 1
(%o6) done
(%o7) 1
(%i8) Is(2*n);
(%o8) 1.718318841921747

Абсолютна величина похибки (нев'язка) складає
(%i9) R:abs(J-Is(2*n));
(%o9) 3.699970330695024 10-5
```

Задача 13.3. Обчислити за формулою центральних прямокутників, трапецій, і формули Сімпсона $\int_0^1 e^x dx$ для кількості відрізків $n=100$. Результат порівняти зі значенням квадратури Річардсона-Ромберга.

I. Формула лівих прямокутників. Використаємо формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$

Задамо функцію

```
(%i1) Ic(f,n,a,b):=block([h,i,s,_x],h:(b-a)/n, _x:a+h/2, s:0,
for i:1 thru n do (s:s+float(subst(_x,x,f)),_x:_x+h),s:s*h)$
```

- **block([h,i,s,_x], ...)**
- Перелік у квадратних дужках задає локальні змінні, які існують лише всередині цього блоку та не впливають на змінні з такими ж іменами поза ним.

- Всередині **block** можна писати кілька інструкцій, розділених комами. Повертається значення останнього виразу в блоці.
- **subst** – функція реалізує синтаксичну підстановку.

Обчислимо заданий інтеграл $\int_0^1 e^x dx$ через функцію Ic(f,n,a,b)

```
(%i2) Ic(f(x),100,0,1);
```

```
(%o2) 1.718274668972308
```

Абсолютна величина похибки (нев'язка) складає

```
(%i3) R:abs(J-Ic(f,n,a,b));
```

```
(%o3) 7.17324613197512 10-6
```

IV. Формула трапецій. Використаємо формулу:

$$I_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) = h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_n) \right).$$

```
(%i1) Itrap(f,n,a,b):=block([h,i,s],h:(b-a)/n,  
s:(float(subst(a,x,f))+float(subst(b,x,f)))/2,
```

```
for i:1 thru n-1 do (s:s+float(subst(a+i*h,x,f))), s:s*h)$
```

```
(%i2) Itrap(f(x),100,0,1);
```

```
(%o2) 1.718296147450417
```

```
(%i3) R:abs(J-Itrap(exp(x),100,0,1));
```

```
(%o3) 1.430523197698541 10-5
```

V. Формула Сімпсона (параболічна формула).

Використаємо формулу:

$$I_n = \frac{b-a}{6n} (f_0 + f_{2n} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}))$$

```
(%i1) Isimp(f,n,a,b):=block([h,h2,i,_x,s],h:(b-a)/n, h2:h/2,  
s:(float(subst(a,x,f))+float(subst(b,x,f)))/2+
```

```
2*float(subst(a+h2,x,f)), _x:a,
```

```
for i:1 thru n-1 do (_x:_x+h,
```

```
s:s+2*float(subst(_x+h2,x,f))+float(subst(_x,x,f))), s:s*h/3)$
```


(%i2) Isimp(f(x),100,0,1);

(%o2) 1.718281828465012

(%i3) J-Isimp(f(x),100,0,1);

(%o3) 1.375342839615712 10⁻⁸

Задача 13.3. Функція задана графічно на відрізку $[0; 3,5]$ (рис. 13.5). За допомогою інструментів прикладного програмного забезпечення математичного спрямування побудувати графік її

інтеграла $F(x) = \int_0^x f(x)dx$, $0 \leq x \leq 3,5$. Визначити за графіком

величину $\int_0^{3,5} f(x)dx$.

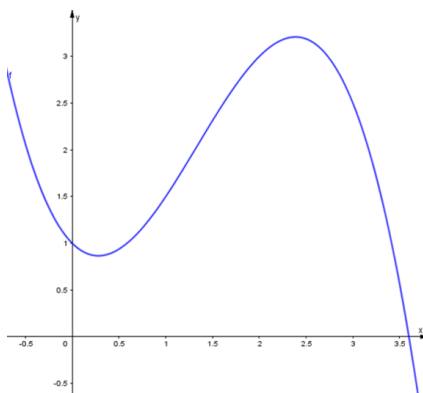


Рис. 13.5. Підінтегральна функція, задана графічно в GeoGebra

Розв'язання. Див. за покликанням:

<https://www.youtube.com/watch?v=IbN6XL8s-CQ>

Продемонструємо розв'язок задачі в динамічному геометричному середовищі GeoGebra.

1. Розіб'ємо проміжок $[0; 3]$ точками на частини (рис. 13.6):

M_i	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	1	0,94	1,49	2,32	3	3,19	2,5	0,56

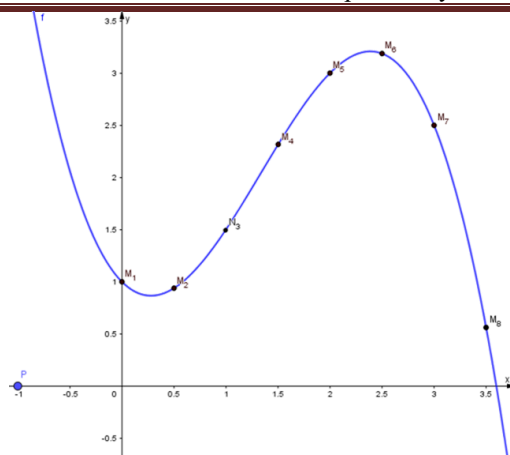


Рис. 13.6. Розбиття графіка підінтегральної функції точками на частини

2. Відкладаємо по лівий бік від осі ординат на осі абсцис одиничний відрізок, маємо точку $P(-1; 0)$ (рис. 13.6).

З кожним відрізком $[x_i; x_{i+1}]$ ($i = \overline{1, 7}$) виконаємо алгоритм графічного інтегрування (покажемо на прикладі відрізка $[0; 0,5]$.)

3. Знаходимо точку на графіку функції з абсцисою $x = 0,25$ (середина $[0; 0,5]$) (точка B). Проектуємо цю точку на вісь ординат, отримавши точку M'_1 , та проводимо пряму PM'_1 (рис. 13.7). Потім через точку $N_1(0; 0)$ (проекція точки M_1 на вісь абсцис) проводимо відрізок $N_1N_2 \parallel PM'_1$ (абсциси точок M_2 і N_2 однакові).

Відрізок N_1N_2 - одна з ланок ламаної $N_1N_2N_3N_4N_5N_6N_7N_8$, наближеної до $F(x)$.

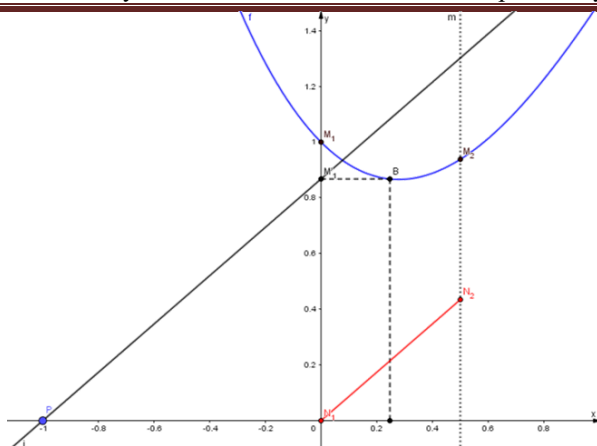


Рис. 13.7. Проекція точки B на вісь ординат та побудова ланки ламаної

4. Аналогічні міркування виконуємо з наступним відрізком $[0,5;1]$ (рис. 13.8)

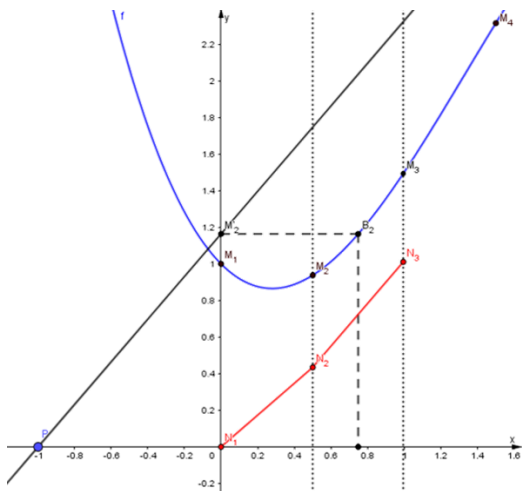


Рис. 13.8. Етап побудови ламаної – наближеного графіка первісної функції

5. Міркуючи аналогічно, отримаємо ламану $N_1N_2N_3N_4N_5N_6N_7N_8$, яка є наближеною до графіка шуканої функції $F(x)$ (рис. 13.9).

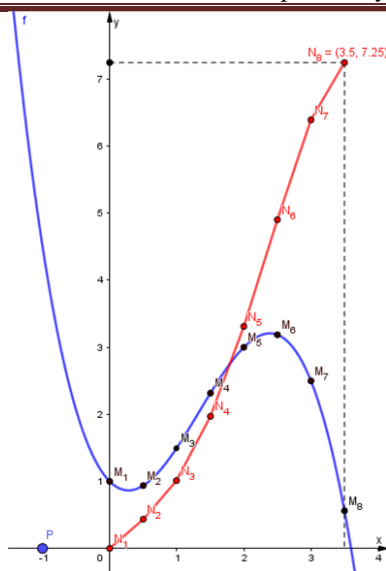


Рис. 13.9. Побудова наближеного графіка первісної функції

Ще одним завданням задачі було визначити за графіком значення інтеграла $\int_0^{3,5} f(x)dx$. Так ось, $N_8(3,5; 7,25)$ (рис. 13.9),

$$\text{звідки } \int_0^{3,5} f(x)dx = 7,25.$$

Перевіримо достовірність методу графічного інтегрування.

У задачі 13.3, хочне вказувалось, ще на нулевому кроці (формулюючи задачу) було задано конкретну функцію $f(x) = -0,5x^3 + 2x^2 - x + 1$. Отож, знайдемо визначений інтеграл:

$$\int_0^{3,5} (-0,5x^3 + 2x^2 - x + 1)dx = \left(-\frac{0,5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right) \Big|_0^{3,5} \approx 7,2005.$$

$$\text{Відносна похибка } \delta = \left| \frac{x_T - x_H}{x_T} \right| = \left| \frac{7,2005 - 7,25}{7,2005} \right| \approx 0,00687, \text{ де}$$

x_H – наближене значення інтеграла, знайдене за допомогою графічного інтегрування в GeoGebra, x_T – його точне значення.

Для функцій, заданих таблично, скористаємось інструментарієм системи комп'ютерної алгебри Maxima (Рис. 13.10).

1 Протабулюємо підінтегральну функцію $f(x)$ й задамо множину точок

```
(%i1) g:[0.25, 0.8671875], [0.75, 1.1640625], [1.25, 1.8984375], [1.75, 2.6953125],
      [2.25, 3.1796875], [2.75, 2.9765625], [3.25, 1.7109375]]$
```

2 Знайдемо многочлен Лагранжа

```
(%i2) load("interpol")$
```

```
(%i3) lagrange(g);
```

```
(%o3) 0.1520833333333333(x-2.75)(x-2.25)(x-1.75)(x-1.25)(x-0.75)(x-0.25)-1.5875(x-3.25)(x-2.25)(x-1.75)(x-1.25)(x-0.75)(x-0.25)+4.239583333333333(x-3.25)(x-2.75)(x-1.75)(x-1.25)(x-0.75)(x-0.25)-4.791666666666666(x-3.25)(x-2.75)(x-2.25)(x-1.25)(x-0.75)(x-0.25)+2.53125(x-3.25)(x-2.75)(x-2.25)(x-1.75)(x-0.75)(x-0.25)-0.6208333333333333(x-3.25)(x-2.75)(x-2.25)(x-1.75)(x-1.25)(x-0.25)+0.07708333333333332(x-3.25)(x-2.75)(x-2.25)(x-1.75)(x-1.25)(x-0.75)
```

3 Спростимо вираз

```
(%i4) expand(ratsimp(%)), numer$
```

4 Задамо функцію $f(x)$

```
(%i5) f(x):='%, float;
```

```
(%o5) f(x):=-0.5 x^3+2.0 x^2-1.0 x+1.0
```

5 Знайдемо первісну

```
(%i6) integrate(f(x), x);
```

```
(%o6) -0.125 x^4+0.6666666666666666 x^3-0.5 x^2+1.0 x
```

6 Задамо функцію первісної

```
(%i7) F(x):='%, float;
```

```
(%o7) F(x):=-0.125 x^4+0.6666666666666666 x^3-0.5 x^2+1.0 x
```

7 Знайдемо визначений інтеграл

```
(%i8) integrate(f(x), x, 0, 3.5), numer;
```

```
(%o8) 7.200520833333333
```

8 Побудуємо графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$

```
(%i9) wxplot2d([f(x), F(x)], [x, 0.5, 3.5])$
```

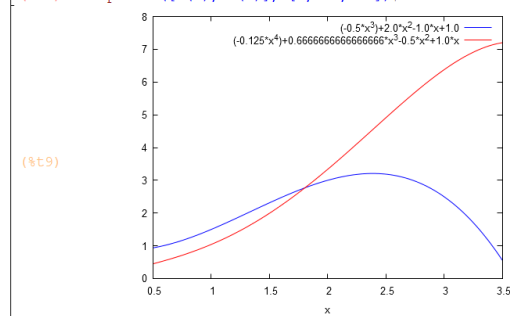


Рис. 13.10. Розв'язання задачі 13.3 в СКМ Maxima (в скріншотах)

Завдання для самостійного розв'язування

З1. Обчислити наближено за формулою Ньютона-Котеса з кроком h інтеграли та оцінити похибку:

$$1) \int_0^2 x^4 dx, \quad h = 0,2;$$

$$2) \int_0^{\pi} \sin x dx, \quad h = \frac{\pi}{6};$$

$$3) \int_1^5 \frac{dx}{x}, \quad h = 0,4;$$

$$4) \int_1^5 \frac{dx}{1+x^4}, \quad h = 0,5;$$

$$5) \int_0^2 e^{x^2} dx, \quad h = 0,2;$$

$$6) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx, \quad h = 0,2.$$

З2. Обчислити наближено за квадратурною формулою Чебишева з кроком h інтеграли та оцінити похибку:

$$1) \int_2^9 \frac{dx}{x-1}, \quad h = 1;$$

$$2) \int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}, \quad h = 1;$$

$$3) \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx, \quad h = \frac{1}{8};$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, \quad h = 0,1;$$

$$5) \int_2^5 \ln^2 x dx, \quad h = 0,5;$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0,25 \sin^2 x} dx, \quad h = \frac{\pi}{12}.$$

З3. Обчислити наближено за квадратурою Гаусса-Лежандра з кроком h інтеграли та оцінити похибку:

$$1) \int_1^3 \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx, \quad h = 0,5;$$

$$2) \int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx, \quad h = 0,1;$$

$$3) \int_0^2 e^{-x^2} dx, \quad h = 0,5;$$

$$4) \int_0^2 e^{x^2} dx, \quad h = 0,2.$$

З4. Обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца, а також наближено за квадратурними формулами інтеграли та оцінити похибку:

$$1) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx; \quad n = 4;$$

$$2) \int_0^{0,8} \cos x dx; \quad n = 10;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; \quad n = 6;$$

$$4) \int_{0,1}^{0,7} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad n = 8.$$

✎5. Обчислити графічно інтеграли та оцінити похибку:

$$1) \int_0^2 x^4 dx, \quad h = 0,2;$$

$$2) \int_0^{\pi} \sin x dx, \quad h = \frac{\pi}{6};$$

$$3) \int_1^5 \frac{dx}{x}, \quad h = 0,4;$$

$$4) \int_1^5 \frac{dx}{1+x^4}, \quad h = 0,5;$$

$$5) \int_0^2 e^{x^2} dx, \quad h = 0,2;$$

$$6) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx, \quad h = 0,2.$$

$$7) \int_2^9 \frac{dx}{x-1}, \quad h = 1;$$

$$8) \int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}, \quad h = 1;$$

$$9) \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx, \quad h = \frac{1}{8};$$

$$10) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, \quad h = 0,1;$$

$$11) \int_0^5 \ln^2 x dx, \quad h = 0,5;$$

$$12) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0,25 \sin^2 x} dx, \quad h = \frac{\pi}{12}.$$

$$13) \int_1^3 \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx, \quad h = 0,5;$$

$$14) \int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx, \quad h = 0,1;$$

$$15) \int_0^2 e^{-x^2} dx, \quad h = 0,5;$$

$$16) \int_0^2 e^{x^2} dx, \quad h = 0,2.$$

$$17) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx; \quad n = 4;$$

$$18) \int_0^{0,8} \cos x dx; \quad n = 10;$$

$$19) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; \quad n = 6;$$

$$20) \int_{0,1}^{0,7} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad n = 8.$$

✎6. А) Обчислити значення інтегралів за вказаним розбиттям відрізка інтегрування $[a,b]$ на півдрізків / точок й оцінити залишковий член.

Б) Виконати чисельне інтегрування функцій із вказаною точністю ξ .

$$1) \int_0^1 e^x \cos x dx; \quad n = 5; \quad \xi = 0,5 \cdot 10^{-6};$$

- 2) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx; n=5; \xi=0,5 \cdot 10^{-8};$
- 3) $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx; n=5; \xi=0,5 \cdot 10^{-8};$
- 4) $\int_0^1 e^{\sin x} \sin 2x dx; n=5; \xi=0,5 \cdot 10^{-8};$
- 5) $\int_0^1 e^{\cos^2 x} \cos x dx; n=5; \xi=0,5 \cdot 10^{-8};$
- 6) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx; n=5; \xi=0,5 \cdot 10^{-8};$
- 7) $\int_0^1 (1+x)^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx; n=5; \xi=0,5 \cdot 10^{-8};$
- 8) $\int_0^1 e^x (3+2 \cos x) dx; n=5; \xi=0,5 \cdot 10^{-8};$
- 9) $\int_0^1 e^{\cos x} (1+x) dx; n=5; \xi=0,5 \cdot 10^{-8};$
- 10) $\int_0^1 (1+x) \ln^2(1+x) dx; n=5; \xi=0,5 \cdot 10^{-6};$
- 11) $\int_0^1 (1+x)^2 e^{\operatorname{arctg} x} dx; n=5; \xi=0,5 \cdot 10^{-7};$
- 12) $\int_0^1 e^{\sin x} \sin(\cos x) dx; n=6; \xi=0,5 \cdot 10^{-7};$
- 13) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} dx; n=6; \xi=0,5 \cdot 10^{-8};$
- 14) $\int_0^2 (x^2 + 2 \ln x) dx; n=7; \xi=0,5 \cdot 10^{-6};$
- 15) $\int_0^2 x^2 \cos \frac{x}{2} dx; n=7; \xi=0,5 \cdot 10^{-8};$
- 16) $\int_0^1 x^2 \sin(1+x^2) dx; n=6; \xi=0,5 \cdot 10^{-6};$

- 17) $\int_0^1 x \cos x^2 dx; n = 6; \xi = 0,5 \cdot 10^{-6};$
- 18) $\int_0^1 \frac{(\cos x)}{(1 + \sin^3 x)} dx; n = 6; \xi = 0,5 \cdot 10^{-8};$
- 19) $\int_0^1 (1 - x^2) \ln(1 + x) dx; n = 5; \xi = 0,5 \cdot 10^{-6};$
- 20) $\int_0^1 \sqrt{1 + x} \cos x dx; n = 5; \xi = 0,5 \cdot 10^{-8};$
- 21) $\int_0^1 \sqrt{1 + x} \sin x dx; n = 5; \xi = 0,5 \cdot 10^{-8};$
- 22) $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{1 + x} dx; n = 7; \xi = 0,5 \cdot 10^{-6};$
- 23) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx; n = 7; \xi = 0,5 \cdot 10^{-4};$
- 24) $\int_2^3 x \ln^2 x dx; n = 7; \xi = 0,5 \cdot 10^{-8};$
- 25) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{7}{16} \sin^2 x} dx; n = 6; \xi = 0,5 \cdot 10^{-8};$
- 26) $\int_0^7 \arcsin e^{-\frac{x}{8}} dx; n = 6; \xi = 0,5 \cdot 10^{-8};$
- 27) $\int_2^7 \arccos e^{-\frac{x}{6}} dx; n = 5; \xi = 0,5 \cdot 10^{-8};$
- 28) $\int_0^{14} \ln \left(2 + \operatorname{tg} \frac{x}{10} \right) dx; n = 7; \xi = 0,5 \cdot 10^{-8};$
- 29) $\int_0^2 5x \sin x^2 dx; n = 7; \xi = 0,5 \cdot 10^{-8};$
- 30) $\int_0^1 3x^3 \cos x^2 dx; n = 5; \xi = 0,5 \cdot 10^{-8}$

§ 14. Застосування визначених інтегралів до обчислення об'ємів тіл і площ поверхонь обертання

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Кубовне тіло	Cubic body
Об'єм тіла, об'єм тіла обертання	Volume of a body, volume of the corresponding body (body of rotation)
Площа поверхні тіла обертання	Surface area of a body of rotation
Довжина плоскої кривої	Length of a plane curve
Формули для обчислення довжини плоскої кривої	Formulas for calculating the length of a plane curve

1. За якими формулами обчислюють: 1) об'єм тіла з відомим поперечним перерізом; 2) об'єм тіла обертання?

1) об'єм тіла з відомим поперечним перерізом.

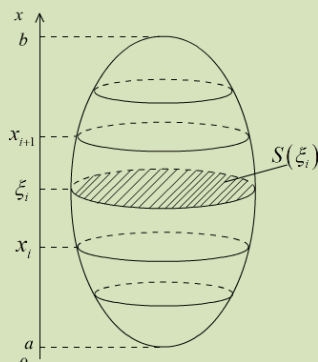


Рис. 14.1

Нехай тіло розміщено у просторі Охуз між площинами $x = a$ і $x = b$, причому відома площа поперечного перерізу $S(x)$, перпендикулярного осі Ох (рис.14.1). Тоді це тіло має об'єм:

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (14.1)$$

2) об'єм тіла обертання.

а) $y = y(x) \in R_{[a;b]}$, $y \geq 0$ (рис.14.2):

$$V_{\text{тіла}} = \pi \int_a^b y^2(x) dx \quad (14.2)$$

б) Функція $y = y(x)$ задана параметрично (рис.14.2):

$$\begin{cases} x = x(t), & t \in [\alpha; \beta], & x'(t) \geq 0, & x(\alpha) = a, & x(\beta) = b, \\ y = y(t), & y(x) \in C_{[\alpha; \beta]}, & y(t) \geq 0. \end{cases}$$

$$V_{\text{тіла}} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt \quad (14.3)$$

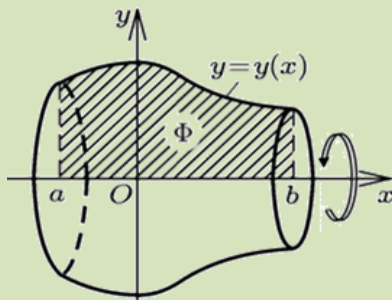


Рис. 14.2

Функції $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$ і $\forall x \in [a; b]$ виконується нерівність $y_2(x) \geq y_1(x) \geq 0$ (рис.14.3):

$$V_{\text{тіла}} = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx \quad (14.4)$$

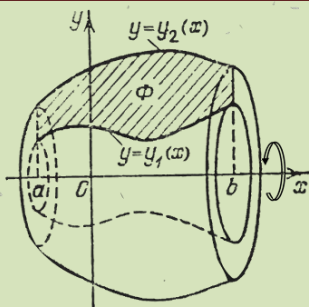


Рис. 14.3.

Якщо фігура обертається навколо осі Oy , то при аналогічних обмеженнях стосовно функцій $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ мають місце формули:

$$V = \pi \int_c^d x^2(y) dy \quad (14.5)$$

$$V = \pi \int_\alpha^\beta x^2(t) y'(t) dt \quad (14.6)$$

$$V = \pi \int_c^d (x_2^2(y) - x_1^2(y)) dy \quad (14.7)$$

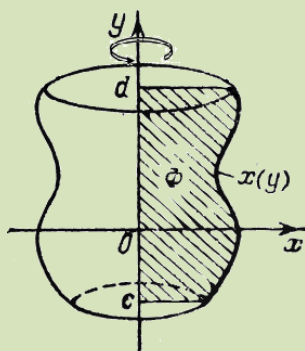


Рис. 14.4

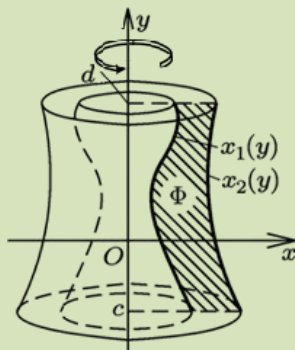


Рис. 14.5

2. Сформулювати означення площі поверхні обертання. За якими формулами обчислюють площу поверхні обертання?

Якщо функція $f(x, y)$ у квадратній області (D_{xy}) неперервна і має неперервні частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ то площа поверхні визначається за формулою

$$P = \iint_{(D_{xy})} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy.$$

Якщо поверхню проектувати на площини YOZ або XOZ , то для обчислення площі поверхні маємо формули:

$$P = \iint_{(D_{yz})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz.$$

$$P = \iint_{(D_{xz})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz.$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 14.1. Знайти об'єм кулі, радіус якої дорівнює R .

Розв'язання.

Виберемо за вісь Ox один з діаметрів кулі, а за початок координат – центр кулі (рис. 14.6). Тоді $OO_1 = x$; $OC = R$, $O_1C = \sqrt{R^2 - x^2}$, причому O_1C – радіус круга, утвореного перетином кулі площиною, перпендикулярною осі Ox і проведеною на відстані x від центра кулі.

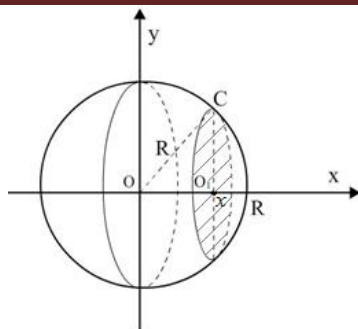


Рис.14.6

Тому площа перерізу буде:

$S(x) = \pi(O_1C)^2 = \pi(R^2 - x^2)$. Об'єм кулі знаходимо за формулою (14.1).

$$V = \int_{-R}^R S(x) dx = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}. \quad \blacksquare$$

Задача 14.2. Обчислити об'єм тіла, яке відтинається від прямого кругового циліндра площиною, що проходить через діаметр основи.

Розв'язання.

Нехай R – радіус основи циліндра, α – кут між січною площиною і основою циліндра. Координатні осі розмістимо так, як показано на рис. 14.7а).

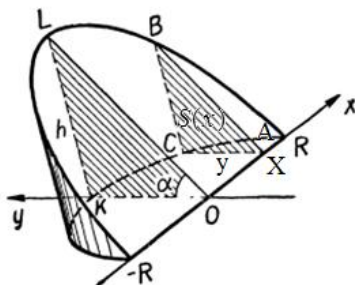


Рис. 14.7 а)

У довільній точці x ($-R \leq x \leq R$) проведемо переріз циліндра площиною, перпендикулярною осі Ox . В результаті одержимо прямокутний трикутник ABC з площею $S(x) = \frac{1}{2} BC \cdot AC$, $AC = y$, $BC = y \operatorname{tg} \alpha$, $y^2 = R^2 - x^2$ (рис. 14.7 б), тоді:

$$S(x) = \frac{1}{2} y^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha.$$

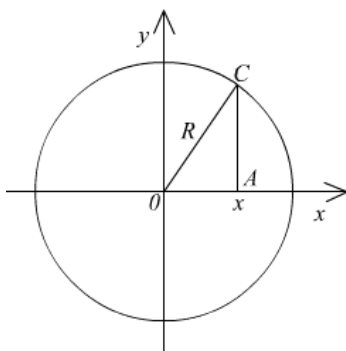


Рис. 14.7 б)

Об'єм тіла знаходимо за формулою (14.1), врахувавши, що $KL = h = OK \cdot \operatorname{tg} \alpha = R \operatorname{tg} \alpha$.

$$V = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} R^2 h. \quad \blacksquare$$

Задача 13.3. Знайти об'єм тіла, обмеженого циліндром

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{і площинами} \quad y = 0, z = 0, \quad \frac{x}{R} + \frac{z}{H} = 1, \quad \frac{x}{R} - \frac{z}{H} = -1$$

(рис. 14.8).

Розв'язання.

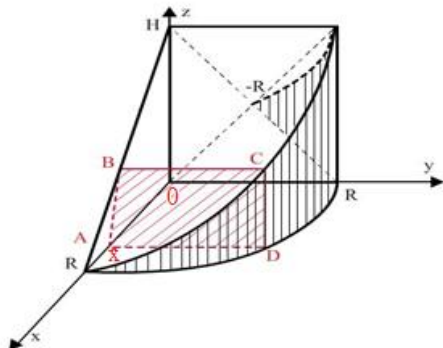


Рис. 14.8

При перетині циліндра площинами Oxz ($y=0$), Oxy ($z=0$), $\frac{x}{R} + \frac{z}{H} = 1$ і $\frac{x}{R} - \frac{z}{H} = -1$ одержимо тіло, симетричне відносно площини Oyz , тому об'єм такого тіла дорівнює подвоєному добутку об'єму тіла у першому октанті. Розглянемо переріз тіла площиною, перпендикулярною основі циліндра (прямокутник $ABCD$), оскільки точки B і C з однаковою абсцисою знаходяться у площині $\frac{x}{R} + \frac{z}{H} = 1$. Нехай $OA = x$, тоді $AB = \frac{H}{R}(R-x)$, $AD = \sqrt{R^2 - x^2}$ і площа перерізу $S(x) = AB \cdot AD = \frac{H}{R}(R-x)\sqrt{R^2 - x^2}$.

Об'єм тіла знаходимо за формулою (14.1).

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_0^R S(x) dx = \frac{2H}{R} \int_0^R (R-x)\sqrt{R^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} x = R \sin t & dx = R \cos t dt \\ t_1 = 0 & t_2 = \arcsin \frac{R}{R} = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\
 &= 2HR \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t) \cos^2 t dt = 2HR^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d(\cos t) \right) = \\
 &= 2HR^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2HR^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi H^2}{6} (3\pi - 4) \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

Задача 14.4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \frac{c}{a}x, \quad z = 0.$$

Розв'язання.

Задане тіло обмежене площинами Oxy ($z = 0$), $z = \frac{c}{a}x$ і циліндром (рис. 14.9 а).

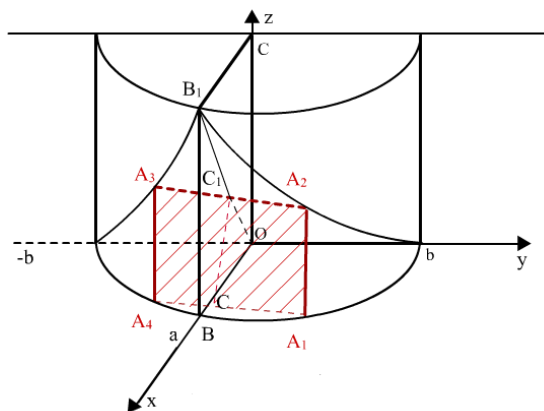


Рис. 14.9 а)

Розглянемо переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox . В результаті одержимо прямокутник $A_1A_2A_3A_4$. Нехай абсциса точки A_1 дорівнює x . З подібності трикутників OBB_1 і OCC_1 маємо (рис. 14.9 б):

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow CC_1 = \frac{BB_1 \cdot OC}{OB} = \frac{xc}{a}.$$

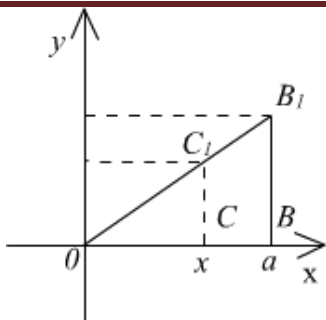


Рис. 14.9 б)

Площа прямокутника $A_1A_2A_3A_4$ дорівнює:

$$S(x) = A_1A_2 \cdot C_1C_2 = 2y(A_1) \cdot \frac{xc}{a} = \frac{xc}{a} \cdot 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

оскільки ордината $y(A_1)$ точки A_1 визначиться з рівняння

(рис. 14.9 в) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, звідки $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

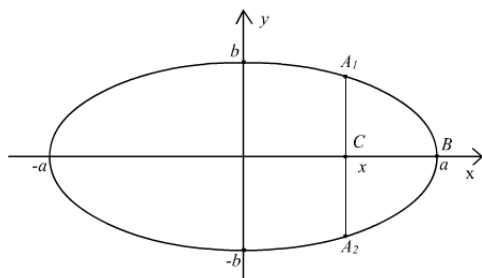


Рис. 14.9 в)

Об'єм тіла знайдемо за формулою (14.1).

$$V = \frac{2bc}{a} \int_0^a x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \quad dt = -\frac{2x}{a^2} dx \\ x dx = -\frac{a^2}{2} dt, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 0 \end{array} \right| =$$

$$-\frac{2bc}{a} \int_1^0 \frac{a^2}{2} t^{\frac{1}{2}} dt = abc \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2abc}{3} \text{ (куб. од.)} \blacksquare$$

Задача 14.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = ax.$$

Розв'язання.

Тіло обмежене частиною поверхні циліндра $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$,

центр основи якого знаходиться у точці $\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$ ($z = 0$) з твірними паралельними осі Oz , і сферою (рис. 14.10). Оскільки тіло симетричне відносно площини Oxy , то візьмемо лише його верхню половину.

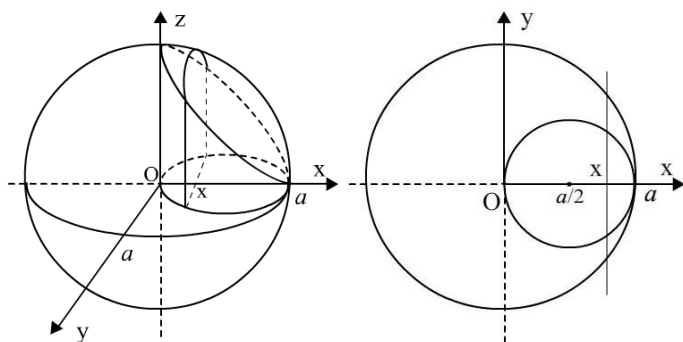


Рис. 14.10

Розглянемо переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox , яка проходить через точку $K(x; 0; 0)$ ($0 \leq x \leq a$), ним є криволінійна трапеція $ABCD$, площа якої визначається як:

$$S(x) = \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dy = 2 \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dy,$$

а шуканий об'єм знайдемо за формулою (14.1):

$$V = 4 \int_0^a S(x) dx = 4 \int_0^a \left(\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dy \right) dx.$$

Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл:

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{a^2-x^2} \sin t, \quad dy = \sqrt{a^2-x^2} \cos t dt, \\ t_1 = 0, \quad t_2 = \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \end{array} \right| = \\
 &= \int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}} (a^2-x^2) \cos^2 t dt = (a^2-x^2) \int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \\
 &= \frac{a^2-x^2}{2} \left(\arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}} = \\
 &= \frac{a^2-x^2}{2} \left(\arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} + \sqrt{\frac{x}{a+x}} \cdot \sqrt{1-\frac{x}{a+x}} \right) = \\
 &= \frac{a^2-x^2}{2} \left(\arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sqrt{ax}}{a+x} \right).
 \end{aligned}$$

Знайдемо об'єм:

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^a \frac{a^2-x^2}{2} \left(\arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sqrt{ax}}{a+x} \right) dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} x = a \operatorname{tg}^2 t, \quad dx = 2a \operatorname{tg} t d(\operatorname{tg} t) \\ t_1 = 0; \quad t_2 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a^2 - a^2 \operatorname{tg}^4 t) \left(\arcsin(\sin t) + \frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t} \right) 2a \operatorname{tg} t d(\operatorname{tg} t) = \\
 &= 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg}^4 t) \left(t + \frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t} \right) \operatorname{tg} t d(\operatorname{tg} t) = \\
 &= 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} t (\operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^5 t) d(\operatorname{tg} t) + 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg}^4 t) d(\operatorname{tg} t) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left| \begin{array}{l} u = t, \quad du = dt \\ dv = (\operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^5 t) d(\operatorname{tg} t), \quad v = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{2} - \frac{\operatorname{tg}^6 t}{2} \end{array} \right| = \\
 &= 4a^3 \left(t \left(\frac{\operatorname{tg}^2 t}{2} - \frac{\operatorname{tg}^6 t}{2} \right) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 t}{2} - \frac{\operatorname{tg}^6 t}{2} \right) dt \Bigg) + 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg}^6 t) dt = \\
 &= \frac{\pi a^3}{3} + 4a^3 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 t dt - \frac{5}{6} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^6 t dt \right) = \\
 &= \frac{\pi a^3}{3} + 4a^3 \left(\frac{1}{2} (\operatorname{tg} t - t) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{5}{6} \left(\frac{\operatorname{tg}^5 t}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 t}{3} + \operatorname{tg} t - t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\
 &= \frac{\pi a^3}{3} + 4a^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{6} + \frac{5}{18} - \frac{5}{6} + \frac{5\pi}{24} \right) = 4a^3 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) = \frac{2a^3}{6} \left(\pi - \frac{4}{3} \right). \blacksquare
 \end{aligned}$$

Задача 14.6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо вказаної осі.

1)

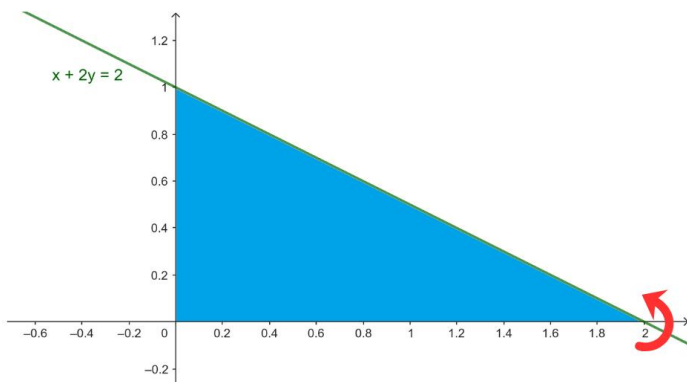


Рис. 14.11

2)

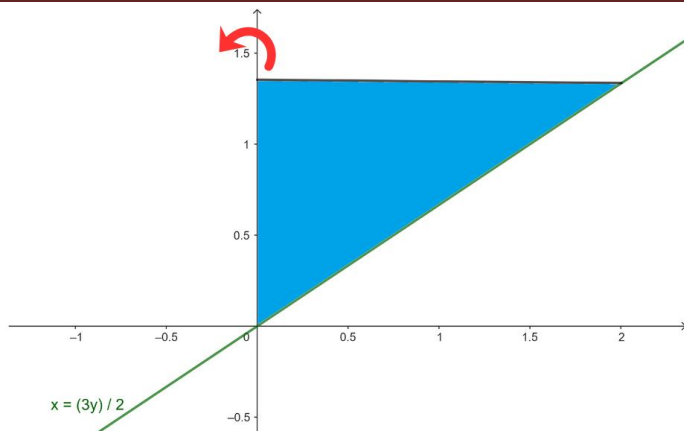


Рис. 14.12

3)

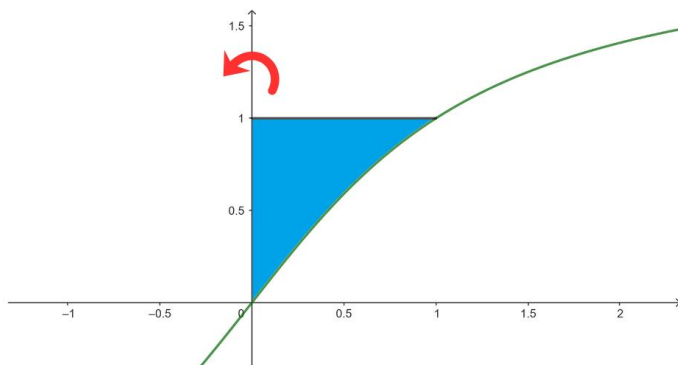


Рис. 14.13

4)

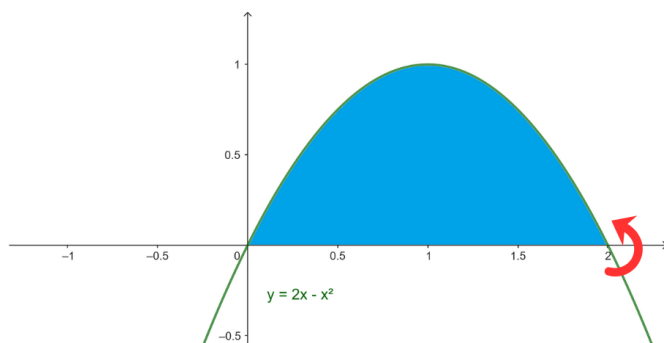


Рис. 14.14

Розв'язання.

1)

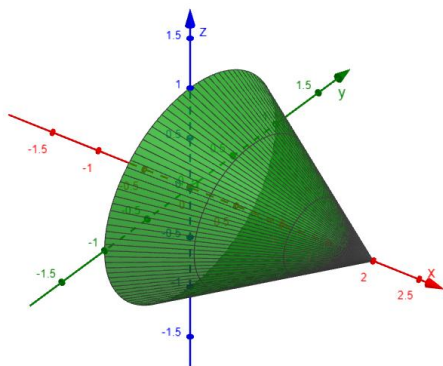


Рис. 14.15

Маємо тіла обертання, об'єм яких шукаємо за формулою 14.2 або 14.5.

Рівняння прямої можна записати у вигляді: $y = 1 - \frac{x}{2}$. За формулою 14.2 можна знайти об'єм:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \pi \cdot (-2) \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^3}{3} \bigg|_0^2 = -\frac{2\pi}{3} \left((1-1)^3 - (1-0)^3 \right) = \\ &= \frac{2\pi}{3} \text{ (куб. од.)} \end{aligned}$$

Зауважимо, що об'єм конуса з радіусом основи $R=1$ і висотою $H=2$ можна знайти за відомою формулою з курсу геометрії:

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 2}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

2)

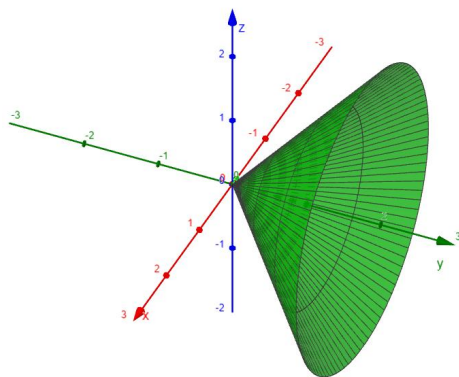


Рис. 14.16

За формулою 14.5 будемо мати:

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{3y}{2} \right)^2 dy = \frac{9\pi}{4} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 = 6\pi \text{ (куб. од.)}$$

Аналогічно до пункту 1) об'єм конуса можна знайти за формулою:

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 2}{3} = 6\pi \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

3)

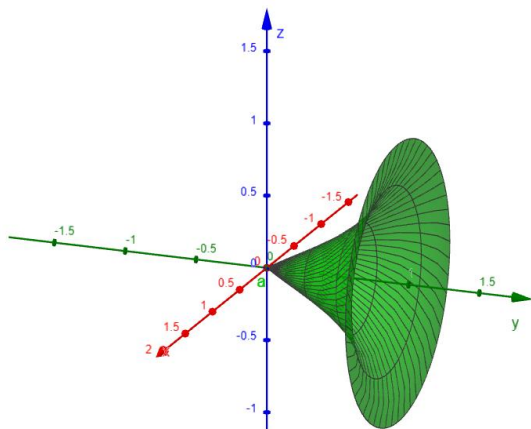


Рис. 14.17

Аналогічно пункту 2) будемо мати:

$$V = \pi \int_0^1 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}y\right) dy = \left| \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right| = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)} - 1 \right) dy =$$

$$= \pi \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}y\right) \Big|_0^1 - y \Big|_0^1 \right) = 4 - \pi \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

4)

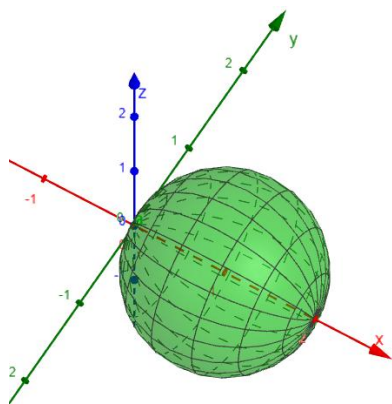


Рис. 14.18

Аналогічно пункту 1) будемо мати:

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2) dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{4x^3}{3} \Big|_0^2 - x^4 \Big|_0^2 + \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 \right) = \pi \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) = \frac{16}{15} = 1 \frac{1}{15} \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

Задача 14.7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої двома вітками кривої $(y-x)^2 = x^3$ і прямою $x=1$ (рис.14.19).

Розв'язання.

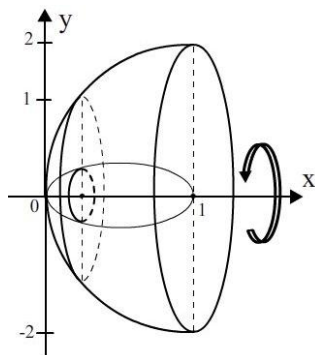


Рис. 14.19

$$(y-x)^2 = x^3 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x + \sqrt{x^3}, \\ y_2 = x - \sqrt{x^3}. \end{cases}$$

Шуканий об'єм V визначається за формулою (14.4) як різниця об'ємів двох тіл, одержаних при обертанні навколо осі Ox криволінійних трапецій, обмежених зверху відповідно кривими $y_1 = x + \sqrt{x^3}$, $y_2 = x - \sqrt{x^3}$ і прямими $x=0$, $x=1$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (y_1^2(x) - y_2^2(x)) dx = \pi \int_0^1 \left((x + \sqrt{x^3})^2 - (x - \sqrt{x^3})^2 \right) dx = \\ &= \pi \int_0^1 2x \cdot 2\sqrt{x^3} dx = 4\pi \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{8\pi}{7} x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{7}. \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 14.8. Довести, що об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy плоскої фігури $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq y(x)$, $y(x) \in C_{[a,b]}$ і $y(x) \geq 0$ (рис. 14.20), дорівнює:

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b xy(x) dx} \quad (14.8)$$

Доведення.

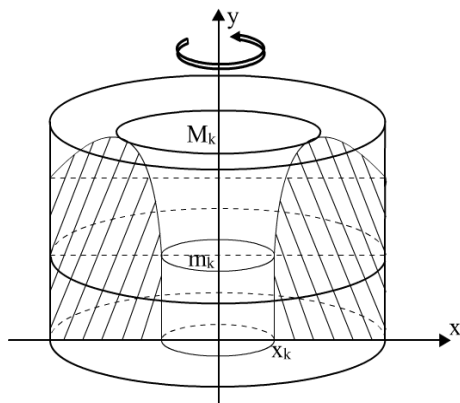


Рис. 14.20

Візьмемо довільне τ -розбиття відрізка $[a; b]$:

$$\tau = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}, \text{ де } x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n.$$

На кожному відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ розглянемо два прямокутники з основою Δx_k і висотами:

$$m_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} \{y(x)\}, \quad M_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} \{y(x)\}.$$

Одержали дві ступінчасті фігури, одна з яких вписана, а інша описана навколо криволінійної трапеції:

$$A = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x)\}.$$

При обертанні ступінчатих фігур навколо осі Oy одержимо два тіла T_1 і T_2 , які складаються з кільцевих циліндрів з об'ємами відповідно:

$$V_{T_1} = \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k (x_{k+1}^2 - x_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi m_k \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \Delta x_k,$$

$$V_{T_2} = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi M_k \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \Delta x_k.$$

Останні суми запишемо в іншому вигляді, врахувавши, що:

$$\frac{x_k + x_{k+1}}{2} = x_k + \frac{\Delta x_k}{2} \text{ або } \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = x_{k+1} - \frac{\Delta x_k}{2}.$$

Отже,

$$V_{T_1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi m_k x_k \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k \Delta x_k^2,$$

$$V_{T_2} = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi M_k x_{k+1} \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} \pi M_k \Delta x_k^2.$$

Перші суми останніх рівностей є відповідно нижньою s_n і верхньою S_n сумами Дарбу для інтегровної функції $f(x) = 2\pi xy(x)$ на відрізку $[a; b]$, тому $\lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} (S_n - s_n) = 0$, $\lambda(\tau) = \max_{k=0, n-1} \Delta x_k$.

Оцінімо різницю других сум:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \pi (M_k + m_k) \Delta x_k^2 \right| \leq \pi (M + M) \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 < 2\pi M \lambda(\tau) (b-a) \xrightarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} 0,$$

де $M = \sup_{[a; b]} \{y(x)\}$.

Отже, $V_{T_1} - V_{T_2} = (S_n - s_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \pi (M_k + m_k) \Delta x_k^2 \xrightarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} 0$, а границя

$$\lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} V_{T_2} = \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} V_{T_1} = 2\pi \int_a^b xy(x) dx + 0.$$

Тому об'єм тіла V можна обчислити за формулою (14.8). ■

Задача 14.9. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Oy фігури, обмеженої кривими $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Розв'язання.

1 спосіб.

При обертанні параболу $y = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{1-y}, \\ x_2 = 1 - \sqrt{1-y} \end{cases}$ навколо осі ординат утвориться тіло, об'єм якого

можна знайти як різницю об'ємів тіл, утворених при обертанні кривих $x_1(y)$ і $x_2(y)$, $y \in [0;1]$ навколо тієї ж осі (формула 14.7) (рис.14.21а).

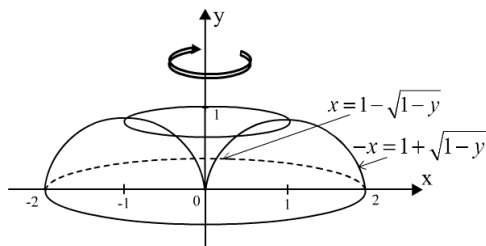


Рис. 14.21 а)

$$V = \pi \int_0^1 \left((1 + \sqrt{1-y})^2 - (1 - \sqrt{1-y})^2 \right) dy = 4\pi \int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{2}} dy =$$

$$= -4\pi \cdot \frac{2}{3} (1-y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3} \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

2 спосіб. Можна використати формулу (14.8) (рис.14.21б):

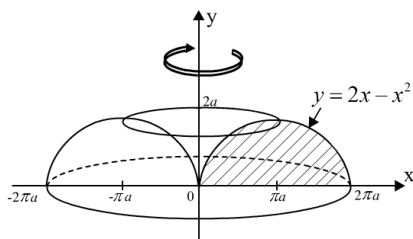


Рис. 14.21 б)

$$V = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = 2\pi \left(\frac{2x^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 \right) = 2\pi \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4} \right) = 2\pi \frac{16}{12} = \frac{8\pi}{3}.$$

$$V = \frac{8\pi}{3} \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

Задача 14.10. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, навколо:

1) осі Ox ;

2) осі Oy ;

3) прямої $y = 2a$.

Розв'язання.

1) Якщо параметр t змінюється від 0 до 2π , то абсциса змінюється від 0 до $2\pi a$, а ордината – від 0 до $2a$ (перша арка циклоїди). В результаті обертання арки циклоїди одержуємо тіло обертання (рис. 14.22).

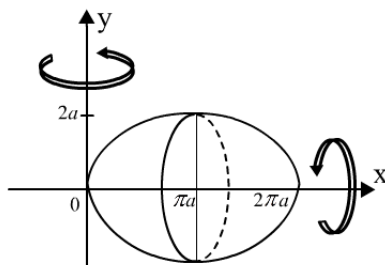


Рис. 14.22

Об'єм тіла можна обчислити за формулою (14.3). Для цього знайдемо:

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y^2(t)x'(t) = a^3(1 - \cos t)^3.$$

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)x'(t)dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt =$$

$$= \pi a^3 \left((t - 3\sin t) \Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{2} \left(t + \frac{3}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} - \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} \right) =$$

$$= 5\pi^2 a^3 \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

2) Об'єм тіла знайдемо за формулою (14.8):

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = x(t), \quad dx = x'(t)dt \\ y = y(t), \quad t_1 = \alpha, \quad t_2 = \beta \end{array} \right| = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y(t)x'(t)dt.$$

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} a^3(t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}t - 2t \cos t + \right.$$

$$\left. + \frac{t}{2} \cos 2t - \sin t + \sin 2t - \sin t \cos^2 t \right) dt = 2\pi a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{t^2}{2} \bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 6\pi^3 a^3 \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

3) Перейдемо до нової системи координат за формулами:

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y - 2a. \end{cases}$$

Тоді шуканий об'єм $V = V_1 - V_2$, де V_1 – об'єм кругового циліндра з висотою $H = 2\pi a$ і радіусом основи $R = 2a$, V_2 – об'єм тіла (не заштрихованого) всередині циліндра (рис. 14.23).

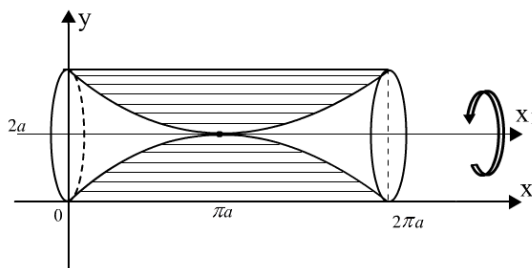


Рис. 14.23

$$V_1 = \pi R^2 H = \pi \cdot 4a^2 \cdot 2\pi a = 8\pi^2 a^3$$

$$V_2 = \pi \int_0^{2\pi a} (y_1)^2 dx_1 = \left| \begin{array}{l} y_1 = a(1 - \cos t) - 2a, \\ x_1 = a(t - \sin t), \\ dx_1 = a(1 - \cos t) dt, \\ t \in [0; 2\pi] \end{array} \right| =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t) - 2a)^2 a(1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 (1 - \cos t) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 + \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t (1 + \cos t) dt = \\
 &= \pi a^3 \left(\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} \right) = \pi^2 a^3.
 \end{aligned}$$

$$V = V_1 - V_2 = 8\pi^2 a^3 - \pi^2 a^3 = 7\pi^2 a^3.$$

$$V = 7\pi^2 a^3 \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

Задача 14.11. Довести, що об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi$,

$$0 \leq \rho \leq \rho(\varphi), \text{ дорівнює: } V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi \text{ (14.9).}$$

Доведення.

Нехай τ – довільне розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$ точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_k < \dots < \varphi_n = \beta$. Тоді плоска фігура розіб'ється на n елементарних плоских фігур, обмежених променями $\rho = \varphi_k$, $\rho = \varphi_{k+1}$ і кривою $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 14.24).

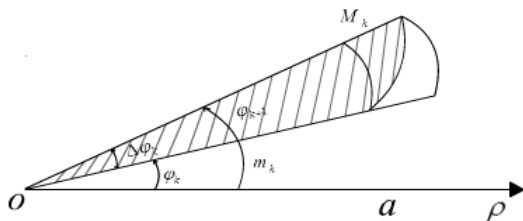


Рис. 14.24

Позначимо $m_k = \inf_{[\varphi_k, \varphi_{k+1}]} \{\rho(\varphi)\}$, $M_k = \sup_{[\varphi_k, \varphi_{k+1}]} \{\rho(\varphi)\}$ і розглянемо два тіла T_1 і T_2 , утворені обертанням кругових секторів $\{(\rho, \varphi) | \varphi \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}], \rho = M_k\}$ і $\{(\rho, \varphi) | \varphi \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}], \rho = m_k\}$ навколо полярної осі.

Тоді шукане тіло T міститься у тілі T_1 і містить тіло T_2 , де T_1 і T_2 є об'єднанням кульових секторів. Як відомо з геометрії, об'єм кульового сектору обчислюється за формулою: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, де h – висота кульового сегменту, що належить даному кульовому сектору, R – радіус кулі.

З трикутника OAB ($\angle OAB = 90^\circ$, $\angle AOB = \varphi$) будемо мати (рис. 14.25):

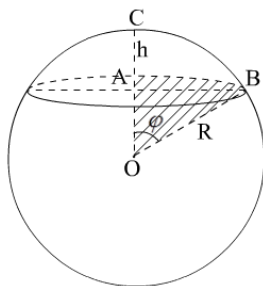


Рис. 14.25

$$\frac{R-h}{R} = \cos \varphi \Rightarrow R-h = R \cos \varphi \Rightarrow h = R(1 - \cos \varphi).$$

Отже, об'єм кульового сектора: $V = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos \varphi)$.

В нашому випадку об'єми тіл T_1 і T_2 будуть рівні:

$$V_{T_1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi}{3} M_k^3 (\cos \varphi_k - \cos \varphi_{k+1}) = \frac{4\pi}{3} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^3 \sin \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2} \sin \frac{\Delta \varphi_k}{2};$$

$$V_{T_2} = \frac{4\pi}{3} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^3 \sin \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2} \sin \frac{\Delta \varphi_k}{2}.$$

При достатньо дрібному τ -розбитті відрізка $[\alpha; \beta]$

$\left(\lambda(\tau) = \max_{k=0, n-1} \Delta \varphi_k \rightarrow 0 \right)$ матимемо, що $\sin \frac{\Delta \varphi_k}{2} = \frac{\Delta \varphi_k}{2} + \alpha(\Delta \varphi_k)$, де

$\alpha(\Delta \varphi_k) \xrightarrow{\Delta \varphi_k \rightarrow 0} 0$; $\sin \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2} = \sin \theta_k$, де $\varphi_k < \theta_k < \varphi_{k+1}$. Тоді:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} V_{T_1} &= \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \left(\frac{4\pi}{3} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^3 \sin \theta_k \frac{\Delta \varphi_k}{2} + \frac{4\pi}{3} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^3 \sin \theta_k \cdot \alpha(\Delta \varphi_k) \right) = \\ &= \left| \gamma_1 = \frac{4\pi}{3} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^3 \sin \theta_k \alpha(\Delta \varphi_k \xrightarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} 0) \right| = \frac{2\pi}{3} \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^3 \sin \theta_k \Delta \varphi_k, \\ \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} V_{T_2} &= \frac{2\pi}{3} \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^3 \sin \theta_k \Delta \varphi_k. \end{aligned}$$

$$\text{Суми } \frac{2\pi}{3} \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^3 \sin \theta_k \Delta \varphi_k = S_n \quad \text{і} \quad \frac{2\pi}{3} \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^3 \sin \theta_k \Delta \varphi_k = s_n \in$$

відповідно верхньою і нижньою сумами Дарбу для функції

$$\frac{2\pi}{3} \rho^3(\varphi) \sin \varphi \in R_{[\alpha; \beta]}, \text{ отже:}$$

$$\lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} V_{T_1} = \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} V_{T_2} = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi = V_{\text{тіла}}. \quad \blacksquare$$

Зауваження. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури $A = \{(\rho, \varphi) | -\pi \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq 0, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$ дорівнює:

$$V = -\frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Якщо фігура $A = \{(\rho, \varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$ лежить по один бік від полярної осі, то:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) |\sin \varphi| d\varphi \quad (14.10)$$

Задача 14.12. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні кривої $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ навколо:

- 1) осі Ox ;
- 2) осі Oy ;
- 3) прямої $y = x$.

Розв'язання.

Перейдемо до полярної системи координат $x = \rho \cos \varphi$,
 $y = \rho \sin \varphi$:

$$\rho^4 = a^2 \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Rightarrow \rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Крива, яка задається цим рівнянням, є лемніскатою Бернуллі (рис. 14.26 а).

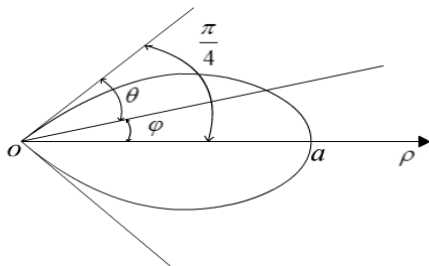


Рис. 14.26 а)

1) Оскільки фігура симетрична відносно координатних осей, то об'єм тіла, утвореного обертанням лемніскати навколо осі Ox (або полярної осі) обчислимо за формулою (14.9):

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^3 \cos^2 2\varphi \sin \varphi d\varphi = -\frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 \varphi - 1)^{\frac{3}{2}} d(\cos \varphi) = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{2} \cos \varphi, \quad dt = -\sqrt{2} d(\cos \varphi) \\ t_1 = \sqrt{2} \cos 0 = \sqrt{2}, \quad t_2 = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right| = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt = \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{t}{4} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8} t \sqrt{t^2 - 1} + \frac{3}{8} \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) \right) \Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\pi a^3}{4} \left(\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2) Перейдемо до нової системи координат, візьмемо промінь $\varphi = \frac{\pi}{2}$ за полярну вісь системи (ρ_1, θ) (рис. 14.26 б):

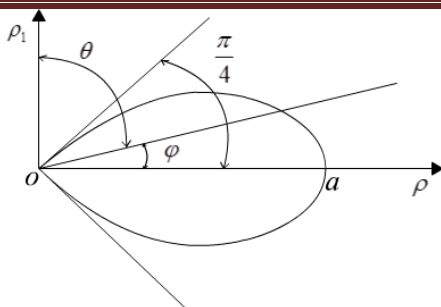


Рис. 14.26 б)

$$\begin{cases} \theta = \varphi - \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right); \\ \rho_1(\theta) = \rho(\varphi). \end{cases}$$

$$V_y = \frac{4\pi}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\rho_1(\theta))^3 |\sin \theta| d\theta = |\sin \theta < 0| = -\frac{4\pi a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\frac{3}{2}}(2\theta) \sin \theta d\theta =$$

$$= \left| \begin{matrix} \varphi = \theta + \frac{\pi}{2} & d\varphi = d\theta \\ \varphi_n = 0 & \varphi_e = \frac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = -\frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\frac{3}{2}} 2\varphi \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\frac{3}{2}} 2\varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi d\varphi =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \sqrt{2} \sin \varphi, & dt = \sqrt{2} \cos \varphi d\varphi \\ t_n = \sqrt{2} \sin 0 = 0, & t_e = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1 \end{matrix} \right| = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \sin u & dt = \cos u du \\ u = \arcsin 0 = 0 \\ u_n = \arcsin 0 = 0 \\ u_e = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u)^{\frac{3}{2}} \cos u du = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2u}{2} \right)^2 du = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2u + \frac{1 + \cos 4u}{2} \right) du = \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2}u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin 2u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8} \sin 4u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

3) Знову перейдемо до нової системи координат, візьмемо промінь $\varphi = \frac{\pi}{4}$ за полярну вісь нової системи (ρ_1, θ) (рис. 14.26 б):

$$\begin{cases} \theta = \varphi - \frac{\pi}{4}; \\ \rho_1(\theta) = \rho(\varphi). \end{cases}$$

Врахувавши симетрію фігури, одержимо:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{4\pi}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \rho_1^3(\theta) |\sin \theta| d\theta = -\frac{4\pi a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{\frac{3}{2}} 2\theta \sin \theta d\theta = \\
 &= -\frac{4\pi a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\frac{3}{2}} 2\varphi \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) d\varphi = \left| \begin{array}{l} \varphi - \frac{\pi}{4} = -t \quad d\varphi = -dt \\ t_n = \frac{\pi}{2}, \quad t_e = 0 \end{array} \right| = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \theta = \varphi - \frac{\pi}{4} \quad \varphi = \theta + \frac{\pi}{4} \\ d\theta = d\varphi \\ \varphi_n = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_e = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2t \right) \sin t dt =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} 2t \sin t dt = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} t \cos^{\frac{3}{2}} t dt.$$

$$\text{Обчислимо інтеграл } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} t \cos^{\frac{3}{2}} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} t \cos^{\frac{1}{2}} t \cdot \cos t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \sin t, \quad du = \cos t dt \\ u = \sin 0 = 0, \quad u = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 u^{\frac{5}{2}} \cdot (1-u^2)^{\frac{1}{4}} du =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u^m (a + bu^n)^p, \quad p = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{m+1}{n} = \frac{\frac{5}{2}+1}{2} = \frac{7}{4} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} + p = 2 \in \mathbb{Z}, \\ 3\text{-я підстановка Чебишева} \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u^{-2} - 1 = z^4, \\ du = -2z^3 (z^4 + 1)^{-\frac{3}{2}} dz, \\ z_{\text{н}} = +\infty \quad z_{\text{г}} = 0 \end{array} \right| = -2 \int_{+\infty}^0 z^4 (z^4 + 1)^{-3} dz = -2 \int_{+\infty}^0 \frac{z^4}{(z^4 + 1)^3} dz =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{z(3-z^4)}{16(z^4+1)^2} \Big|_{+\infty}^0 - \frac{3}{16} \int_{+\infty}^0 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{z + \frac{1}{2}}{z^2 + z\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{z + \frac{1}{2}}{z^2 - z\sqrt{2} + 1} \right) dz = \\ &= 0 - \frac{3}{32\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{z^2 + z\sqrt{2} + 1}{z^2 - z\sqrt{2} + 1} \Big|_{+\infty}^0 + \arctg(z\sqrt{2} + 1) \Big|_{+\infty}^0 + \arctg(z\sqrt{2} - 1) \Big|_{+\infty}^0 \right) = \\ &= -\frac{3}{32\sqrt{2}} \left(0 + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) + \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{3}{32\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Отже, об'єм шуканого тіла:

$$V = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3} \cdot \frac{3\pi}{32\sqrt{2}} = \frac{\pi^2 a^3}{4} \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare$$

Задача 14.13. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ [36, с. 183].

Розв'язання.

I спосіб (без використання програмного засобу)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (2x+1)^2 dx = \pi \int_0^1 (4x^2 + 4x + 1) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \\ &= \pi \left(\frac{4}{3} + 2 + 1 \right) = \frac{13\pi}{3} = 13,6 \text{ (куб. од.)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

II спосіб (за допомогою програми GRAN 1)

1) В меню «Список об'єктів» обираємо тип «Явна функція $y = y(x)$ »;

2) задаємо аналітичний вираз функції «Об'єкт» «Створити», та вводимо функції: $y = 2 * x + 1$, $y = 0$;

3) обираємо пункт меню «Графік» «Побудувати».

4) звертаємося до пункту меню «Операції» «Інтеграл», «Об'єм та площа поверхні обертання». Задаємо межі інтегрування $A = 0$, $B = 1$, після чого з'являється вікно з відповідями та графік тіла обертання (рис. 14.27, рис. 14.28) де ми можемо побачити чому дорівнює площа $S = 28,11$ та $V = 13,61$.

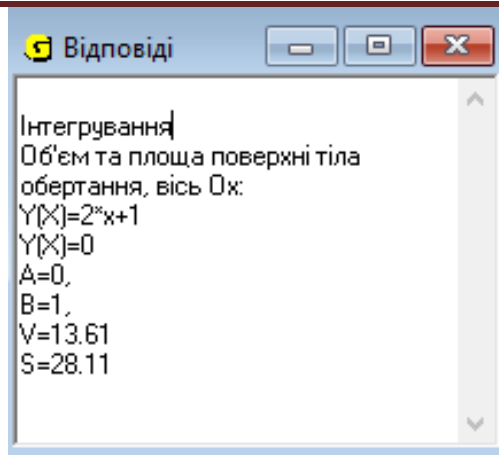


Рис 14.27. Вікно з відповідями програми Gran1

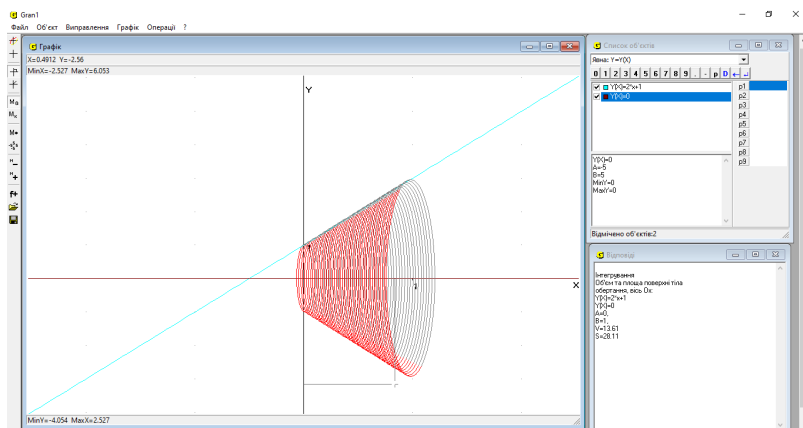


Рис. 14.28. Графік тіла обертання в програмі Gran1

Завдання для самостійного розв'язування

№1. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, навколо осі l :

1) $y = 2x - x^2$, $y \geq 0$, $l: Ox$; $l: Oy$;

2) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $l: Ox$;

3) $y = 2x, y = x + 3, x = 0, l : Ox; l : Oy;$

4) $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2, y = b\left|\frac{x}{a}\right|, a > 0, l : Ox; l : Oy;$

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; l : Ox; l : Oy;$

6) $y = 2 - x^2, y = x^2, x = 0, l : Oy;$

7) $y = \frac{3}{2\sqrt{x}}, y = 0, x = 1, x = 4, l : Oy;$

8) $y = \sqrt{x}, y = 0, y = 2 - x, l : Ox.$

З2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, навколо осі l :

1) $y = \arcsin x, y = 0, x = 1, l : Ox; l : Oy;$

2) $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, y = 0, x = 0, x = a, l : Ox; l : Oy;$

3) $y = e^x + 6, y = e^{2x}, x = 0, l : Ox, l : Oy;$

4) $y = e^{2x} \sin \pi x, n - 1 \leq x \leq n, y = 0, n \in \mathbb{N}, l : Ox;$

5) $y = \sqrt{\cos x}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y = 0, x = 0, l : Ox;$

6) $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1, l : Ox;$

7) $y = \sec x, y = \operatorname{tg} x, x = 0, x = 1, l : Ox;$

8) $y = \sec x, y = \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, l : Ox.$

З3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, навколо осі l :

1) $x = t^3, y = t^2, y = 0, |x| = 1, l : Ox; l : Oy;$

2) $x = a \sin t, y = a \sin 2t, 0 \leq t \leq 2\pi, l : Ox; l : Oy;$

3) $x = 2t - t^2, y = 4t - t^3, l : Ox; l : Oy.$

З4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, навколо осі l :

$$1) \rho = \sqrt[3]{\cos 3\varphi}, \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right], \quad l: Oy;$$

$$2) \rho = 2a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3} \right], \quad l: Ox;$$

$$3) \rho = a(1 + \cos \varphi), \quad l: Ox;$$

$$4) \rho = \frac{a}{\cos \varphi \cos 2\varphi}, \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{6} \right], \quad l: Ox.$$

✎5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad |z| = H;$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(z-H)^2}{H^2}, \quad z = 0;$$

$$3) 2\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = H;$$

$$4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad z \geq 0.$$

✎6. Обчислити об'єм тіла, що відтинається від прямого кругового циліндра площиною, яка проходить через діаметр основи.

✎7. На всіх хордах круга радіуса R , які паралельні деякому напрямку, побудовані симетричні параболічні сегменти сталої висоти h . Площини сегментів перпендикулярні до площини круга. Знайти об'єм утвореного тіла.

✎8. 1) Обчислити об'єм кульового сегмента, якщо його висота h , а радіус кулі R .

2) Обчислити об'єм кульового шару, що відтинається від кулі радіуса R двома паралельними площинами, які знаходяться по один бік від центра на відстанях a і b від нього ($a < b$).

✎9. Обчислити площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі l кривої:

$$1) y = \frac{1}{4}x^3, \quad [0; 2], \quad l: Ox;$$

2) $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}, [-b; b], l: Ox;$

3) $x^2 + (y - b)^2 = r^2, r < b, l: Ox;$

4) $y^2 = 2px (0 \leq x \leq x_0); l: Ox, l: Oy;$

5) $y = \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, [0; 1], l: Oy;$

6) $x = \sqrt{2} \sin t, y = \frac{1}{4} \sin 2t, 0 \leq t \leq \pi, l: Oy;$

7) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, l: y = x;$

8) $x = t^2, y = \frac{t^3}{3} - t, |t| \leq \sqrt{6}, l: x = 3;$

9) $\rho = 2a \sin \varphi, l: Ox;$

10) $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi, l: Ox, l: Oy;$

11) $\rho = a \sec^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right); 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}, l: Ox.$

§ 15. Застосування визначеного інтеграла у фізиці та економіці

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Маса плоскої кривої, маса плоскої фігури	Mass of a flat curve, mass of a flat figure
Статичні моменти і центр ваги плоскої кривої (фігури)	Static moments and center of gravity of a flat curve (figure)
Теореми Гульдїна	Gouldin's theorems
Економічні терміни: витрати, длхід, прибуток	Economic terms: cost, income, profit
Маргінальна вартість, маргінальний дохід, маргінальний прибуток	Marginal cost, marginal income, marginal profit
Прибутковий податок	Income tax

Приклади розв'язування вправ

I. Обчислення статичних моментів і координат центра ваги плоскої кривої.

Статичні моменти кривої AB відносно координатних осей обчислюють за формулами: $M_x = \int_0^L \rho y(s) ds$, $M_y = \int_0^L \rho x(s) ds$. Якщо крива однорідна, то будемо вважати, що $\rho = 1$.

Задача 15.1. Знайти статичні моменти відносно

координатних осей дуги еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$), розміщеної у першій координатній чверті.

Розв'язання.

Тут крива (еліпс) задана в декартовій системі координат $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, диференціал довжини цієї дуги дорівнює

$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, де:

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{a^2 - x^2};$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx = \\ &= \frac{b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \int_0^a \sqrt{\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 - x^2} dx = \\ &= \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 - x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 \arcsin \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right) \Bigg|_0^a = \\ &= \frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо статичний момент і відносно осі ординат, використовуючи формулу $M_y = \int_c^d \rho x(y) \sqrt{1 + x'^2} dy$, де

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}, \quad ds = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{b^4 + y^2(a^2 - b^2)}{b^2 - y^2}} dy.$$

Тому:

$$M_y = \int_0^b \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \cdot \frac{1}{b} \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2 - y^2}} dy =$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{b^4}{2(a^2 - b^2)} \ln \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{a}. \quad \blacksquare$$

В механіці часто доводиться обчислювати координати центра ваги кривої. Отже, якщо в точці $M(\bar{x}, \bar{y})$, яка є центром ваги кривої AB , зосередити всю масу m цієї кривої, то статичні моменти центра ваги точки відносно координатних осей співпадають з відповідними статичними моментами кривої AB :

$$\begin{aligned} \bar{m}x &= M_y, & \bar{x} &= \frac{1}{m} M_y = \frac{1}{m} \int_0^L \rho x(s) ds, \\ \bar{m}y &= M_x, & \bar{y} &= \frac{1}{m} M_x = \frac{1}{m} \int_0^L \rho y(s) ds, \end{aligned}$$

звідки

де $m = \int_0^L \rho ds = \rho L$, якщо крива однорідна.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{L} \int_0^L x(s) ds; \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_0^L y(s) ds} \quad (15.1)$$

1) Якщо крива AB задано параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\varphi(t), \psi(t) \in C_{[\alpha, \beta]}^1$, то:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_0^L \varphi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt}{\int_0^L \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt}; \quad \bar{y} = \frac{\int_0^L \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt}{\int_0^L \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt}}$$

2) Якщо крива AB задано в декартовій системі координат

рівнянням $y = f(x)$, $f(x) \in C_{[a;b]}^1$, то:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx}; \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx}.$$

3) Якщо крива АВ задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi) \in C_{[\alpha;\beta]}^1$, то:

$$\bar{x} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \cos \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi}; \quad \bar{y} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi}$$

Задача 15.2. Знайти статичні моменти та центр ваги дуги астрои́ди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, розміщеної у першій координатній чверті.

Розв'язання.

В силу симетрії астрои́ди відносно координатних осей робимо висновок, що статичні моменти цієї кривої рівні: $M_x = M_y$. Тому достатньо обчислити статичний момент, наприклад, відносно осі абсцис. Астрои́да задана параметрично, однорідна ($\rho = 1$), отже:

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t,$$

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \sin t \cos t dt.$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \left| \begin{array}{ll} u = \sin t, & du = \cos t dt \\ \sin 0 = 0, & \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| = \\ &= 3a^2 \int_0^1 u^4 du = 3a^2 \frac{u^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3}{5} a^2. \end{aligned}$$

Знайдемо масу і координати центра ваги кривої:

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t dt = \frac{3}{2} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3}{4} a \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2},$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{3}{5}a^2}{\frac{3}{2}a} = \frac{2}{5}a.$$

Таким чином, центр ваги частини астроїди, яка розміщена в першій чверті, має координати $M\left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5}\right)$. ■

II. Обчислення статичних моментів і координат центра ваги плоскої фігури.

Нехай плоскою фігурою є однорідна ($\rho=1$) криволінійна трапеція, в якій крива АВ задана рівнянням $y = f(x) \in C_{[a;b]}$ (рис.15.1). Тоді її статичні моменти відносно координатних осей визначаються з формул:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx; \quad M_y = \int_a^b x f(x) dx. \quad (15.2)$$

Розглянемо матеріальну плоску фігуру (рис.15.2)

$$K = \{(x, y) | y = f_1(x), y = f_2(x), x = a, x = b\} \quad (15.3)$$

з рівномірно розподіленою густиною $\rho = \text{const}$.

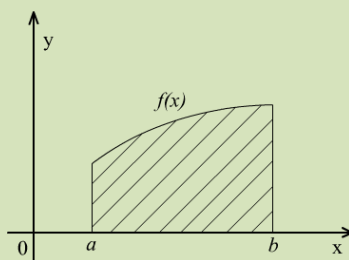


Рис. 15.1

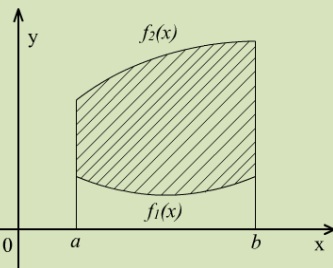


Рис. 15.2

Координати центра ваги такої плоскої фігури визначаються з формул:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx}{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx}, \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx}{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx}$$

(15.4)

Зауважимо, що в чисельниках рівностей (15.4) записані статичні моменти M_y , M_x плоскої фігури відносно координатних осей.

Якщо сектор задано в полярних координатах нерівностями $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $0 \leq r \leq r(\varphi)$, де $0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi$, $r(\varphi) \in C_{[\varphi_1; \varphi_2]}$ (рис.15.3), і нехай у секторі розподілена маса з густиною $\rho(\varphi)$, тоді:

$$m = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) \rho(\varphi) d\varphi,$$

(15.5)

$$M_x = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi) \sin \varphi \cdot \rho(\varphi) d\varphi, \quad (15.6)$$

$$M_y = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi) \cos \varphi \cdot \rho(\varphi) d\varphi. \quad (15.7)$$

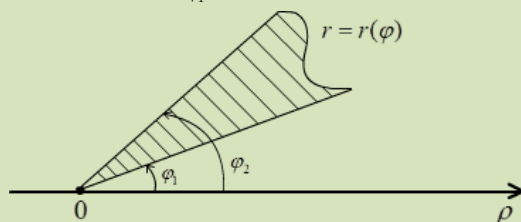


Рис. 15.3

Задача 15.3. Знайти статичний момент фігури, зображеної на рис 15.4, відносно сторони OD, якщо відомо, що $OA=3$ см, $AB=5$ см, $BC=5$ см, $OF=8$ см, а дуга CD є чвертина кола радіуса $CF=FD=3$ см.

Розв'язання.

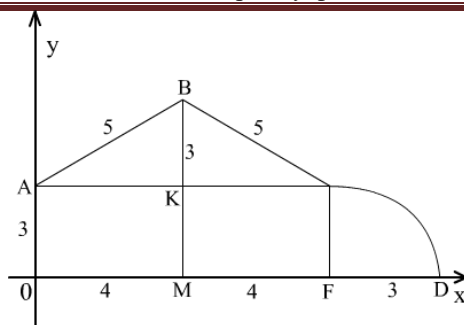


Рис. 15.4

Як видно з рис.15.4 дана фігура має складну форму. Розіб'ємо цю фігуру на прості геометричні фігури і застосуємо теорему: статичний момент фігури відносно деякої осі дорівнює сумі статичних моментів її частин відносно тієї ж осі. Виберемо систему координат так, щоб вісь абсцис містила сторону OD , точка O була початком системи координат, а вісь ординат містила сторону OA фігури.

Тоді фігура є об'єднанням двох трапецій $OABM$ і $MBCF$ і чвертини круга. З умови задачі знаходимо координати контрольних точок плоскої фігури: $A(0;3)$, $B(4;6)$, $C(8;3)$, $D(11;0)$, $F(8;0)$ і рівняння прямих AB і BC як таких, що проходять через дві точки:

$$AB: y = \frac{3}{4}x + 3, \quad BC: y = 9 - \frac{3}{4}x.$$

Оскільки центр F кола радіуса 3 лежить на осі Ox і знаходиться на відстані 8 см від початку координат, то рівняння кола має вигляд:

$$(x-8)^2 + y^2 = 9.$$

Маючи всі дані, можемо знайти статичний момент фігури відносно сторони OD , або, що те саме, відносно осі Ox :

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(\frac{3}{4}x + 3 \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_4^8 \left(9 - \frac{3}{4}x \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_8^{11} \left(9 - (x-8)^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}x + 3\right)^3}{3} \Big|_0^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(9 - \frac{3}{4}x\right)^3}{3} \Big|_4^8 + \frac{1}{2} \left(9x - \frac{(x-8)^3}{3} \right) \Big|_8^{11} = 93. \quad \blacksquare$$

Задача 15.4. Знайти статичні моменти відносно координатних осей і координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої еліпсом $4x^2 + 9y^2 = 36$ і колом $x^2 + y^2 = 9$, розміщеної у першій чверті.

Розв'язання.

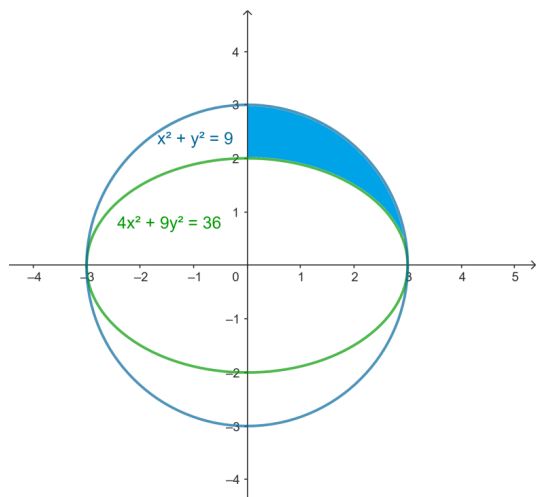


Рис. 15.5

Плоска фігура задається формулами 15.3 (рис. 15.5), отже статичні моменти і центр ваги будемо обчислювати за формулами 15.4:

$$m = \int_0^3 \left(\sqrt{9-x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} \right) dx = \left| \begin{array}{ll} x = 3 \sin t, & dx = 3 \cos t dt \\ 0 = 3 \sin 0, & 3 = 3 \sin \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-9\sin^2 t} 3 \cos t dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{3\pi}{4},$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{4}{9} (9 - x^2) dx = \left(2x - \frac{2}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 6 - \frac{2}{9} \cdot 9 = 4,$$

$$M_y = \int_0^3 x \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} u = 9 - x^2, & du = -2x dx \\ u_u = 9 & u_e = 0 \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int_0^9 \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^9 = 6.$$

Таким чином, центр ваги плоскої фігури має координати $M\left(\frac{8}{\pi}; \frac{16}{3\pi}\right)$. ■

Задача 15.5. Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) і віссю Ox .

Розв'язання.

Плоска крива, яка обмежує задану фігуру (циклоїду), задана параметрично. Знайдемо масу і статичні моменти, використовуючи формули (15.2):

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = 3\pi a^2, \\ M_x &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 4 \cos t + \frac{3}{2} \cos 2t - \sin^2 t \cos t \right) dt = \\ &= a^3 \left(\frac{5\pi}{2} - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{5\pi a^3}{2}, \\ M_y &= \int_0^{2\pi a} xy dx = a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^3 \left(\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d \cos t + \int_0^{2\pi} t \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt \right) = 3\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

Таким чином, координати центра ваги плоскої фігури рівні

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \pi a, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{5}{6} a. \quad \blacksquare$$

Задача 15.6. Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (рис. 15.6).

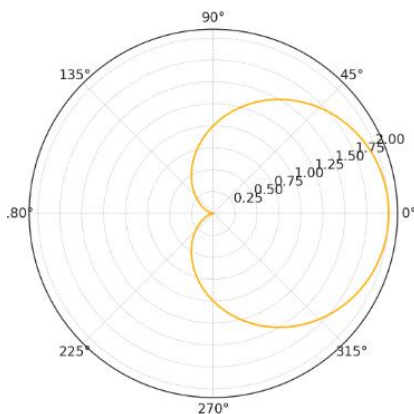


Рис. 15.6

Розв'язання.

Плоска область, обмежена кардіоїдою, симетрична відносно полярної осі, тому центр ваги лежить на цій осі: $\bar{y} = 0$. Масу плоскої області і першу координату центра ваги будемо шукати за формулами (15.5)–(15.7):

$$m = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \left(\frac{3}{2} + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2},$$

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} a^3 (1 + \cos \varphi)^3 \cos \varphi d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{2a^3}{3} \left(\frac{15\pi}{8} + 4 \sin \varphi + \sin 2\varphi - \sin^3 \varphi + \frac{1}{32} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{5\pi a^3}{4}, \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{5\pi a^3}{4} \cdot \frac{2}{3\pi a^2} = \frac{5a}{6}. \text{ Таким чином, центр ваги кардіоїди має}$$

координати $M\left(\frac{5a}{6}; 0\right)$. ■

III. Перша і друга теореми Гульдіна.

Якщо домножити обидві частини рівності ординати центра ваги (рівність (15.1)) на величину $2\pi L$, то одержимо таку рівність:

$$2\pi \bar{y}L = 2\pi \int_0^L y(s)ds,$$

яка відома під назвою «Перша теорема Гульдіна»: «Площа поверхні тіла, утвореного обертанням дуги плоскої кривої навколо деякої осі, що лежить у її площині і не перетинає її, дорівнює добутку довжини даної дуги на довжину кола, описаного при цьому обертанні ординатою центра ваги дуги».

А якщо домножити ординату з рівності (15.4) на $2S_\phi$, то одержимо рівність:

$$2\pi \bar{y}S_\phi = \pi \underbrace{\int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx}_{V \text{ тіла}},$$

яка відома під назвою «Друга теорема Гульдіна»: «Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо деякої осі, що лежить в її площині і не перетинає її, дорівнює площі даної фігури, помноженій на довжину кола, описаного при цьому обертанні центром ваги фігури».

Задача 15.7. Довести, що центр ваги однорідної трикутної пластини знаходиться у точці перетину медіан трикутника.

Доведення.

Нехай висота трикутника має довжину h , а основа – довжину b . Виберемо прямокутну систему координат так, щоб початок координат співпадав з вершиною трикутника, а основа трикутника була відрізком $[0; b]$ осі абсцис (рис.15.7).

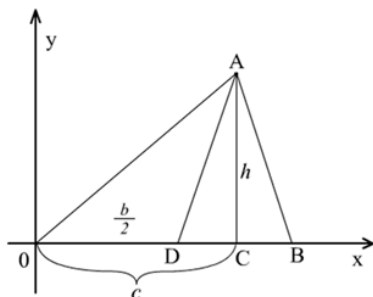


Рис. 15.7

Обчислимо статичний момент трикутної пластини відносно осі Ox . Для цього спочатку запишемо рівняння прямих OA і AB , які проходять через точки $O(0;0)$, $A(c;h)$, $B(b;0)$, $C(c;0)$:

$$OA: y = \frac{hx}{c}; \quad AB: y = \frac{h(x-b)}{b-c},$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^c \frac{h^2 x^2}{c^2} dx + \frac{1}{2} \int_c^b \frac{h^2 (x-b)^2}{(b-c)^2} dx = \frac{h^2 x^3}{6c^2} \Big|_0^c + \frac{h^2 (x-b)^3}{6(b-c)^2} \Big|_c^b = \frac{bh^2}{6},$$

Площа трикутника OAB дорівнює $S_\Delta = \frac{bh}{2}$, отже можна обчислити ординату центра ваги трикутника:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{S_\Delta} = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{2}{bh} = \frac{h}{3}.$$

Щоб знайти абсцису центра ваги трикутника, використаємо другу теорему Гульдіна для плоскої фігури, яка обертається навколо осі Oy : $V_y = 2\pi \bar{x} S_\Phi$. В результаті обертання трикутника OAB навколо осі ординат одержимо зрізаний конус з висотою h і радіусами основ b і c , з якого видалений конус з висотою h і радіусом основи c . Тому за відомими формулами для об'ємів конуса і зрізаного конуса обчислимо об'єм тіла:

$$V = \frac{\pi h}{3}(b^2 + bc + c^2) - \frac{\pi h}{3}c^2 = \frac{\pi hb(b+c)}{3},$$

$$\bar{x} = \frac{V_y}{2\pi S_\phi} = \frac{\pi hb(b+c)}{3} \cdot \frac{1}{\pi bh} = \frac{b+c}{3}.$$

Покажемо, що центр ваги $M\left(\frac{b+c}{3}; \frac{h}{3}\right)$ трикутника лежить на

медіані AD , де $D\left(\frac{b}{2}; 0\right)$:

$$AD: y = h\left(1 - \frac{2(x-c)}{b-2c}\right),$$

$$\frac{h}{3} = h\left(1 - \frac{2\left(\frac{b+c}{3} - c\right)}{b-2c}\right), \text{ звідки } \frac{1}{3} = \left(1 - \frac{2(b+c-3c)}{3(b-2c)}\right), \text{ або } \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Знайдемо відстані AM і MD :

$$AM = \sqrt{\left(\frac{b+c}{3} - c\right)^2 + \left(\frac{h}{3} - h\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(b-2c)^2 + 4h^2},$$

$$MD = \sqrt{\left(\frac{b+c}{3} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{3} - 0\right)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{(b-2c)^2 + 4h^2}, \quad AM = 2MD.$$

Таким чином, точка M є перетином медіан трикутника, що й треба було довести. ■

Задача 15.8. Знайти об'єм і бічну поверхню прямого кругового конуса, використовуючи теореми Гульдіна.

Розв'язання.

Бічна поверхня конуса висотою H , твірною l і радіусом основи R отримується при обертанні гіпотенузи l прямокутного трикутника навколо катета довжиною H (рис.15.8). Центр ваги гіпотенузи знаходиться на її середині і віддалений від осі обертання

на $\frac{R}{2}$. Тому за першою теоремою Гульдіна бічна поверхня конуса дорівнює:

$$S = 2\pi \cdot \frac{R}{2} \cdot l = \pi Rl.$$

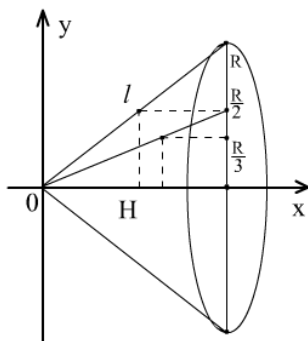


Рис. 15.8

Площа трикутника дорівнює $\frac{1}{2}HR$, а його центр ваги, що знаходиться на перетині медіан, віддалений від катета H на відстань, яка дорівнює третині висоти, опущеної на цей катет, тобто $\frac{1}{3}R$, отже, за другою теоремою Гульдіна об'єм конуса дорівнює:

$$V = 2\pi \cdot \frac{R}{3} \cdot \frac{1}{2}RH = \frac{1}{3}\pi R^2H. \quad \blacksquare$$

Задача 15.9. На циліндрі з радіусом основи 3 см вздовж поверхні вирізано канал, поперечним перерізом якого є рівносторонній трикутник зі стороною 0,5 см. Знайти об'єм зрізаного матеріалу.

Розв'язання.

Шуканий об'єм є об'єм тіла, яке утворюється при обертанні рівностороннього трикутника зі стороною 0,5 см навколо осі, паралельної основі і віддаленої від неї на 3 см, причому вершина лежить між основою і віссю (рис.15.9).

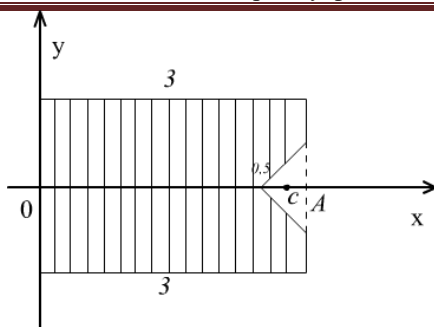


Рис. 15.9

Висота трикутника дорівнює $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, а площа $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

Відстань центра ваги від осі $OC = OA - AC = 3 - \frac{\sqrt{3}}{12}$, оскільки AC дорівнює третині висоти. За другою теоремою Гульдіна маємо:

$$V = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{16} \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{12} \right) = \frac{\pi}{32} (12\sqrt{3} - 1) \text{ см}^3. \blacksquare$$

Задача 15.10. Довжина однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ дорівнює $8a$, а поверхня, утворена обертанням її навколо осі Ox , дорівнює $\frac{64}{3}\pi a^2$. Обчислити поверхню, утворену обертанням тієї ж арки циклоїди навколо дотичної у верхній її точці.

Розв'язання.

Нехай d – відстань центра ваги від осі Ox , тоді а першою теоремою Гульдіна: $\frac{64}{3}\pi a^2 = 8a \cdot 2\pi d$, звідки $d = \frac{4}{3}a$. Найбільша ордината кривої кривої відповідає куту $t = \pi$ і дорівнює $2a$, причому дотична в цій точці паралельна до осі абсцис (рис.15.10), отже відстань центра ваги до цієї дотичної дорівнює $2a - \frac{4}{3}a = \frac{2}{3}a$.

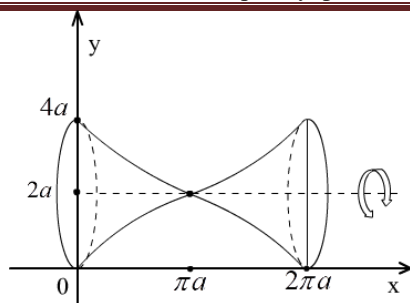


Рис. 15.10

Таким чином, шукана поверхня, утворена обертанням арки циклоїди навколо дотичної у верхній її точці, дорівнює:

$$S = 8a \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3}a = \frac{32}{3}\pi a^2. \quad \blacksquare$$

IV. Обчислення шляху за відомим законом зміни швидкості.

Задача 15.11. Нехай точка рухається прямолінійно з деякою швидкістю $v = v(t)$, яка залежить від часу t . Треба знайти шлях, який проходить точка за інтервал часу від $t = T_1$ до $t = T_2$.

Розв'язання.

Якщо швидкість руху стала і дорівнює v_0 , то шлях S дорівнює добутку швидкості на час руху, тобто $S = v_0(T_2 - T_1)$. Якщо швидкість не є сталою, то розіб'ємо відрізок $[T_1, T_2]$ на n довільних частин точками $T_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n = T_2$. Припустимо, що швидкість на кожному проміжку $[t_k, t_{k+1}]$ стала і дорівнює $v(c_k)$, де c_k – деяка точка з відрізка $[t_k, t_{k+1}]$. Тоді шлях, який проходить точка за час від $t = t_k$ до $t = t_{k+1}$, наближено дорівнює добутку $v(c_k)(t_{k+1} - t_k) = v(c_k)\Delta t_k$. Шлях на всьому відрізку $[T_1, T_2]$ наближено дорівнюватиме $S \approx \sum_{k=0}^{n-1} v(c_k)\Delta t_k$. Точне значення S

дістанемо, якщо в цій сумі перейдемо до границі при $\lambda(T) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta t_k \rightarrow 0$:

$$S = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} v(c_k) \Delta x_k = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

Приклад 1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 3 + 3t^2$ м/с. Знайти шлях, який пройде тіло за перші 5 с.

Розв'язання. За одержаною формулою дістанемо:

$$S = \int_0^5 (3 + 3t^2) dt = (3t + t^3) \Big|_0^5 = 140 \text{ (м)}. \blacksquare$$

V. Обчислення роботи змінної сили.

Задача 15.12. Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі під дією сили $\vec{F}$. Вивести формулу для визначення роботи A сили $\vec{F}$ у випадку, коли сила не є сталою.

Розв'язання.

Якщо сила $\vec{F}$ стала і f – її проекція на вісь Ox , то, добуток $f(b-a)$ визначає роботу сили на відрізку шляху $[a;b]$: $A = F(b-a)$. Нехай F_x – проекція сили $\vec{F}$ на вісь Ox і є неперервною на відрізку $[a;b]$ функцією. Розглянемо довільне τ -розбиття відрізка $[a;b]$ на n довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$. Припустимо, що на кожному відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ сила стала і дорівнює $F_x(c_k)$, де $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Тоді вся робота на відрізку $[a;b]$ наближено дорівнює $A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F_x(c_k) \Delta x_k$.

Точне значення роботи знайдемо, перейшовши до границі при $\lambda(\tau) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k \rightarrow 0$:

$$A = \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F_x(c_k) \Delta x_k = \int_a^b F_x(x) dx.$$

Приклад 2. Деформація гвинтової пружини пропорційна до прикладеної сили F_x . Обчислити роботу сили F_x під час стискання пружини на 5 см, якщо для стискання на 1 см треба прикласти силу 1Н.

Розв'язання. Сила F_x та переміщення x пов'язані за умовою залежністю $F_x = kx$, де k – стала. В нашому випадку $F_x(0,01) = 1$, тобто $1 = k \cdot 0.01$, звідки $k = 100$, $F_x = 100x$. Отже, робота дорівнює

$$A = \int_0^{0,05} 100x dx = 100 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 0,125 (\text{Дж}). \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Сила F , з якою електричний заряд q_1 відштовхує заряд q_2 (того самого знаку), що знаходиться від нього на відстані r , виражається формулою $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$, де k – стала. Визначити роботу сили F у процесі переміщення заряду q_2 з точки A_1 , яка знаходиться на відстані r_1 від q_1 , в точку A_2 , яка знаходиться на відстані r_2 від точки q_1 , покладаючи, що заряд q_1 вміщено у точку A_0 , прийняту за початок відліку.

Розв'язання. В умові даної задачі сила F відштовхування зарядів q_1 і q_2 виражена формулою закону Кулона $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$, яка записана для розташування зарядів у вакуумі. Оскільки в умові не зазначено розміри зарядів, їх знаки і середовище, то в цьому випадку, очевидно, слід прийняти, що заряди – точкові, середовище – вакуум або повітря (що суттєво не вплине на результат обчислень у цій задачі). Використовуючи формулу сили, дістанемо

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = -k q_1 q_2 \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = k q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Якщо $r_2 \rightarrow \infty$, то $A = k \frac{q_1 q_2}{r_1}$. Якщо $q_2 = 1$, то $A = k \frac{q_1}{r_1}$. Цю величину

називають потенціалом поля, що створюється зарядом q_1 . ■

Приклад 4. Обчислити роботу, яку потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на 10 см, якщо відомо, що для видовження її на 1 см потрібно прикласти силу в 1 кН.

Розв'язання. Згідно з законом Гука сила F , яка розтягує пружину, пропорційна її розтягу, тобто $F = kx$, де x – розтяг пружини (в метрах), k – коефіцієнт пропорційності. За умовою $x = 0,01$ м, $F = 1$ кН, $1 = 0,01k$ або $k = 100$, тому

$$A = \int_0^{0,1} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,5 \text{ (кДж)}. \quad \blacksquare$$

Задача 15.13. Циліндр висотою $H = 1,5$ м і радіусом $R = 0,4$ м, заповнений газом під атмосферним тиском ($1,01 \cdot 10^5$ Па = 10330 кГ/м²), закритий поршнем. Знайти роботу, яка виконується при ізотермічному стиску газу при переміщенні поршня на відстань $h = 1,2$ м всередині циліндра.

Розв'язання.

При ізотермічній зміні стану газу, коли його температура є сталою, залежність між об'ємом V і тиском p газу виражається формулою Бойля-Маріотта: $pV = C = \text{const}$.

Нехай поршень втиснутий на x м всередину циліндра (рис. 15.11), то тиск $p(x)$ газу на одиницю площі поршня

дорівнюватиме $p(x) = \frac{C}{V(x)} = \frac{C}{S(H-x)}$, а сила тиску на всю

площу S поршня буде $F(x) = Sp(x) = \frac{C}{H-x}$.

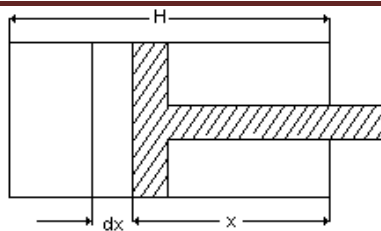


Рис. 15.11

Припустимо, що робота, яка виконується при русі поршня на x м, є деяка функція $Q(x)$, а також, що при подальшому русі поршня на малу відстань dx сила тиску $F(x)$ залишається сталою, знайдемо наближену величину приросту (диференціал) функції $Q(x)$: $\Delta Q \approx p(x)dx = \frac{C}{H-x}dx = dQ$. Всю шукану роботу знайдемо, проінтегрувавши останній вираз в межах від 0 до h :

$$Q = C \int_0^h \frac{dx}{H-x} = -C \ln(H-x) \Big|_0^h = C \ln \frac{H}{H-h}.$$

Якщо $H=1,5$ м, $R=0,4$ м, $h=1,2$ м, $p_0=10330$ кГ/м², то
 $V_0 = \pi R^2 H = 0,24\pi$ м³, $C = p_0 V_0 = 2479\pi$;
 $Q \approx 12535,3$ кГм ≈ 122951 Дж. ■

Задача 15.14. В умовах попередньої задачі визначити роботу адіабатичного стиску газу, при якому його об'єм V і тиск p зв'язані законом Пуассона $pV^k = C = \text{const}$, де k – стала величина для заданого газу, яка більша від одиниці. Наприклад, для повітря $k \approx 1,4$.

Розв'язання.

Адіабатичний процес – це процес, що відбувається в системі при відсутності теплообміну з навколишнім середовищем. Тут можуть змінюватися всі параметри, головне, що немає теплообміну з навколишнім середовищем (адіабатичний процес лежить в основі роботи двигунів внутрішнього згорання). В адіабатичному процесі

температура газу, на відміну від ізотермічного процесу, змінюється: при збільшенні об'єму V вона знижується, а при зменшенні об'єму збільшується. Повторимо ті ж міркування, що й у попередній задачі.

Нехай поршень втиснутий на x м всередину циліндра, то тиск $p(x)$ газу на одиницю площі поршня дорівнюватиме

$$p(x) = \frac{C}{V^k(x)} = \frac{C}{S^k (H-x)^k}, \text{ а тиск на всю площу } S \text{ поршня буде}$$

$$P(x) = Sp(x) = \frac{C}{S^{k-1} (H-x)^k}. \text{ Припустимо, що робота, яка}$$

виконується при русі поршня на x м, є деяка функція $q(x)$, а також, що при подальшому русі поршня на малу відстань dx тиск $P(x)$ залишається сталим, знайдемо наближену величину приросту (диференціал) функції $q(x)$:

$$\Delta q \approx P(x)dx = \frac{C}{S^{k-1} (H-x)^k} dx = dq(x).$$

Всю шукану роботу знову ж знайдемо, проінтегрувавши вираз $dq(x)$ в межах від $x=0$ до $x=h$:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{C}{S^{k-1}} \int_0^h \frac{dx}{(H-x)^k} = \frac{C}{S^{k-1}} \int_0^h (H-x)^{-k} d(H-x) = \frac{C}{S^{k-1}} \cdot \frac{(H-x)^{1-k}}{k-1} \Bigg|_0^h = \\ &= \frac{p_0 V_0^k}{S^{k-1} (k-1)} \left(\frac{1}{(H-h)^{k-1}} - \frac{1}{H^{k-1}} \right) = \frac{p_0 V_0^k}{k-1} \left(\left(\frac{H}{H-h} \right)^{k-1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Якщо $H = 1,5 \text{ м}$, $k = 1,4$, то

$$Q \approx \frac{2479,2\pi}{0,4} \left(\left(\frac{1,5}{0,3} \right)^{0,4} - 1 \right) \approx 17593,4 \text{ кГм} \approx 172591,3 \text{ Дж}. \blacksquare$$

Порівняння результатів задач 7 і 8 показує, що робота, яка витрачається при адіабатичному стиску газу, більша, ніж при ізотермічному $172591,3 \text{ Дж} > 122951,7 \text{ Дж}$.

Задача 15.15. Яку роботу потрібно виконати, щоб насипати купу піску конічної форми, радіус основи якої дорівнює R м, а висота H м?

Розв'язання.

Нарисуємо конус і виберемо для зручності систему координат так, щоб вісь абсцис містила висоту піраміди, а вісь ординат лежала в основі піраміди.

Роботу, яку можна виконати, щоб заповнити виділений на рисунку 15.12 шар піском, визначається з формули $dA = x dF = x g dm = x g \rho dV$, де ρ – густина піску.

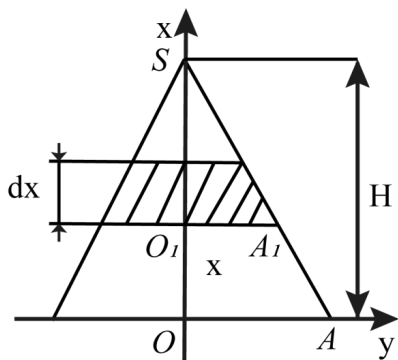


Рис. 15.12

Об'єм виділеного шару піску наближено дорівнює об'єму кругового циліндра з висотою dx і радіусом основи $y(x)$: $dV \approx \pi y^2 dx$. Робота $dA \approx \pi g \rho y^2 x dx$. Трикутники AOS і A_1O_1S подібні, тому $\frac{y}{R} = \frac{H-x}{H}$, звідки $y = \frac{R}{H}(H-x)$. Підставляючи знайдене значення змінної y в співвідношення для dA , одержимо $dA \approx \pi g \rho \frac{R^2}{H^2} x (H-x)^2 dx$. Проінтегрувавши в межах від 0 до H , знайдемо шукану роботу:

$$A = \pi g \rho \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x(H-x)^2 dx = \frac{1}{12} \pi g \rho R^2 H^2 \text{ Дж.}$$

Зокрема, обчислимо роботу, яка витрачається на подолання сили тяжіння при побудові піраміди Хеопса. Розміри цієї піраміди приблизно такі: висота 140 м, ребро основи (квадрату) 200 м, густина каменю, з якого побудова піраміда, приблизно дорівнює $2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

$$A = \frac{1}{12} \pi g \rho R^2 H^2 = \frac{1}{12} 3,14 \cdot 9,8 \cdot 2,5 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{200}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot 140^2 \approx 1,6 \cdot 10^9 \text{ (кДж)}$$

$$A \approx 1,6 \cdot 10^9 \text{ кДж} \quad \blacksquare$$

Задача 15.16. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з ями глибиною 4 м, що має квадратний переріз із стороною 2 м. Густина води $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Розв'язання.

Нарисуємо яму (рис.15.13), яка має вигляд прямокутного паралелепіпеда, в основі якого лежить квадрат, і спрямуємо вісь абсцис вздовж діючої сили.

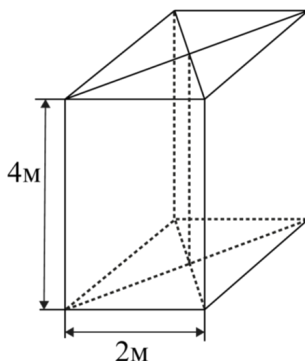


Рис. 15.13

Значення сили F , що діє на переріз прямокутного паралелепіпеда площею S , визначають вагою шару води, що знаходиться вище від цього перерізу $F(x) = 4\rho g(4-x)$, $x \in [0; 4]$,

$g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$. Робота $A = \int_a^b F(x) dx$. Підставляючи знайдене

значення в попереднє співвідношення, де

$$A = \int_a^b 4g\rho(4-x)dx = 4g\rho \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 32g\rho = 32 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \approx 3,1 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

$$A \approx 3,1 \cdot 10^5 \text{ Дж.} \quad \blacksquare$$

VI. Обчислення сили тиску рідини на пластинку.

Задача 15.17. Трикутна пластинка з основою $a=3 \text{ м}$ і висотою $H=2 \text{ м}$ занурена вертикально вершиною донизу в рідину так, що основа паралельна поверхні рідини і знаходиться на відстані $d=1 \text{ м}$ від поверхні. Густина рідини $\rho=0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Обчислити силу тиску рідини на кожну із сторін пластинки.

Розв'язання.

Скористаємося формулою гідростатичного тиску, згідно з якою тиск p рідини на площадку S , занурену на глибину h , дорівнює $p = \rho gh$, а сила тиску в цьому випадку $F = \rho ghS$.

В нашому випадку глибина занурення не є сталою. Тому виділимо елемент площі ΔS , який знаходиться від поверхні рідини на відстані $y+d$ (рис. 15.14).

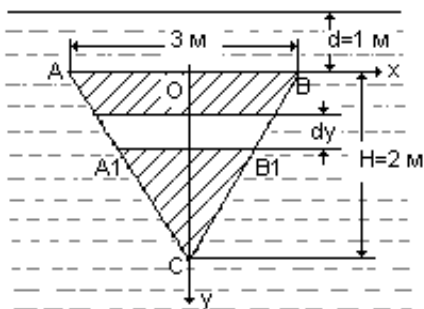


Рис. 15.14

Тоді сила тиску рідини, що діє на елементарну площадку ΔS , дорівнюватиме $\Delta F = \rho g(y+d)\Delta S$.

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, тому $\frac{|A_1B_1|}{a} = \frac{H-y}{H}$, звідки

$|A_1B_1| = \frac{a}{H}(H-y)$, тобто площа вирізаної смужки приблизно

дорівнює $\Delta S \approx dS = \frac{a}{H}(H-y)dy$. Сила тиску на кожну з сторін смужки трикутної пластинки дорівнює

$$dF \approx \frac{a}{H} \rho g (d+y)(H-y) dy.$$

Проінтегрувавши в межах від 0 до $H=2$, знайдемо шукану силу тиску

$$\begin{aligned} F &= \int_0^H \frac{a}{H} \rho g (d+y)(H-y) dy = \frac{3}{2} \rho g \int_0^2 (2+y-y^2) dy = \\ &= \frac{3}{2} \rho g \left(2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 \approx 44,1 \text{ kH}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 5. Обчислити силу тиску води на пластинку, яка вертикально занурена у воду, вважаючи, що густина води дорівнює 10^3 кг/м^3 . Форма, розміри і розміщення пластини вказані на рисунку 15.15.

Розв'язання.

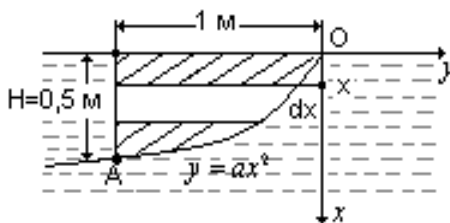


Рис. 15.15

Вибираємо систему координат так, як показано на рисунку. В даній задачі глибина занурення також не є сталою. Тому виділимо на глибині x горизонтальну смужку шириною dx і площею $dS = (1-|y|)dx$. Тоді сила тиску рідини, що діє на елементарну

смужку, дорівнюватиме $dF = \rho g x(1 - |y|) dx = g x(1 - 4x^2) dx$. Тоді рівняння параболи має вигляд $y = ax^2$. Оскільки парабола проходить через початок координат і точку $A\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, то $a = -4$ і $y = -4x^2$. Сила тиску на всю пластинку дорівнює

$$F = \rho g \int_0^H x(1 - 4x^2) dx = \rho g \left(\frac{x^2}{2} - x^4 \right) \Bigg|_0^H = \rho g \left(\frac{H^2}{2} - H^4 \right).$$

Згідно з умовою задачі $H = \frac{1}{2}$ м і $\rho = 10^3$ кг/м³, отже сила тиску дорівнює:

$$F = 10^3 \cdot 9,8 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16} \right) = 10^3 \cdot \frac{9,8}{16} \approx 0,61 H. \quad \blacksquare$$

VII. Обчислення тиску.

Задача 15.18. Визначити силу тиску води на вертикальний прямокутний шлюз з основою $a = 18$ м і висотою $h = 6$ м (рис. 15.16).

Розв'язання.

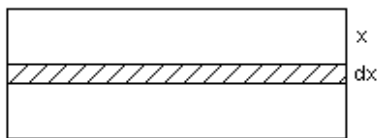


Рис. 15.16

Величина p тиску рідини на горизонтальну площадку залежить від глибини її занурення x , тобто $p = \rho g x$, ρ – питома вага рідини.

Розділимо шлюз на глибині x горизонтальною прямою. Тоді тиск води на верхню частину шлюзу буде функцією $p(x)$. Знайдемо диференціал dp цієї функції, тобто наближену величину (головну частину) її приросту Δp при зміні глибини x на малу величину dx .

Оскільки dx мала, то припустимо, що всі точки заштрихованої смуги знаходяться на глибині x , тобто що вона розміщена на глибині x в горизонтальній площині. Тоді наближена величина сили тиску води на цю смужку дорівнюватиме вазі стовпа води, основою якого є дана смужка і висота x :

$$\Delta F \approx dF = \rho g a x dx = 18 x dx \quad (\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3), \quad 0 \leq x \leq 6.$$

Отже, шуканий тиск p на весь шлюз знайдемо, якщо проінтегруємо dp в межах від 0 до 6:

$$p = \rho g a \int_0^6 x dx = 9,8 \cdot 18 \cdot 10^3 x^2 \Big|_0^6 = 3175,2 \cdot 10^3 \text{ Н} \approx 3,2 \text{ МН}. \quad \blacksquare$$

VIII. Обчислення кількості електрики.

За означенням, сила струму є похідною від кількості електрики $Q = Q(t)$, де t – час, тобто $I(t) = Q'(t)$. А тоді функція $Q = Q(t)$ є первісною для функції $I = I(t)$, тому кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за

час від t_1 до t_2 , можна знайти за формулою $Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$.

Приклад 6. Знайти кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за 10с, якщо сила струму змінюється за законом $I(t) = 4t + 1$.

Розв'язання.

$$Q(t) = \int_0^{10} (4t + 1) dt = \left(2t^2 + t \right) \Big|_0^{10} = (200 + 10) - 0 = 210 \text{ Кл}. \quad \blacksquare$$

IX. Задачі з економічним змістом.

Нехай функція $y = f(t)$ описує зміну продуктивності деякого виробництва протягом певного часу t . Знайдемо об'єм продукції U , виробленої за проміжок часу від 0 до T .

Якщо продуктивність стала ($f(t) = \text{const}$), то об'єм продукції, виробленої протягом часу від t до Δt , виражається формулою $\Delta U = f(t)\Delta t = f(\xi)\Delta t$, де $\xi \in [t; t + \Delta t]$. Якщо ж продуктивність не є сталою, то відрізок $[0; T]$ розіб'ємо довільним чином на елементарні відрізки, припустимо, що на кожному з них продуктивність є сталою, знайдемо наближено продуктивність виробництва протягом всього часу T :

$$U \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \text{ а точне значення об'єму продукції, що випускається протягом цього часу, отримаємо, перейшовши до границі в останній рівності при } \max_i \Delta x_i \rightarrow 0:$$

$$U = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_0^T f(t) dt.$$

Задача 15.19. Швидкість зміни деякого економічного процесу здійснюється за формулою $V(t) = 6t^2 + 10$. знайти закон $U(t)$, за яким відбувається цей процес, якщо значенню $t=5$ відповідає значення $U = 50$.

Розв'язання.

Оскільки $V = \frac{dU}{dt}$, то $dU = Vdt = (6t^2 + 10)dt$. Тому:

$$U = \int dS = \int (6t^2 + 10)dt = 6 \int t^2 dt + 10 \int dt = 6 \frac{t^3}{3} + 10t + C = 2t^3 + 10t + C.$$

Підставляючи дані значення $t=5$ і $U=50$ в отриману нами формулу $U = 2t^3 + 10t + C$, знаходимо, що $C = 50 - 2 \cdot 125 - 50 = -250$

Отже, шуканий закон має вигляд: $U = 2t^3 + 10t - 250$. ■

Задача 15.20. Знайти об'єм продукції, що випускається протягом 4 років, якщо функція Кобба-Дугласа має вигляд $f(t) = (1+t)e^{3t}$.

Економічні терміни.

Функція Кобба–Дугласа залежності об'єму продукції від затрат праці та об'єму виробничого фонду виражається формулою $f = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$. Якщо вважати, що затрати праці лінійно залежать від часу, а затрати капіталу сталі, то функція $f(t)$ набуває вигляду $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$, а об'єм продукції, що випускається за T років, знайдемо з формули $U = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t} dt$.

Розв'язання.

Для знаходження об'єму продукції використаємо останню формулу, а інтеграл обчислимо за допомогою методу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^4 (t+1)e^{3t} dt = \left| \begin{array}{ll} u = t+1 & dv = e^{3t} dt \\ du = dt & v = \frac{1}{3}e^{3t} \end{array} \right| = \frac{t+1}{3}e^{3t} \Big|_0^4 - \frac{1}{3} \int_0^4 e^{3t} dt = \\ &= \frac{5e^{12}-1}{3} - \frac{e^{12}-1}{9} = \frac{14e^{12}-2}{9} \approx 253174 \text{ (од.)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 15.21. Заданий маргінальний дохід фірми $D'(x) = 20 - 0,02x$. Знайти функцію доходу та визначити її відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Економічні терміни.

Маргінальною вартістю називають гранично можливу вартість в умовах принаймні сталого відтворення виробництва відповідної продукції. Аналогічно визначають маргінальні доходи та прибуток [2, с.201]. Позначимо через $V(x)$, $D(x)$ та $P(x)$ витрати, дохід та прибуток виробництва x одиниць продукції. Кожна з цих величин є певною функцією кількості одиниць x виробленої та проданої продукції.

Якщо підприємство збільшує випуск продукції на Δx одиниць, то ці функції одержать відповідно прирости $\Delta V(x)$, $\Delta D(x)$, $\Delta P(x)$. Відношення приросту функції до Δx характеризує приріст відповідної функції на одиницю приросту продукції, а границя цього відношення при $\Delta x \rightarrow 0$ стає маргінальною. Таким чином, **маргінальна вартість** – це $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} = V'(x)$, **маргінальний дохід** – $D'(x)$, а **маргінальний прибуток** – $P'(x)$.

Розв'язання.

Функцію доходу фірми можна знайти інтегруванням маргінального доходу, тобто

$$D(x) = \int D'(x) dx = \int (20 - 0,02x) dx = 20x - 0,01x^2 + C,$$

де C – стала інтегрування.

Для знаходження сталої C використаємо той факт, що дохід дорівнює нулю, коли не продано жодної одиниці продукції, тобто при $x = 0$ маємо $D(0) = 0$:

$$0 = 20 \cdot 0 - 0,01 \cdot 0^2 + C \Rightarrow C = 0.$$

Отже, функція доходу фірми має вигляд $D(x) = 20x - 0,01x^2$. Якщо вартість кожної одиниці продукції, проданої фірмою, дорівнює P і продали x одиниць продукції, то дохід буде $D(x) = P \cdot x$. Тому $P \cdot x = 20x - 0,01x^2 \Rightarrow P = 20 - 0,01x$ – ця рівність і описує потрібне відношення. ■

Задача про максимізацію прибутку за часом.

Функції витрат $V(t)$, доходу $D(t)$ та прибутку $P(t)$, що залежать від часу t , поєднуються між собою рівністю $P(t) = D(t) - V(t)$. Функція $P(t)$ досягає максимального прибутку (екстремуму), коли $P'(t) = 0$, або $D'(t) - V'(t) = 0$, або $D'(t) = V'(t)$. Тобто існує такий час t_k , де швидкості зміни доходу та витрат рівні. Із рис. 15.17 бачимо, що максимальний прибуток дорівнює площі між кривими $D'(t)$ та $V'(t)$ на відрізку $[0; t_k]$ [2, с.310].

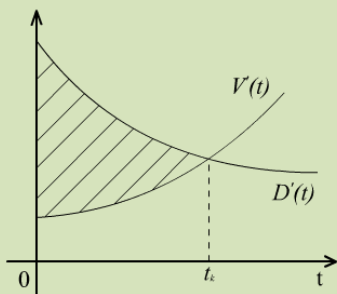


Рис. 15.17

Загальний прибуток за час t_k можна знайти за формулою

$$P(t_k) = \int_0^{t_k} P'(t) dt = \int_0^{t_k} (D'(t) - V'(t)) dt. \quad (15.8)$$

Задача 15.22. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами $V'(t) = 6 + 3\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 11 - 3\sqrt[4]{t^3}$, V і D вимірювали у мільйонах гривень, а час t у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, одержаний за цей час.

Розв'язання.

Оптимальний час t_1 для прибутку підприємства одержимо з умови $V'(t) = D'(t)$. З рівняння $6 + 3\sqrt[4]{t^3} = 11 - 3\sqrt[4]{t^3}$ визначаємо

$$6\sqrt[4]{t^3} = 5, \quad \sqrt[4]{t^3} = \frac{5}{6}, \quad t_1 = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{4}{3}}. \quad \text{Отже, підприємство було}$$

прибутковим майже рік. За цей час одержано прибутку:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{4}{3}}} (D'(t) - V'(t)) dt = \int_0^{\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{4}{3}}} (11 - 3\sqrt[4]{t^3} - 6 - 3\sqrt[4]{t^3}) dt = \\ &= \int_0^{\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{4}{3}}} (5 - 6t^{\frac{3}{4}}) dt = \left(5t - \frac{24t^{\frac{7}{4}}}{7} \right) \bigg|_0^{\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{4}{3}}} = \\ &= 5\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{24}{7} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{7}{4}} = 5\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{24}{7} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{7}{3}} \approx 1,7 \text{ (млн. грн)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача про витрати, дохід і прибуток.

Нехай, $V(x)$ – функція загальних витрат на виробництво x одиниць продукції, $V'(x)$ – функція маргінальних витрат, $P'(x)$ – функція маргінального прибутку, $D'(x)$ – функція маргінального доходу. Тоді зміна загальних витрат при зростанні кількості одиниць продукції від a до b обчислюється за формулою

$$\int_a^b V'(x) dx = V(x) \big|_a^b = V(b) - V(a). \quad (15.9)$$

Зміна виробничих витрат при зростанні виробленої продукції від a до b одиниць дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції маргінальних витрат $y = V'(x)$, відрізком $[a; b]$ та прямими $x = a$ та $x = b$.

При зростанні реалізації продукції зміни прибутку і доходу визначаються за формулами:

$$\int_a^b P'(x) dx = P(x) \Big|_a^b = P(b) - P(a),$$

$$\int_a^b D'(x) dx = D(x) \Big|_a^b = D(b) - D(a).$$

Задача 15.23. Функція маргінальних витрат фірми має вигляд $V'(x) = 24 - 0,02x$. Знайти зростання загальних витрат, коли виробництво зростає з 500 до 1000 одиниць.

Розв'язання.

За формулою 15.9 зростання загальних витрат буде:

$$V = \int_{500}^{1000} V'(x) dx = \int_{500}^{1000} (24 - 0,02x) dx = \left(24x - 0,01x^2 \right) \Big|_{500}^{1000} = 6500.$$

Отже, загальні витрати зростуть на 6500 гривень. ■

Задача 15.24 (стратегія розвитку). Компанія повинна обрати одну із двох можливих стратегій розвитку: 1) вкласти 12 млн. гривень у нове обладнання і одержувати 4 млн. гривень прибутку кожного року протягом 9 років; 2) закупити на 18 млн. гривень більш досконале обладнання, яке дозволить одержувати 7 млн. гривень прибутку щорічно протягом 8 років. Яку стратегію треба обрати компанії, якщо номінальна облікова щорічна ставка 10%?

Розв'язання.

Якщо $f(t)$ – прибуток за час t і $r = \frac{R}{100}$ – номінальна облікова щорічна ставка, то дійсне значення загального прибутку за час між $t = 0$ і $t = T$ дорівнює $P = \int_0^T f(t) e^{-rt} dt$.

При $R = 10$ маємо $r = 0,1$. Тому для першої стратегії дійсне значення прибутку за 9 років буде

$$P_1 = \int_0^9 4e^{-0,1t} dt - 12 = \left(-40e^{-0,1t}\right)\Big|_0^9 - 12 = 40(1 - e^{-0,9}) - 12 = 11,74 \text{ (млн.}$$

грн)

Для другої стратегії одержимо:

$$P_2 = \int_0^8 7e^{-0,1t} dt - 18 = \left(-70e^{-0,1t}\right)\Big|_0^8 - 18 = 70(1 - e^{-0,8}) - 18 =$$

$$= 20,15 \text{ (млн. грн)}$$

Отже, друга стратегія краще першої і тому її доцільно обрати для подальшого розвитку компанії. ■

Коефіцієнт нерівномірного розподілу прибуткового податку (коефіцієнт Джині).

Нехай y є частина загального прибуткового податку, пропорційна частині x усього населення держави. Наприклад, якщо $x = \frac{1}{2}$, а $y = \frac{1}{4}$, то це означає, що 50% населення сплачує 25% загального прибуткового податку. Якщо $y = 0,7$, коли $x = 0,9$, то це означає, що 90% населення сплачує 70% прибуткового податку.

У загальному випадку x та y – дробові частини цілого і змінна y є функцією від змінної x , тобто $y = f(x)$, $x, y \in [0;1]$.

Будемо вважати, що не має осіб, які не сплачують прибуткового податку, тобто $f(0) = 0$ і весь прибутковий податок сплачує 100% населення, тобто $f(1) = 1$.

Графік функції $y = f(x)$, яка описує дійсний розподіл прибуткового податку, називають кривою Лоренца. Припустимо, що крива Лоренца задана рівнянням

$$y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x.$$

Коли $x = 0,2$, то $y = \frac{15}{16}(0,2)^2 + \frac{1}{16}0,2 = 0,05$ (рис.15.18). Це означає, що 20% населення сплачує 5% загального податку.

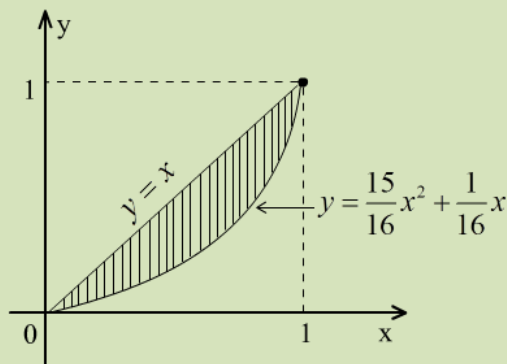


Рис. 15.18

Коефіцієнтом L нерівності розподілу податку кривої Лоренца (коефіцієнтом Джині) називають відношення площі фігури, обмеженої кривою Лоренца та прямою $y = x$ (на рисунку вона заштрихована) до площі фігури, що лежить нижче прямої $y = x$ (на рис.15.17 це прямокутний трикутник: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $y = x$).

Площа прямокутного трикутника $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$, а площа заштрихованої фігури знаходиться через визначений інтеграл:

$S_2 = \int_0^1 (x - f(x)) dx$. Тому, згідно з означенням, коефіцієнт Джині обчислюють за формулою:

$$L = \frac{S_2}{S_1} = 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx. \quad (15.10)$$

У запропонованому випадку функції $f(x)$ вирахуємо коефіцієнт нерівності розподілу податку:

$$L = 2 \int_0^1 \left(x - \frac{15}{16} x^2 - \frac{1}{16} x \right) dx = \frac{15}{8} \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{15}{8} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{16}.$$

Відмітимо, що коефіцієнт нерівності розподілу податку завжди задовольняє співвідношення $0 \leq L \leq 1$. Якщо $L = 0$, то прибутковий податок розподілено рівномірно (тут крива Лоренца вироджується в пряму $y = x$), коли $L = 1$, нерівномірність розподілу податків найбільша. Таким чином, коефіцієнт Джині характеризує ступінь нерівності в розподілі доходів населення.

Завдання для самостійного розв'язування

✎1. Знайти статичні моменти M_x та M_y кривих:

1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x \geq 0, y \geq 0;$ 2) $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0;$

3) $y^2 = 2x, 0 \leq x \leq 2;$ 4) $y^2 - p^2 = 2px, x \leq 0;$

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0, a > b;$ 6) $y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right), 0 \leq x \leq a;$

7) $x = a \sin t, y = b \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, a > b;$

8) $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

9) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi;$

10) $r = 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$

11) $r = a(1 + \cos \varphi), -\pi \leq \varphi \leq \pi;$

12) $r = ae^\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

✎2. Довести, що статичний момент дуги АВ параболи відносно осі параболи дорівнює $\frac{R_0(R_A - R_B)}{3}$, де R_0, R_A, R_B - радіуси кривизни параболи в її вершині і точках А і В відповідно.

✎3. Знайти координати x_C і y_C центра мас кривої:

1) $x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, |\varphi| \leq \alpha \leq \pi;$

2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, x \geq 0, y \geq 0;$

3) $y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right), |x| \leq b;$

4) $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}, 1 \leq y \leq 2;$

5) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$

6) $r = a(1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi;$

7) $r = ae^{\varphi}, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi.$

✎4. Знайти статичні моменти M_x та M_y фігури, обмеженої кривими:

1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x = 0, y = 0, a > 0, b > 0;$

2) $y = \cos x, |x| \leq \frac{\pi}{2}, y = 0;$

3) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi, y = \frac{1}{2}$

4) $y = x^2, y = \sqrt{x};$

5) $y = \frac{2}{1+x^2}, y = x^2, x = 0, x \geq 0;$

6) $y^2 = 2px, y = 0, x = a, a > 0, y \geq 0;$

7) $x = a \sin t, y = b \cos t, |t| \leq \frac{\pi}{2}, y = 0;$

8) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi, y = 0;$

9) $r = a\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi;$

10) $r = a(1 + \cos \varphi), |\varphi| \leq \pi;$

✎5. Знайти відстань від центра мас до основи однорідного трикутника, якщо висота трикутника рівна h .

✎6. Однорідна пластинка складена з прямокутника зі сторонами $2b$ і h та півкруга з діаметром $2b$, привареного до сторони прямокутника довжиною $2b$. Знайти центр мас пластини.

✎7. Знайти центр мас на півкільця, обмеженого концентричними півколами радіусів r та R , $R > r$ та відрізками діаметра.

✎8. Знайти координати x_C та y_C центра мас фігури, обмеженої кривими.

1) $x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0, y = 0;$

2) $y = ax^n, 0 \leq x \leq b, y = 0, x = b, n > 0;$

3) $y = h \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), y = 0, h > 0, a > 0;$

4) $y^2 = \frac{x^3}{a}, x = a, y = 0, a > 0, y \geq 0;$

5) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi, y = 0;$

6) $y = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right), y = 0, |x| = b, a > 0;$

9. Знайти координати x_C та y_C центра мас фігури, обмеженої кривими:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0;$

2) $y^2 = 2x, x + y = 4;$

3) $y = x^3, x + y = 2, x = 0;$

4) $y^2 = ax^3 - x^4;$

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, x = 0, y = 0;$

6) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, x \geq 0, y \geq 0, x = 0, y = 0.$

10. Знайти координати центра мас фігури, обмеженої кривими $y^2 = 4x, y = 2, x = 0$, якщо щільність фігури $\rho = x$.

11. Знайти координати x_C та y_C центра мас фігури, обмеженої в полярних координатах:

1) напіввитком архімедової спіралі $r = a\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ та променями $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$;

2) кардіоїдою $r = a(1 + \cos \varphi);$

3) правою петлею лемніскати Бернуллі $r^2 = a^2 \cos 2\varphi;$

4) кривою $r = a \sin 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$

5) кривими $r = \sqrt{2}, r = 2 \sin \varphi, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}.$

✎12. З однорідного круга, радіус якого R , вирізана частина, обмежена колом радіуса R , що проходить через центр данного круга. Знайти центр мас частини круга, що залишилась.

✎13. Тор утворений обертанням круга радіуса r навколо осі, що лежить в одній площині з кругом та віддаленою від його центра на відстань d , $d > r$. Використовуючи теореми Гульдіна, знайти:

- 1) площу поверхні тора; 2) об'єм тора.

✎14. Еліпс з напівосями a і b , $a > b$, обертається навколо прямої, паралельно великій осі еліпса та розміщеної від неї на відстані $d > b$. Використовуючи теорему Гульдіна, знайти об'єм отриманого тіла обертання.

✎15. Дуга кола радіуса r має кутовий розмір α . Використовуючи теорему Гульдіна та формулу для прощі сферичної поверхні, знайти центр мас дуги.

✎16. Знайти центр півкола радіуса r , використовуючи теорему Гульдіна.

✎17. Знайти площу поверхні і об'єм тіла, що отримано обертанням правильного трикутника із стороною a навколо осі, що знаходиться на відстані $d > \frac{a}{\sqrt{3}}$ від його центра.

✎18. Правильний n -кутник зі стороною a обертається навкруг однієї із сторін. Знайти площу поверхні та об'єм отриманого тіла обертання.

✎19. Квадрат із стороною a обертається навколо прямої, що проходить через його вершину і утворює кут φ з діагоналлю квадрата, що виходить з цієї вершини., $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Знайти площу поверхні та об'єм отриманого тіла обертання.

✎20. Правильний трикутник зі стороною a обертається навколо прямої, що проходить через його вершину і не має з трикутником інших спільних точок. Який найбільший можливий об'єм отриманого тіла обертання.

№21. Фігура, обмежена двома арками циклоїд $x = a(t - \sin t)$, $y = \pm a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, що обертається навколо осі Oy . Знайти площу поверхні та об'єм отриманого тіла обертання.

№22. Знайти об'єм продукції, випущеної за T часу, якщо функція Кобба-Дугласа має вигляд $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$:

№	T	α	β	γ	№	T	α	β	γ
1	2	2	1	3	13	2	3	1	3
2	3	2	2	3	14	4	1	0	1
3	5	2	1	3	15	4	1	1	3
4	4	2	1	2	16	4	1	2	2
5	5	1	2	2	17	5	2	1	3
6	5	3	1	2	18	6	1	1	1
7	6	2	1	1	19	6	2	2	1
8	6	2	3	2	20	7	2	3	3
9	7	1	2	2	21	6	5	4	2
10	6	3	5	10	22	5	2	3	5
11	4	7	8	10	23	4	2	5	5
12	3	2	3	5	24	3	5	4	4

№23. Знаючи криву Лоренца, обчислити коефіцієнт Джині:

1) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$;

2) $y = (2 + \sqrt{3})\left(2 - \sqrt{4 - x^2}\right)$;

3) $y = \frac{1}{11}(x^2 + 10x)$;

4) $y = \frac{1}{3}(x+1)^2 - \frac{1}{3}$;

5) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$;

6) $y = \sin \frac{\pi x}{2}$;

7) $y = \frac{1}{16}(x^3 + 10x^2 + 5x)$;

8) $y = \frac{1}{9}(x^2 + 8x)$;

9) $y = 2^x - 1$;

10) $y = \frac{1}{12}(x^4 + 5x^2 + 6x)$.

№24. Знайти дисконтований прибуток за T років при $P\%$ ставці, якщо базові капіталовкладення a , а очікуваний прибуток b – річних:

Застосування визначеного інтеграла у фізиці та економіці

№	T	$P\%$	b	a	№	T	$P\%$	b	a
1	2	10	1	10	13	5	7	4	40
2	3	8	1	10	14	5	6	4	40
3	5	10	2	10	15	5	3	4	40
4	4	8	2	10	16	5	5	3	30
5	3	8	1	20	17	5	6	1	30
6	4	7	3	10	18	6	10	2	40
7	4	5	3	10	19	10	10	10	100
8	4	6	3	10	20	5	8	1	50
9	4	3	1	10	21	4	8	5	100
10	5	8	2	10	22	4	5	10	200
11	5	8	3	20	23	4	10	2	100
12	5	4	4	40	24	10	10	0,5	100

№25. Знайти середнє значення часу, який затрачений на освоєння випуску виробу в період освоєння від α до β , якщо відома функція $t(x)$ - зміна затрат часу на випуск виробу, в залежності від ступеня освоєння виробництва:

№	α	$\beta\%$	a хв	b	№	α	$\beta\%$	a хв	b
1	10	20	600	0,5	13	10	40	40	0,5
2	100	121	600	0,5	14	150	200	100	0,5
3	50	70	380	0,5	15	150	200	60	0,25
4	40	60	100	0,5	16	70	100	80	0,25
5	100	200	100	0,5	17	70	100	80	0,5
6	50	100	100	1/3	18	50	300	100	0,5
7	40	60	60	1/3	19	100	300	200	0,5
8	40	80	60	0,5	20	70	80	20	0,5
9	50	100	80	0,5	21	100	400	200	0,25
10	70	170	100	1/3	22	100	300	100	1/3
11	50	150	60	0,5	23	10	100	60	0,25
12	10	40	30	0,5	24	100	150	60	0,25

§ 16. Невласні інтеграли

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Невласний інтеграл на нескінченному проміжку	Non-identical integral on an infinite interval
Збіжність (розбіжність) невластного інтеграла	Convergence (divergence) of a non-identical integral
Умови збіжності невластного інтеграла на нескінченному проміжку	Conditions for convergence of a non-identical integral on an infinite interval
Властивості невластного інтеграла	Properties of a non-identical integral
Невласний інтеграл від необмеженої функції	Non-identical integral of an unbounded function

1. Сформулювати означення невластного інтеграла на нескінченному проміжку, сформулювати умови збіжності таких інтегралів.

Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному проміжку $[a; +\infty)$, інтегровна на довільному відрізку $[a; A] \subset [a; +\infty)$, тобто кожному значенню $A \in [a; +\infty)$ ставиться у відповідність одне число $\int_a^A f(x)dx$, значить на проміжку $[a; +\infty)$ визначена функція $\Phi(A)$:

кожному $A \in [a; +\infty)$ — функція $\Phi(A)$ —> одне число $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$

Якщо існує $\lim_{A \rightarrow +\infty} \Phi(A)$, то вона називається **невласним інтегралом функції $f(x)$ на нескінченному проміжку $[a; +\infty)$** і позначається:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \quad (16.1)$$

Будемо також говорити, що невластний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ збігається до I і дорівнює I , якщо $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = I$. Якщо границя не існує, то кажуть, що невластний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ розбігається.

Зауваження. Якщо $f(x) \in C_{[a; +\infty)}$, то збіжний невластний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ чисельно дорівнює площі необмеженої криволінійної трапеції $K = \{(x; y) \mid x \geq a; 0 \leq y \leq f(x)\}$ (рис. 16.1).

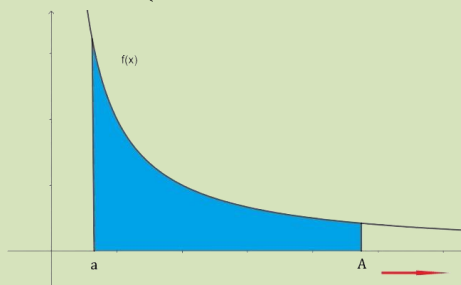


Рис. 16.1

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, \alpha > 1$$

3. Сформулювати основні властивості невластних інтегралів на нескінченному проміжку.

Основні властивості невластних інтегралів на нескінченному проміжку.

Властивість 1 (лінійність невластного інтеграла).

$$\left. \begin{array}{l} \int_a^{+\infty} f(x)dx \\ \int_a^{+\infty} g(x)dx \end{array} \right\} - \text{збіжні} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))dx - \text{збіжний}$$

i

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (16.2)$$

Властивість 2 (формула Ньютона-Лейбніца).

Якщо $f(x)$ неперервна на $[a; +\infty)$ і функція $F(x)$ є первісною на цьому проміжку, причому існує $F(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) \quad (16.3)$$

Властивість 3 (інтегрування частинами).

Якщо $u(x), v(x) \in C_{[a; +\infty)}$, існує границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$ і збігається принаймні один з інтегралів $\int_a^{+\infty} u(x)dv(x)$, $\int_a^{+\infty} v(x)du(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} u(x)dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x)du(x) \quad (16.4)$$

$$\text{де } u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a).$$

Властивість 4 (інтегрування заміною змінних).

Якщо $f(x) \in C_{[a; +\infty)}$, $x = \varphi(t) \in C_{[\alpha; \beta)}^1$, причому $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) < \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = +\infty$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (16.5)$$

причому обидва інтеграли одночасно збіжні або розбіжні.

Властивість 5 (ознаки порівняння). Якщо $\forall x \in [a; +\infty)$ виконуються нерівності: $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ і існує число $b \geq a$ таке, що $\forall x \in [b; +\infty)$: $f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$, а з розбіжності $\int_a^{\infty} f(x)dx$

впливає розбіжність $\int_a^{\infty} g(x)dx$.

Наслідок 1. $\forall x \geq a > 0: |f(x)| \leq \frac{C}{x^\alpha}, C > 0, \alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ –

збіжний. Якщо ж $f(x) > \frac{C}{x^\alpha}, \alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ – розбіжний.

Наслідок 2 $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0, x \in [a; +\infty), \\ g(x) > 0, \\ \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C \geq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ і } \int_a^{+\infty} g(x)dx$

одночасно збіжні або розбіжні.

4. Сформулювати означення невластного інтеграла від необмеженої функції.

Якщо існує $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то її називають **невласним інтегралом функції** $y = f(x)$ на $[a; b)$ і позначають

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (16.6)$$

Якщо границя (16.6) існує, то невластний інтеграл називається **збіжним**, у протилежному випадку – **розбіжним**.

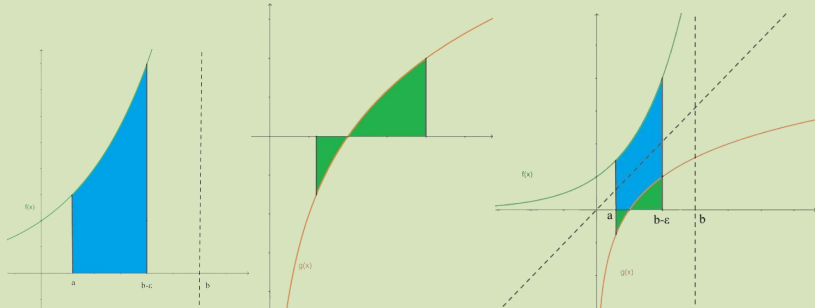


Рис. 16.2

Приклади розв'язування вправ

Задача 16.1. Дослідити на збіжність невластний інтеграл

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$$

Розв'язання.

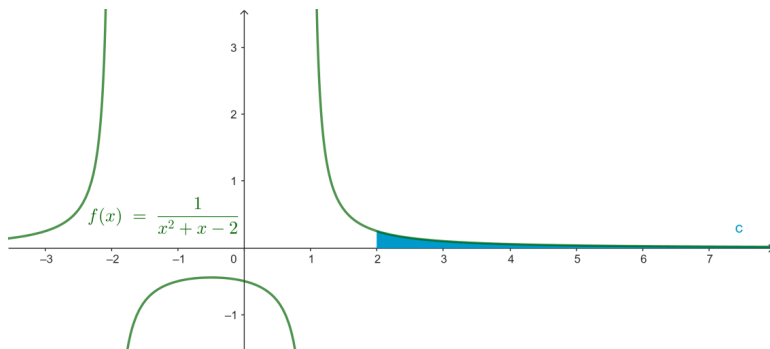


Рис. 16.3

Маємо невластний інтеграл з нескінченною верхньою межею.

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ неперервна на нескінченному проміжку $[2; +\infty)$, отже інтегровна на довільному відрізку $[2; A] \subset [2; +\infty)$ і

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \int_2^A \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int_2^A \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} \Big|_2^A = \\ &= \frac{1}{3} \left(\ln \frac{A-1}{A+2} - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \ln 4 \frac{A-1}{A+2}. \end{aligned}$$

Тоді невластний інтеграл від цієї функції обчислюється як границя функції $\Phi(A)$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln 4 \frac{A-1}{A+2} = \frac{2}{3} \ln 2,$$

тобто невластний інтеграл збіжний і дорівнює $\frac{2}{3} \ln 2$. ■

Задача 16.2. Дослідити на збіжність невластний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$$

Розв'язання.

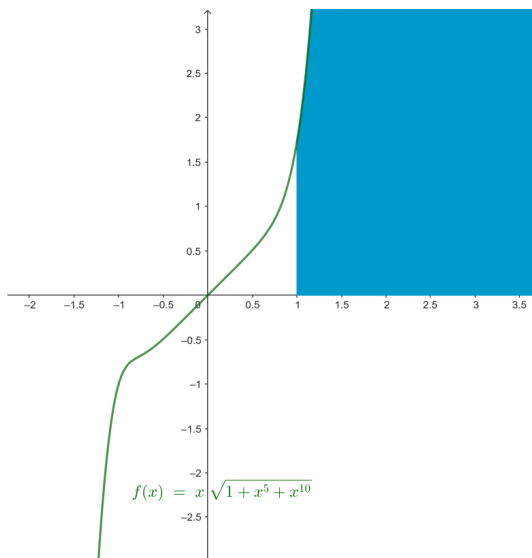


Рис. 16.4

Маємо невластний інтеграл з нескінченною верхньою межею.

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$ неперервна на нескінченному проміжку $[1; +\infty)$, отже інтегровна на довільному відрізку $[1; A] \subset [1; +\infty)$ і

$$\Phi(A) = \int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \int_1^A \frac{dx}{x^6 \sqrt{\left(\frac{1}{x^5}\right)^2 + \frac{1}{x^5} + 1}} = \left| \begin{array}{ll} t = \frac{1}{x^5} & dt = -\frac{5dx}{x^6} \\ t_1 = 1 & t_2 = \frac{1}{A^5} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{5} \int_1^{\frac{1}{A^5}} \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = -\frac{1}{5} \ln \left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + 1} \right) \Big|_1^{\frac{1}{A^5}} = \\
 &= -\frac{1}{5} \left(\ln \left(\frac{1}{A^5} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{A^{10}} + \frac{1}{A^5} + 1} \right) - \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Тоді невластний інтеграл від цієї функції обчислюється як границя функції $\Phi(A)$:

$$\begin{aligned}
 &\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \Phi(A) = \\
 &= -\frac{1}{5} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{1}{A^5} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{A^{10}} + \frac{1}{A^5} + 1} \right) - \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right) \right) = \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right),
 \end{aligned}$$

тобто невластний інтеграл збіжний і дорівнює $\frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$. ■

Задача 16.3. Обчислити невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x dx}{(1+x^2)^2}$.

Розв'язання.

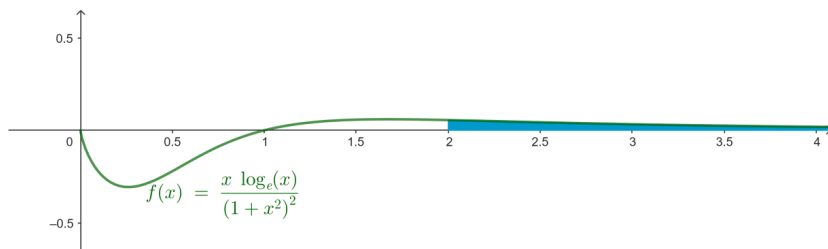


Рис. 16.5

Для обчислення невластного інтегралу використаємо формулу Ньютона-Лейбніца та інтегрування частинами [14, с.145].

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x dx}{(1+x^2)^2} = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x(1+x^2)} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

Задача 16.4. Дослідити на збіжність невластні інтеграли:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$;

2) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

Розв'язання.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$.

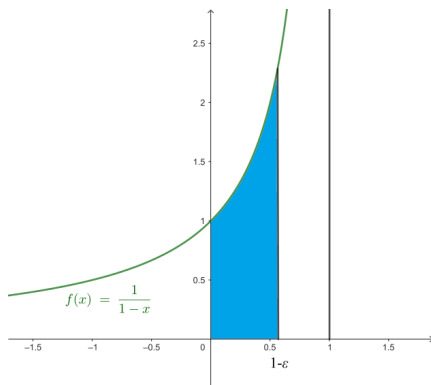


Рис. 16.6

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{1-x}$ необмежена при $x \rightarrow 1-0$

. Отже, за означенням невластного інтеграла від необмеженої функції будемо мати:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|1-x| \Big|_0^{1-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \varepsilon - 0) = \infty,$$

тобто невластний інтеграл розбіжний.

Зауважимо, що в математичній літературі існують і інші позначення: $1-\varepsilon$ можна записати як a , тоді якщо $\varepsilon \rightarrow 0$, то $a \rightarrow 1-0$ й дослідження інтеграла виглядатиме так:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{a \rightarrow 1-0} \int_0^a \frac{dx}{1-x} = -\lim_{a \rightarrow 1-0} \ln|1-x| \Big|_0^a = -\lim_{a \rightarrow 1-0} (\ln(1-a) - 0) = \infty. \quad \blacksquare$$

$$2) \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

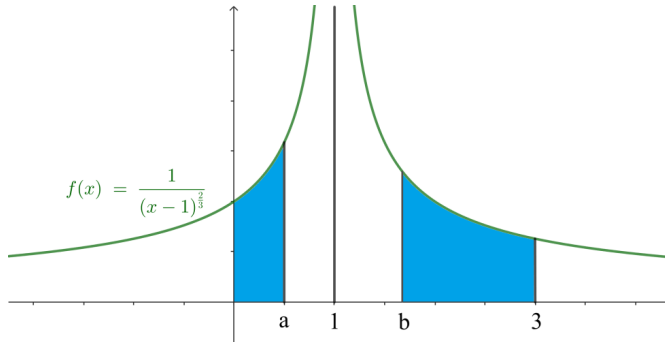


Рис. 16.7

Аналогічно до попереднього прикладу має необмежену функцію в точці $x=1 \in [0; 3]$, яка є внутрішньою точкою відрізка.

Використаємо властивість адитивності:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{a \rightarrow 1-} \int_0^a \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{b \rightarrow 1+} \int_b^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow 1-} 3\sqrt[3]{x-1} \Big|_0^a + \lim_{b \rightarrow 1+} 3\sqrt[3]{x-1} \Big|_b^3 = 3 \lim_{a \rightarrow 1-} (\sqrt[3]{a-1} + 1) + 3 \lim_{b \rightarrow 1+} (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{b-1}) = \\ &= 3 + 3\sqrt[3]{2}, \text{ отже, невластний інтеграл є збіжним. } \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 16.5. Дослідити на збіжність невластні інтеграли

$$1) I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx;$$

$$2) I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx.$$

Розв'язання.

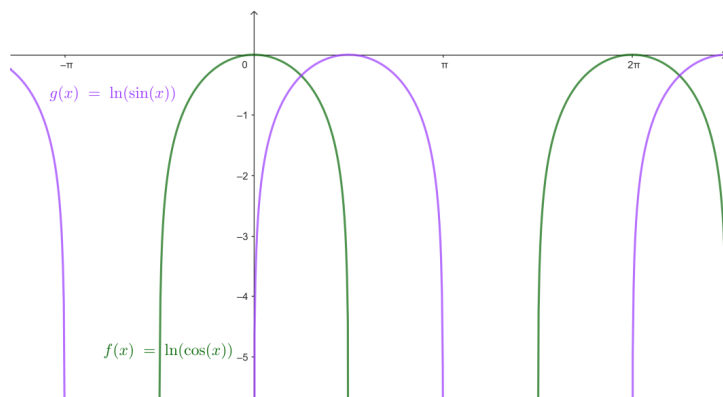


Рис. 16.8

Маємо невластні інтеграли від необмежених функцій: при $x \rightarrow 0+0$ підінтегральна функція $\ln \sin x \rightarrow -\infty$. Аналогічно при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0$ підінтегральна функція $\ln \cos x \rightarrow -\infty$. В другому інтегралі зробимо заміну:

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} t = \frac{\pi}{2} - x & dt = -dx \\ t_1 = \frac{\pi}{2} & t_2 = 0 \end{array} \right| = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = I_1.$$

Таким чином,

$$2I_1 = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x + \ln \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну і отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{ll} t = 2x & dt = 2dx \\ t_1 = 0 & t_2 = \pi \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin t dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t dt \right) = \left| \begin{array}{ll} z = \pi - t & dz = -dt \\ z_1 = \pi - \frac{\pi}{2} & z_2 = \pi - \pi = 0 \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = I_1. \end{aligned}$$

Ми отримали, що $2I_1 = I_1 - \frac{\pi}{2} \ln 2$, звідки $I_1 = -\frac{\pi}{2} \ln 2 = I_2$. ■

Ми бачимо поки що аналогію з властивостями визначеного інтеграла. Однак, тут виникають і нові проблеми, які специфічні саме для невластних інтегралів. Відомо, що кожна неперервна на проміжку функція має первісну, однак її не завжди можна подати у скінченному вигляді через елементарні функції. Але ж потрібно знайти ще й **границю (!)** від такої функції. А ми вміємо знаходити границі лише від елементарних функцій. У зв'язку з цим, на перший план виноситься **задача дослідження невластного інтеграла на збіжність**, а, в разі потреби, потім для обчислення інтеграла використовують наближені методи. Тому розглянемо теореми, які допоможуть досліджувати на збіжність невластні інтеграли.

Задача 16.6. Дослідити на збіжність невластні інтеграли:

$$1) \int_2^{+\infty} \left(\cos \frac{2}{x} - 1 \right) dx; \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{x^3 + 7}{x^5 - x^2 + 2} dx; \quad 3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x + \ln x}}.$$

Розв'язання.

1) Нехай $f(x) = \cos \frac{2}{x} - 1 = -2 \sin^2 \frac{1}{x}$, за функцію порівняння

візьмемо $g(x) = -\frac{2}{x^2}$. Оскільки:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \sin^2 \frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^2}} = 1,$$

то із збіжності невластного інтеграла $\int_2^{+\infty} \frac{-2}{x^2} dx = 2 \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \Big|_2^A = -1$ за

ознакою порівняння впливає збіжність вихідного інтеграла. ■

2) За функцію порівняння візьмемо $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Оскільки:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 7}{x^5 - x^2 + 2} \cdot \frac{x^2 + 1}{1} = 1,$$

то із збіжності невластного інтеграла $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^A = \frac{\pi}{4}$

за ознакою порівняння впливає збіжність вихідного інтеграла. ■

3) Нехай $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x + \ln x}}$. За функцію порівняння візьмемо

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x + \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{\ln x}{x}}} = \frac{1}{2},$$

то із розбіжності невластного інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^A = +\infty$ за

ознакою порівняння впливає розбіжність вихідного інтеграла. ■

Задача 16.7. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ при всіх значеннях параметра α .

Розв'язання.

а) Нехай $\alpha > 1$, тоді правильною є нерівність:

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha},$$

а невластний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-\alpha)A^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

збіжний, отже й вихідний інтеграл збіжний для всіх $\alpha > 1$.

б) Нехай $0 < \alpha \leq 1$. Скористаємося ознакою Діріхле [14, с.153] для функцій $f(x) = \sin x$ і $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Умова а) ознаки виконується, оскільки функція $f(x) = \sin x$ неперервна і має обмежену первісну $F(x) = -\cos x$ на заданому нескінченному

проміжку. Також виконується й умова б), оскільки $g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$, отже функція спадає на вказаному проміжку і

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Таким чином, вихідний невластний інтеграл збіжний для всіх $0 < \alpha \leq 1$.

Покажемо, що наш інтеграл, однак, не є абсолютно збіжний:

$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$, тоді з розбіжності інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$ випливає б розбіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$.

Нехай $A \in (1; +\infty)$, виберемо натуральне число n так, щоб виконувалась нерівність $\pi n > A$ і покладемо $A_1 = \pi n$, $A_2 = 2\pi n$.

Тоді

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| = \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \geq \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \int_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 x dx = \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}.$$

Значить, існує число $\varepsilon = \frac{1}{4}$ таке, що для довільного $A > 1$ існують

числа $A_1 = \pi n > A$ і $A_2 = 2\pi n > A$, для яких $\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| \geq \varepsilon$. Отже, при

$\alpha \leq 1$ даний інтеграл розбіжний.

б) Нехай $\alpha \leq 0$. Доведемо, що вихідний інтеграл розбіжний. Використаємо критерій Коші. Для довільного $A > 1$ виберемо натуральне число n так, щоб виконувалась нерівність $2\pi n > A$, і покладемо $A_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{6}$, $A_2 = 2\pi n + \frac{5\pi}{6}$. Тоді:

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| = \int_{2\pi n + \frac{\pi}{6}}^{2\pi n + \frac{5\pi}{6}} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \geq \int_{2\pi n + \frac{\pi}{6}}^{2\pi n + \frac{5\pi}{6}} \sin x dx \geq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} dx = \frac{\pi}{3}.$$

Отже, існує число $\varepsilon = \pi/3$ таке, що для довільного числа $A > 1$ існують числа $A_1 = 2\pi n + \pi/6 > A$ і $A_2 = 2\pi n + 5\pi/6 > A$, для яких

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geq \varepsilon.$$

Тому для $\alpha \leq 0$ інтеграл розбіжний. ■

Задача 16.8. Дослідити на збіжність невластні інтеграли:

1) $\int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx;$

2) $\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}} dx.$

Розв'язання.

1) Для підінтегральної функції на інтервалі $(0;1)$ правильна нерівність

$$0 \leq \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

а оскільки невластний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2$, то

за ознакою порівняння впливає збіжність вихідного інтеграла. ■

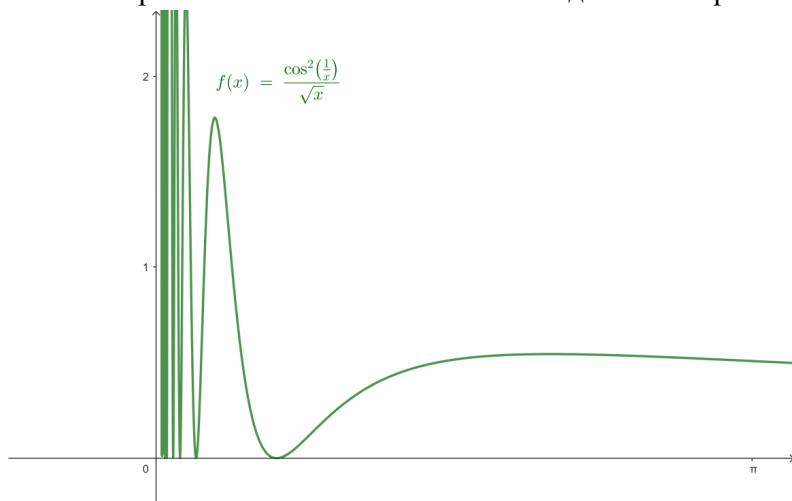


Рис. 16.9

2) Підінтегральна функція необмежена в правому півколі точки $x = 0$. Якщо $x \rightarrow +0$, то:

$$\frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}} \sim \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

невласний інтеграл від необмеженої функції $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ збіжний:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} \right|_{\varepsilon}^1 = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2},$$

отже, за ознакою порівняння впливає збіжність вихідного інтеграла. ■

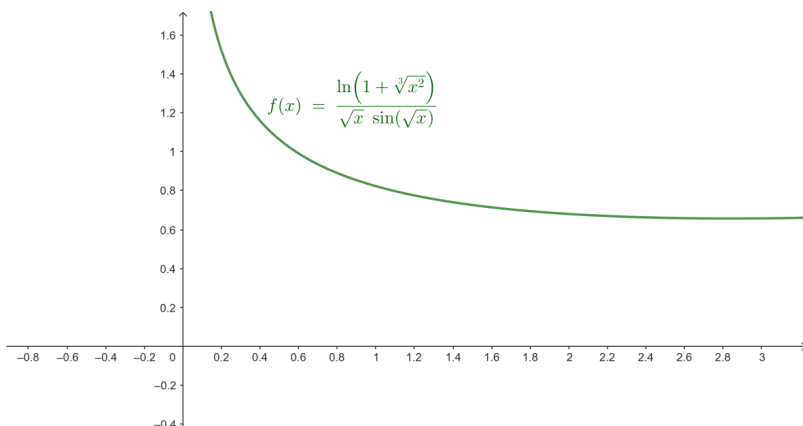


Рис. 16.10

Задача 16.9. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$x = 0, \quad y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Розв'язання.

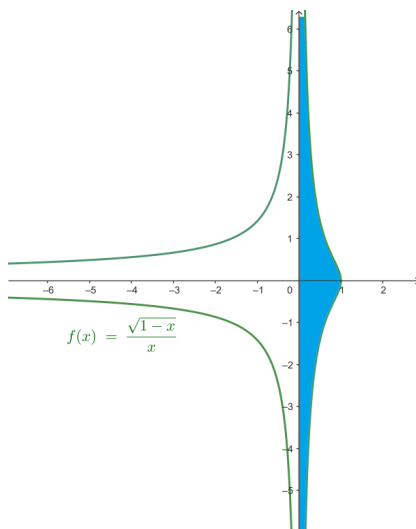


Рис. 16.11

Знайдемо область визначення функції $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ і побудуємо її графік. А графік функції $y = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ одержимо симетричним відображенням попереднього відносно осі абсцис. На області визначення $D(y) = (0; 1]$ маємо необмежену фігуру. Тому площу її будемо шукати як невластний інтеграл від необмеженої функції.

$$S = 2S_1 = 2 \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \Rightarrow x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{-2tdt}{(1+t^2)^2}, \\ t_1 = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}; t_2 = 0 \end{array} \right| = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}}^0 \frac{-2tdt}{(1+t^2)^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{l} u = t, \quad dv = \frac{tdt}{(1+t^2)^2} \\ du = dt, \quad v = \frac{-1}{2(1+t^2)} \end{array} \right| = 4 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{-t}{2(1+t^2)} \Big|_0^{\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} \frac{dt}{(1+t^2)} \right) = \\
 &= 4 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\varepsilon \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \right) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right) = \pi. \\
 &S = \pi. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язування

З1. Знайти інтеграл або встановити його розбіжність:

1) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2};$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4};$

3) $\int_0^{+\infty} \sin 3x dx;$

4) $\int_1^{+\infty} e^{-3x} dx;$

5) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x+1};$

6) $\int_{-\infty}^0 \frac{x+1}{x^2+1} dx;$

7) $\int_2^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} dx;$

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7};$

9) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1,001}};$

10) $\int_2^{\infty} \frac{2dx}{x^2-x};$

11) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{(x^2+1)^2};$

12) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4)^{3/2}};$

13) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx;$

14) $\int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx;$

15) $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 2^x} dx;$

16) $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+5x+6}.$

2. Дослідити на збіжність інтеграл:

$$1) \int_0^8 \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}};$$

$$2) \int_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}} dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}};$$

$$4) \int_1^2 \frac{(x-2)dx}{x^3 - 3x^2 + 4};$$

$$5) \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2} dx;$$

$$6) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}};$$

$$7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$8) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}};$$

$$9) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}};$$

$$10) \int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}};$$

$$11) \int_0^1 \frac{dx}{x^{0.999}};$$

$$12) \int_0^1 x \ln x dx;$$

$$13) \int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x|}};$$

$$14) \int_{-1}^1 \ln|x| dx.$$

3. Обчислити інтеграл:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}};$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(x^5 + 1)^4};$$

$$3) \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x} dx;$$

$$5) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + \sqrt{e^x}};$$

$$6) \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 - 1};$$

$$7) \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}};$$

$$9) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx;$$

$$10) \int_1^{+\infty} \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$11) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}};$$

$$12) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}.$$

✎4. Обчислити площу криволінійної трапеції, утвореної графіком функції:

$$1) y = xe^{-x/2}, x \in [0; +\infty);$$

$$2) y = \sqrt{x} / (x+1)^2, x \in [1; +\infty);$$

$$3) y = e^{-x} \operatorname{th} x, x \in [0; +\infty);$$

$$4) y = x^4 e^{-x}, x \in [0; +\infty).$$

✎5. Знайти площу криволінійної трапеції, утвореної графіком функції:

$$1) y = \frac{1}{\sqrt{2-5x}}, x \in [0; 0,4];$$

$$2) y = \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}, x \in [-1; 1], x \neq 0;$$

$$3) y = \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, x \in (a; b);$$

$$4) y = \frac{x^2}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}, x \in (3; 5);$$

$$5) y = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}, x \in [1; e);$$

$$6) y = x \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in [0; 1);$$

$$7) y = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}, x \in [0; 1).$$

✎6. Дослідити на збіжність інтеграл:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{x^3+7}{x^5-x^2+2} dx;$$

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^5+2}};$$

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x^7}};$$

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2} dx.$$

✎7. Дослідити на збіжність інтеграл:

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4 + 2}} dx;$
- 2) $\int_1^{+\infty} \frac{1 + \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + x\sqrt{x}} dx;$
- 3) $\int_2^{+\infty} \left(\cos \frac{2}{x} - 1\right) dx;$
- 4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{x^2 - 1}};$
- 5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(x - \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)^2} dx;$
- 6) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^5)}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} dx;$
- 7) $\int_{-\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{x + 3}{x^2 \sqrt{2x + 3}} dx;$
- 8) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x \operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}\right) dx.$

8. Довести нерівності:

- 1) $0 < \int_{10}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x + 1} < 0,1;$
- 2) $\left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x dx}{x^2 + 4} \right| \leq \frac{\pi}{4};$
- 3) $0,25 < \int_1^{+\infty} \frac{x^6 + 1}{x^{11} + 1} dx < 0,35;$
- 4) $0 < \int_{10}^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{5 \cdot 2^{102}}.$

9. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл:

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos 7x dx}{x^2 + 2x + 2};$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \sin 2x}{x^2 - 4x + 5} dx;$
- 3) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx;$
- 4) $\int_0^{+\infty} x \cos x^4 dx;$
- 5) $\int_0^{+\infty} \sin^3(x^2 + 2x) dx;$
- 6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \ln x}{\sqrt{x}} dx;$
- 7) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sign} \sin \ln x}{x} dx;$
- 8) $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

Завдання для самостійних і контрольних робіт з теми «Визначений інтеграл»

№1. Обчислити визначений інтеграл, використовуючи метод інтегрування частинами:

1. $\int_{-2}^0 (x^2 + 6x + 7) \cos 2x dx;$

2. $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx;$

3. $\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx;$

4. $\int_{-2}^0 (x + 2)^2 \cos 3x dx;$

5. $\int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx;$

6. $\int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx;$

7. $\int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx;$

8. $\int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx;$

9. $\int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx;$

10. $\int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx;$

11. $\int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx;$

12. $\int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx;$

13. $\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx;$

14. $\int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx;$

15. $\int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx;$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx;$

17. $\int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx;$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx;$

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx;$$

$$20. \int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx;$$

$$21. \int_1^2 x \ln^2 x dx;$$

$$22. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}};$$

$$23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}};$$

$$24. \int_0^1 (x+1) \ln^2 (x+1) dx;$$

$$25. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2 (x-1) dx;$$

$$26. \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2 (x+2) dx;$$

$$27. \int_0^2 (x+1)^2 \ln^2 (x+1) dx;$$

$$28. \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx;$$

$$29. \int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx;$$

$$30. \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

З2. Обчислити визначений інтеграл:

$$1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx;$$

$$2. \int_0^1 \frac{(x^2+1) dx}{(x^3+3x+1)^2};$$

$$3. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx;$$

$$4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2+4};$$

$$5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx;$$

$$6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx;$$

$$7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$8. \int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx;$$

$$9. \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4};$$

$$10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx;$$

$$11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx;$$

$$13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1+x^2} dx;$$

$$15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}};$$

$$19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$21. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}};$$

$$23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx;$$

$$25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$27. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx;$$

$$29. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx;$$

$$12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x + x}{1+x^2} dx;$$

$$14. \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx;$$

$$16. \int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx;$$

$$18. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx;$$

$$20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx;$$

$$22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2};$$

$$24. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx;$$

$$26. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx;$$

$$28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx;$$

$$30. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$$

З3. Обчислити визначений інтеграл:

$$1. \int_0^1 \frac{|4x-1|}{|2x-1|+|3x-1|} dx;$$

$$3. \int_{-1}^0 \frac{|4x+1|}{|2x+1|+|3x+1|} dx;$$

$$5. \int_{-1}^1 \frac{|3x+1|+|3x-1|}{2+|x|} dx;$$

$$2. \int_0^2 \frac{|3x-2|-|3x-5|}{|2x-1|+1} dx;$$

$$4. \int_{-2}^0 \frac{x-|2x+1|}{|3x+4|+|3x+5|} dx;$$

$$6. \int_0^2 \frac{|3x-2|-|3x-5|}{|2x-1|+1} dx;$$

$$7. \int_{-1}^1 \frac{|x|}{|2x+1|+|2x-1|} dx;$$

$$8. \int_0^2 \frac{x-|2x-1|}{|3x-4|+|3x-5|} dx;$$

$$9. \int_0^2 \frac{|x-1|}{|3x-2|+|2x-3|} dx;$$

$$10. \int_{-2}^0 \frac{1-|x+1|}{|2x+3|+|3x+2|} dx.$$

4. Обчислити визначений інтеграл:

$$1. \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\arctan 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)};$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$$

$$3. \int_{\pi/2}^{2\arctan 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)};$$

$$4. \int_{2\arctan(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3};$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx;$$

$$6. \int_{2\arctan 2}^{2\arctan 3} \frac{dx}{\cos x (1 - \cos x)};$$

$$7. \int_{2\arctan(1/3)}^{2\arctan(1/2)} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)};$$

$$8. \int_{2\arctan(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2};$$

$$9. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x};$$

$$10. \int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx;$$

$$11. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x};$$

$$12. \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \sin x + \cos x};$$

$$13. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + \sin x + \cos x};$$

$$14. \int_0^{2\arctan(1/2)} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx;$$

$$15. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x + \cos x};$$

$$16. \int_0^{2\arctan(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1 - \sin x)(1 + \cos x)};$$

$$17. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x};$$

$$18. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2};$$

$$19. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2};$$

$$20. \int_0^{2\arctan(1/2)} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x (1 + \cos x)};$$

$$21. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2};$$

$$22. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2};$$

$$23. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2};$$

$$25. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2};$$

$$27. \int_{\pi/2}^{2\arctg 2} \frac{dx}{\sin x(1 + \sin x)};$$

$$29. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x};$$

$$24. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2};$$

$$26. \int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2};$$

$$28. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2};$$

$$30. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}.$$

5.5. Обчислити визначений інтеграл:

$$1. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx;$$

$$2. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx;$$

$$3. \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx;$$

$$4. \int_0^{2\pi} \sin^2(x/4) \cos^6(x/4) dx;$$

$$5. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8(x/2) dx;$$

$$6. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^8 x dx;$$

$$7. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx;$$

$$8. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx;$$

$$9. \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx;$$

$$10. \int_0^{2\pi} \cos^8(x/4) dx;$$

$$11. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8(x/2) dx;$$

$$12. \int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx;$$

$$13. \int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx;$$

$$14. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx;$$

$$15. \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx;$$

$$16. \int_0^{2\pi} \sin^8(x/4) dx;$$

$$17. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6(x/2) \cos^2(x/2) dx;$$

$$18. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx;$$

19. $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x \, dx;$

20. $\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x \, dx;$

21. $\int_0^{2\pi} \sin^8 x \, dx;$

22. $\int_0^{2\pi} \sin^6(x/4) \cos^2(x/4) \, dx;$

23. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4(x/2) \cos^4(x/2) \, dx;$

24. $\int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x \, dx;$

25. $\int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \cos^8 x \, dx;$

26. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x \, dx;$

27. $\int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x \, dx;$

28. $\int_0^{2\pi} \sin^4(x/4) \cos^4(x/4) \, dx;$

29. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2(x/2) \cos^6(x/2) \, dx;$

30. $\int_{-\pi/2}^0 2^8 \cos^8 x \, dx.$

зб. 6. Обчислити визначений інтеграл:

1. $\int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} dx;$

2. $\int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx;$

3. $\int_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2 \sqrt{x+1}} dx;$

4. $\int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} dx;$

5. $\int_0^5 e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}};$

6. $\int_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} dx;$

7. $\int_0^1 e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}};$

8. $\int_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(x-2)^2} dx;$

9. $\int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2 \sqrt{x}} dx;$

10. $\int_1^2 \frac{x + \sqrt{3x-2} - 10}{\sqrt{3x-2} + 7} dx;$

11. $\int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}} dx;$

12. $\int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}) dx}{(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x})(2x+2)^2};$

$$13. \int_{-1/2}^0 \frac{x dx}{2 + \sqrt{2x+1}};$$

$$15. \int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2 \sqrt{x}} dx;$$

$$17. \int_2^3 \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} dx;$$

$$19. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{3x+2}) dx}{(\sqrt{3x+2} + 4\sqrt{2-x})(3x+2)^2};$$

$$21. \int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} dx;$$

$$23. \int_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}} dx;$$

$$25. \int_1^{64} \frac{(2 + \sqrt[3]{x}) dx}{(\sqrt[6]{x} + 2\sqrt{x^3} + \sqrt{x})\sqrt{x}};$$

$$27. \int_0^6 \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}} dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}};$$

$$29. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}) dx}{(\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x})(x+1)^2};$$

$$14. \int_0^4 e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}};$$

$$16. \int_{-5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}} dx;$$

$$18. \int_0^7 \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2 \sqrt{x+1}} dx;$$

$$20. \int_0^2 e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}};$$

$$22. \int_{1/24}^{1/3} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2 \sqrt{x}} dx;$$

$$24. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{2x+1}) dx}{(\sqrt{2x+1} + 4\sqrt{1-x})(2x+1)^2};$$

$$26. \int_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2 \sqrt{x-1}} dx;$$

$$28. \int_1^{64} \frac{6 - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3} - 7x - 6\sqrt[4]{x^3}} dx;$$

$$30. \int_0^3 \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}} dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}.$$

7. Обчислити визначений інтеграл:

$$1. \int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} dx;$$

$$2. \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx;$$

$$3. \int_0^5 \frac{dx}{(25 + x^2)\sqrt{25 + x^2}};$$

$$4. \int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}};$$

$$5. \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}};$$

$$6. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx;$$

$$7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

$$8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}};$$

$$9. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}};$$

$$10. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}};$$

$$11. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx;$$

$$12. \int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}};$$

$$13. \int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx;$$

$$14. \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}};$$

$$15. \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx;$$

$$16. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx;$$

$$17. \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}};$$

$$18. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx;$$

$$19. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}};$$

$$20. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx;$$

$$21. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

$$22. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}};$$

$$23. \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}};$$

$$24. \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx;$$

$$25. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx;$$

$$26. \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx;$$

$$27. \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}};$$

$$28. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}};$$

$$29. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}};$$

$$30. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

8. Обчислити визначений інтеграл:

$$1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx;$$

$$2. \int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2};$$

$$3. \int_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx;$$

$$4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2+4};$$

$$5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx;$$

$$6. \int_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx;$$

$$7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$8. \int_1^4 \frac{1/\left(2\sqrt{x}\right)+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2} dx;$$

$$9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4+1};$$

$$10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx;$$

$$11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx;$$

$$12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx;$$

$$13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx;$$

$$14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx;$$

$$15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$16. \int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx;$$

$$17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}};$$

$$18. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx;$$

$$19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx;$$

$$21. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}};$$

$$22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2};$$

$$23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx;$$

$$25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$27. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx;$$

$$29. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx;$$

$$24. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx;$$

$$26. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx;$$

$$28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx;$$

$$30. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$$

З9. Написати інтегральну суму для функції $f(x)$ на відрітку $[a; b]$, розбивши його на n рівних частин і вибравши значення аргумента ξ_k , $k = \overline{0; n-1}$ в лівих кінцях цих відрізків .

$$1. f(x) = 7 - 2x^2; \quad [-3; -1];$$

$$2. f(x) = \cos x + 2; \quad [-\pi; \pi];$$

$$3. f(x) = 2x + 3; \quad [-2; 1];$$

$$4. f(x) = 2x^2 + 3; \quad [-2; 3];$$

$$5. f(x) = 4x - 1; \quad [-3; 0];$$

$$6. f(x) = 2x^3 + 1; \quad [-1; 3];$$

$$7. f(x) = 4 - 5x; \quad [-1; 3];$$

$$8. f(x) = -\sin 2x; \quad [-2; 2];$$

$$9. f(x) = 3x^2 + 1; \quad [5; 6];$$

$$10. f(x) = \cos x + 2; \quad [-3; -1];$$

$$11. f(x) = 4 + \sin x; \quad [-\pi; \pi];$$

$$12. f(x) = x^2 - x; \quad [-4; 1];$$

$$13. f(x) = x^3 - 5; \quad [-2; 3];$$

$$14. f(x) = \cos 2x - 1; \quad [-2\pi; 0];$$

$$15. f(x) = 8 - 6x^2; \quad [-1; 5];$$

$$16. f(x) = 3x - 4; \quad [-3; 4];$$

$$17. f(x) = 6 \sin 3x; \quad [0; \pi/6];$$

$$18. f(x) = 8x^3 - 3; \quad [-8; -1];$$

$$19. f(x) = 6x^2 - 4; \quad [-4; 4];$$

$$20. f(x) = 3x - 2x^2; \quad [0; 8];$$

$$21. f(x) = 4 \sin 8x + 5; \quad [0; \pi/16];$$

$$22. f(x) = 7x - 9; \quad [-7; 9];$$

$$23. f(x) = 3x^2 - 4x^3; \quad [1; 8];$$

$$24. f(x) = 3 \cos 4x - 1; \quad [0; 2\pi];$$

$$25. f(x) = 2x^2 + 3x + 4; \quad [0; 4];$$

$$26. f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x; \quad [0; 3];$$

$$27. f(x) = 2 \sin 3x - 4; \quad [0; \pi/6];$$

$$28. f(x) = -2x - 6; \quad [-2; 6];$$

29. $f(x) = 5 + 8x - x^2$; $[1; 5]$; 30. $f(x) = -2\cos 3x + 5$; $[0; \pi/6]$.

№10. Обґрунтувати (не обчислюючи), який інтеграл більший:

1. $\int_0^{\pi/4} 2^{-x} \cos x dx$ чи $\int_0^{\pi/4} 2^{-x^2} \cos x dx$;
2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$ чи $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$;
3. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ чи $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ чи $\int_{-\pi}^{3\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$;
5. $\int_0^1 e^{-x} \sin x dx$ чи $\int_0^1 e^{-x^2} \sin x dx$;
6. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ чи $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$;
7. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ чи $\int_1^2 \frac{dx}{x}$;
8. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ чи $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$;
9. $\int_0^1 e^{-x^2} \sin x dx$ чи $\int_0^1 e^{-x} \sin x dx$;
10. $\int_1^2 2^{-x^2} dx$ чи $\int_1^2 2^{-x^3} dx$;
11. $\int_{-\pi}^0 \frac{\sin x}{x} dx$ чи $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$;
12. $\int_0^{\pi/4} 2^{-x} \cos x dx$ чи $\int_0^{\pi/4} 2^{-x^2} \cos x dx$;
13. $\int_{-1}^3 x^6 \sin x dx$ чи $\int_{-1}^4 x^6 \sin x dx$;
14. $\int_0^{\pi/2} \sin x^2 dx$ чи $\int_0^2 \sin x^2 dx$;
15. $\int_0^1 5^{-x^2} dx$ чи $\int_0^1 5^{x^2} dx$;
16. $\int_0^{\pi/6} e^{-x} \cos x dx$ чи $\int_0^{\pi/6} e^{-x^2} \cos x dx$;

№11. Обчислити похідну $y'(x)$ при заданому значенні $x = a$:

1. $y(x) = \int_x^0 \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2} dt, a=1$;
2. $y(x) = \int_x^5 \sqrt{1+t^2} dt, a = \frac{3}{4}$;
3. $y(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin z}{z} dz, a = \frac{\pi}{2}$;
4. $y(x) = \int_{3x}^{100} \operatorname{arctg}(t^2) dt, a = \frac{1}{3}$;
5. $y(x) = \int_2^{e^x} \frac{\ln z}{z} dz, a = \pi^2$;
6. $y(x) = \int_6^{3x} \frac{\sin u}{u} du, a = \frac{\pi}{6}$;

7. $y(x) = \int_x^{10} \sqrt{9\pi^2 + z^2} dz, a = 0;$

8. $y(x) = \int_{2x}^1 \arcsin^2 t dt, a = \frac{1}{2};$

9. $y(x) = \int_{-2x^2}^{\pi} \frac{\cos z}{z} dz, a = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$

10. $y(x) = \int_1^{e^x} \frac{\ln t}{t} dt, a = \sqrt{5};$

11. $y(x) = \int_0^{2x} \arctg(t^2) dt, a = \frac{1}{2};$

12. $y(x) = \int_{2x}^1 \sin(p^2) dp, a = \frac{\sqrt{\pi}}{4};$

13. $y(x) = \int_{3x}^0 \arcsin^2 t dt, a = \frac{1}{6};$

14. $y(x) = \int_{e^x}^7 \frac{\ln t}{t} dt, a = 100;$

15. $y(x) = \int_0^{2x} \sin t^2 dt, a = \frac{\sqrt{\pi}}{4};$

№12. Обчислити визначений інтеграл, використовуючи його геометричний зміст:

1. $\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{15 - 3x^2} dx;$

2. $\int_{-3}^3 \sqrt{18 - 2x^2} dx;$

3. $\int_0^2 \sqrt{20 - 5x^2} dx;$

4. $\int_{-2}^2 \sqrt{16 - 4x^2} dx;$

5. $\int_{-4}^0 \sqrt{32 - 2x^2} dx;$

6. $\int_{-1}^1 \sqrt{9 - 9x^2} dx;$

7. $\int_0^5 \sqrt{100 - 4x^2} dx;$

8. $\int_{-7}^0 \sqrt{98 - 2x^2} dx;$

9. $\int_{-1}^1 \sqrt{6 - 6x^2} dx;$

10. $\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{14 - 2x^2} dx;$

11. $\int_{-3}^0 \sqrt{81 - 9x^2} dx;$

12. $\int_0^2 \sqrt{8 - 2x^2} dx;$

13. $\int_0^1 \sqrt{7 - 7x^2} dx;$

14. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{30 - 15x^2} dx;$

15. $\int_{-\sqrt{3}}^0 \sqrt{12 - 4x^2} dx;$

16. $\int_{-1}^1 \sqrt{36 - 36x^2} dx.$

№13. Обчислити границю числової послідовності (a_n) , подавши її у вигляді інтегральної суми деякої функції $f(x)$ на відріжку $[a;b]$:

1. $a_n = \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5};$

2. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n};$

3. $a_n = \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n-1}{n} \pi \right);$

4. $a_n = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4};$

5. $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \dots + \frac{1}{5n};$

6. $a_n = \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right);$

7. $a_n = \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 \dots + n^5}{n^6};$

8. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{7n};$

9. $a_n = n \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{2n^2} \right);$

10. $a_n = \frac{1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \dots + n^{10}}{n^{11}};$

11. $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{10n};$

$$12. a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}};$$

$$13. a_n = \frac{1^7 + 2^7 + \dots + n^7}{n^8};$$

$$14. a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n};$$

$$15. a_n = \frac{1^{100} + 2^{100} + \dots + n^{100}}{n^{101}}.$$

§14. Довести правильність рівності:

$$1. \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx, m, n \in \mathbb{N};$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx,$$

$$3. \int_{-1/2}^{1/2} \cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0,$$

$$4. \int_x^1 \frac{dt}{t^2+1} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{t^2+1}, (x > 0);$$

$$5. \int_{1/e}^{\operatorname{tg} x} \frac{t dt}{1+t^2} + \int_{1/e}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1, (x > 0);$$

$$6. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-x+1} \cdot \ln \frac{5-x}{5+x} dx = 0;$$

$$7. \int_{-1}^1 \frac{x^7 - 3x^5 + 5x^7 - 7x}{\sin(x^2+1)} dx = 0;$$

$$8. \int_0^2 x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x f(x) dx;$$

$$9. \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tg} \frac{x^8}{5} \cdot \ln \frac{4\pi+x}{4\pi-x} dx = 0;$$

$$10. \int_0^1 x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot f(x) dx;$$

$$11. \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t} dt;$$

$$12. \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx;$$

$$13. \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx;$$

$$14. \int_{-1}^1 \arcsin^3 x \cdot \ln \frac{2-x^5}{2+x^5} dx = 2 \int_0^1 \arcsin^3 x \cdot \ln \frac{2-x^5}{2+x^5} dx;$$

$$15. \int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a+(b-a)x) dx.$$

№15. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1. y = 2 - x^2, y = x;$$

$$2. y = x^2, y = 2 - x^2;$$

$$3. y = x^2, x + y = 2;$$

$$4. y = 2x - x^2, x + y = 2;$$

$$5. y = 2x - x^2, y = -x;$$

$$6. y = x^2 + 4x, y = x + 4;$$

$$7. y = 6x - x^2, y = 0;$$

$$8. y = x^3, y = x^2;$$

$$9. y = \frac{x^2 - 3x}{4}, x = 5, y = 0;$$

$$10. y = x^2 + 2x, y = x + 2;$$

$$11. y = x^2 - 2x + 4, x = 1, y - 4 = x;$$

$$12. y = x^2 - 3x, y + 3x - 4 = 0;$$

$$13. y = 4 - x^2, y = 0;$$

$$14. y = 3 - 2x - x^2, y = 0;$$

$$15. y^2 = x^3, y = 8, x = 0;$$

$$16. y = x^2, y = 3x, x = 1, x = 2;$$

$$17. xy = 16, x + y - 7 = 0;$$

$$18. y = \sqrt{x}, y = x^2, x = 0, x = 1;$$

$$19. y = x^2, y = e^x, x = 0, x = 1;$$

$$20. y = \sin x, y = x, x = \frac{\pi}{2};$$

$$21. y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0;$$

$$22. y^2 = 9x, y = 3x;$$

$$23. y = x^3, y = 2x;$$

$$24. 4y = x^2, y^2 = 4x;$$

$$25. y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0;$$

$$26. y = x^3, y = 2x;$$

$$27. y = x^2 - x, y^2 = 2x;$$

$$28. y^2 = 2x + 4, x = 0;$$

$$29. y = \frac{x^2}{4a}, y = b, b > 0;$$

$$30. ax = y^2, ay = x^2.$$

№16. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, заданими рівняннями в полярних координатах:

$$1. r = 4 \cos 3\varphi, r = 2 \quad (r \geq 2);$$

$$2. r = \cos 2\varphi;$$

$$3. r = \sqrt{3} \cos \varphi, r = \sin \varphi \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right);$$

$$4. r = 4 \sin 3\varphi, r = 2 \quad (r \geq 2);$$

5. $r = 2 \cos \varphi, r = 2\sqrt{3} \sin \varphi$

$(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2});$

7. $r = 6 \sin 3\varphi, r = 3 \quad (r \geq 3);$

9. $r = \sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), r = \cos \varphi,$

$\left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right);$

11. $r = 6 \cos 3\varphi, r = 3 \quad (r \geq 3);$

13. $r = \cos \varphi, r = \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2});$

15. $r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi;$

17. $r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi;$

19. $r = \sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), r = \sqrt{2} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\right);$

21. $r = \frac{3}{2} \cos \varphi, r = \frac{5}{2} \cos \varphi;$

23. $r = \sin 6\varphi;$

25. $r = \cos \varphi + \sin \varphi;$

27. $r = 2 \cos 6\varphi;$

29. $r = 3 \sin \varphi, r = 5 \sin \varphi;$

6. $r = \sin 3\varphi;$

8. $r = \cos 3\varphi;$

10. $r = \sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right),$

$r = \sin \varphi, \left(0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\right);$

12. $r = \frac{1}{2} + \sin \varphi;$

14. $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi;$

16. $r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi;$

18. $r = \frac{1}{2} + \cos \varphi;$

20. $r = \frac{5}{2} \sin \varphi, r = \frac{3}{2} \sin \varphi;$

22. $r = 4 \cos 4\varphi;$

24. $r = 3 \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi;$

26. $r = 2 \sin 4\varphi;$

28. $r = \cos \varphi - \sin \varphi;$

30. $r = 2 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi.$

№17. Обчислити довжину дуги кривої, заданої параметричними рівняннями:

1. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi;$

2. $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

4. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi;$

5. $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi;$
9. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3};$
11. $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}; \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases}$
13. $\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi; \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases}$
15. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi;$
17. $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}; \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases}$
19. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}; \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
21. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4};$
23. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, & \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}; \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases}$
25. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$
27. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$
6. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi;$
8. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}; \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3};$
12. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi; \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$
14. $\begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$
16. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$
18. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$
20. $\begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3};$
22. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$
24. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), & 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}; \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$
26. $\begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi;$
28. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

$$29. \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4};$$

$$30. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

З18. Фігура Φ обмежена лініями 1) і 2). За допомогою визначеного інтеграла знайти:

а) площу фігури Φ (побудувати малюнок),

б) об'єм тіла T , утвореного обертанням фігури Φ навколо осі Ox (побудувати малюнок),

в) довжину дуги кривої 1), яку відтинає лінія 2).

1. 1) $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0;$

2) $x - 2y + 11 = 0.$

3. 1) $x^2 - 6x - 3y + 9 = 0;$

2) $2x - y - 6 = 0.$

5. 1) $x^2 - 2x + y - 8 = 0;$

2) $x + y - 4 = 0.$

7. 1) $x^2 - 12x - 3y + 36 = 0;$

2) $2x - y - 12 = 0.$

9. 1) $x^2 - 8x - 3y + 16 = 0;$

2) $2x - y - 8 = 0.$

11. 1) $x^2 - 3x - y + 3 = 0;$

2) $5x + y - 6 = 0.$

13. 1) $x^2 - 2x + y + 2 = 0;$

2) $x - y - 4 = 0.$

15. 1) $x^2 - 8x - y + 16 = 0;$

2) $2x - y + 16 = 0.$

17. 1) $x^2 - 10x - 4y + 25 = 0;$

2) $x - 2y + 7 = 0.$

2. 1) $x^2 - 4x + y - 5 = 0;$

2) $x + y - 5 = 0.$

4. 1) $x^2 - 6x + y - 1 = 0;$

2) $x - y + 1 = 0.$

6. 1) $x^2 - 8x - 4y + 16 = 0;$

2) $x - 2y + 8 = 0.$

8. 1) $x^2 - 6x - y - 2 = 0;$

2) $x + y + 2 = 0.$

10. 1) $x^2 - 6x + y - 1 = 0;$

2) $x + y - 7 = 0.$

12. 1) $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0;$

2) $x - 2y + 10 = 0.$

14. 1) $x^2 + 6x + y - 3 = 0;$

2) $x - y + 9 = 0.$

16. 1) $x^2 - x - y + 3 = 0;$

2) $3x - y = 0.$

18. 1) $x^2 - 4x - y - 6 = 0;$

2) $x - y - 6 = 0;$

19. 1) $x^2 - 2x - 3y + 1 = 0$; 20. 1) $x^2 - 10x - 2y + 25 = 0$;
 2) $2x - y - 2 = 0$; 2) $x - y + 7 = 0$;
 21. 1) $x^2 - 6x - 5y + 9 = 0$; 22. 1) $x^2 - 8x - 2y + 16 = 0$;
 2) $6x - 5y - 18 = 0$; 2) $x - y + 8 = 0$;
 23. 1) $x^2 - 10x - 2y + 25 = 0$; 24. 1) $x^2 - 6x - 4y + 9 = 0$;
 2) $3x - y - 15 = 0$; 2) $x - 2y + 9 = 0$;
 25. 1) $x^2 - 10x - 3y + 25 = 0$; 26. 1) $x^2 - 4x - 2y + 4 = 0$;
 2) $2x - y - 10 = 0$; 2) $x - y + 10 = 0$.

З19. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

1. $y = 2x - x^2, y = 0$;
 2. $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}}, 0 \leq x \leq a$;
 3. $y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$;
 4. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, y = 0, x = -1, x = 1$;
 5. $y = \frac{x^4}{10}, x = 2$;
 6. $x = \sqrt{y - 2}, x = 2, x = 3$;
 7. $y = \frac{x^2 - x}{2}$;
 8. $xy = 4, x = 1, x = 4$;
 9. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, x = 3$;
 10. $y = \frac{4x - x^2}{3}, y = \frac{x}{3}$;
 11. $(x-2)^2 + y^2 = 9$;
 12. $(x-2)^2 + y^2 = 4$;
 13. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;
 14. $y = -x^2 + 3, y = x^2 + 1$;
 15. $y = \sin x, y = \frac{2}{\pi}$;
 16. $y = 2^x, 4y - 3x - 5 = 0$;
 17. $2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0$;
 18. $y = x^2, y = \sqrt{x}$;
 19. $x^2 + (y-5)^2 = 9$;
 20. $y^2 = 4x, y = x$;
 21. $y = x^{\frac{3}{4}}, y = x$;
 22. $y = xe^x, y = 0, x = 1$;
 23. $y = x^2, y^2 = x$;
 24. $y = 1 - x^2, y = 0, x = 0$;

25. $x = 1 - y^2, y = 0, x = 0;$

26. $y = 2x - x^2, y = 0;$

27. $y = x^2 + 1, y = 3x - 1;$

28. $y = x^2 - 2x + 4, y = 4 + x;$

29. $x^2 + xy + y^2 = 3;$

30. $x^2 + y^2 = 1, y^2 = \frac{3}{2}x.$

20. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої L навколо вказаної осі:

1. $L: y = \frac{x^3}{3} \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right), O_x;$

2. $L: \rho = 2 \cos \varphi, \text{ полярна вісь};$

3. $L: \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases} O_x;$

4. $L: y = \frac{x^2}{2}, \text{ що відтинається прямою } y = \frac{3}{2}, O_y;$

5. $L: 3y = x^2 \ (0 \leq x \leq 2), O_x;$

6. $L: y = \sqrt{x}, \text{ що відсікається прямою } y = x, O_x;$

7. $L: \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, O_x;$

8. $L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3 + \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, O_x;$

9. $L: 3x = y^3 \ (0 \leq y \leq 2), O_y;$

10. $L: y = \frac{x^3}{3} \ (-1 \leq x \leq 1), O_x;$

11. $L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 + \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, O_x;$

12. $L: x^2 = 4 + y, \text{ що відтинається прямою } y = 2, O_y;$

13. $L: \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, O_x;$

14. $L: \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, O_x;$

15. $L: \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}, \text{ полярна вісь};$

16. $L: y^2 = 4 + x, \text{ що відтинається прямою } x = 2, O_x;$

17. $L: y^2 = 2x, \text{ що відтинається прямою } 2x = 3, O_x;$

18. $L: y = \frac{x^3}{3} \ (0 \leq x \leq 1), O_x;$

19. $L: \rho^2 = 4 \cos 2\varphi, \text{ полярна вісь};$

20. $L: \rho = 6 \sin \varphi, \text{ полярна вісь};$

21. $L: \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, Oх;$
22. $L: \rho = 2 \sin \varphi, \text{ полярна вісь};$
23. $L: \rho = \frac{2}{3} \cos \varphi, \text{ полярна вісь};$
24. $L: \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, Oх;$
25. $L: \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 + 2 \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, Oх;$
26. $L: \rho^2 = 9 \cos 2\varphi, \text{ полярна вісь};$
27. $L: y = x^3 \text{ між прямими } x = \pm \frac{2}{3}, Oх;$
28. $L: \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, Oх;$
29. $L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2 + \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, Oх;$
30. $L: \rho = 4 \sin \varphi, \text{ полярна вісь}.$

21. Знайти координати центра мас однорідної плоскої кривої L :

- L : півколо $x^2 + y^2 = R^2$, розміщене над віссю $Oх$.
- L : перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- L : дуга астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, розміщена в третьому квадранті.
- L : дуга кола радіуса R , яка стягує центральний кут α .
- L : дуга ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch}(x - a)$ ($-a \leq x \leq a$).
- L : дуга кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$).
- L : дуга логарифмічної спіралі $\rho = a e^{\varphi}$ $\left(\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \right)$.
- L : одна арка циклоїди $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$.
- L : дуга астроїди $x = 2 \cos^3 \frac{t}{4}$, $y = \sin^3 \frac{t}{4}$, розміщена в першому квадранті.
- L : дуга кривої $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$.
- L : кардіоїда $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.
- L : крива $\rho = 2 \sin \varphi$ від точки $(0; 0)$ до точки $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right)$.

13. L : дуга розгортки кола $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq \pi$).

14. L : крива $\rho = 2\sqrt{3} \cos \varphi$, обмежена променями $\varphi = 0$ та $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

15. L : крива $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$ ($0 \leq t \leq 1$).

Знайти координати центра мас плоскої однорідної фігури Φ , обмеженої даними лініями:

16. Φ – трикутник, сторони якого лежать на прямих $x + y = a$, $x = 0$ та $y = 0$.

17. Φ обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ та осями координат $x \geq 0$, $y \geq 0$.

18. Φ обмежена першою аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ та віссю Ox .

19. Φ обмежена кривими $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

20. Φ обмежена дугою синусоїди $y = \sin x$ та відрізком осі Ox $0 \leq x \leq \pi$.

21. Φ обмежена півколом $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ та віссю Ox .

22. Φ обмежена дугою параболи $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$ ($a > 0$, $b > 0$), віссю Ox та прямою $x = b$.

23. Φ обмежена дугою параболи $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$ ($a > 0$, $b > 0$), віссю Oy та прямою $y = b$.

24. Φ обмежена замкненою лінією $y^2 = ax^3 - x^4$.

25. Φ обмежена осями координат та дугою астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, розміщеної в першому квадранті.

26. Φ – сектор круга радіуса R із центральним кутом, рівним 2α .

27. Φ обмежена кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

28. Φ обмежена першою петлею лемніскати Бернуллі $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

29. Φ обмежена осями координат та параболою $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

30. Φ обмежена напівкубічною параболою $ay^2 = x^3$ та прямою $x = a$ ($a > 0$).

З22. Обчислити невластні інтеграли або встановити їх розбіжність:

1. а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$; б) $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$; 2. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2}$; б) $\int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} (a < b)$;

3. а) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$; б) $\int_0^1 x \ln x dx$; 4. а) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx$; б) $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$;

5. а) $\int_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$; 6. а) $\int_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; б) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

7. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 e^{-x^2} dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2 + 2\sqrt{1-x^2}}$; 8. а) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$; б) $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$;

9. а) $\int_0^{\infty} x \sin x dx$; б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$; 10. а) $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$; б) $\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;

11. а) $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 12. а) $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x} dx$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

б) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x-6}}$; 14. а) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x)^2}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

13. а) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$; б) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 15. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$.

З23. Дослідити на збіжність невластний інтеграл:

1. $\int_0^8 \frac{dx}{2x^3 + 5\sqrt{x}}$; 2. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2} dx$;

3. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2 \sin^2 x}$; 4. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{2+x^4}} dx$;

5. $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 6. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}(x^3 - 7x^2 + 15x - 9)}}$;

$$7. \int_0^2 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1};$$

$$9. \int_0^1 \frac{\arcsin(x^2 + x^3)}{x \ln^2(1+x)} dx;$$

$$11. \int_1^2 \frac{(x-2) dx}{x^3 - 3x^2 + 4};$$

$$13. \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} dx;$$

$$15. \int_0^\infty \left(e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{4}{x^2}} \right) dx.$$

$$8. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x};$$

$$10. \int_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}} dx;$$

$$12. \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x} dx;$$

$$14. \int_0^\infty x^{-2} \left(\operatorname{arctg} \frac{x^3}{1+x^2} \right)^3 dx;$$

§ 17. Числові ряди

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Числовий ряд, збіжний (розбіжний) числовий ряд	Numerical series, convergent (divergent) numerical series
Члени ряду, частинні суми ряду	Terms of a series, partial sums of a series
Необхідна умова збіжності ряду	Necessary condition for the series to converge
Залишок ряду	Residual of a series
Гармонійний ряд, геометрична прогресія, ряд обернених квадратів	Harmonic series, geometric progression, inverse square series

1. Сформулювати означення числового ряду, частинних сум ряду.

Символ вигляду $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (17.1) називається

числовим рядом (або просто рядом).

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ називаються **членами ряду**, відповідно першим, другим, ..., n -им (або загальним).

Для числового ряду (17.1) побудуємо послідовність сум $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, (17.2)

$$S_1 = u_1,$$

$$\text{де } S_2 = u_1 + u_2, \quad (17.3)$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

.....

Суми (17.3) називаються **частинними сумами ряду** (17.1), а

послідовність (17.2) називається **послідовністю частинних сум**.

Якщо в ряді (17.1) відкинути перших n членів, то ряд:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} \quad (17.4)$$

називається **залишком ряду** (17.1).

2. Який ряд називається збіжним, розбіжним?

Якщо послідовність частинних сум (S_n) ряду (17.1) збіжна, то й сам ряд називається **збіжним**, а границя послідовності (S_n) називається **сумою ряду**:

$$\boxed{\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Leftrightarrow u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = S}. \quad (17.5)$$

Якщо послідовність (S_n) розбіжна, то ряд (17.1) називається **розбіжним**.

3. Яка необхідна умова збіжності ряду? Наслідок, який випливає з необхідної умови.

Необхідна умова збіжності: якщо ряд збіжний, то границя його загального члена дорівнює нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{збіжний} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0}. \quad (17.6)$$

Наслідок. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - розбіжний.

Зауваження. Умова (17.6) є тільки необхідною умовою збіжності ряду, але не достатньою.

4. Сформулювати властивості збіжних числових рядів.

Теорема 1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - збіжний $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C u_n$, $C \in \mathbb{R}$ - збіжний, причому:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} C u_n = C \sum_{n=1}^{\infty} u_n}, \quad (17.7)$$

тобто сталий множник можна виносити за знак збіжного ряду.

Теорема 2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - збіжні $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ - збіжний, причому:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad (17.8)$$

тобто збіжні ряди можна почленно додавати.

Теорема 3. Якщо ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – збіжний, то його залишок

$$R_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n \text{ збіжний, причому:}$$

$$S = S_m + R_m. \quad (17.9)$$

Зауваження 1. З теореми 3 випливає, що відкидання або додавання скінченного числа членів до ряду не впливає на його збіжність.

Зауваження 2. Якщо ряд збіжний, то його залишок прямує до нуля (є нескінченно малою величиною).

Дійсно, в формулі (17.9) перейдемо до границі при $m \rightarrow \infty$, одержимо:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m + \lim_{m \rightarrow \infty} R_m \Rightarrow S = S + \lim_{m \rightarrow \infty} R_m \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0.$$

Основні поняття теми «Числові ряди» подано на схемах (рис. 17.1, рис. 17.2).

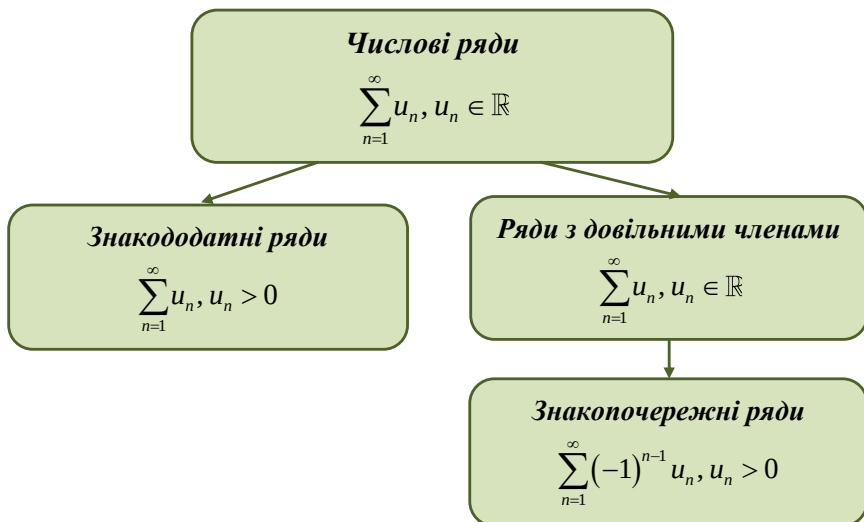
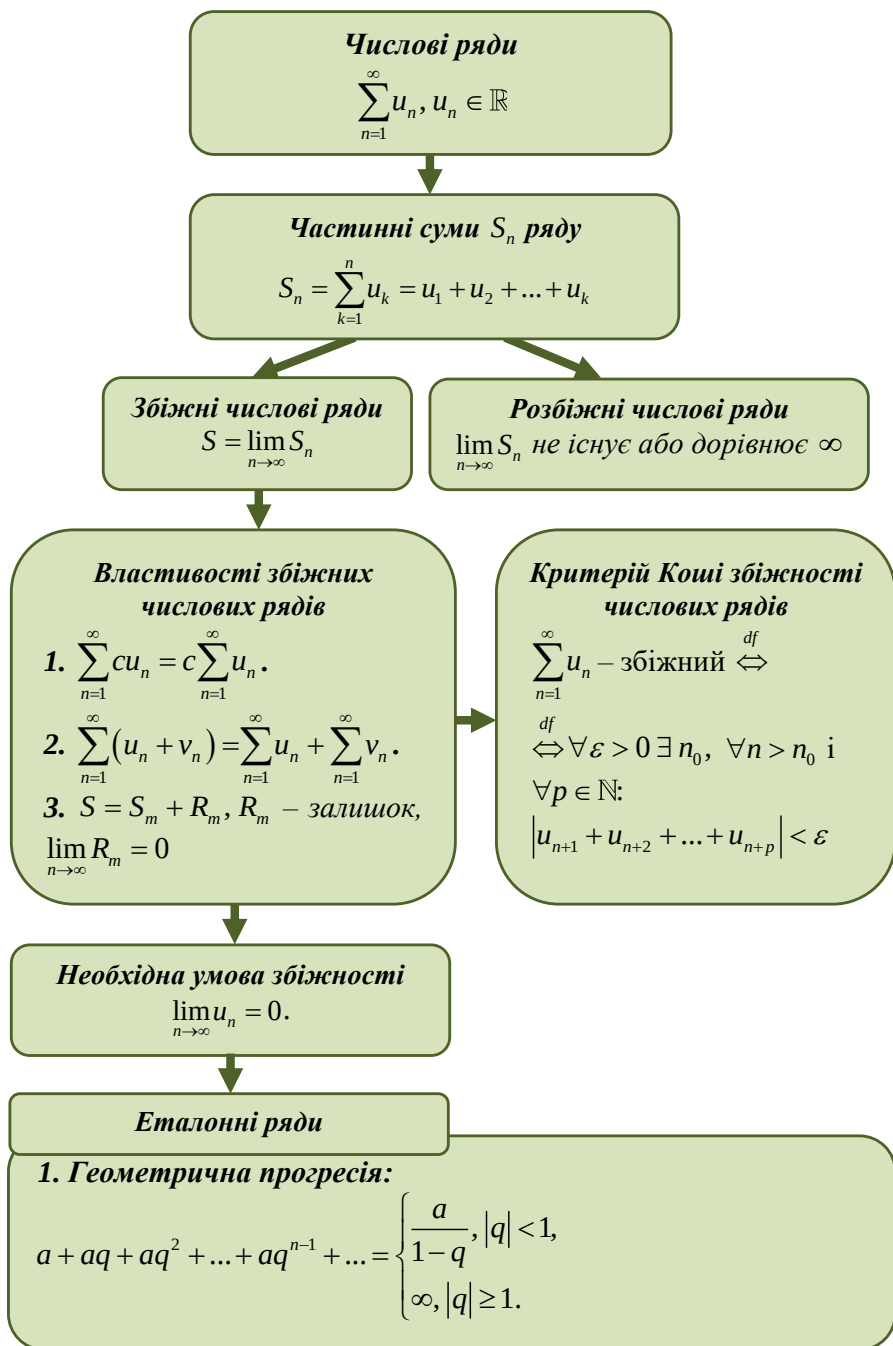


Рис. 17.1



$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)} = \frac{1}{a+1}.$$

4. Гармонійний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots - \text{розбіжний}.$$

5. Ряд обернених квадратів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots - \text{збіжний}.$$

6. Ряд Діріхле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1, \\ \infty, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Рис. 17.2

Приклади розв'язування вправ

Задача 17.1. Знайти частинні суми (S_n) рядів і дослідити їх на збіжність:

$$1) \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \dots;$$

$$2) \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+5)} + \dots;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{(n+3)(n+2)n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24}.$$

Розв'язання.

1) Щоб знайти n -у частинну суму, потрібно додати перших n членів ряду, записавши їх як один вираз. З цією метою використаємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2) + B(n+1)}{(n+1)(n+2)};$$

$$1 = An + 2A + Bn + B;$$

$$\begin{matrix} n \\ n^0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} A + B = 0, \\ 2A + B = 1. \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{matrix} A = 1, \\ B = -1. \end{matrix}$$

$$\text{Отже, } \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Тоді знаходимо S_n :

$$S_n = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2},$$

тобто знищується другий доданок

першої дужки з першим доданком наступної дужки, і так далі; в результаті залишається перший доданок першої дужки і другий останньої.

Далі знаходимо суму S ряду:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Ряд у цьому випадку є збіжним. ■

Зауваження. Цю задачу можна узагальнити на випадок ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)}:$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{(a+1) \cdot (a+2)} + \frac{1}{(a+2) \cdot (a+3)} + \dots + \frac{1}{(a+n) \cdot (a+n+1)} = \\
 &= \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} \right) + \left(\frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a+n+1} \right) = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+n+1} \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)} = \frac{1}{2(a+1)(a+2)}.
 \end{aligned}$$

2) Стратегія розв'язування задачі аналогічна попередньому прикладу:

$$\frac{1}{(n+2)(n+5)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+5} = \frac{A(n+5)+B(n+2)}{(n+2)(n+5)};$$

$$\begin{aligned}
 n \mid \left\{ \begin{aligned} A+B &= 0, \\ 5A+2B &= 1. \end{aligned} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} B &= -A, \\ 3A &= 1. \end{aligned} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} B &= -\frac{1}{3}, \\ A &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+5)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+5} \right).$$

У записі S_n цього разу доведеться записати більше членів, щоб побачити закономірність:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{3} = \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \dots + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+5} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right).
 \end{aligned}$$

Тут знищується другий доданок першої дужки і перший доданок третьої дужки за ним. В результаті залишаться перші доданки трьох перших дужок і другі доданки трьох останніх дужок.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{47}{180}. \quad \blacksquare$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)}.$$

Аналогічно до попередніх задач загальний член ряду подамо у вигляді двох дробів:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)} &= \frac{A}{(n+3)(n+4)} + \frac{B}{(n+4)(n+5)} = \\ &= \frac{A(n+5) + B(n+3)}{(n+3)(n+4)(n+5)}. \end{aligned}$$

$$1 = An + 5A + Bn + 3B;$$

$$n^0 \left| \begin{cases} A + B = 0, \\ 5A + 3B = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A, \\ 2A = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}, \\ B = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n+3)(n+4)} - \frac{1}{(n+4)(n+5)} \right), \text{ тому:}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k+3)(k+4)} - \frac{1}{(k+4)(k+5)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+3)(k+4)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+4)(k+5)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+5} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{n+6} \right) \right).$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+5} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{n+6} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{40}.$$

Зауваження. Цю задачу можна узагальнити на випадок ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)(n+a+2)}:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+n) \cdot (a+n+1)} - \frac{1}{(a+n+1) \cdot (a+n+2)} \right) = \frac{1}{2(a+1) \cdot (a+2)}.$$

Використовуючи останню формулу, приклад 3) будемо розв'язувати так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)} = |a=3| = \frac{1}{2(3+1)(3+2)} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{40}. \quad \blacksquare$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{(n+3)(n+2)n}$$

Аналогічно до прикладів 1) і 2) будемо мати:

$$\frac{n+6}{(n+3)(n+2)n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3} =$$

$$= \frac{A(n+2)(n+3) + Bn(n+3) + Cn(n+2)}{n(n+2)(n+3)};$$

$$n+6 = An^2 + 5An + 6A + Bn^2 + 3Bn + Cn^2 + 2Cn;$$

$$\begin{matrix} n^2 \\ n \\ n^0 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} A+B+C=0, \\ 5A+3B+2C=1, \\ 6A=6. \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} B=-2, \\ C=1, \\ A=1. \end{cases}$$

$$\frac{n+6}{n(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right).$$

Тоді:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) - \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) = \left(\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) \right);$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) \right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}. \quad \blacksquare$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24}.$$

Розкладемо квадратний тричлен на лінійні множники:

$$49n^2 - 70n - 24 = 0.$$

$$D = 70^2 + 4 \cdot 49 \cdot 24 = 49 \cdot (100 + 96) = 49 \cdot 196.$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49 \cdot 196} = 7 \cdot 14;$$

$$n_1 = \frac{70 + 7 \cdot 14}{2 \cdot 49} = \frac{10 + 14}{2 \cdot 7} = \frac{12}{7};$$

$$n_2 = \frac{70 - 7 \cdot 14}{2 \cdot 49} = \frac{10 - 14}{2 \cdot 7} = \frac{-2}{7}.$$

Отже, загальний член ряду буде мати вигляд:

$$u_n = \frac{14}{49n^2 - 70n - 24} = \frac{14}{49 \left(n - \frac{12}{7} \right) \left(n + \frac{2}{7} \right)} = \frac{14}{(7n-12)(7n+2)}.$$

Розкладемо дріб u_n на прості дробби:

$$\frac{14}{(7n-12)(7n+2)} = \frac{A}{7n-12} + \frac{B}{7n+2} = \frac{A(7n+2) + B(7n-12)}{(7n-12)(7n+2)}.$$

$$14 = 7An + 2A + 7Bn - 12B;$$

$$\begin{matrix} n \\ n^0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 7A + 7B = 0, \\ 2A - 12B = 14. \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1. \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7n-12} - \frac{1}{7n+2} \right);$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{23} \right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{30} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{7n-24} - \frac{1}{7n-12} \right) + \left(\frac{1}{7n+9} - \frac{1}{7n-5} \right) + \left(\frac{1}{7n-12} - \frac{1}{7n+2} \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7n-5} - \frac{1}{7n+2};$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7n-5} - \frac{1}{7n+2} \right) = \frac{3}{10}. \quad \blacksquare$$

Задача 17.2. Дослідити ряд на збіжність, використавши означення:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 6^n}{30^n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right);$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{2n^2}.$$

Розв'язання.

$$1) S_n = \sum_{k=1}^n \frac{5^k + 6^k}{30^k} = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{1}{6} \right)^k + \left(\frac{1}{5} \right)^k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{6} \right)^k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5} \right)^k =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{геометрична прогресія} \\ S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \end{array} \right| = \frac{\frac{1}{6} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{6} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{6}} + \frac{\frac{1}{5} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{1}{5} \left(1 - \left(\frac{1}{6} \right)^n \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right).$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} \left(1 - \left(\frac{1}{6} \right)^n \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) \right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}. \quad \blacksquare$$

2) Під час знаходження частинної суми потрібно помітити певну закономірність:

$$u_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n ((\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})) = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) -$$

$$- \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots +$$

$$\begin{aligned}
 & +(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})- \\
 & -((\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\dots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}))=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \\
 S & = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right) = 1 - \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Отже, ряд збіжний і $S = 1 - \sqrt{2}$. ■

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right).$$

Загальний член:

$$\begin{aligned}
 u_n & = \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) = \ln \frac{n^2 + n - 2}{n(n+1)} = \ln \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} = \\
 & = (\ln(n+2) - \ln(n+1)) - (\ln n - \ln(n-1)).
 \end{aligned}$$

Частинна сума:

$$\begin{aligned}
 S_n & = \sum_{k=2}^n \left(\ln \frac{k+2}{k+1} - \ln \frac{k}{k-1} \right) = \ln \frac{4}{3} + \ln \frac{5}{4} + \ln \frac{6}{5} + \dots + \ln \frac{n}{n-1} + \\
 & + \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n+1} - \left(\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \ln \frac{5}{4} + \dots + \ln \frac{n}{n-1} \right) = \\
 & = \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n+1} - \ln 2 - \ln \frac{3}{2}; \\
 S & = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) - \ln 3 \right) = -\ln 3. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}.$$

Щоб дослідити цей ряд на збіжність, використаємо тотожність з курсу елементарної математики:

$$\operatorname{arctg} \frac{c}{c^2 + (n+a)(n+a-1)} = \operatorname{arctg} \frac{c}{n+a-1} - \operatorname{arctg} \frac{c}{n+a}.$$

Загальний член ряду подамо як суму двох доданків:

$$u_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + n^2 - \frac{1}{4}} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

(тут $c = \frac{1}{2}$; $a = \frac{1}{2}$),

$$u_n = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2}}{n - \frac{1}{2}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}.$$

Тоді знайдемо частинну суму:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2k-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1} \right) = \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right) + \\ &+ \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n-3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1} \right) + \\ &+ \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}. \\ S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{4}. \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 17.3. Записати нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного $\left(\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right)$:

- 1) $0,(34)$;
- 2) $0,(345)$;
- 3) $1,35(126)$.

Розв'язання.

В усіх прикладах будемо використовувати нескінченно спадну геометричну прогресію:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-q}, |q| < 1.$$

$$1) 0,(34) = 0,343434... = \frac{34}{100} + \frac{34}{10000} + \frac{34}{1000000} + ... =$$

$$= \left| \begin{array}{l} a = \frac{34}{100} \\ q = \frac{1}{100} \end{array} \right| = \frac{\frac{34}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{34}{99}. \quad \blacksquare$$

$$2) 0,(345) = 0,345345... = \frac{345}{1000} + \frac{345}{1000000} + ... = \left| \begin{array}{l} a = \frac{345}{1000} \\ q = \frac{1}{1000} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\frac{345}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{345}{999} = \frac{115}{333}. \quad \blacksquare$$

$$3) 1,35(126) = 1 + \frac{35}{100} + \frac{126}{100000} + \frac{126}{100000000} + ... = \left| \begin{array}{l} a = \frac{126}{100000} \\ q = \frac{1}{1000} \end{array} \right| =$$

$$= 1 + \frac{35}{100} + \frac{\frac{126}{100000}}{1 - \frac{1}{1000}} = 1 + \frac{35}{100} + \frac{126}{100000} \cdot \frac{1000}{999} = 1 + \frac{35}{100} + \frac{14}{11100} =$$

$$= 1 \frac{3899}{11100}. \quad \blacksquare$$

Задача 17.4. Довести розбіжність ряду, використовуючи необхідну умову збіжності:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 - 4};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,85};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{n+3}.$$

Розв'язання.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то границя його загального члена дорівнює нулеві: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Звідси, як наслідок, випливає, що якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

Отже, в усіх випадках знаходимо границю загального члена:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 - 4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 - \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ряд розбіжний. ■

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0,85} = 1 \neq 0.$$

Тут використано еталонну границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$.

Ряд розбіжний. ■

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \arctg \frac{1}{n+3} = (\infty \cdot 0) = \left| \arctg \alpha \sim \alpha, \right|_{\alpha \rightarrow 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 1 \neq 0.$$

Ряд розбіжний. ■

Завдання для самостійного розв'язування

✎1. Записати n 'ять перших членів ряду за відомою формулою загального члена u_n :

$$1) u_n = \frac{3n+2}{n^2+4};$$

$$2) u_n = \frac{(-1)^n(n-1)}{2^{n+3}};$$

$$3) u_n = \frac{2 + (-1)^n}{n^2 + 4}; \quad 4) u_n = \begin{cases} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, & n = 2k-1; \\ \frac{1}{n^2}, & n = 2k. \end{cases}$$

✎2. За даними першими членами знайти один з можливих виразів n -го члена таких рядів:

- 1) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots$;
- 2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \dots$;
- 3) $1 - \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13} - \dots$;
- 4) $\ln \frac{1}{4} + \ln \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 7} + \ln \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 10} + \ln \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot 13} + \dots$.

✎3. Знайти n -у частинну суму S_n ряду і суму S ряду:

- 1) $\frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \dots + \frac{2}{5^n} + \dots$;
- 2) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) + \dots$;
- 3) $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots$;
- 4) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$;
- 5) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$;
- 6) $\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \dots$;
- 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$;
- 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 24n - 5}$.

✎4. Знайти n -у частинну суму S_n ряду і суму S ряду:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^3-1}{n^3+1};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{tg}^{-1} n - \operatorname{tg}^{-1} (n+1));$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{1}{n+2} \right) \right);$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}.$$

5. Записати нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$:

$$1) 0,(12);$$

$$2) 0,(123);$$

$$3) 0,(7);$$

$$4) 0,0(8);$$

$$5) 1,24(12);$$

$$6) 3,(1415).$$

6. Довести розбіжність ряду, використовуючи необхідну умову збіжності:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + 1}{n+2} \arcsin \frac{1}{n^2 + 2n + 3};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}.$$

7. Користуючись критерієм Коші, довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, якщо:

$$1) u_n = \frac{\cos nx}{2^n};$$

$$2) u_n = \frac{\sin nx}{n(n+1)};$$

$$3) u_n = \frac{\cos \alpha^n}{n^2};$$

$$4) u_n = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}.$$

8. Користуючись критерієм Коші, довести розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, якщо:

1) $u_n = \frac{1}{2n}$;

2) $u_n = \frac{n-2}{n^2+2}$;

3) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$;

4) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

9. На рисунку, що додається, показано перші п'ять квадратів з послідовності. Крайній квадрат має площу 4 м^2 . Кожен з інших квадратів отримано шляхом з'єднання середніх точок сторін зовнішніх квадратів. Знайдіть суму площ усіх квадратів.



Рис. 17.3

10. Сніжинка Хельги фон Кох - це крива нескінченної довжини, яка охоплює область скінченної площі. Щоб зрозуміти, чому це так, припустимо, що криву побудовано з рівностороннього трикутника, сторони якого мають довжину 1.

a. Знайдіть довжину L_n кривої C_n і покажіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \infty$.

b. Знайдіть площу області A_n , обмеженої C_n , і покажіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{8}{5} A_1.$$



Рис. 17.4

§ 18. Ознаки порівняння рядів з додатними членами. Ознаки Даламбера, Коші

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Критерій збіжності ряду з додатними членами	The criterion of convergence of a series with positive terms
Порівняння рядів з додатними членами	Comparison of series with positive terms
Ознака Даламбера	D'Alembert's ratio test
Ознака Коші	Cauchy ratio test
Інтегральна ознака Коші	Integral Cauchytest for convergence

1. Сформулювати критерій збіжності ряду з невід'ємними членами, наслідки з критерію.

Теорема (критерій збіжності ряду з невід'ємними членами).

Для того щоб ряд з невід'ємними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0 \quad (18.1)$$

збігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність його часткових сум була обмеженою.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0 - \text{збіжний} \Leftrightarrow (S_n) - \text{обмежена}$$

Теорема. Якщо ряд (18.1) збіжний, а послідовність (d_n) обмежена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n$ збіжний.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0 \right) - \text{збіжний} \\ (d_n) : \exists L > 0, \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq d_n \leq L \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n - \text{збіжний}.$$

2. Сформулювати теорему про порівняння рядів з додатними членами.

Перша ознака порівняння рядів (у формі нерівності).

Розглянемо три ряди з невід'ємними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (18.2), } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ (18.3) і } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ (18.4).}$$

Теорема. Якщо члени рядів (18.2), (18.3) і (18.4) задовольняють умову: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n$, тоді із збіжності ряду (18.4) випливає збіжність ряду (18.3), а з розбіжності ряду (18.2) випливає розбіжність ряду (18.3) (рис. 18.1).

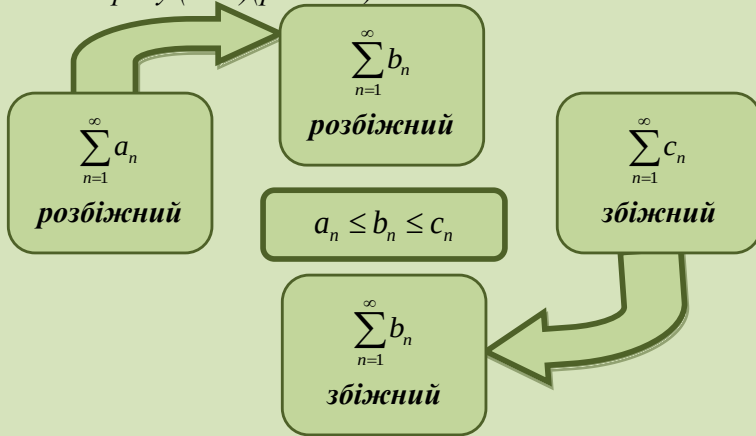


Рис. 18.1

Інтерпретація збіжності рядів подана на рисунку 18.2, де кожен член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ подано як площу прямокутника зі сторонами 1 і c_n . Аналогічно і для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

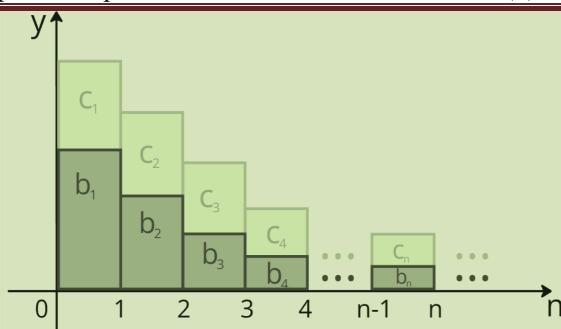


Рис. 18.2

Друга ознака порівняння рядів (гранична).

Теорема. Нехай $u_n > 0$, $v_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = C > 0$, то обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ одночасно збіжні або розбіжні.

2. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, то із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$, то з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Для порівняння рядів часто використовують ряди:

1) **геометричний ряд** $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-q}$, $|q| < 1$

2) **гармонійний ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ (розбіжний)

3) **ряд Діріхле** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний, якщо $\alpha \leq 1$

3. Сформулювати та довести ознаку Даламбера.

Теорема (ознака Даламбера). Якщо для ряду (18.1) з додатними членами існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ – розбігається, при $q = 1$ питання збіжності ряду залишається відкритим.

4. Сформулювати та довести ознаку Коші.

Теорема (радикальна ознака Коші). Якщо для ряду (18.1) з додатними членами існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд збігається, при $l > 1$ розбігається, при $l = 1$ питання збіжності ряду залишається відкритим.

5. Сформулювати та довести інтегральну ознаку Коші.

Теорема (інтегральна ознака Коші). Якщо функція $y = f(x)$ визначена, додатна, неперервна спадна на проміжку $[1; +\infty)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається або розбігається одночасно з невласним інтегралом $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

6. Повторити таблицю еталонних рядів.

Приклади розв'язування вправ

Задача 18.1. Skorиставivshis'я oznakoyu porivnyannya, dosliditi na zbizhnist' yadi:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + a^n}, a > 0;$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7+3 \cdot (-1)^n}{2^{n+1}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Розв'язання.

У задачах 1) - 6) використаємо для порівняння геометричний ряд $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-q}$, який збіжний за умови $|q| < 1$.

У задачі 7) використаємо еталонний збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}}.$$

$$b_n = \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} < \frac{1}{5^{n-1}} = c_n$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$ збіжний, отже за

ознакою порівняння вихідний ряд збіжний. ■

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, a > 0.$$

Якщо $0 < a < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0$, тому не

виконується необхідна умова збіжності і ряд розбіжний.

Якщо $a = 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{2} \neq 0$ – ряд розбіжний.

Якщо $a > 1$, то $u_n = \frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n} = v_n$, ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a} \right)^n, \left| \frac{1}{a} \right| < 1 \text{ збіжний, тому досліджуваний ряд}$$

також збіжний. ■

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

$$u_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = v_2,$$

$$u_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2} = v_3,$$

.....

$$u_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}} = v_n.$$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} v_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ збіжний, як геометрична прогресія,

$|q| = \left| \frac{1}{2} \right| < 1$. Отже, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ також збіжний. Оскільки він є

залишком $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, то і сам ряд збіжний. ■

Ряд 3) варто записати в таблицю еталонних рядів.

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}.$$

$$u_n = 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n} < 2^n \cdot \frac{\pi}{3^n} = \pi \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n = v_n$$

(використано відому нерівність для малих кутів: $\sin \alpha < \alpha$).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \left(\frac{2}{3} \right)^n$ збіжний, $|q| = \left| \frac{2}{3} \right| < 1$, тому вихідний ряд

збіжний. ■

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

Загальний член ряду запишемо в іншому вигляді, оскільки не настільки очевидним є вибір ряду для порівняння.

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n! \cdot n!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n)}$$

У знаменнику перемножимо парні натуральні числа:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n) = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot \dots \cdot (2 \cdot n) = 2^n \cdot n!$$

І непарні числа також потрібно перемножити:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1) = (2n-1)!!$$

$$u_n = \frac{n! \cdot n!}{2^n \cdot n! (2n-1)!!} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

тому що $\frac{n}{2n-1} < 1, n=1, 2, \dots$

$$\text{Отримали } u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} < \left(\frac{1}{2}\right)^n = v_n.$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ збіжний, } |q| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1.$$

Тому вихідний ряд збіжний. ■

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7+3 \cdot (-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Оскільки $4 \leq 7+3 \cdot (-1)^n \leq 10 \forall n \in \mathbb{N}$, то $0 \leq u_n \leq \frac{10}{2^{n+1}} = \frac{5}{2^n} = v_n$ із

збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n}$, $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ впливає збіжність вихідного ряду. ■

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ (ряд обернених квадратів).}$$

Порівняємо вихідний ряд з еталонним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$.

$$u_2 = \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = v_2,$$

$$u_3 = \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = v_3,$$

.....

$$u_n = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = v_n.$$

Отже, вихідний ряд збіжний. ■

Задача 18.2. Скориставшись ознакою порівняння, дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}.$$

Розв'язання.

У задачах використаємо гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \text{розбіжний, тому що } u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n} = v_n.$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} - \text{розбіжний, тому що } u_n = \frac{n+1}{n^2} > \frac{n}{n^2} = v_n. \quad \blacksquare$$

Задача 18.3. Скориставшись граничною ознакою, дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3-3n^2+4};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+3}{2n^2+5}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5+4^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n \ln n}{n^2+5}.$$

Розв'язання.

1) Оскільки ряд обернених квадратів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний і:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n-2}{n^3-3n^2+4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-2n^2}{n^3-3n^2+4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}} = 1,$$

то і вихідний ряд збіжний. ■

2) Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+3}{2n^2+5}} \div \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n^2+3n}{2n^2+5}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{5}{n^2}}} = 1,$$

то і вихідний ряд збіжний. ■

3) Оскільки геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ збіжний і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{5+4^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2^n}{5+4^n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{5}{4^n} + 1} = 1,$$

то вихідний ряд збіжний. ■

4) Оскільки гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n \ln n}{n^2+5} \div \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln n + n}{n^2+5} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty,$$

то вихідний ряд розбіжний. ■

Задача 18.4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$:

Розв'язання.

Для $n \geq 1$ маємо (рис 18.3):

$$\ln n < n \mid \cdot (-1)$$

$$-\ln n > -n \mid + n^2$$

$$n^2 - \ln n > n^2 - n > n^2$$

$$\frac{1}{n^2 - \ln n} < \frac{1}{n^2}$$

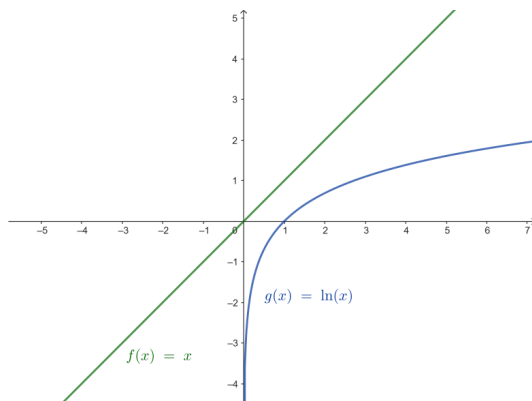


Рис. 18.3

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний, то і вихідний ряд збіжний. ■

Задача 18.5. Довести, що якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ збіжні,

$(a_n > 0, b_n > 0)$, то буде збіжним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Розв'язання. Розглянемо очевидну нерівність:

$$(a_n - b_n) \geq 0,$$

$$a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2 \geq 0,$$

$$a_n b_n \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2).$$

Оскільки два ряди збіжні, то їх сума $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ збіжний ряд,

як і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$. Тому врахувавши нерівність $a_n b_n \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$,

Ознаки порівняння рядів з додатними членами. Ознаки Даламбера, Коші
за теоремою порівняння рядів, робимо висновок про збіжність ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Більше з того, з нерівності:

$$(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n \leq (a_n^2 + b_n^2) + (a_n^2 + b_n^2) = 2(a_n^2 + b_n^2)$$

випливає, що і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ теж збіжний. ■

Задача 18.6. Дослідити на збіжність ряди за ознакою Даламбера:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n};$$

$$2) \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{n^n}.$$

Розв'язання.

1) Використаємо ознаку Даламбера, запишемо n -ий і $(n+1)$ -ий член ряду, а потім знайдемо границю їхнього відношення:

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \div \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд збіжний. ■

2) Аналогічно до попередньої задачі маємо:

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)}; \quad u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)(3n+3)};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)(3n+3)} \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+3} = \frac{2}{3} < 1.$$

Ряд збіжний. ■

$$3) u_n = \frac{(n+1)!}{10^n}; \quad u_{n+1} = \frac{(n+2)!}{10^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+2) \cdot 10^n}{10^n \cdot 10 \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{10} = \infty.$$

Ряд розбіжний. ■

$$4) u_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}; \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3^n \cdot 3 \cdot n! \cdot (n+1)}{(n+1)^n \cdot (n+1)};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n! \cdot (n+1)}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

Ряд розбіжний. ■

Задача 18.7. Дослідити на збіжність ряди за радикальною ознакою Коші:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n} \right)^n;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1} \right)^n, \quad a > 0;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3};$$

$$5) \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots$$

Розв'язання.

$$1) \text{ Знайдемо } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

Ряд збіжний. ■

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{an}{n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{n+1} = a.$$

Якщо $0 < a < 1$, то ряд збіжний

Якщо $a > 1$, то ряд розбіжний.

Дослідимо випадок, коли $a = 1$, тобто ряд набирає вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Перевіримо спочатку необхідно умову:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Необхідна умова збіжності ряду не виконується, отже ряд розбіжний. ■

3) Для цього випадку можна використати і ознаку порівняння, і ознаку Даламбера, і радикальну ознаку Коші. Ми скористаємось останньою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin \frac{\pi}{3^n}} = \left[\begin{array}{l} \sin \alpha \sim \alpha \\ \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right] = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\pi} = \frac{2}{3} < 1.$$

Ряд збіжний. ■

$$\begin{aligned} 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(3 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n^2 \ln \left(3 - \frac{1}{n} \right)}} = \left[\begin{array}{l} \ln(1+\alpha) \sim \alpha \\ \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n^2 \left(\ln 3 + \ln \left(1 - \frac{1}{3n} \right) \right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n^2 \ln 3 - \frac{n}{3}}} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Ряд збіжний. ■

5) Скористаємось відомою формулою з тригонометрії:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Тоді:

$$u_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\pi}{8}} = 2 \sin \frac{\pi}{8};$$

$$u_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{8}}} = 2 \sin \frac{\pi}{8};$$

.....

$$u_n = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Ряд набере вигляду:

$$2 \sin \frac{\pi}{2^2} + 2 \sin \frac{\pi}{2^3} + 2 \sin \frac{\pi}{2^4} + \dots + 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} + \dots$$

Щоб дослідити його на збіжність, скористаємось радикальною ознакою Коші :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \left[\begin{array}{l} \sin \alpha \sim \alpha \\ \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\pi}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд збіжний. ■

Завдання для самостійного розв'язування

❧1. Скориставшись ознакою порівняння, дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n^2}{n+1}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right);$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{\sqrt{n}};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \frac{1+(-1)^n}{2}}{n^3 + 2};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(2 + (-1)^n)}{\ln(1+n)};$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}};$$

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n + \sqrt{n}};$$

$$13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n};$$

$$14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2};$$

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3};$$

$$16) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n};$$

$$17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}};$$

$$18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}.$$

2. Довести, що якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ збіжний, то буде збіжним і

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ (Скористайтесь нерівністю $\left(a_n - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 0$).

3. Довести, що якщо ряди з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$,

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^3$ збіжні, то збіжним буде ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ (скористайтесь співвідношенням між середнім геометричним і середнім арифметичним).

✎4. Скориставшись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

$$1) 2 + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)} + \dots;$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n+1)};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{2^n (n+1)!};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3! n! 3^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^n (n+1)!}{3^n n!}.$$

✎5. Скориставшись ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (1+n)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{\frac{3}{2}}};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+1}{5n-3} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{2n}{3}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{2n+1} \right)^n \arcsin^n \frac{1}{n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}}{(3n^2 + 2n + 1)^{\frac{n+3}{2}}};$$

$$7) \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} + \dots;$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5} \right)^n;$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(e^2 + \frac{1}{n} \right) \right)^{n+1};$$

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\left(3 + \frac{1}{n} \right)^{2n}};$$

$$13) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

✎ 6. Встановивши збіжність ряду, довести, що:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{(2n)!} = 0;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{4^{n^2}} = 0.$$

§ 19. Інтегральна ознака Коші

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Інтегральна ознака Коші	Integral Cauchy test for convergence
Оцінка залишку ряду з додатними членами	Evaluation of the remainder of a series with positive terms
Ознаки порівняння невластних інтегралів	Signs of comparison of convergence of improper integrals

1. Сформулювати інтегральну ознаку Коші.

Теорема (інтегральна ознака Коші). Якщо функція $y = f(x)$ визначена, додатна, неперервна спадна на проміжку $[1; +\infty)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається або розбігається одночасно з невластним інтегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

2. Геометричне тлумачення збіжності ряду з додатними членами.

Якщо $f(x)$ – додатна, неперервна і монотонно спадна функція на проміжку $[1; +\infty)$, то $F(n) := \int_1^n f(x)dx$ чисельно дорівнює площі фігури, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x=1$, $x=n$ (рис. 19.1).

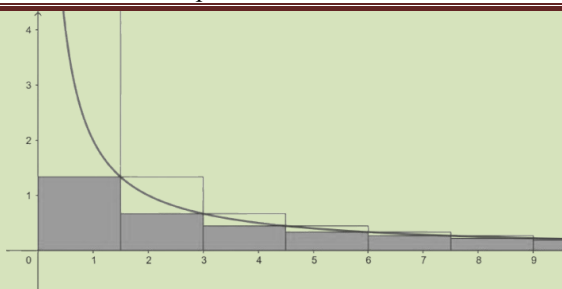


Рис. 19.1

Невласний інтеграл (збіжний) $F(+\infty) := \int_1^{\infty} f(x) dx$ чисельно дорівнює площі нескінченної фігури, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямою $x=1$, справа обмеження немає.

Числовий збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами можна тлумачити як суму площ прямокутників висотою a_n і довжиною 1, що містять нескінченну криволінійну трапецію $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1(2-1) + a_2(3-2) + a_3(4-3) + \dots$, або як суму площ прямокутників висотою a_n і довжиною 1, що містяться у криволінійній трапеції $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = a_2(2-1) + a_3(3-2) + a_4(4-3) + \dots$.

Висновок: якщо існує площа нескінченної криволінійної трапеції, то існує і площа ступінчатої фігури, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Якщо ж площа нескінченної фігури дорівнює нескінченності, то і площа ступінчатої фігури дорівнює нескінченності, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

3. Оцінка залишку ряду.

Якщо невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний, то залишок ряду з

додатними членами $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ можна оцінити так:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x)dx \quad (19.1)$$

4. Сформулювати ознаки порівняння невласних інтегралів.

Теорема (ознаки порівняння). Якщо $\forall x \in [a; +\infty)$ виконуються нерівності: $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ і існує число $b \geq a$ таке, що $\forall x \in [b; +\infty)$: $f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$, а з розбіжності $\int_a^{\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int_a^{\infty} g(x)dx$.

Приклади розв'язування вправ

Задача 19.1. Використовуючи інтегральну ознаку, дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 3)(n^2 + 7)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 4}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{5n + 3}$.

Розв'язання.

1) Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \geq 1$.

Вона неперервна, спадна на заданому проміжку.

Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ збігається або розбігається одночасно з невласним інтегралом $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$. Отже, дослідимо цей інтеграл на збіжність:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\arctg A - \arctg 1) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл і ряд збіжні. ■

2) Функція $f(x) = \frac{1}{(x^2+3)(x^2+7)}$ неперервна і спадна на проміжку $[1; +\infty)$. Подамо її у вигляді суми простих дробів:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+3)(x^2+7)} &= \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2+7} = \\ &= \frac{(Ax+B)(x^2+7) + (Cx+D)(x^2+3)}{(x^2+3)(x^2+7)}; \end{aligned}$$

$$Ax^3 + Bx^2 + 7Ax + 7B + Cx^3 + Dx^2 + 3Cx + 3D = 1;$$

$$\begin{aligned} x^3 &\left\{ \begin{array}{l} A+C=0, \\ B+D=0, \\ 7A+3C=0, \\ 7B+3D=1, \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} C=-A, \\ D=-B, \\ 4C=0, \\ 4B=1, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=0, \\ D=-\frac{1}{4}, \\ C=0, \\ B=\frac{1}{4}. \end{array} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+7} \right).$$

Дослідимо на збіжність невласний інтеграл:

$$\frac{1}{4} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+7} \right) dx = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+7} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} \Big|_1^b - \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} \Big|_1^b \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Отже, ряд збіжний. ■

3) Аналогічно до попередніх задач дослідимо на збіжність невласний інтеграл:

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{xdx}{3x^2+4} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{xdx}{3x^2+4} = \left. \begin{array}{l} t = 3x^2 + 4 \\ dt = 6xdx \\ \text{межі} \\ t_u = 7 \\ t_g = 3b^2 + 4 \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \int_7^{3b^2+4} \frac{dt}{t} = \frac{1}{6} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |t| \Big|_7^{3b^2+4} = \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(3b^2+4) - \ln 7) = \infty.
 \end{aligned}$$

Отже, ряд розбіжний.

Зауважимо, що цей ряд можна дослідити на збіжність, використавши ознаку порівняння рядів або граничну ознаку:

$u_n = \frac{n}{3n^2+4} > \frac{n}{7n^2} = \frac{1}{7n} = v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n} = \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний як гармонійний ряд.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n^2+4} : \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2+4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Отже, ці ряди одночасно розбіжні. ■

4) Розглянемо функцію $f(x) = \frac{4x}{5x+3}$, $x \geq 1$.

Дослідимо її на монотонність:

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (5x+3) - 4x \cdot 5}{(5x+3)^2} = \frac{12}{(5x+3)^2} > 0, \quad \text{тому} \quad \text{функція}$$

монотонно зростає і тут не можна застосувати інтегральну ознаку.

Перевіримо спочатку чи виконується необхідна умова збіжності ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{5n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{4}{5} \neq 0.$$

Ряд розбіжний. ■

Задача 19.2. Використовуючи інтегральну ознаку, дослідити на збіжність ряди:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\alpha} n}, \alpha > 0; & \quad 2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)}; \\ 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^{1+\alpha}}, \alpha > 0; & \quad 4) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{3}-1\right) \ln^2 \frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Розв'язання.

1) Функція $f(x) = \frac{1}{x \ln^{1+\alpha} x}, x \geq 2$ неперервна і спадна.

Обчислимо невласний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^{1+\alpha} x} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln^{1+\alpha} x} = \left. \begin{array}{l} t = \ln x, \\ dt = \frac{dx}{x}, \\ \text{межі:} \\ t_h = \ln 2, \\ t_e = \ln A \end{array} \right| = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{t^{-1-\alpha+1}}{-1-\alpha+1} \right|_{\ln 2}^{\ln A} = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln^{\alpha} A} - \frac{1}{\ln^{\alpha} 2} \right) = \frac{1}{\alpha \ln^{\alpha} 2}. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл і ряд збіжні. ■

2) Функція $f(x) = \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$, $x \geq 3$ неперервна і спадна як

обернена величина до зростаючої функції.

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \left. \begin{array}{l} t = \ln(\ln x), \\ dt = \frac{dx}{x \ln x}, \\ t_h = \ln(\ln 3), \\ t_e = \ln(\ln A) \end{array} \right|_{\text{межі:}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln A)} \frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| t \right| \Big|_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln A)} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(\ln(\ln A)) - \ln(\ln(\ln 3))) = \infty.$$

Отже, інтеграл і ряд розбіжні. ■

3) Аналогічно до попереднього прикладу будемо мати:

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))^{1+\alpha}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))^{1+\alpha}} = \left. \begin{array}{l} t = \ln(\ln x), \\ dt = \frac{dx}{x \ln x}, \\ t_h = \ln(\ln 3), \\ t_e = \ln(\ln A) \end{array} \right|_{\text{межі:}} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln A)} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln^{\alpha}(\ln A)} - \frac{1}{\ln^{\alpha}(\ln 3)} \right) = \frac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(\ln 3)}.$$

Отже, інтеграл і ряд збіжні. ■

4) Оскільки обчислити невластний інтеграл $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\left(\frac{x}{3} - 1\right) \ln^2 \frac{x}{2}}$

складно, спочатку використаємо ознаку порівняння для невластних інтегралів:

$$\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 1 = \frac{x}{6} + 1 > 0 \quad \forall x \in [4; +\infty), \text{ отже, } \frac{x}{2} > \frac{x}{3} - 1.$$

Порівняємо підінтегральну функцію:

$$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{3} - 1\right) \ln^2 \frac{x}{2}} < \frac{1}{\left(\frac{x}{3} - 1\right) \ln^2 \left(\frac{x}{3} - 1\right)} = g(x).$$

Дослідимо на збіжність невластий інтеграл:

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{\left(\frac{x}{3} - 1\right) \ln^2 \left(\frac{x}{3} - 1\right)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_4^b \frac{dx}{\left(\frac{x}{3} - 1\right) \ln^2 \left(\frac{x}{3} - 1\right)} = \left. \begin{array}{l} t = \ln \left(\frac{x}{3} - 1\right), \\ dt = \frac{dx}{3 \left(\frac{x}{3} - 1\right)}, \\ \text{межі:} \\ t_{\mu} = \ln \frac{1}{3}, \\ t_{\sigma} = \ln \left(\frac{b}{3} - 1\right) \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\ln \frac{1}{3}}^{\ln \left(\frac{b}{3} - 1\right)} \frac{3dt}{t^2} = -3 \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Big|_{\ln \frac{1}{3}}^{\ln \left(\frac{b}{3} - 1\right)} = -3 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln \left(\frac{b}{3} - 1\right)} - \ln \frac{1}{3} \right) = 3 \ln \frac{1}{3}.$$

Отже, невластий інтеграл збіжний. За ознакою порівняння невластих інтегралів можна зробити висновок, що невластий інтеграл $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\left(\frac{x}{3} - 1\right) \ln^2 \frac{x}{2}}$ також збіжний разом з числовим рядом. ■

Задача 19.3. Дано збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

1) оцінити похибку, яка одержиться, якщо суму S ряду

$$\text{замінити } S_{30} = \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{k^4};$$

2) знайти значення n , щоб похибка між сумою S ряду і частинною сумою S_n не перевищувала $0,000001=10^{-6}$.

Розв'язання.

Використаємо оцінку залишку ряду (19.1).

$$1) R_{30} = \sum_{n=31}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq \int_{30}^{\infty} \frac{1}{x^4} dx.$$

Обчислимо невласний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_{30}^{\infty} \frac{dx}{x^4} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{30}^b x^{-4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{3 \cdot x^3} \Big|_{30}^b = -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{30^3} \right) = \frac{1}{3 \cdot 27000} = \\ &= \frac{1}{81000} < 0,00002 = 2 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Отже, $R_{30} < 2 \cdot 10^{-5}$. ■

$$2) R_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^4} < 10^{-6}.$$

Обчислимо невласний інтеграл:

$$\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_n^b \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{3n^3}.$$

$$\frac{1}{3n^3} < \frac{1}{10^6}, \text{ або } n > \frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57,73 > 57.$$

Отже, потрібно взяти $n=58$ членів ряду, щоб знайти суму ряду з точністю до 10^{-6} . ■

Завдання для самостійного розв'язування

✎1. Скориставшись інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2 + 6};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 10}{3n^2 + 6};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 8};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+7)^2}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 6)(n^2 + 10)};$$

$$6) \sum_{n=2}^{\infty} n^{-2} \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}.$$

✎2. Скориставшись інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln(\ln(n+1))};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2;$$

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 6n - 1}{n^2};$$

$$6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2 - 9)\ln(n-2)};$$

$$8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}.$$

§ 20. Ряди з довільними членами. Абсолютна і умовна збіжність

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Ряд з довільними членами	A series with arbitrary terms
Абсолютно (Умовно) збіжний ряд	The absolutely (conditionally) convergent series
Знакопочережний (знакозмінний) ряд	Sign-ordered (cognate) series
Властивості абсолютно збіжних рядів	Properties of absolutely convergent series
Властивості умовно збіжних рядів	Properties of conditionally convergent series

1. Сформулювати основну властивість ряду з довільними членами.

Теорема (основна властивість ряду з довільними членами).

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$ (20.1) збігається, то

збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (20.2), де $u_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Сформулювати означення абсолютно та умовно збіжного ряду.

Числовий ряд (20.2) називається **абсолютно збіжним**, якщо сам він збігається і збігається ряд (20.1), складений з модулів членів ряду (20.2).

Числовий ряд (20.2) називається **умовно збіжним**, якщо сам він збігається, а ряд (20.1) розбігається.

3. Сформулювати означення знакопозначеного (знакозмінного) ряду.

Ряд вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad (20.3)$$

де $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, називається **знакозмінним** або **знакопозначеним** рядом.

4. Сформулювати ознаку збіжності знакопозначеного ряду (ознаку Лейбніца) та наслідок з неї.

Теорема (ознака збіжності знакозмінного ряду, ознака Лейбніца). Якщо в знакозмінному ряді $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ для довільного n виконуються дві умови: $0 < u_{n+1} \leq u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то такий ряд збіжний.

Наслідок. Модуль залишку ряду, який задовольняє умови теореми Лейбніца, не перевищує модуля першого з відкинутих членів. Зокрема, сума ряду не перевищує першого члена.

5. Сформулювати властивості абсолютно збіжних рядів.

Властивості абсолютно збіжних рядів.

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (20.2) збіжний, то ряд:

$(u_1 + u_2 + \dots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \dots + u_{n_2}) + \dots + (u_{n_{k-1}+1} + u_{n_{k-1}+2} + \dots + u_{n_k}) + \dots$ (20.4), одержаний з першого об'єднанням його членів в групи без зміни порядку їх розташування, є збіжним, тобто збіжний ряд має асоціативну (сполучну) властивість.

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (20.2) збігається абсолютно, то ряди

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ і $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ збігаються, причому:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} p_k - \sum_{k=1}^{\infty} q_k.$$

Якщо ж ряд (20.2) збігається умовно, то ряди $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ і $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ розбігаються.

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (20.2) збігається абсолютно і має суму S , то ряд, утворений із заданого ряду перестановкою його членів, також збігається абсолютно, і має ту ж саму суму S .

6. Сформулювати властивості умовно збіжних рядів.

Теорема Рімана. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (20.2) умовно збіжний, то яким би не було число S , можна так переставити члени цього ряду, що утворений після такої перестановки ряд матиме своєю сумою це число S , більше того, такий ряд перестановкою членів можна зробити розбіжним.

Приклади розв'язування вправ

Задача 20.1. Довести абсолютну збіжність рядів:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt[3]{n+2}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6 + 3n + 1}};$$

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(\ln n)}{(\ln^3 n) \cdot \sqrt{5n^2 + 1}}.$$

Розв'язання.

Маємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (*) з довільними членами. Поряд з ними

будемо розглядати ряди $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (**), складені з модулів членів ряду

(*). Якщо доведемо збіжність додатного ряду, то за теоремою 1 вихідний ряд (*) буде збіжний, а отже, абсолютно збіжний.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}.$$

Використаємо ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^3 = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Отже, ряд збіжний, тому вихідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n}$ абсолютно збіжний. ■

2) Це ряд з довільними членами, оскільки:

$$\text{при } n=1: \sin\left(2 + \frac{\pi}{4}\right) \approx \sin 2,8 \approx \sin 159^\circ > 0,$$

$$\text{при } n=2: \sin\left(4 + \frac{\pi}{4}\right) \approx \sin 4,8 \approx \sin 273^\circ < 0 \text{ і так далі.}$$

Побудуємо ряд з модулів: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) \right|}{n^3 \sqrt[3]{n+2}}$ і дослідимо на збіжність,

використавши ознаку порівняння рядів:

$$u_n = \frac{\left| \sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) \right|}{n^3 \sqrt[3]{n+2}} \leq \frac{1}{n^3 \sqrt[3]{n+2}} < \frac{1}{n^3 \sqrt[3]{n}} = v_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} - \text{збіжний за ознакою Діріхле-Рімана} \left(\alpha = \frac{4}{3} > 1 \right),$$

тому вихідний ряд абсолютно збіжний. ■

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{arctg}(-n)^n|}{\sqrt[4]{2n^6 + 3n + 1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n^n}{\sqrt[4]{2n^6 + 3n + 1}}.$$

$$|u_n| = \frac{\operatorname{arctg} n^n}{\sqrt[4]{2n^6 + 3n + 1}} < \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt[4]{2n^6 + 3n + 1}} < \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2n^6}} = v_n.$$

Тут використано властивість обмеженості функції $\operatorname{arctg} t$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2} \quad (\text{рис. 20.1}).$$

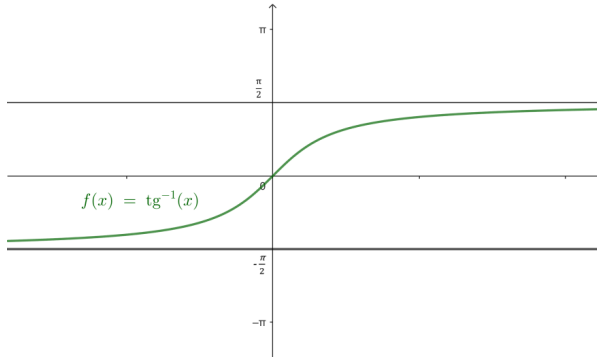


Рис. 20.1

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2} \cdot n^{3/2}} = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{збіжний} \quad \left(\alpha = \frac{3}{2} > 1 \right),$$

тому вихідний ряд абсолютно збіжний. ■

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \ln(\ln n)}{(\ln^3 n) \cdot \sqrt{5n^2 + 1}} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\ln(\ln n)}{(\ln^3 n) \sqrt{5n^2 + 1}} \right|.$$

Оцінимо загальний член $|u_n|$, використаємо властивість монотонності логарифмічної функції:

$\ln n < n \Rightarrow \ln(\ln n) < \ln n$, тому:

$$|u_n| = \left| \frac{\ln(\ln n)}{(\ln^3 n)\sqrt{5n^2+1}} \right| < \left| \frac{\ln n}{(\ln^3 n)\sqrt{5n^2+1}} \right| < \left| \frac{1}{n \ln^2 n} \right| = v_n.$$

Для оцінки збіжності ряду $\sum_{n=2}^{\infty} v_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{n \ln^2 n} \right|$ скористаємося інтегральною ознакою Коші:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln^2 x} = \left. \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ \text{межі:} \\ t_n = \ln 2 \\ t_g = \ln A \end{array} \right| = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dt}{t^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{-1}{t} \right|_{\ln 2}^{\ln A} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln A} \right) = -\frac{1}{\ln 2}.$$

Невласний інтеграл збіжний, отже збіжний ряд $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$, тому за ознакою порівняння збіжний ряд $\sum_{n=2}^{\infty} |u_n|$, значить вихідний ряд абсолютно збіжний. ■

Задача 20.2. Довести, що задані ряди є умовно збіжними:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+2};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}}.$$

Розв'язання.

Потрібно довести, що вказаний ряд збіжний, а ряд, складений з модулів, розбіжний. Оскільки маємо знакопочерезні ряди, то будемо використовувати ознаку Лейбніца.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+2}.$$

$$\text{I. а) } u_n - u_{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{n+3-n-2}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0,$$

або $u_n - u_{n+1} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$, послідовність членів ряду є спадною;

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$

За ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+2}$ збіжний.

II. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+2} + \dots$ розбіжний як залишок гармонійного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Отже, вихідний ряд умовно збіжний. ■

2) Аналогічно до попереднього прикладу розглянемо два ряди:

$$\text{I. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}}.$$

а) доведемо, що послідовність (u_n) членів ряду спадає.

Утворимо функцію $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}}$, $x \geq 1$ і дослідимо її на

монотонність за допомогою похідної.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left((x+1)^{\frac{1}{3}} \right)' (\sqrt{x+2}) - \sqrt[3]{x+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 \right)}{(\sqrt{x+2})^2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x+2})^2} = \\ &= \frac{2x + 4\sqrt{x} - 3x - 3}{6\sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot \sqrt{x} (\sqrt{x+2})^2} = \frac{4\sqrt{x} - x - 3}{6\sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x+2})^2} < 0 \quad \forall x \geq 1 \end{aligned}$$

(рис. 20.2).

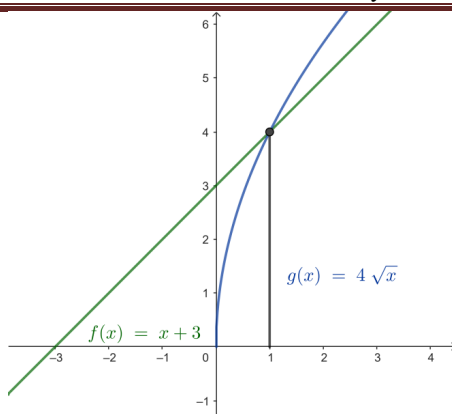


Рис. 20.2

$f'(x) < 0 \forall x \geq 1 \Rightarrow f(x)$ спадає на $[1; +\infty)$.

Тому для $n+1 > n$ маємо $f(n+1) < f(n)$, або $u_{n+1} < u_n$.

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{(n+1)^2}}{\sqrt[6]{n^3+2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n^2+2n+1}}{\sqrt[6]{n^3+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{\frac{n^2}{n^3} + \frac{2n}{n^3} + \frac{1}{n^3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt[6]{n^3}}} = 0.$$

Отже, вихідний ряд збіжний.

$$\text{II. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}}.$$

Скористаємося ознакою порівняння рядів:

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}} > \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+2}} > \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} = v_n.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ розбіжний як ряд Діріхле-Рімана $\left(\alpha = \frac{1}{6} < 1 \right)$.

Отже, ряд розбіжний і вихідний ряд умовно збіжний. ■

Задача 20.3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n!)^2}{(2n)!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

Розв'язання.

Використовуємо уже відомі теореми з попередніх прикладів.

1) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$. За ознакою Даламбера будемо

мати:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 100^{n+1}}{(n+1)! \cdot 100^n} = 100 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \quad \text{ряд}$$

збіжний.

Отже, вихідний ряд абсолютно збіжний. ■

2) Спочатку спростимо загальний член ряду і знайдемо його границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n!}{2^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^n} = \infty.$$

Отже, ряд розбіжний. ■

3) Знакопочередний ряд збіжний за ознакою Лейбніца:

$$a) u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

$$б) u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} < u_{n+1} - u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_{n+1} < u_n.$$

А ряд, складений з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ розбіжний. Достатньо скористатися ознакою порівняння рядів.

Отже, вихідний ряд умовно збіжний. ■

4) Ряд абсолютно збіжний, оскільки збіжний ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$. Можна використати граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1, \text{ а ряд } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}} \text{ збіжний як ряд}$$

Діріхле-Рімана $\left(\alpha = \frac{5}{3} > 1 \right)$. ■

Задача 20.4. Скільки членів ряду потрібно взяти, щоб обчислити його суму з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$, знайти суму ряду із заданою точністю:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{n} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4^{2n-1}}{3^{2n-1} \cdot (2n-1)!}.$$

Розв'язання.

Можна довести, що ці знакопочережні ряди є збіжними. Тоді, за наслідком з теореми Лейбніца для знакопочережного ряду похибка, що допускається при заміні суми S ряду його n -ою частинною сумою S_n , не перевищує модуля першого з відкинутих членів:

$$\Delta = |S - S_n| \leq |u_{n+1}| < \varepsilon.$$

Тому будемо послідовно обчислювати $u_1, u_2, \dots$ до тих пір, поки не знайдемо член ряду u_{n+1} , для якого $u_{n+1} < 0,001$.

$$1) u_1 = 3 > 0,001;$$

$$u_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25 > 0,001;$$

$$u_3 = \left(\frac{3}{3}\right)^3 = 1 > 0,001;$$

$$u_4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,3164 > 0,001;$$

$$u_5 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx 0,0778 > 0,001;$$

$$u_6 = \left(\frac{3}{6}\right)^6 \approx 0,0156 > 0,001;$$

$$u_7 = \left(\frac{3}{7}\right)^7 \approx 0,0027 > 0,001;$$

$$u_8 = \left(\frac{3}{8}\right)^8 \approx 0,0004 < 0,001;$$

Отже, для знаходження суми ряду з точністю до $\varepsilon = 0,001$ потрібно обчислити S_7 :

$$\begin{aligned} S \approx S_7 &= 3 - 2,25 + 1 - 0,3164 + 0,0778 - 0,0156 + 0,0027 = \\ &= 1,4985 \approx 1,499. \quad S \approx 1,499. \end{aligned}$$

Перевіримо обчислення за допомогою табличного процесора Microsoft Excel. Вводимо у відповідні комірки значення $u_1, u_2, \dots$. Оскільки в обчисленні суми є черговість знаків, можна скористатись наступною формулою: $=\text{SUM}(\text{B1};\text{B3};\text{B5};\text{B7}) - \text{SUM}(\text{B2};\text{B4};\text{B6};\text{B8})$ – від суми непарних віднімемо суму парних. ■

E3

✖

✓

fx

=SUM(B1;B3;B5;B7)-SUM(B2;B4;B6;B8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	u1=	3							
2	u2=	2,2500							
3	u3=	1,0000		S=	1,49799				
4	u4=	0,3164							
5	u5=	0,0778							
6	u6=	0,0156							
7	u7=	0,0027							
8	u8=	0,0004							
9									

Рис. 20.3

$$2) u_1 = \frac{4}{3 \cdot 1!} \approx 1,3333 > 0,001,$$

$$u_2 = \frac{4^3}{3^3 \cdot 3!} \approx 0,3951 > 0,001,$$

$$u_3 = \frac{4^5}{3^5 \cdot 5!} \approx 0,0351 > 0,001,$$

$$u_4 = \frac{4^7}{3^7 \cdot 7!} \approx 0,0015 > 0,001,$$

$$u_5 = \frac{4^9}{3^9 \cdot 9!} \approx 0,00004 < 0,001.$$

Отже, для знаходження суми ряду з точністю до $\varepsilon = 0,001$ потрібно обчислити S_4 :

$$S \approx S_4 = 1,3333 - 0,3951 + 0,0351 - 0,0015 = 0,9718 \approx 0,972.$$

$$S \approx 0,972. \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Довести абсолютну збіжність рядів:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3 + 1};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 (2/3)^n;$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{-n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 2n + 1};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{2n+1} \right)^n;$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \arcsin \frac{\pi}{4n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^3+2};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln^2 n}{2^n};$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+2}{n^3+4n}} \cdot \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right).$$

З.2. Довести, що задані ряди є умовно збіжними:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \ln(n+1)};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln^5 n}{n};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right);$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n};$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! n};$$

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right).$$

3. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 \cdot 2^n}{3^n + 2};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \sin 2n}{n^2 - \ln n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1) \ln(\ln(n+2))};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{\sqrt[4]{n}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^n \text{ (скористатись ознакою Раабе);}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10} \right)^n;$$

$$9) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n};$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt{n+1}};$$

$$12) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(\ln n)^2}.$$

4. Користуючись тим, що сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$, знайти суми рядів, отриманих з даного перестановкою його членів:

$$1) 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots;$$

$$2) 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots;$$

$$3) 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots;$$

$$4) 1 - \frac{3^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{3^4}{4^4 \cdot 4!} - \frac{3^6}{4^6 \cdot 6!} + \dots;$$

$$5) \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots;$$

$$6) \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^3}{3^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{3^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{3^7 \cdot 7!} + \dots$$

5. Знаючи, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, знайти суми рядів:

$$1) 1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} + \dots;$$

$$2) 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$$

6. Скільки членів ряду треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю до ε , знайти суму ряду із заданою точністю:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2 + 2}}, \quad \varepsilon = 10^{-6};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

Завдання для самостійних і контрольних робіт з теми «Числові ряди»

№1. Знайти суму ряду:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5};$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 21n - 8};$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45};$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2};$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12};$$

$$9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2};$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48};$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5};$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 84n - 5};$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3};$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6};$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20};$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40};$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15};$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10};$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6};$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9};$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6};$$

$$22. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2};$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35};$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 21n - 10};$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2};$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6};$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15};$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 56n - 33};$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 12n - 35};$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}.$$

№2. Скориставшись ознакою порівняння, дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}};$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1};$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}};$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5+1}};$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)};$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n-1};$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2};$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5};$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2};$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3n}};$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-n+1};$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4n};$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}};$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}};$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1};$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)};$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)};$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+5};$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n-2}};$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n};$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4};$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1};$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)};$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4};$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n};$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{2n}};$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+3};$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)};$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n};$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+6)}.$

№3. Скориставшись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!};$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!};$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!};$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2};$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!};$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!};$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!};$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!4^n};$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!};$	14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!};$	24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(3n-1)!!};$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{(3n+5) \cdot 2^n};$	15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n (n+1)!};$	25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!!}{(2n+5)!!};$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n};$	16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}};$	26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n + 3}};$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \frac{5}{n}}{n!};$	17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!};$	27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2};$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!};$	18. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n};$	28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2 + 5}}{(n-1)!};$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n};$	19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n};$	29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n + 2};$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2 - 1)}{n!};$	20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!};$	30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}.$

З4. Скориставшись ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2};$	11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \frac{n}{5^n};$	21. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \arctg^n \frac{\pi}{3n};$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{4^n};$	12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2};$	22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n};$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2};$	13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n (n-1)^2;$	23. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n};$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n;$	14. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2};$	24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n};$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2};$	15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n+1};$	25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2};$
6.		26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}};$

$$\begin{array}{lll}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n (n+1)^3; & 16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}; & 27. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}; \\
7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^3}; & 17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}; & 28. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}; \\
8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}; & 18. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}; & 29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n}; \\
9. \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}; & 19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}; & 30. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1} \right)^{3n}. \\
10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}; & 20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3}; &
\end{array}$$

5. Скориставшись інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$\begin{array}{ll}
1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}; & 16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(n+1)}; \\
2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}; & 17. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}; \\
3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(2n+1)}; & 18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\ln(3n-1)}}; \\
4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5) \ln^2(4n-7)}; & 19. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \sqrt{\ln(n-3)}}; \\
5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2(5n+2)}; & 20. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \sqrt{\ln(n-2)}}; \\
6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(n\sqrt{5}+2)}; & 21. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln^2(n+1)}; \\
7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1) \ln^2(n\sqrt{3}+1)}; & 22. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\frac{n}{3} \ln^2(n+7)}; \\
8. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-3)}; & 23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1) \ln n};
\end{array}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(2n)};$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(2n)};$$

11.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln n};$$

12.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)};$$

13.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)};$$

14.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2 n};$$

15.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)};$$

24.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n};$$

25.
$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{3}-1\right)\ln^2\left(\frac{n}{2}\right)};$$

26.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)\ln n};$$

27.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\ln n};$$

28.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)};$$

29.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{\left(\frac{3n^2}{2}+2\right)\ln \frac{n}{2}};$$

30.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}.$$

З6. Дослідити абсолютну та умовну збіжність рядів.

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n^4}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{3^n}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n}$$

$$11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)!}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{12^n}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{3/2}}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{9n-1}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5n+1)^n}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{7^n}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^2+1}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{8^n}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2n+2}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin^n \frac{\pi}{6n}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+2)}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{n^2-1}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} \sqrt[5]{(n+1)^3}}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4n}{5n+1} \right)^n$$

З7. Обчислити суму знакопозапереміжного ряду з точністю α .

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{n^2}, \alpha = 0,01$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \alpha = 0,01$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}, \alpha = 0,001$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)}, \alpha = 0,001$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \alpha = 0,01$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \alpha = 0,0001$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}, \alpha = 0,1$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2}, \alpha = 0,001$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!}, \alpha = 0,001$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{8^n}, \alpha = 0,001$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \alpha = 0,001$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! 2n}, \alpha = 0,00001$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}, \alpha = 0,001$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! n!}, \alpha = 0,00001$$

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)}, \alpha = 0,001$$

$$25. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^n}, \alpha = 0,001$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + \pi n)}{n^3 + 1}, \alpha = 0,01$$

$$29. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n^3 + 1)^2}, \alpha = 0,001$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{3^n}, \alpha = 0,1$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}, \alpha = 0,0001$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n, \alpha = 0,01$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^n, \alpha = 0,1$$

$$16. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}, \alpha = 0,01$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n)! n!}, \alpha = 0,001$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n \cdot n!}, \alpha = 0,001$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3^n (n+1)}, \alpha = 0,001$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + \pi n)}{n^3}, \alpha = 0,01$$

$$26. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \alpha = 0,001$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 (n+3)}, \alpha = 0,01$$

$$30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^3}, \alpha = 0,01$$

§ 21. Функціональні ряди. Збіжність, рівномірна збіжність

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Функціональна послідовність	Functional sequence
Функціональний ряд	Functional series
Частинні суми ряду, послідовність частинних сум	Partial sums of a series, sequence of partial sums
Збіжність функціонального ряду	Convergence of a functional series
Абсолютно збіжний функціональний ряд	Absolutely convergent functional series
Рівномірно збіжна функціональна послідовність	Uniformly convergent functional sequence
Рівномірно збіжний функціональний ряд	Uniformly convergent functional series
Мажорантний ряд	Major series

1. Сформулювати означення функціональної послідовності, збіжної функціональної послідовності, області визначення і області збіжності, граничної функції.

Означення 21.1. Відповідність, яка кожному натуральному n співвідносить деяку функцію $f_n(x)$, називається **функціональною послідовністю (ФП)** і позначається:

$$(f_n(x)), \text{ або } \{f_n(x)\}, \text{ або } f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (21.1)$$

Область визначення ФП визначається як перетин областей визначення кожної функції $f_n(x): X = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$.

Означення 21.2. ФП (21.1) називається збіжною у точці $x_0 \in X$, якщо числова послідовність $(f_n(x_0))$ збіжна. Точка x_0 називається точкою збіжності ФП.

ФП (21.1) називається збіжною на множині $D \subset X$ (або поточково-збіжною на множині X), якщо вона збіжна у кожній точці множини D . Множину D точок збіжності називають областю збіжності функціональної послідовності. З означення 21.2 випливає, що

$$\text{кожній точці } x_0 \in D \xrightarrow{\text{функція}} \text{одне число } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

тобто в такий спосіб задається функція $f(x)$, яка називається граничною.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \stackrel{df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \text{ і } \forall x \in D \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N},$$

$$\forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (21.2)$$

2. Сформулювати означення функціонального ряду, частинних сум ряду, збіжного та абсолютно збіжного функціонального ряду, залишку ряду.

Означення 21.3. Нескінченний символ вигляду:

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (21.3)$$

називається **функціональним рядом (ФР)** на множині

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n).$$

Для функціонального ряду (21.3) побудуємо функціональну послідовність $(S_n(x))$ частинних сум на множині X :

$$\begin{aligned} S_1(x) &:= f_1(x), \\ S_2(x) &:= f_1(x) + f_2(x), \\ &\dots\dots\dots \\ S_n(x) &:= f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{21.4}$$

Означення 21.4. Функціональний ряд (21.3) називається **збіжним на множині** $D \subset X$, якщо функціональна послідовність $(S_n(x))$ збіжна на цій множині D . Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$, то функція $S(x)$ називається **сумою ряду (21.3)** на D і позначається:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x), \quad x \in D \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} S(x). \tag{21.5}$$

Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ називається **n -им залишком ряду (21.3)**.

Очевидно, що залишок ряду (21.3) збіжний на множині D тоді і тільки тоді, коли на D збіжний сам ряд, і у цьому випадку суму ряду (21.3) можна подати у вигляді:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x). \tag{21.6}$$

Означення 21.5. Функціональний ряд (21.3) називається **абсолютно збіжним на множині D** , якщо $\forall x_0 \in D$ відповідний

числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ збігається абсолютно.

3. Сформулювати означення рівномірно збіжної функціональної послідовності і рівномірно збіжного функціонального ряду. Їх геометричний зміст.

Означення 21.6. ФП (21.1) називається **рівномірно збіжною на множині** $E \subset D$ до функції $f(x)$ якщо для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати номер n_0 такий, що як тільки $n > n_0$, то для всіх $x \in E$ виконується нерівність: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \stackrel{df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \text{ і } \forall x \in E : \\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ позначають } f_n \xrightarrow{E} f$$

Геометрично рівномірна збіжність функціональної послідовності (21.1) означає, що графіки функцій $f_n(x) \forall n > n_0$ і $\forall x \in E$ не виходять за межі ε -смужки, обмеженої кривими $f(x) - \varepsilon$ і $f(x) + \varepsilon$ (рис. 21.1).

Означення 21.7. ФР (21.3) називається **рівномірно збіжним на множині** $E \subset D$ до функції $S(x)$, якщо послідовність частинних сум цього ряду рівномірно збіжна до $S(x)$ на E :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \text{рівномірно збіжний до } S(x) \Leftrightarrow S_n(x) \xrightarrow{E} S(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n > n_0 \text{ і } \forall x \in E : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

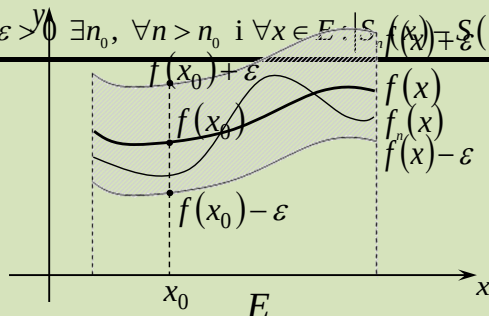


Рис. 21.1
523

4. Сформулювати критерій рівномірної збіжності функціональної послідовності і функціонального ряду.

Теорема 21.1. (критерій рівномірної збіжності ФП). Для того, щоб функціональна послідовність $(f_n(x))$ була рівномірно збіжною на множині E , необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \forall n > n_0 \text{ і } \forall p \in \mathbb{N} \text{ і } \forall x \in E$:

$$\boxed{|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon} \quad (21.7)$$

Наслідок. Для того, щоб функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рівномірно збігався на множині E до функції $S(x)$, необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \forall n > n_0 \text{ і } \forall p \in \mathbb{N} \text{ і } \forall x \in E$:

$$\boxed{\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon} \quad (21.8)$$

Теорема 21.2. Якщо існує числова послідовність (a_n) і номер n_0 такі, що для всіх $x \in E$ виконується нерівність $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$.

Скорочений запис:

$$\begin{aligned} \exists (a_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ і } \exists n_0, \forall n > n_0 \text{ і } \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \Rightarrow \\ \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{E} f(x) \end{aligned}$$

5. Сформулювати ознаку Вейєрштраса рівномірної збіжності функціонального ряду.

Теорема 21.3 (ознака Вейєрштраса). Якщо існує додатний збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (21.9) такий, що $\forall n \in \mathbb{N} \text{ і } \forall x \in E$ виконується нерівність:

$$\boxed{|f_n(x)| \leq a_n,} \quad (21.10)$$

то функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рівномірно збіжний на множині E .

Означення 21.8. Ряд (21.9) називається **мажорантним рядом** для функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

6. Сформулювати ознаки Діріхле і Абеля рівномірної збіжності функціонального ряду.

Теорема 21.4. (ознака Діріхле). Якщо послідовність $(u_n(x))$ монотонна на множині E , тобто $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E: u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$ або $u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$, і рівномірно збігається до функції $f(x) \equiv 0$ на E , а послідовність часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ обмежена на E , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ рівномірно збігається на множині E .

Теорема 21.5 (ознака Абеля). Якщо послідовність $(u_n(x))$ монотонна і обмежена на множині E , а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ рівномірно збігається на цій множині, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ також рівномірно збігається на E .

7. Сформулювати властивості рівномірно збіжних функціональних послідовностей і рядів.

Теорема 21.6. Якщо функції $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ неперервні в точці $x_0 \in E$ і функціональна послідовність $(f_n(x))$ рівномірно збіжна на множині E , то гранична функція $f(x)$ також неперервна в точці x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \quad (21.11)$$

(граничні переходи по n і x можна переставляти місцями).

Наслідок. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рівномірно збігається на множині E до функції $S(x)$, кожен член $f_n(x)$

цього ряду є неперервна на множині E функція, то $S(x)$ – неперервна на E функція.

Теорема 21.7. (про почленне інтегрування функціональної послідовності). Якщо функції $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ неперервні на відрізку $[a; b]$ і функціональна послідовність $(f_n(x))$ рівномірно збіжна на $[a; b]$, то числова послідовність $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ збіжна до числа $\int_a^b f(x) dx$ і має місце рівність (21.12).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx. \quad (21.12)$$

Наслідок. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рівномірно збігається на відрізку $[a; b]$ до функції $S(x)$, кожен член $f_n(x)$ ряду є неперервна на $[a; b]$ функція, то числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$ також збігається і $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx$, або:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx \quad (21.13)$$

(рівномірно збіжний на відрізку $[a; b]$ ряд неперервних функцій $f_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) можна почленно інтегрувати).

Теорема 21.8. (про почленне диференціювання функціональних послідовностей). Якщо функціональна послідовність $(f_n(x))$ збігається до $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, кожен член $f_n(x)$ має неперервну похідну на відрізку $[a; b]$ і послідовність похідних $(f'_n(x))$ рівномірно збігається на $[a; b]$, то гранична функція $f(x)$ має неперервну похідну на $[a; b]$, причому:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x). \quad (21.14)$$

Наслідок. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається до $S(x)$ на відрізку $[a;b]$, кожен член $f_n(x)$ ряду має неперервну похідну на відрізку $[a;b]$; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$, складений з похідних, рівномірно збігається на цьому відрізку, то сума $S(x)$ ряду має неперервну похідну, причому:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = S'(x), \text{ або } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)'}. \quad (21.15)$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 21.1. Знайти граничну функцію $f(x)$ послідовності $(f_n(x))$ на множині E :

1) $(x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3}), E = [0; 1];$

2) $((x-1)\arctg x^n), E = (0; +\infty);$

3) $\left(x^4 \cos \frac{1}{nx}\right), E = (0; +\infty).$

Розв'язання.

1) Знайдемо границю послідовності $(f_n(x))$ на множині $E = [0; 1]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+2} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+3}.$$

Якщо $x = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3}) = 0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$,

якщо $x = 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (1^n - 3 \cdot 1^{n+2} + 2 \cdot 1^{n+3}) = 1 - 3 + 2 = 0$,

якщо $0 < x < 1$, то функціональні послідовності (x^n) , (x^{n+2}) , (x^{n+3}) є спадними геометричними прогресіями, їх границі дорівнюють

нулю, отже $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3}) = 0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$. Таким чином на множині $E = [0; 1]$ маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3}) = 0. \quad \blacksquare$$

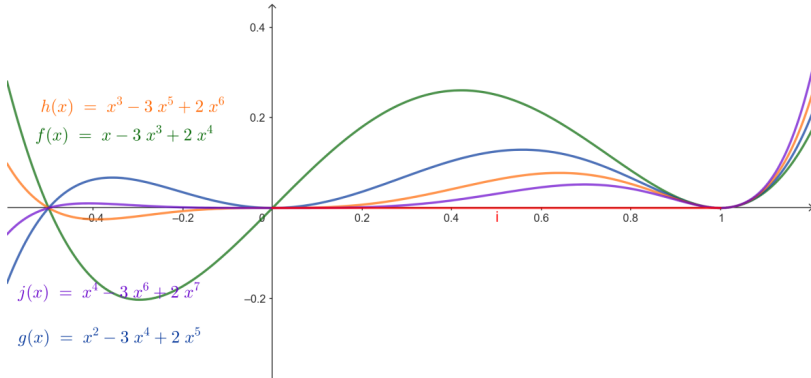


Рис. 21.2

2) При знаходженні границі функціональної послідовності скористаємося правилом про те, що сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n = (x-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x^n,$$

після чого розглянемо різні випадки для змінної $x \in (0; +\infty)$:

якщо $0 < x < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x^n = \operatorname{arctg} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right) = \operatorname{arctg} 0 = 0$;

якщо $x = 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

якщо $x > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x^n = \frac{\pi}{2}$.

Отже, гранична функція набирає вигляду:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) \cdot 0 = 0, & x \in (0; 1), \\ (1-1) \cdot \frac{\pi}{4} = 0, & x = 1, \\ (x-1) \cdot \frac{\pi}{2}, & x > 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

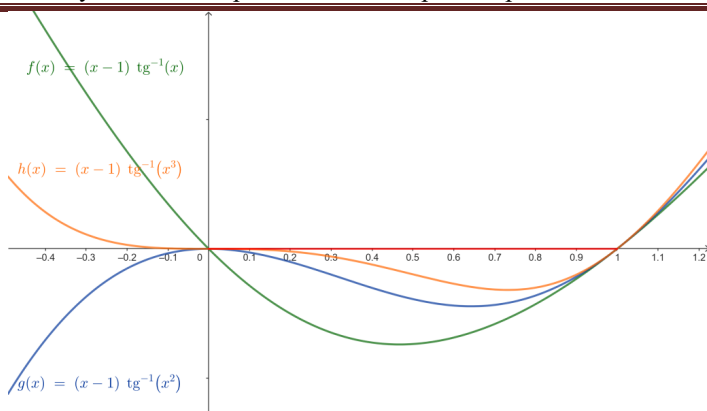


Рис.21.3

3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^4 \cos \frac{1}{nx} = \left| \begin{array}{l} nx \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty \\ \frac{1}{nx} \rightarrow +0 \\ \cos \frac{1}{nx} \rightarrow 1 \end{array} \right| = x^4 \cdot 1 = x^4$$

$\forall x \in (0; +\infty)$. ■

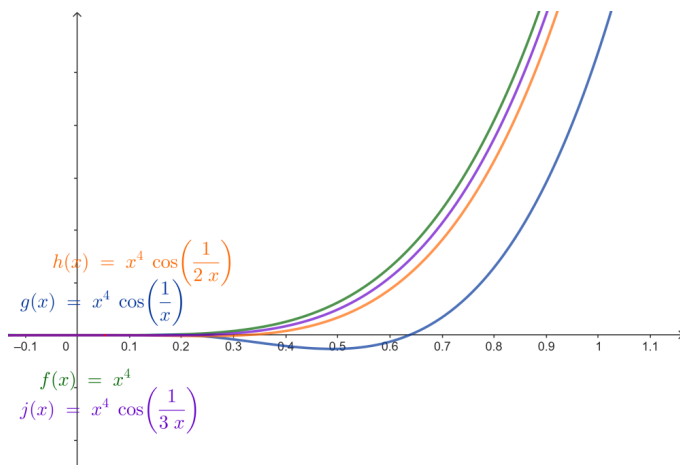


Рис.21.4

Задача 21.2. Знайти область збіжності (абсолютної і умовної) функціонального ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{2n^2} \left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} \right)^n$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4 \sqrt[n]{n}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{(3x^2+7x+5)^n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (8-x^2)^n.$$

Розв'язання.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

Спочатку розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} q^n$ (*). Знайдемо границю відношення модуля наступного члена ряду до модуля попереднього: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q|^{n+1}(2n+1)}{(2n+3)|q|^n} = |q|$. Згідно з ознакою

Даламбера при $|q| < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q|^n}{2n+1}$ (**) збіжний, а значить ряд (*)

абсолютно збіжний; при $|q| > 1$ ряд (**) розбіжний і ряд (*)

розбіжний ($\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$); при $q = 1$ ряд (*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ умовно збіжний;

при $q = -1$ ряд (*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ розбіжний. Отже, вихідний ряд буде абсолютно збіжним, якщо:

$$|q| = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} < 1, \\ \frac{1-x}{1+x} > -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2x}{1+x} < 0, \\ \frac{2}{1+x} > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > -1, \end{cases} \Rightarrow x \in (0; +\infty),$$

і умовно збіжним, якщо $q = \frac{1-x}{1+x} = 1 \Rightarrow x = 0$. ■

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3}{2n^2} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \right)^n.$$

Аналогічно до попереднього прикладу розглянемо числовий

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3}{2n^2} q^n$ і використаємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+1)^2 + 3)|q|^{n+1} 2n^2}{2(n+1)^2 (2n^2 + 3)|q|^n} = |q| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n + 5}{2n^2 + 3} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = |q|.$$

Якщо $|q| < 1$, то ряд абсолютно збіжний:

$$|q| < 1 \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \right| < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} < 1, \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} > -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-10x}{x^2 + 5x + 6} < 0, \\ \frac{2x^2 + 12x}{x^2 + 5x + 6} > 0, \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+2)(x+3)} > 0, \\ (x+2)(x+3) > 0, \end{cases}$$

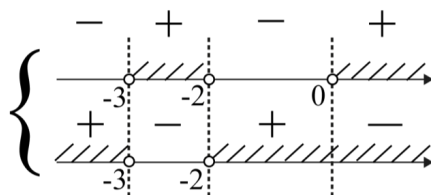


Рис. 21.5

$x \in (0; +\infty)$.

Якщо $|q| > 1$, то ряд розбіжний:

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \right| > 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} > 1, \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} < -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{(x+2)(x+3)} < 0, \\ \frac{x}{(x+2)(x+3)} < 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; 0).$$

Розглянемо випадок, коли $|q| = 1$, $q = \pm 1$, тоді ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3}{2n^2}$ і

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3}{2n^2}$ є розбіжними, оскільки не виконується необхідна

умова збіжності: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{2n^2} = 1 \neq 0$:

$$|q| = 1 \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} = 1, \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{(x+2)(x+3)} = 0, \\ \frac{x^2 + 6}{(x+2)(x+3)} = 0, \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

Відповідь. Область збіжності і абсолютної збіжності ряду $D = (0; +\infty)$, область розбіжності $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; 0)$, точки $x = -3$ і $x = -2$ не належать області визначення. ■

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}.$$

Область визначення ряду – множина дійсних чисел. Розглянемо випадки різних значень незалежної змінної.

Якщо $|x| < 1$, то спочатку перевіримо необхідну умову збіжності ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}} = \begin{cases} |x| < 1 \Rightarrow \\ x^{2n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{cases} = \frac{1}{1 + 0} \neq 0, \text{ ряд розбіжний.}$$

Якщо $|x|=1, x=\pm 1$, то отримуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+1^{2n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$, який також є розбіжним.

Нехай $|x|>1$. У цьому випадку використаємо ознаку порівняння рядів з додатними членами: $1+x^{2n} > x^{2n} > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x^{2n}} < \frac{1}{x^{2n}}$. Оскільки

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}$ є нескінченно спадною геометричною прогресією $\left(q = \frac{1}{x^2} < 1\right)$, то він збіжний, отже буде збіжним і досліджуваний ряд. Область абсолютної збіжності $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. ■

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4 \sqrt[n]{n}}.$$

Використаємо ознаку порівняння рядів з додатними членами:

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n^4 \sqrt[n]{n}} \right| \leq \frac{1}{n^4 \sqrt[n]{n}} = v_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ збіжний як ряд Діріхле, $\alpha = \frac{5}{4} > 1$.

Тому функціональний вихідний ряд збіжний на всій числовій прямій. ■

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{(3x^2 + 7x + 5)^n}.$$

Область визначення ряду множина дійсних чисел, оскільки квадратний тричлен у знаменнику набирає лише додатних значень. Для знаходження області збіжності використаємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{1}{(3x^2 + 7x + 5)^{n+1}}}{\frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{(3x^2 + 7x + 5)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \cdot \frac{1}{3x^2 + 7x + 1} =$$

$$= \frac{1}{3x^2 + 7x + 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} = \frac{1}{3x^2 + 7x + 1} = q.$$

Якщо $|q| < 1$, то ряд збіжний: $\frac{1}{3x^2 + 7x + 1} < 1$, звідки або

$$3\left(x + \frac{4}{3}\right)(x+1) > 0, \text{ або } x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; +\infty).$$

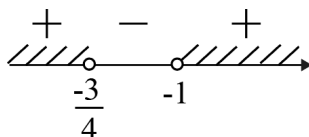


Рис.21.6

Перевіримо, чи є точки $x_1 = -\frac{4}{3}$ і $x_2 = -1$ точками збіжності.

Для $x_1 = -\frac{4}{3}$ маємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{\left(3 \cdot \frac{16}{9} + 7 \cdot \frac{4}{3} + 5\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \cdot 1.$$

Він розбіжний, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду.

Для $x_1 = -\frac{4}{3}$ маємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{(3-7+5)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \cdot 1$,

який є розбіжним.

Отже, область абсолютної збіжності ряду

$$E = \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; +\infty). \quad \blacksquare$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}.$$

Скористаємося ознакою Даламбера:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-(n+1)^2 x}}{e^{-n^2 x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(n+1)^2 x + n^2 x} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(n+1-n)(n+1+n)x} = e \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(2n+1)x}.$$

$$\text{Якщо } x > 0, \text{ то } q = e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(2n+1)x} = \left| \begin{matrix} -(2n+1) \rightarrow -\infty \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right| = e \cdot 0 = 0 < 1,$$

отже ряд збіжний.

$$\text{Якщо } x = 0, \text{ то } q = e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^0 = e > 1, \text{ ряд збіжний.}$$

$$\text{Якщо } x < 0, \text{ то } q = e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(2n+1)x} = \left| \begin{matrix} -(2n+1) \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \right| = \infty, \text{ отже}$$

ряд розбіжний.

Відповідь. Ряд абсолютно збіжний на множині $D = (0; +\infty)$, розбіжний на $D_1 = (-\infty; 0]$. ■

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (8 - x^2)^n.$$

Тут ми використаємо ознаку Коші:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(8 - x^2)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |8 - x^2|.$$

Якщо $q < 1$, то ряд збіжний:

$$|8 - x^2| < 1 \Rightarrow \begin{cases} 8 - x^2 < 1, \\ 8 - x^2 > -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 7 > 0, \\ x^2 - 9 < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) > 0, \\ (x - 3)(x + 3) < 0, \end{cases}$$

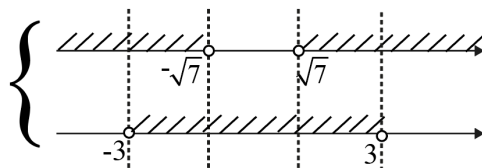


Рис. 21.7

$$x \in (-3; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; 3).$$

Якщо $q = 1$, тобто $|8 - x^2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{7}, \\ x = \pm 3, \end{cases}$ то одержимо

числові ряди:

$x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1^n$, який є розбіжним (не виконується необхідна

умова збіжності ряду);

$x = \pm 3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, який теж є розбіжним (не виконується

необхідна умова збіжності ряду).

Якщо $q > 1$, то ряд розбіжний:

$$|8 - x^2| > 1 \Rightarrow \begin{cases} 8 - x^2 > 1, \\ 8 - x^2 < -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) < 0, \\ (x - 3)(x + 3) > 0, \end{cases}$$

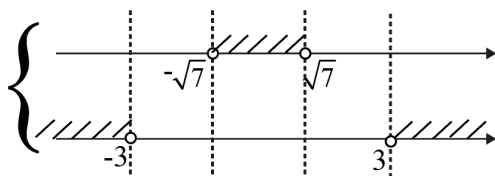


Рис. 21.8

$$x \in (-\infty; -3) \cup (-\sqrt{7}; \sqrt{7}) \cup (3; +\infty).$$

Відповідь. Область абсолютної збіжності ряду
 $D = (-3; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; 3)$, область розбіжності

$$D_1 = (-\infty; -3] \cup [-\sqrt{7}; \sqrt{7}] \cup [3; +\infty). \quad \blacksquare$$

Задача 21.3. Довести, що функціональна послідовність $(f_n(x))$ рівномірно збігається на вказаній множині:

$$1) f_n(x) = \frac{nx^2}{n+2x}, E = [0; +\infty);$$

$$2) f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}, E = [0; +\infty);$$

$$3) f_n(x) = e^{-nx^2}, E = [1; +\infty);$$

$$4) f_n(x) = \frac{n}{x^2 + n^2} \arctg \sqrt{nx}, E = [0; +\infty);$$

$$5) f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}.$$

Розв'язання.

$$1) f_n(x) = \frac{nx^2}{n+2x}, E = [0; +\infty).$$

Використаємо означення рівномірної збіжності функціональної послідовності:

$$f_n(x) \xrightarrow{E} f(x) \stackrel{df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n > n_0 \text{ і } \forall x \in E: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

У нашому випадку для довільного $\varepsilon > 0$ потрібно вказати номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такий, що $\forall n > n_0$ і $\forall x \in [1; 2]$ виконується нерівність:

$$\left| \frac{nx^2}{n+2x} - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Спочатку знайдемо граничну функцію:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2}{n+2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 + \frac{2x}{n}} = x^2 = f(x).$$

Тепер знайдемо номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$:

$$\left| \frac{nx^2}{n+2x} - x^2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{nx^2 - nx^2 - 2x^3}{n+2x} \right| = \frac{2x^3}{n+2x} < \varepsilon.$$

Дослідимо функцію $\varphi(x) = \frac{2x^3}{n+2x}$, $x \in [1; 2]$, на екстремум, використаємо похідну:

$$\varphi'(x) = \frac{6x^2(n+2x) - 4x^3}{(n+2x)^2} = \frac{6nx^2 + 8x^3}{(n+2x)^2} > 0,$$

Отже функція зростає на заданому відрізку і $\frac{2x^3}{n+2x} < \frac{2 \cdot 2^3}{n+4} < \varepsilon$
 $\forall x \in [1; 2]$, звідки $\frac{16}{n+4} < \varepsilon \Rightarrow n+4 > \frac{16}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{16}{\varepsilon} - 4 \geq \left[\frac{16}{\varepsilon} - 4 \right] = n_0$.

Згідно з означенням, функціональна послідовність збігається рівномірно на заданому відрізку. ■

2) Для функціональної послідовності:

$f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$, $E = [0; +\infty)$ знайдемо граничну функцію.

Якщо $x = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0$;

якщо $x > 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x + \frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{n} \right)} = \sqrt{x}$.

Отже, $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0; +\infty)$.

Для доведення рівномірної збіжності функціональної послідовності скористаємося теоремою 21.2 й оцінимо модуль різниці між загальним членом й граничною функцією на вказаній множині:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right| = \left| \frac{\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \right| = \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{0 + \frac{1}{n}} + \sqrt{0}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n; \quad x \in [0; +\infty). \end{aligned}$$

Числова послідовність $(a_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ є нескінченно малою:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Тому виконуються всі умови теореми 21.2 й

$f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$. ■

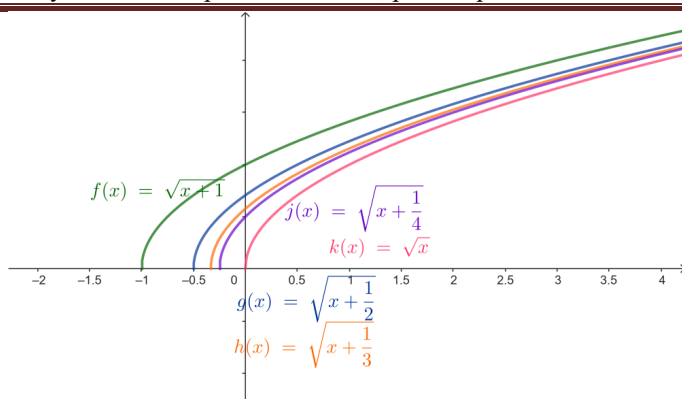


Рис.21.9

$$3) f_n(x) = e^{-nx^2}, E = [1; +\infty).$$

Аналогічно до попереднього прикладу спочатку знаходимо граничну функцію, потім використовуємо теорему 21.2, $E = [1; +\infty)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{nx^2}} \equiv 0 \quad \forall x \geq 1, f(x) \equiv 0.$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |e^{-nx^2} - 0| = \left| \frac{1}{(e^n)^{x^2}} \right| = \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \Rightarrow (e^n)^{x^2} \geq (e^n)^1 \\ \Rightarrow \frac{1}{(e^n)^{x^2}} \leq \frac{1}{e^n} \end{array} \right] \leq \frac{1}{e^n} = a_n.$$

$$(a_n) = \left(\frac{1}{e^n} \right) - \text{нескінченно мала числова послідовність: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0,$$

тому $e^{-nx^2} \xrightarrow{E} 0$. ■

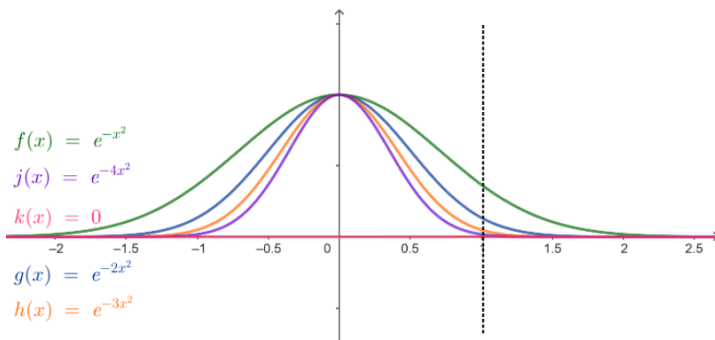


Рис.21.10

$$4) f_n(x) = \frac{n}{x^2 + n^2} \operatorname{arctg} \sqrt{nx}, \quad E = [0; +\infty).$$

Аналогічно до попередніх прикладів:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2 + n^2} \operatorname{arctg} \sqrt{nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n}{2(x^2 + n^2)} = 0, \text{ якщо } x > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{0^2 + n^2} \operatorname{arctg} \sqrt{n \cdot 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ якщо } x = 0.$$

Гранична функція $f(x) \equiv 0$, $E = [0; +\infty)$. Оцінимо:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n}{x^2 + n^2} \operatorname{arctg} \sqrt{nx} - 0 \right| \leq \frac{\pi n}{2(x^2 + n^2)} \leq \frac{\pi n}{2n^2} = \frac{\pi}{2n} = a_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} = 0, \text{ тому } \frac{n}{x^2 + n^2} \operatorname{arctg} \sqrt{nx} \xrightarrow{E} 0. \quad \blacksquare$$

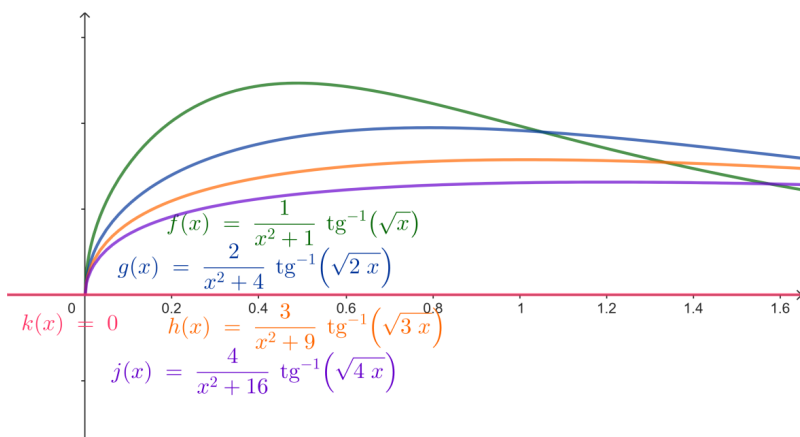


Рис. 21.11

$$5) f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{nx} = (\infty \cdot 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} = f(x), \quad x \geq 1.$$

Для оцінки різниці між загальним членом послідовності і граничною функцією скористаємося відомою формулою Тейлора-Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(\theta x)}{2!}x^2, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\sin t = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}t - \frac{\sin \theta t}{2!}t^2 \quad \text{або} \quad \sin t = t - \frac{\sin \theta t}{2}t^2.$$

Одержимо:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| n \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right| = n \left| \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{nx} \right| = \left[t = \frac{1}{nx} \right] = \\ &= n \left| \frac{1}{nx} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{nx} \right)^2 \sin \frac{\theta}{nx} - \frac{1}{nx} \right| = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{nx} \right)^2 \left| \sin \frac{\theta}{nx} \right| \leq \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2 x^2} = \frac{1}{2nx} \leq \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$\forall x \geq 1$. Отже $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} = a_n$, числова послідовність

$(a_n) = \left(\frac{1}{2n} \right)$ є нескінченно малою. Тому за теоремою 21.2

функціональна послідовність $\left(n \sin \frac{1}{nx} \right)$ збігається рівномірно на

множині $E = [1; +\infty)$. ■

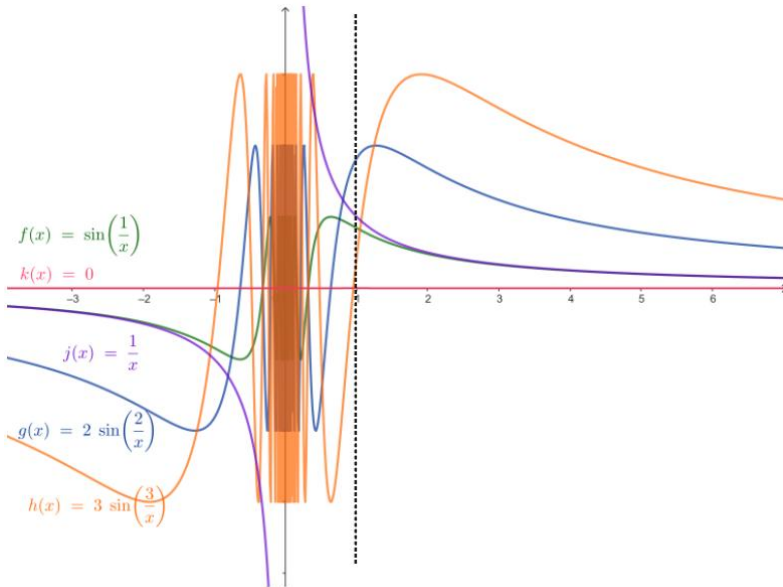


Рис. 21.12

Задача 21.4. Користуючись ознакою Вейєрштрасса, довести рівномірну збіжність функціонального ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}, [0; +\infty);$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n - x^{-n}), \left[\frac{1}{2}; 2\right];$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x^2}.$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^5 + x^4}}, E = [-3; -1]$$

Розв'язання.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}, [0; +\infty).$$

Для розв'язання завдання нам потрібно для функціонального ряду побудувати мажорантний числовий ряд. Оцінимо загальний

член $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4 x^2}$ на заданому проміжку, використавши похідну:

$$f'_n(x) = \left(\frac{x}{1+n^4 x^2} \right)' = \frac{1+n^4 x^2 - x \cdot 2n^4 x}{(1+n^4 x^2)^2} = \frac{1-n^4 x^2}{(1+n^4 x^2)^2};$$

$$f'_n(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-n^4 x^2}{(1+n^4 x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{n^2} - \text{стаціонарні точки.}$$

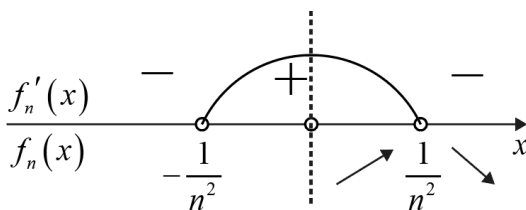


Рис. 21.13

$$\max_{[0; +\infty)} \frac{x}{1+n^4 x^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1+n^4 \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

Отже, $\forall x \in [0; +\infty)$: $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4 x^2} \leq \frac{1}{2n^2} = a_n$. Числовий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний (ряд обернених квадратів), тому

функціональний ряд рівномірно збіжний на вказаній області. ■

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n - x^{-n})$, $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Розв'язання задачі аналогічне до

попередньої. Щоб оцінити загальний член функціонального ряду, дослідимо на екстремум функцію $\varphi(x) = x^n - x^{-n}$ на відрізку $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

$$\varphi'(x) = nx^{n-1} - (-n)x^{-n-1} = nx^{n-1} + nx^{-(n+1)} = n \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n+1}} \right) > 0$$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

Функція $\varphi(x)$ зростає, тому найбільшого значення вона досягає у точці $x = 2$: $\max_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} \varphi(x) = \varphi(2) = 2^n - 2^{-n}$. Отже

$$f_n(x) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n - x^{-n}) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left(2^n - \frac{1}{2^n} \right) = a_n.$$

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left(2^n - \frac{1}{2^n} \right)$ дослідимо на збіжність за ознакою

Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)!}} \left(2^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right)}{\frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left(2^n - \frac{1}{2^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n!}(n+1)} \cdot \frac{2^n (2^{2n+2} - 1)}{2^{n+1} (2^{2n} - 1)} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 2^{2n} - 1}{\sqrt{n+1} (2^{2n} - 1)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{4 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{n+1}} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Мажорантний ряд збіжний, отже функціональний ряд рівномірно збіжний на відріжку $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. ■

3) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x^2}$. Розглянемо функцію $f_n(x) = x^2 e^{-n^2 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, і

дослідимо її на екстремум, використавши похідну:

$$f'_n(x) = 2xe^{-n^2 x^2} (1 - n^2 x^2),$$

$$f'_n(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{1}{n}, \\ x = -\frac{1}{n}, \end{cases}$$

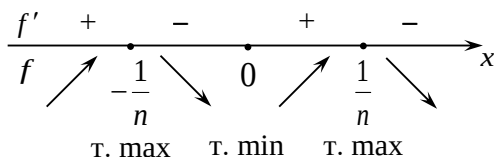


Рис. 21.14

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{en^2}; \quad f_n(0) = 0.$$

Отже, $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in \mathbb{R}: 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{en^2}$; оскільки числовий

мажорантний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{en^2} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний як ряд обернених квадратів, тому за ознакою Вейерштрасса і вихідний ряд рівномірно збіжний на $\mathbb{R}$. ■

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^5 + x^4}}$, $E = [-3; -1]$. Оцінимо на множині дійсних

чисел загальний член ряду:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^5 + x^4}} \right| \leq \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n^5 + x^4}} \leq \frac{(-1+2)^n}{\sqrt{n^5 + x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^5 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^5}} = a_n,$$

оскільки:

$$-3 \leq x \leq -1,$$

$$1 \leq x^2 \leq 9,$$

$$1 \leq x^4 \leq 81 \mid + n^5,$$

$$n^5 + 1 \leq n^5 + x^4 \leq n^5 + 81,$$

$$\sqrt{n^5 + 1} \leq \sqrt{n^5 + x^4} \leq \sqrt{n^5 + 81},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^5 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^5 + x^4}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^5 + 81}}.$$

Отримали мажорантний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$, який є збіжним

як ряд Діріхле з $\alpha = \frac{5}{2} > 1$. Значить за ознакою Вейерштрасса функціональний ряд рівномірно і абсолютно збіжний на множині $E = [-3; -1]$. ■

Задача 21.5. Знайти суму рядів: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}.$$

Розв'язання.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ рівномірно збігається до функції $\frac{1}{1-x}$ на відрізку

$[-q; q]$, $0 < q < 1$, функції x^n неперервні на цьому відрізку, отже, згідно з теоремою 21.2, ряд можна почленно інтегрувати:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x),$$

$$x \in [-q; q] \subset (-1; 1) \text{ або } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1; 1).$$

Використовуючи ознаку Вейерштрасса, можна довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ рівномірно збіжний $\forall x \in [-1; 1]$, тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = f(x), \text{ а ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ складений з похідних, є також}$$

рівномірно збіжним на довільному відрізку $[-R, R] \subset (-1; 1)$. Тому його сума $-\ln(1-x) = f'(x)$. Отже,

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = -\int_0^x \ln(1-t) dt, \text{ або}$$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \ln(1-t) d(1-t) = \left| \begin{array}{l} u = \ln(1-t), \quad du = -\frac{dt}{1-t} \\ dv = d(1-t), \quad v = 1-t \end{array} \right| =$$

$$(1-t) \ln(1-t) \Big|_0^x + \int_0^x dt = (1-x) \ln(1-x) + x, \quad f(0) = 0.$$

$$\text{Остаточно маємо: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x) \ln(1-x).$$

Якщо в останньому ряді покладемо $x=1$, то отримаємо суму числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1 + (1-1) \ln 1 = 1.$$

Якщо ж $x=-1$, то отримаємо суму числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} + \dots = -1 + 2 \ln 2 \approx 0,386. \blacksquare$$

Задача 21.6. Перевірити, чи виконується рівність

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt \quad \text{на множині} \quad E = [a; b], \quad \text{якщо}$$

$$f_n(x) = \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}, \quad E = [0; 2\pi].$$

Розв'язання. Покажемо, що функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$

рівномірно збігається на відрізку $[0; 2\pi]$. Використаємо ознаку Вейерштрасса:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)} = a_n, \quad x \in [0; 2\pi].$$

Числовий мажорантний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ збіжний, тому

функціональний ряд рівномірно збіжний, члени цього ряду є неперервними функціями, отже сума ряду неперервна функція і інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів: $\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(t) dt$,

або у нашому випадку:

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nt}{n(n+1)} \right) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos^2 nt}{n(n+1)} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \int_0^x \frac{1 + \cos 2nt}{2} dt = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)} \left(x + \frac{1}{2n} \sin 2nt \Big|_0^x \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + \frac{1}{2n} \sin 2nx}{2n(n+1)}, \quad x \in [0; 2\pi]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти граничну функцію $f(x)$ послідовності $(f_n(x))$ на множині E :

1) $\left(\frac{nx^2}{x+3n+2} \right), E = [0; +\infty);$

2) $(n^3 x^2 e^{-nx}), E = [0; +\infty);$

3) $n \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right), E = (0; +\infty);$

4) $n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right), E = [1; 3];$

5) $\left(n \left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{2n}} \right) \right), E = (0; +\infty);$

6) $(n \arctg nx^2), E = (0; +\infty).$

2. Знайти область збіжності (абсолютної і умовної) функціонального ряду:

1) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n;$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n;$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \cdot \dots \cdot (1+x^n)};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdot \dots \cdot (1+x^{2^{n-1}})};$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2};$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \sin \frac{x}{3^{n-1}}.$

З3. Довести, що якщо додатна числова послідовність (α_n) – нескінченно мала і $\forall n \geq n_0$ і $\forall x \in E: |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$, то функціональна послідовність $(f_n(x))$ збігається рівномірно до функції $f(x)$ на множині E .

З4. Довести, що задана функціональна послідовність рівномірно збігається на вказаній множині:

- 1) $(\sin(ne^{-nx})), [1; +\infty)$;
- 2) $(\operatorname{tg}\left(\frac{n-1}{n}x\right)), \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$;
- 3) $\left(\frac{nx^2}{n+2x}\right), [1; 2]$;
- 4) $\left(\frac{nx}{n^2x^2+1}\right), [1; +\infty)$;
- 5) $\left(\frac{\ln(nx)}{nx^2}\right), [1; +\infty)$;
- 6) $(e^{-nx} \ln n), (0; +\infty)$;
- 7) $\left(\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}\right), [0; +\infty)$;
- 8) $\left(\ln\left(1+\frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right)\right), [1; +\infty)$.

З5. Користуючись ознакою Вейєрштрасса, довести рівномірну збіжність функціонального ряду:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+1}}, [-6; -4]$;
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}, [-1; 1]$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}, \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, [0; +\infty)$;
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(x^2+\sin x)}, [1; +\infty)$;
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2x) \cos(\pi nx)}{n\sqrt{n}}, \mathbb{R}$.
- 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{n+x}\right)^3, (-\infty; +\infty)$;
- 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^3 (2x)^{2n}}{x^2+3n+4}, \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

З6. Дослідити на неперервність і диференційовність функцію $f(x)$:

- 1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$;
- 2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, x > 1$;
- 3) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}, x > 0$;
- 4) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$;

$$5) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{10^n};$$

$$6) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n^2} x)}{a^{n^2}}, \quad a \in (1; 2), \quad a \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

7. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

8. Перевірити, чи виконується рівність

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \text{ на множині } E, \text{ якщо:}$$

$$1) f_n(x) = \arctg \frac{x}{n^2}, \quad E = \mathbb{R};$$

$$2) f_n(x) = \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}, \quad E = \mathbb{R};$$

$$3) f_n(x) = \sin^2 \frac{n}{x}, \quad E = [0; 2];$$

$$4) f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}, \quad E = \mathbb{R};$$

$$5) f_n(x) = \frac{\cos nx}{1 + n^2}, \quad E = \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right);$$

$$6) f_n(x) = (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right), \quad E = \mathbb{R}^+.$$

9. Перевірити, чи виконується рівність

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt \text{ на множині } E = [a; b], \text{ якщо:}$$

$$1) f_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{1}{x^{2n-1}}, \quad E = (0; 1];$$

2) $f_n(x) = ne^{-nx}$, $E = [\ln 2; \ln 5]$;

3) $f_n(x) = x^{2(n+1)} - x^{2n}$, $E = [-1; 1]$;

4) $f_n(x) = (n+1)x^n$, $E = [-1; 1]$;

5) $f_n(x) = \frac{x}{(nx+1)((n-1)x+1)}$, $E = [0; 2]$.

§ 22. Степеневі ряди. Область збіжності

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Степеневий ряд	Power series
Радіус та інтервал збіжності степеневому ряду	Radius and interval of convergence of a power series
Основні властивості суми степеневому ряду	Basic properties of the sum of a power series
Диференціювання степеневому ряду	Differentiation of a power series
Інтегрування степеневому ряду	Integration of a power series

1. Сформулювати означення степеневому ряду. Навести приклади.

Означення 22.1. Функціональний ряд вигляду (22.1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

де $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, називається **степеневим рядом**.

Якщо $x_0 = 0$, то ряд набуває вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (22.2)$$

2. Сформулювати і довести теорему Абеля.

Теорема 22.1 (теорема Абеля). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається у точці $x_0 \neq 0$, то він збігається абсолютно $\forall x: |x| < |x_0|$.

Наслідок. Якщо степеневий ряд (22.2) розбіжний у точці $x_0 \neq 0$, то він розбіжний $\forall x: |x| > |x_0|$ (рис. 22.1, 22.2).

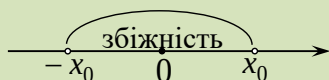


Рис. 22.1

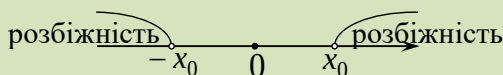


Рис. 22.2

3. Сформулювати означення радіуса, інтервала і області збіжності степеневого ряду. Вказати знаходження радіуса збіжності.

Позначимо множину всіх невід'ємних точок збіжності степеневого ряду (20.2) через D . Ця множина непорожня, оскільки точка збіжності $x_0 = 0 \in D$. Згідно з принципом Вейєрштраса існує точна верхня межа множини точок збіжності D :

$$\sup\{|x| \mid x \in D\} = R,$$

причому скінченна, якщо множина D обмежена зверху, і $R = \infty$, якщо множина D необмежена. Отже, $\forall x: |x| < R$ ряд збігається абсолютно, а $\forall x: |x| > R$ ряд розбігається. У точках $x = \pm R$ степеневий ряд може бути або збіжним, або розбіжним.

Означення 22.2. Число $R := \sup\{|x| \mid x \in D\}$ називають **радіусом збіжності степеневого ряду** (22.2), а інтервал $(-R; R)$ – інтервалом збіжності.

Якщо ряд розбіжний в усіх точках $x \neq 0$, то вважають, що

$R=0$, якщо ж ряд збіжний $\forall x \in \mathbb{R}$, то вважають, що $R=\infty$ і інтервал збіжності – $(-\infty; \infty)$.



Рис. 22.3

Знаходження радіуса та інтервалу збіжності степеневому ряду:

Теорема 22.2. Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \neq 0$, або $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, або

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ (верхня границя послідовності, або найбільша з часткових границь послідовності) (теорема Коші-Адамара), то у випадку:

- 1) $l > 0$ інтервалом збіжності ряду (22.2) є $\left(-\frac{1}{l}; \frac{1}{l}\right)$;
- 2) $l = 0$ інтервалом збіжності ряду (22.2) є $(-\infty; +\infty)$;
- 3) $l = +\infty$ ряд (22.2) збігається лише у точці $x = 0$.

4. Сформулювати основні властивості суми степеневому ряду. Чи змінюється радіус, інтервал і область збіжності степеневому ряду при почленному інтегруванні, диференціюванні?

Нехай степеневий ряд (22.2) має радіус збіжності R .

Теорема 22.3. Якщо $0 < R_0 < R$, то ряд (22.2) рівномірно збігається на відрізку $[-R_0; R_0] \subset (-R; R)$.

Властивість 1. Сума степеневому ряду є неперервною

функцією всередині інтервалу збіжності.

Властивість 2. Якщо $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R; R)$, то:

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

тобто в інтервалі збіжності степеневий ряд можна почленно інтегрувати, причому радіус збіжності такого ряду буде той же самий.

Наслідок. На інтервалі збіжності степеневий ряд можна інтегрувати почленно довільне число разів, одержані при цьому степеневі ряди будуть мати той же радіус збіжності, що і вихідний ряд.

Властивість 3. Якщо $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ – степеневий ряд з радіусом збіжності R , то ряд, складений з похідних його членів $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ має той же радіус збіжності R , причому:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R; R),$$

тобто в інтервалі збіжності степеневий ряд можна почленно диференціювати.

5. Схема знаходження області збіжності степеневого ряду (рис. 22.4).

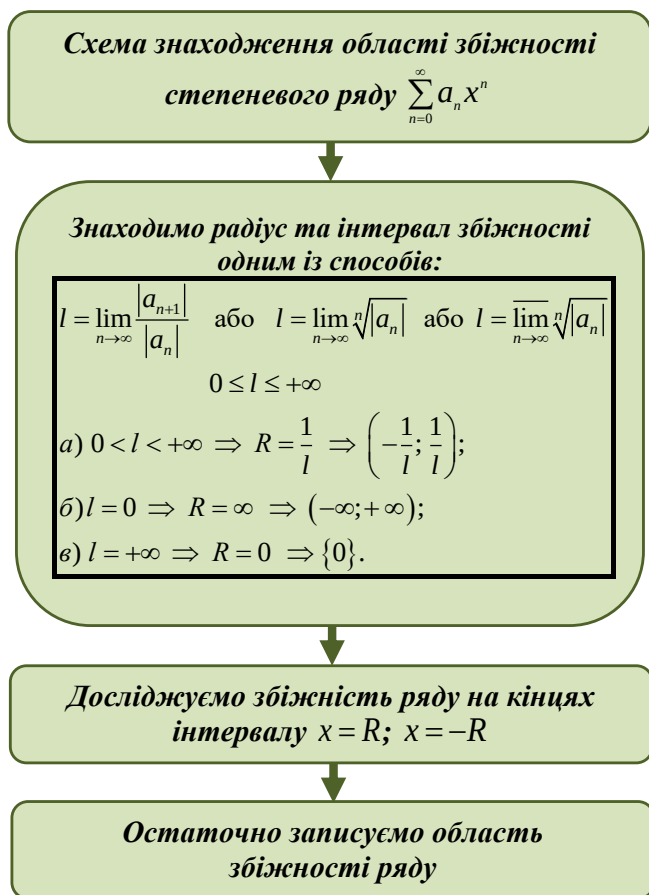


Рис. 22.4

Приклади розв'язування вправ

Задача 22.1. Знайти радіус збіжності R , інтервал і область збіжності степеневого ряду

$$1) \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{n(n+2)} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot 3^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)!(x-2)^n.$$

Розв'язання.

$$1) \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{n(n+2)} + \dots \quad \text{За загальним членом}$$

$$u_n = \frac{x^n}{n(n+2)} \quad \text{визначаємо коефіцієнт} \quad a_n = \frac{1}{n(n+2)} \quad \text{і знаходимо}$$

число l :

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+3)}}{\frac{1}{n(n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} = 1;$$

$$l = 1 \neq 0.$$

Радіус збіжності $R = \frac{1}{l} = 1$, а інтервал збіжності $(-1; 1)$ (рис. 22.5а).

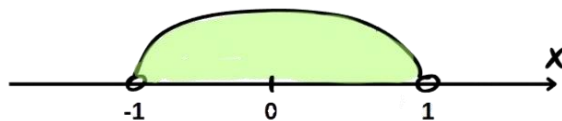


Рис. 22.5 а)

Тепер дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу.

Якщо $x = 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$, і цей числовий ряд можна

дослідити на збіжність, використовуючи або означення збіжного ряду, або ознаку порівняння рядів з додатними членами. Нагадаємо обидва способи.

I спосіб. Частинні суми ряду подано у вигляді:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n-2)n} + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \frac{1}{n(n+2)} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{An + 2A + Bn}{n(n+2)} \\ 1 + 0 \cdot n = An + 2A + Bn \\ \left\{ \begin{array}{l} A + B = 0, \\ 2A = 1, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = -\frac{1}{2}, \\ A = \frac{1}{2}. \end{array} \right. \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right);$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{2}.$$

Числовий ряд збіжний, отже точка $x=1$ є точка збіжності. ■

II спосіб. Використаємо ознаку порівняння рядів:

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2} = b_n.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний (як ряд обернених квадратів, то і

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ також збіжний.

Розглянемо тепер лівий кінець інтервалу, тобто точку $x=-1$, маємо ряд:

$$-\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{(-1)^n}{n(n+2)} + \dots,$$

який є знакоперечним рядом. Оскільки ряд, складений з модулів цього ряду є збіжним (див. доведення вище), то за відомою теоремою наш ряд також збіжний. Робимо висновок, що область збіжності вихідного степеневого ряду – відрізок $[-1;1]$ (рис. 22.5 б)). ■



Рис. 22.5 б)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n$. Аналогічно до попереднього прикладу

шукаємо число l :

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3}; R = \frac{1}{l} = \frac{3}{2},$$

центр інтервалу – точка $x_0 = -2$, бо $x - x_0 = x + 2 = x - (-2)$, а інтервал збіжності $\left(-2 - \frac{3}{2}; -2 + \frac{3}{2} \right)$ або $(-3,5; -0,5)$. (рис. 22.6).

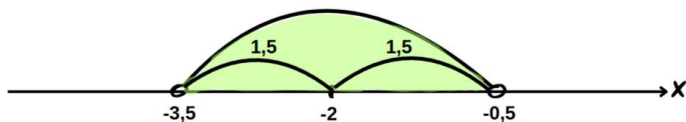


Рис. 22.6

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу.

Якщо $x_0 = -0,5$, то:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n \left(-\frac{1}{2} + 2 \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n-3}{6n+4} \right)^n.$$

Використаємо радикальну ознаку збіжності Коші:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{6n-3}{6n+4} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-3}{6n+4} = 1.$$

Отже, питання збіжності числового ряду залишається відкритим. Потрібні інші дослідження. Ми спробуємо перевірити необхідну умову збіжності і знайдемо границю загального члена ряду.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-3}{6n+4} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{6n} \right)^n}{\left(1 + \frac{4}{6n} \right)^n} = \left| \frac{1^\infty}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k} \right| = \frac{e^{-\frac{3}{6}}}{e^{\frac{4}{6}}} = e^{-\frac{7}{6}} \neq 0$$

Не виконується необхідна умова збіжності, тому ряд розбіжний і точка $x_0 = -0,5$ є точкою розбіжності.

Аналогічно доводимо, що і точка $x_0 = -3,5$ є точкою розбіжності, тому область збіжності степеневого ряду співпадає з інтервалом збіжності. ■

3) Оскільки у степеневому ряді $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$ є лише

члени з непарними степенями, то ми не можемо безпосередньо застосовувати теорему 22.2 для знаходження радіуса збіжності. Тому використовуємо ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-4)^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n-1)(x-4)^2}{2n+1} \right| = \\ &= (x-4)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = (x-4)^2 = q. \end{aligned}$$

Якщо $q = (x-4)^2 < 1$, то ряд збіжний: $|x-4| < 1$, $(3;5)$ – інтервал збіжності.

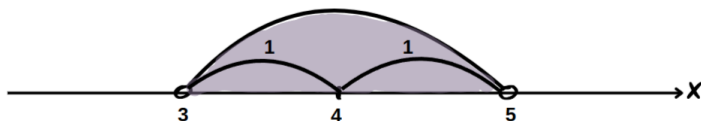


Рис.22.7 а)

Якщо $x=5$, то числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ збіжний за ознакою Лейбніца.

Аналогічно отримуємо, що $x=3$ – точка збіжності, отже область збіжності – відрізок $[3;5]$. ■

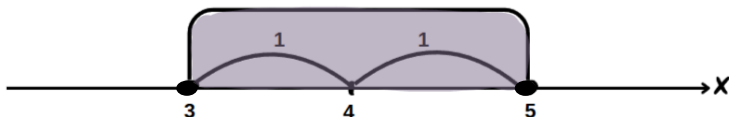


Рис. 22.7 б).

4) Аналогічно до попередніх прикладів для степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot 3^n} \text{ знаходимо радіус і інтервал збіжності.}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3}, R = \frac{1}{l} = 3, (-3; 3) \text{ – інтервал збіжності.}$$

$$x = -3: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ розбіжний як гармонійний ряд;}$$

$$x = 3: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \text{ збіжний як ряд Лейбніца.}$$

Отже, півінтервал $(-3; 3]$ – область збіжності. ■

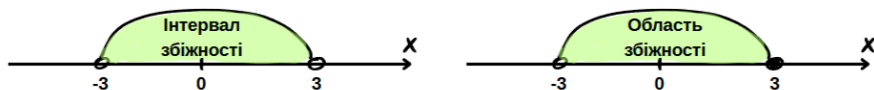


Рис. 22.8 а) б)

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! (x-2)^n, l = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! = \infty, \text{ отже за теоремою 22.2}$$

радіус збіжності $R=0$. Степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! (x-2)^n$ збіжний лише у точці $x=2$. ■

Задача 22.2. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

Розв'язання. Розглянемо степеневий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-4)^{2n} = -(x-4)^2 + (x-4)^4 - (x-4)^6 + \dots + (-1)^n (x-4)^{2n} + \dots,$$

який є геометричною прогресією зі знаменником $q = (x-4)^2$, тому він збігається якщо $|x-4| < 1 \Rightarrow x \in (3; 5)$.

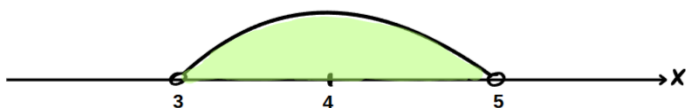


Рис. 22.9

Сума ряду як геометричної прогресії визначається за формулою: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots = \frac{q}{1-q}$ або у нашому

випадку $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-4)^{2n} = \frac{-(x-4)^2}{1+(x-4)^2}$.

За властивістю 2 степеневий ряд можна інтегрувати в цьому інтервалі збіжності, що ми і зробимо:

$$-\int (x-4)^2 dx + \int (x-4)^4 dx - \dots + (-1)^n \int (x-4)^{2n} dx + \dots = -\int \frac{(x-4)^2}{1+(x-4)^2} dx$$

або

$$-\int \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 17} dx = -\frac{(x-4)^3}{3} + \frac{(x-4)^5}{5} - \frac{(x-4)^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{(x-4)^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Обчислюємо інтеграл у лівій частині останньої рівності:

$$\int \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 17} dx = \int \left(+ - \frac{1}{1+(x-4)^2} \right) dx = x - \arctg(x-4).$$

Отже,

$$-x + \arctg(x-4) = -\frac{(x-4)^3}{3} + \frac{(x-4)^5}{5} - \frac{(x-4)^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{(x-4)^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Додамо до обох частин рівності $\frac{x-4}{1}$:

$$x-4-x+\operatorname{arctg}(x-4)=\frac{x-4}{1}-\frac{(x-4)^3}{3}+\dots+(-1)^n\frac{(x-4)^{2n+1}}{2n+1}+\dots$$

Тепер остаточно маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}=\operatorname{arctg}(x-4)-4, \quad x \in (3; 5). \quad \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

Знайти радіус збіжності R , інтервал і область збіжності степеневого ряду:

1) $\frac{\ln 2}{1}x^2 + \frac{\ln 3}{2}x^3 + \dots + \frac{\ln(n+1)}{n}x^{n+1} + \dots;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(x-5)^{n+1}}{(n+1)!};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n;$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}(x+2)^n;$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2};$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)};$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n))x^n}{(2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1))^2};$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{n^2 \cdot 2^n}x^{n+1};$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+3+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2}x^n;$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^{2n}}{n};$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^3 3^n};$

$$16) \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + (-1)^n\right) (x+1)^{n-1};$$

$$17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} (x-2)^n}{3n};$$

$$18) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n;$$

$$19) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n;$$

$$20) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n;$$

$$21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2};$$

$$22) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n, \quad a > 0, \quad b > 0;$$

$$23) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

✎ 2. Знайти радіус збіжності і суму степеневого ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4x)^n;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} 3n x^{3n-1};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^{n-1}};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{3n-2}}{3n-2};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3x-1)^n}{n(n+3)}.$$

✎ 3. Знайти суму числового ряду:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n!};$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)};$$

$$7) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2};$$

$$8) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)};$$

$$9) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(3n+1)}.$$

З4. Самостійно побудувати рівномірно збіжний функціональний ряд, з допомогою диференціювання або інтегрування його записати числовий ряд при конкретних значеннях x :

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

§ 23. Формула Тейлора

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Формула Тейлора	Taylor formula
Формула Маклорена	McLaurin formula
Залишковий член у формі Лагранжа, Коші, Пеано, в інтегральній формі	Residual termin Lagrange, Cauchy, Peano, integral form
Необхідна умова розкладання функції в степеневий ряд	Necessary condition for power series expansion of a function
Достатня умова розкладання функції в степеневий ряд	Sufficient condition for power series expansion of a function
Розклад в степеневий ряд основних елементарних функцій	Power series expansion of basic elementary functions

1. Записати формулу Тейлора–Маклорена для функції $f(x)$ та її залишковий член у формі Лагранжа, Коші, Пеано, в інтегральній формі.

Означення 23.1. Формулу (23.1):

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

називають **формулою Тейлора**, а $o((x-x_0)^n)$ – **залишковим членом формули Тейлора (у формі Пеано)**. Якщо $x_0 = 0$, то формула (23.1) має вигляд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \quad (23.2)$$

і називається **формулою Маклорена**.

Теорема 23.1. Якщо функція $y = f(x)$ має у деякому околі точки x_0 $(n+1)$ -у похідну, то залишковий член формули Тейлора приймає вигляд:

1) у формі Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1),$$

2) у формі Коші:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(1 - \theta)^n}{n!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1),$$

3) в інтегральній формі: $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$

Зокрема у точці $x_0 = 0$ маємо:

1) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1,$

2) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1 - \theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1,$

3) $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$

2. Сформулювати задачу розкладання (розвинення) функції в степеневий ряд. Яка необхідна умова розкладання функції в степеневий ряд?

Теорема 23.2 (необхідна умова розкладання функції в степеневий ряд). Якщо функція $y = f(x)$ є сумою ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ з інтервалом збіжності $(-R; R)$, то в кожній його точці функція $f(x)$ має безліч похідних, причому $f^{(n)}(0) = n! a_n$.

3. Сформулювати і довести достатні умови розкладання функції в степеневий ряд.

Теорема 23.3. Якщо для всіх $x \in (-R; R)$ залишковий член $R_n(x)$ формули Тейлора функції $f(x)$ прямує до 0 при $n \rightarrow \infty$, то на інтервалі збіжності $(-R; R)$ функція $f(x)$ є сумою ряду:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (23.3)$$

Теорема 23.4. Якщо функція $y = f(x)$ разом з своїми похідними усіх порядків обмежена на інтервалі $(-R; R)$, то $f(x)$ розкладається у ряд вигляду (23.3).

4. Сформулювати алгоритм розкладання функції в степеневий ряд.

Алгоритм розкладання функції в степеневий ряд.

1. Перевіряємо, чи має функція у точці $x_0 = 0$ похідні всіх порядків і визначаємо їх.

2. Будуємо формальний ряд Тейлора-Маклорена для функції:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

3. Знаходимо інтервал збіжності цього ряду, використовуючи формули:

$$l := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \text{ або } l := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad 0 \leq l \leq +\infty;$$

а) $0 < l < +\infty \Rightarrow R = \frac{1}{l} \Rightarrow \left(-\frac{1}{l}; \frac{1}{l}\right);$

б) $l = 0 \Rightarrow R = \infty \Rightarrow (-\infty; +\infty);$

в) $l = +\infty \Rightarrow R = 0 \Rightarrow \{0\}$

4. Перевіряємо достатні умови розкладання функції у степеневий ряд. Переконаємось, що: або на інтервалі $(-R; R)$ залишковий член $R_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, або функція $f(x)$ разом зі своїми похідними усіх порядків обмежена на $(-R; R)$.

5. Маємо остаточний результат: на $(-R; R)$ функція $f(x)$ є сумою ряду $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

5. Як розкладаються у степеневі ряди функції e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\arctg x$?

Таблиця 23.1

Розвинення в степеневий ряд основних елементарних функцій:	
1) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$(-1; 1)$
2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$(-\infty; +\infty)$
3) $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$	$(-\infty; +\infty)$
4) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$(-\infty; +\infty)$
5) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$(-1; 1]$
6) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$(-1; 1)$
7) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \dots$ $ x < 1$,	
8) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1} + \dots$ $ x < 1$.	

Приклади розв'язування вправ

Задача 23.1. Для функції $f(x)$ знайти многочлени Тейлора порядку 0, 1, 2 і 3:

1) $f(x) = e^{2x}, x_0 = 0;$

2) $f(x) = \ln x, x_0 = 1;$

3) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4.$

Розв'язання. В усіх задачах знаходимо похідні функцій до третього порядку включно, обчислюємо значення функції та похідних у точці x_0 і записуємо многочлени Тейлора:

$$P_0(x) = f(x_0),$$

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2,$$

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$$

1) $f(x) = e^{2x}, f(0) = e^0 = 1,$

$$f'(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}, f'(0) = 2e^0 = 2,$$

$$f''(x) = (2e^{2x})' = 4e^{2x}, f''(0) = 4e^0 = 4,$$

$$f'''(x) = (4e^{2x})' = 8e^{2x}. f'''(0) = 8e^0 = 8.$$

Многочлени Тейлора:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = 1 + 2x,$$

$$P_2(x) = 1 + 2x + 2x^2,$$

$$P_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3. \quad \blacksquare$$

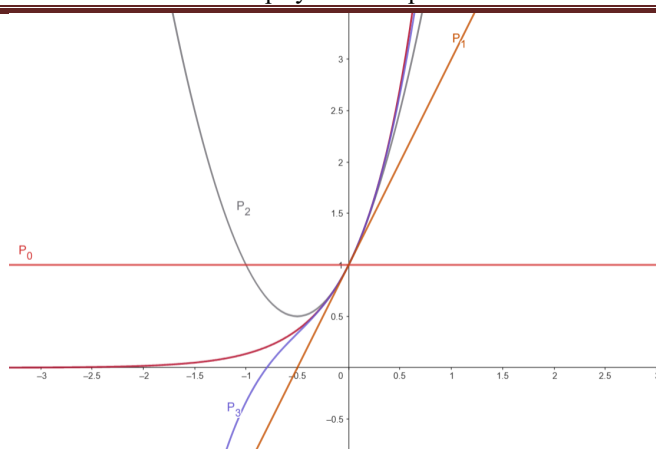


Рис. 23.1

$$2) f(x) = \ln x, \quad f(1) = \ln 1 = 0,$$

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1,$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(1) = -1,$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(1) = 2.$$

Многочлены Тейлора:

$$P_0(x) = 0,$$

$$P_1(x) = (x-1),$$

$$P_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2,$$

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3. \quad \blacksquare$$

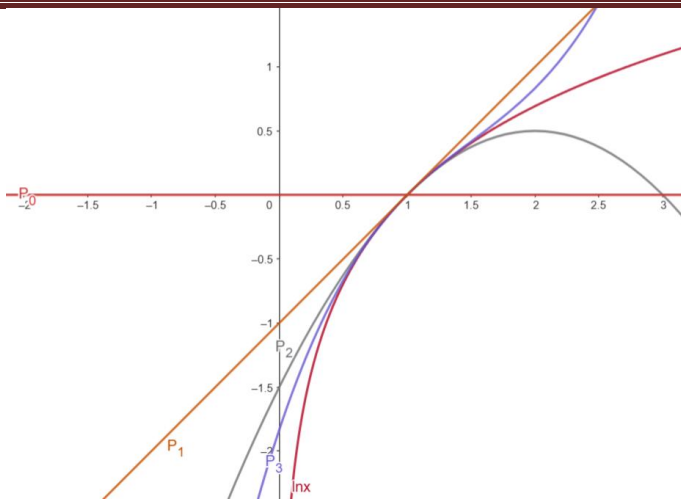


Рис. 23.2

$$3) f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, f(4) = \sqrt{4} = 2,$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4},$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, f''(4) = -\frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = -\frac{1}{32},$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}, f'''(4) = \frac{3}{8\sqrt[5]{4}} = \frac{3}{256}.$$

Многочлены Тейлора:

$$P_0(x) = 2,$$

$$P_1(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4),$$

$$P_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2,$$

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3. \quad \blacksquare$$

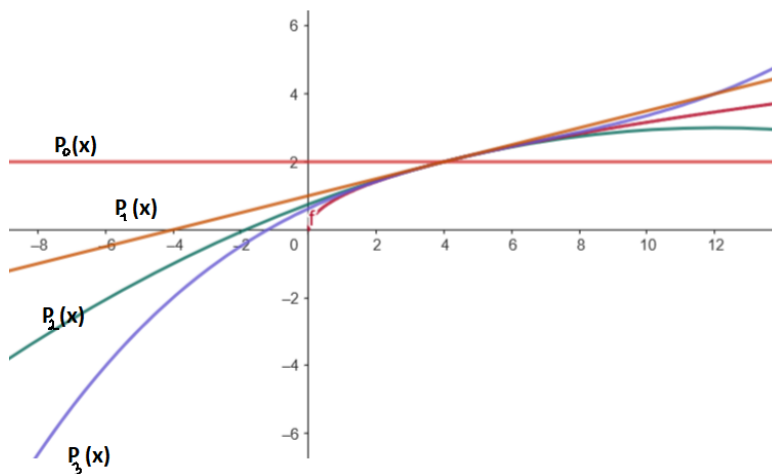


Рис. 23.3

Для основных элементарных функций многочлены Тейлора имеют вид:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$y = e^x \Rightarrow P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

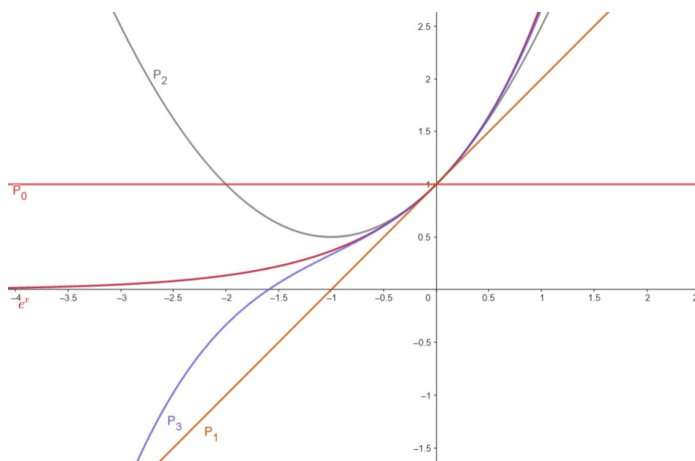


Рис. 23.4

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$y = \cos x \Rightarrow$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

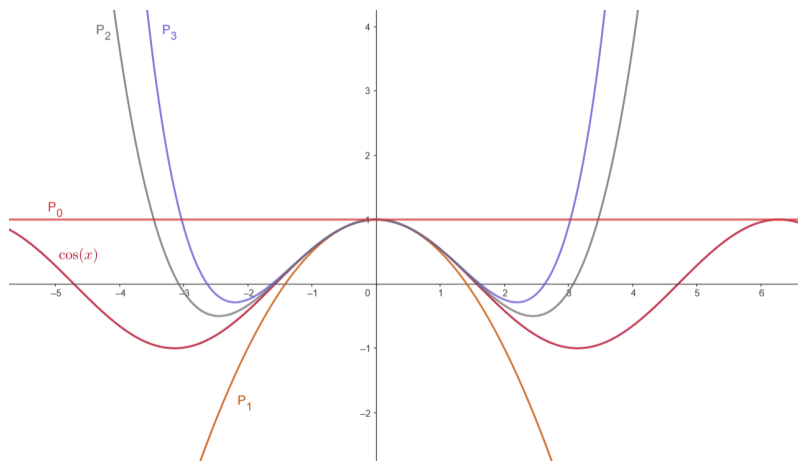


Рис. 23.5

$$P_0(x) = 0$$

$$P_1(x) = x$$

$$y = \ln(1+x) \Rightarrow$$

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$$



$$P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

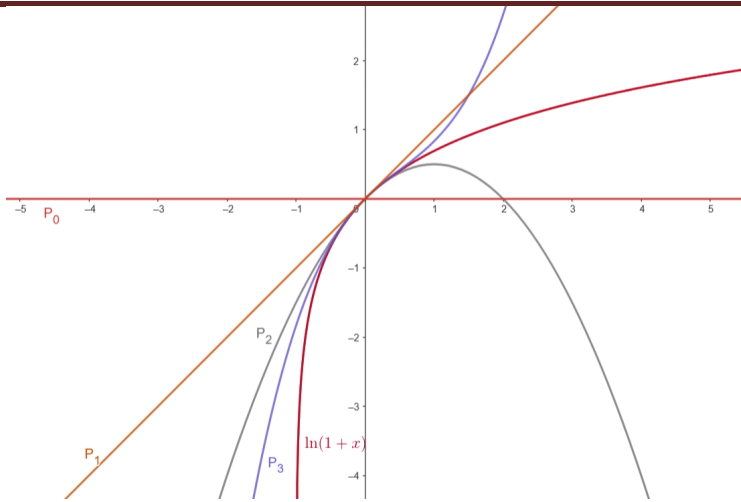


Рис. 23.6

Задача 23.2. Розкласти функцію $y = \sin \frac{\pi x}{6}$ у ряд Тейлора в околі $x_0 = 3$.

Розв'язання.

I спосіб. Використаємо алгоритм розкладу функції в ряд Тейлора. Шукаємо похідні функції $y = \sin \frac{\pi x}{6}$ обчислюємо їх значення у точці $x_0 = 3$:

$$y = \sin \frac{\pi x}{6},$$

$$y(3) = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$y' = \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi x}{6} = \frac{\pi}{6} \sin \left(\frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{2} \right), \quad y'(3) = \frac{\pi}{6} \sin \left(\frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

$$y'' = -\frac{\pi^2}{6^2} \sin \frac{\pi x}{6} = \frac{\pi^2}{6^2} \sin \left(\frac{\pi x}{6} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y''(3) = \frac{\pi^2}{6^2} \sin \left(\frac{3\pi}{6} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi^2}{6^2},$$

$$y''' = -\frac{\pi^3}{6^3} \cos \frac{\pi x}{6} = \frac{\pi^3}{6^3} \sin \left(\frac{\pi x}{6} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad y'''(3) = \frac{\pi^3}{6^3} \sin \left(\frac{3\pi}{6} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

$$y^{(n)} = \frac{\pi^n}{6^n} \sin\left(\frac{\pi x}{6} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad y^{IV}(3) = \frac{\pi^4}{6^4} \sin\left(\frac{3\pi}{6} + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^4}{6^4},$$

Записуємо формальний ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi x}{6} &\sim 1 + \frac{0}{1!}(x-3) - \frac{\frac{\pi^2}{6^2}}{2!}(x-3)^2 + \frac{0}{3!}(x-3)^3 + \frac{\frac{\pi^4}{6^4}}{4!}(x-3)^4 + \dots = \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{6^2 \cdot 2!}(x-3)^2 + \frac{\pi^4}{6^4 \cdot 4!}(x-3)^4 + \dots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n} \cdot (2n)!}(x-3)^{2n} + \dots \end{aligned}$$

або

$$\sin \frac{\pi x}{6} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n} \cdot (2n)!} (x-3)^{2n} \cdot \sin \frac{\pi x}{6} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n} (2n)!} (x-3)^{2n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\pi^{2n+2}}{6^{2n+2} (2n+2)!} (x-3)^{2n+2}}{\frac{\pi^{2n}}{6^{2n} (2n)!} (x-3)^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\pi^2 (x-3)^2}{36 (2n+1)(2n+2)} \right| = 0 < 1$$

$\forall x \in (-\infty; +\infty)$, то ряд збігається на всій числовій прямій.

Для перевірки достатніх умов оцінимо похідні вищих порядків: $|y^{(n)}| = \left| \frac{\pi^n}{6^n} \sin\left(\frac{\pi x}{6} + n \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \frac{\pi^n}{6^n} < 1$, тобто вони є обмеженими функціями. Отже, остаточно:

$$\sin \frac{\pi x}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n} (2n)!} (x-3)^{2n}, x \in (-\infty; +\infty).$$

II спосіб. Використаємо відомий розклад (4) з таблиці 1. З цієї метою вихідну функцію перетворимо до вигляду:

$$y = \sin \frac{\pi x}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6}((x-3)+3)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}(x-3) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{6}(x-3).$$

Отже,

$$\cos \frac{\pi}{6}(x-3) = \left| t = \frac{\pi}{6}(x-3) \right| = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{6^2 \cdot 2!} (x-3)^2 + \frac{\pi^4}{6^4 \cdot 4!} (x-3)^4 - \dots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n} \cdot (2n)!} (x-3)^{2n} + \dots,$$

$x \in (-\infty; +\infty)$. ■

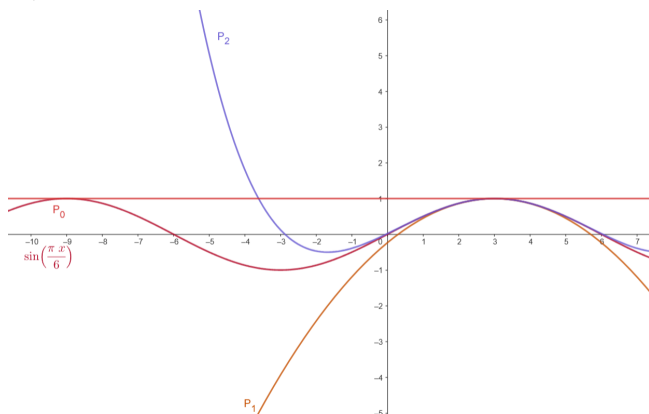


Рис. 23.7.

Задача 23.3. Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, розкласти функцію в ряд Маклорена:

1) $\frac{x^{10}}{1-x}$;

2) $\frac{x^2}{(1+x)^2}$;

3) $\frac{5-2x}{x^2-5x+6}$;

4) $\ln \frac{2x+1}{x^2-4x+4}$;

5) $\cos^2 x$;

6) xe^x .

Розв'язання. У цьому прикладі будемо використовувати таблицю 23.1:

1) $\frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \cdot \frac{1}{1-x} = |(1)| = x^{10} (1+x+x^2+\dots+x^n+\dots) =$

$$= x^{10} + x^{11} + x^{12} + \dots + x^{n+10} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+10}, (-1; 1). \quad \blacksquare$$

2) $\frac{x^2}{(1+x)^2} = x^2 \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = x^2 (1+x)^{-2} = \left| \begin{matrix} (6) \\ \alpha-2 \end{matrix} \right| =$

$$= x^2 (1 + (-2)x + \frac{(-2)(-2-1)}{2!} x^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!} x^3 + \dots)$$

$$= x^2 \left(1 - 2x + \frac{2 \cdot 3}{2!} x^2 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} x^3 + \dots \right) = x^2 (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots +$$

$$+ (-1)^n n x^{(n-1)} + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n+1}, \quad (-1; 1) \quad \blacksquare$$

3) Функцію $\frac{5-2x}{x^2-5x+6}$ подамо у вигляді двох простих дробів

першого типу, використавши метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{5-2x}{x^2-5x+6} = \frac{5-2x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)}.$$

$$5-2x = (A+B)x - (3A+2B).$$

$$\begin{cases} A+B=-2, \\ -3A-2B=5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1, \\ B=-1. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } \frac{5-2x}{x^2-5x+6} = -\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2-x}.$$

До функцій у правій частині використаємо розклад 1 таблиці 23.1.

Будемо мати:

$$\frac{5-2x}{x^2-5x+6} = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2-x} = \frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)} + \frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \left(\begin{array}{l} (1) \\ q_1 = \frac{x}{3} \\ q_2 = \frac{x}{2} \end{array} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n.$$

$$\text{Інтервал збіжності: } \begin{cases} \left| \frac{x}{2} \right| < 1, \\ \left| \frac{x}{6} \right| < 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| < 2, \\ |x| < 3, \end{cases} \Rightarrow |x| < 2.$$

Остаточню:

$$\frac{5-2x}{x^2-4x+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n, \quad (-2; 2). \quad \blacksquare$$

4) Функцію $\ln \frac{2x+1}{x^2-4x+4}$ подамо як різницю двох функцій вигляду $\ln(1+u)$, $u \in (-1; 1]$, потім використаємо формулу 5 таблиці 23.1.

$$\begin{aligned} \ln \frac{2x+1}{x^2-4x+4} &= \ln(1+2x) - \ln(x-2)^2 = \ln(1+2x) - \ln 4 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = \\ &= \ln(1+(2x)) - 2 \ln \left(1 + \left(-\frac{x}{2}\right)\right) - \ln 4. \end{aligned}$$

Перший доданок:

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n x^n}{n}, \quad -1 < 2x \leq 1.$$

Другий доданок:

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \left(-\frac{x}{2}\right)\right) &= \left(-\frac{x}{2}\right) - \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^n}{n} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \frac{x^n}{2^n \cdot n}, \quad -1 < -\frac{x}{2} \leq 1. \end{aligned}$$

Остаточню:

$$\ln \frac{2x+1}{x^2-4x+4} = -\ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \frac{2^n x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^n x^n}{2^n \cdot n} =$$

$$= -\ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(2^n + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right) x^n.$$

Область збіжності:

$$\begin{cases} -1 < 2x \leq 1, \\ -1 < -\frac{x}{2} \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}, \\ -2 \leq x < 2. \end{cases}$$

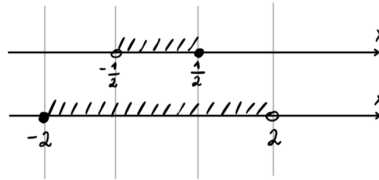


Рис. 23.8

$$\ln \frac{2x+1}{x^2-4x+4} = -\ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(2^n + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right) x^n, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]. \quad \blacksquare$$

5) Функцію $\cos^2 x$ подамо у вигляді:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x,$$

після чого застосуємо формулу 4 таблиці 23.1.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{2n!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1} x^n}{(2n)!}.$$

Ряд збіжний на множині дійсних чисел. $\blacksquare$

$$6) xe^x = \left| (2) \right| = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}, \quad (-\infty; +\infty). \quad \blacksquare$$

Задача 23.4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)$, скориставшись рядом Маклорена для її похідної, і знайти радіус збіжності цього ряду:

$$1) y = \arctg x, \quad 2) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Розв'язання.

В усіх завданнях спочатку знайдемо похідну функції, і якщо виявиться, що ця похідна з таблиці 1, то ми зможемо її розкласти у степеневий ряд. Після чого отримаємо розклад вихідної функції, проінтегрувавши ряд.

$$\begin{aligned} 1) (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2} = |(1)| = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n (x^2)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, |x| < 1. \end{aligned}$$

Степеневий ряд в інтервалі збіжності проінтегруємо:

$$\int_0^x (\operatorname{arctg} t)' dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt,$$

або

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, |x| < 1 \quad (9)$$

Останню формулу додамо в таблицю 23.1. ■

$$\begin{aligned} 2) \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Для функції $(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ застосуємо біноміальний розклад, тут

$$t = x^2, \alpha = -\frac{1}{2}:$$

$$\begin{aligned} (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) x^2 + \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right)}{2!} (x^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \left(-\frac{1}{2} - 2 \right)}{3!} (x^2)^3 + \\ &+ \dots = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2! 2^2} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! 2^3} x^6 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n! 2^n} x^{2n} + \dots, |x| < 1. \end{aligned}$$

Останню рівність проінтегруємо в інтервалі збіжності:

$$\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2!2^2}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!2^3}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^{2n} + \dots \right) dx.$$

або

$$\begin{aligned} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) &= x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{2!2^2} \cdot \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!2^n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!2^n (2n+1)} \cdot x^{2n+1}, \quad |x| < 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Цей ряд також додамо в таблицю 23.1. ■

Задача 23.5. Розкласти в ряд Маклорена функцію

$$y = \ln \left(\pi \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \right) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$$

Розв'язання. Вказану функцію перепишемо в такому вигляді, щоб можна було використати відомі розклади з таблиці 23.1:

$$y = \ln \pi + \frac{1}{2} \ln \frac{2+x}{2-x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} = \ln \pi + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$$

До функцій $y_1 = \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)$, $y_2 = \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right)$ і $y_3 = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ застосуємо

формули (5) $\left(t = \frac{x}{2}, t = -\frac{x}{2} \right)$ та (9) $\left(t = \frac{x}{2} \right)$:

$$\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) = \left| \begin{array}{l} (5) \\ t = \frac{x}{2} \end{array} \right| = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2} \right)^n + \dots,$$

$$\ln \left(1 - \frac{x}{2} \right) = \left| \begin{array}{l} (5) \\ t = -\frac{x}{2} \end{array} \right| = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 - \dots - \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2} \right)^n - \dots,$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{2} = \left| \begin{array}{l} (9) \\ t = \frac{x}{2} \end{array} \right| = \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{x}{2} \right)^5 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n-1} + \dots,$$

$$\left| \frac{x}{2} \right| < 1 \Rightarrow x \in (-2; 2).$$

Отже,

$$y = \ln \left(\pi \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \right) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} = \ln \pi + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2} \right)^4 + \dots \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2} \right)^4 + \dots \right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{2} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{x}{2} \right)^7 + \dots \right),$$

або

$$y = \ln \pi + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{2} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{x}{2} \right)^7 + \dots \right) +$$

$$+ \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{2} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{x}{2} \right)^7 + \dots \right) =$$

$$= \ln \pi + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{2} \right)^5 + \frac{1}{9} \left(\frac{x}{2} \right)^9 + \dots \right) = \ln \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3) \cdot 2^{4n-3}}. \quad \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

З1. Записати многочлени Тейлора порядку 0, 1, 2 і 3 для

функцій: $y = \frac{1}{1-x}$; $y = \sin x$; $y = (1+x)^3$; $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$; $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$;

$y = \sqrt{1+x}$.

З2. Розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 :

1) $f(x) = x^3 + 2x + 2$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$, $x_0 = -1$;

3) $f(x) = x^3 - 2x + 4$, $x_0 = 2$;

4) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8, \quad x_0 = 1;$

5) $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2, \quad x_0 = -1;$

6) $f(x) = x^6, \quad x_0 = -2;$

7) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 2, \quad n = 4;$

8) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, \quad x_0 = 2;$

9) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$

10) $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}, \quad x_0 = 0;$

11) $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 0; \quad x_0 = 1.$

З3. Знайти перші чотири члени біноміального ряду для функцій:

1) $\sqrt{1+x};$

2) $\sqrt[3]{1+x};$

3) $\frac{1}{\sqrt{1-x}};$

4) $\sqrt{1-2x};$

5) $\frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2};$

6) $\left(1-\frac{x}{3}\right)^4;$

7) $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}};$

8) $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}};$

$$9) \sqrt{1 + \frac{1}{x}};$$

$$10) \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

З4. Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, розкласти функцію в ряд Маклорена:

$$1) \frac{1}{(1-x^3)^2};$$

$$2) (1-x^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$3) \frac{5x-4}{x+2};$$

$$4) \frac{1}{1+x+x^2};$$

$$5) \frac{1}{1-x-x^2};$$

$$6) \frac{1}{x^3+x^2+3x+3};$$

$$7) (x^2+5) \ln \frac{9-x^2}{4-x^2};$$

$$8) \ln(12-x-x^2);$$

$$9) xe^x;$$

$$10) x \cos \pi x;$$

$$11) x^2 \cos x^2;$$

$$12) \frac{x}{5} \ln(1+x^2);$$

$$13) \cos x - \sin x;$$

$$14) \sin 3x;$$

$$15) \sin \frac{x}{2};$$

$$16) 5 \cos \pi x;$$

$$17) \cos^2 x;$$

$$18) \sin 3x \sin 5x;$$

$$19) \sin^3 x.$$

З5. Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, довести, що:

$$1) \frac{1}{a+bx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}} x^n, \quad |x| < \left| \frac{a}{b} \right|, \quad ab \neq 0;$$

$$2) \frac{1}{x^2 + a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{2(n+1)}} x^{2n}, \quad |x| < |a|, \quad a \neq 0;$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{a^{2n+1} (2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0;$$

$$4) \sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{a^{2n-1} (2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0;$$

$$5) \ln(a+bx) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^n \frac{x^n}{n}, \quad |x| < \frac{a}{|b|}, \quad a > 0, \quad b \neq 0.$$

№6. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)$, скориставшись рядом Маклорена для її похідної, і знайти радіус збіжності цього ряду :

$$1) f(x) = \arcsin x;$$

$$2) f(x) = (1+x) \ln(1+x);$$

$$3) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-x}{1+2x};$$

$$4) f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}};$$

$$5) f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2};$$

$$6) f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{16+x^4}}.$$

№7. Розкласти в ряд Маклорена функцію і знайти радіус збіжності ряду:

$$1) x \ln(x + \sqrt{x^2 + 2});$$

$$2) x \ln(x^2 + \sqrt{9+x^4});$$

$$3) (x^2 - 1) \arcsin 2x^2;$$

$$4) x^2 \arccos 2x;$$

$$5) x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2};$$

$$6) x \arccos x - \sqrt{1 - x^2};$$

$$7) \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

8. Розкласти функцію в ряд Тейлора в околі точки x_0 і знайти його радіус збіжності:

$$1) \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \quad x_0 = 1;$$

$$2) \frac{1}{(x^2 - 6x + 18)^2}, \quad x_0 = 3;$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{x^2 - 12x + 40}}, \quad x_0 = 6;$$

$$4) (x+1) \cos^2 x, \quad x_0 = -1;$$

$$5) \cos^4 x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{2};$$

$$6) \ln(x^2 + 2x + 2), \quad x_0 = -1;$$

$$7) \ln(x^2 - 9x + 20), \quad x_0 = 3.$$

9. Використовуючи інтегрування, знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1};$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

§ 24. Наближені обчислення з використанням степеневих рядів

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Наближені обчислення значення функції з використанням степеневих рядів	Approximate calculations of the value of a function using power series
Знаходження границі функції в точці з використанням степеневих рядів	Finding the limit of a function at a point using power series
Наближені обчислення визначених інтегралів з використанням степеневих рядів	Approximate calculations of definite integrals using power series
Розв'язування функціональних рівнянь з використанням степеневих рядів	Solving functional equations using power series
Знаходження неявно заданої функції з використанням степеневих рядів	Finding an implicitly defined function using power series

З'ясувати питання про застосування рядів до наближених обчислень значень функції, знаходження границі функції, обчислення визначених інтегралів, розв'язування функціональних рівнянь, знаходження неявно заданої функції. Навести відповідні приклади.

Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Обчислення значення функції. Розклад функції в ряд Маклорена дає можливість в багатьох випадках обчислювати з великою точністю значення цих функцій, і тут можна розв'язувати такі задачі:

Перша задача. Обчислити значення функції, взявши певне число членів ряду. Оцінити точність обчислення.

Друга задача. По заданій точності обчислити число членів ряду, які гарантують задану точність.

Знаходження границі функції. Використовуємо розклад у степеневий ряд функцій, які стоять під знаком границі.

Розв'язування функціональних рівнянь. Знаходження неявно заданої функції. Функцію $y = y(x)$ шукаємо у вигляді степеневому ряду $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$. Підставляючи ряд у рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частині рівняння, приходимо до нескінченної системи рівнянь, з якої і визначаємо коефіцієнти $a_i, i = 1, 2, 3, \dots$

Обчислення визначених інтегралів Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку, тобто

існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Проте цей інтеграл, як

відомо, не завжди можна обчислити за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, бо не завжди первісна функція для $f(x)$ є елементарною. У цьому разі для обчислення визначеного інтеграла застосовують степеневий ряд.

Справді, нехай функція $f(x)$ розкладається у степеневий ряд: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ на відрізку $[a; b]$, тоді цей ряд можна почленно інтегрувати, тобто:

$$\int_a^b f(x) dx = a_0 \int_a^b dx + a_1 \int_a^b x dx + a_2 \int_a^b x^2 dx + \dots + a_n \int_a^b x^n dx + \dots,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n b^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n a^{n+1}}{n+1}.$$

Наближене обчислення коренів. З допомогою біноміального ряду можна швидко і досить точно обчислювати значення коренів з чисел, а також значень різних функцій:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 24.1. Обчислити із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

- 1) $\sqrt[3]{130}$; 2) $\sqrt{e}$; 3) $\cos 20^\circ$; 4) $\ln 1,2$;

Розв'язання.

1) Для наближеного обчислення значення $\sqrt[3]{130}$ використаємо біноміальний ряд:

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = \sqrt[3]{125 \left(1 + \frac{5}{125}\right)} = 5 \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Для функції $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ одержимо такий розклад

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}x^4 + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 4!}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Підставимо $x = \frac{1}{25}$, одержимо числовий ряд:

$$\sqrt[3]{130} = 5 \left(1 + \frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{3}} = 5 \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2! \cdot 5^4} + \frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 5^6} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 4! \cdot 5^8} + \dots \right).$$

Цей ряд є знакозмінним. Він задовольняє ознаці Лейбніца. Тому якщо замість суми ряду візьмемо наближено суму n перших членів, то матимемо абсолютну похибку, меншу ніж перший відкинутий член: $|R_n| < a_{n+1}$:

$$n = 2: \quad \frac{2 \cdot 5}{3^2 \cdot 2! \cdot 5^4} = \frac{1}{9 \cdot 125} = \frac{1}{1125} > \frac{1}{10000},$$

$$n = 3: \quad \frac{2 \cdot 5 \cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 5^6} = \frac{2}{3^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^4} = \frac{1}{81 \cdot 625} < \frac{1}{10000}.$$

$$\sqrt[3]{130} \approx 5,00000 + 0,06667 - 0,00089 = 5,06578 \approx 5,0658. \quad \blacksquare$$

2) Скористаємось розкладом експоненціальної функції e^x в ряд Тейлора-Маклорена.

$$\text{При } x = \frac{1}{2} \text{ маємо: } e^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \quad \text{Отже,}$$

$$\sqrt{e} \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!}, \text{ а оцінка похибки такого наближення (тобто модуль}$$

різниці між точним значенням функції і наближеним) зводиться до оцінки залишку ряду $R_n(x_0)$:

$$\left| f(x_0) - \sum_{k=0}^n a_k x_0^k \right| = |R_n(x_0)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_0^k \right|$$

У нашому випадку маємо:

$$\begin{aligned} R_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)!2^{n+2}} + \frac{1}{(n+3)!2^{n+3}} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2^2(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2^2(n+2)^2} + \dots \right) = \left| \begin{array}{c} \text{геом.прогресія} \\ b_1 = 1 \\ q = \frac{1}{2(n+2)} < 1 \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2(n+2)}} = \frac{(n+2)}{(n+1)! 2^n (2n+3)}; \\
 &R_n \left(\frac{1}{2} \right) < \frac{n+2}{(n+1)! 2^n (2n+3)} < 10^{-4}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо, скільки членів ряду потрібно взяти, щоб залишковий член був менший 10^{-4}

$$n = 2: \quad R_2 \left(\frac{1}{2} \right) < \frac{2+2}{3! 2^2 \cdot 7} = \frac{1}{42} > 0,0001;$$

$$n = 3: \quad R_3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4! 2^3 \cdot 9} \approx 0,0289 > 0,0001;$$

$$n = 4: \quad R_4 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{6}{5! 2^4 \cdot 11} \approx 0,00028 > 0,0001;$$

$$n = 5: \quad R_5 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6! 2^5 \cdot 13} \approx 0,00002 < 0,0001;$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{e} &\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! 2^2} + \frac{1}{3! 2^3} + \frac{1}{4! 2^4} + \frac{1}{5! 2^5} \approx \\
 &\approx 1,5 + 0,125 + 0,02083 + 0,00260 + 0,00026 \approx 1,64869 \approx 1,6487.
 \end{aligned}$$

Отже, $\sqrt{e} \approx 1,6487$. з точністю до 10^{-4} . ■

3) Степеневі ряди

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

i

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

можна використати для обчислення значень тригонометричних функцій $\sin x$ і $\cos x$. Взявши у цих рядах суму перших n членів, дістанемо наближені формули

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!}.$$

Оскільки степеневі ряди для $\sin x$ і $\cos x$ при будь-якому $x \in (-\infty; +\infty)$ є знакопочережні, то похибка за модулем не перевищуватиме модуля першого члена n -го залишку для цих рядів.

$$\text{Для } \sin x \text{ маємо: } |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ для } \cos x - |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Для нашого прикладу переведемо градусну міру в радіанну:

$$20^\circ = 20 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9} \text{ рад.}$$

$$\cos 20^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^{2n},$$

$$\left| R_n \left(\frac{\pi}{9} \right) \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^{2n+2} < \frac{1}{1000}$$

Нехай $\pi \approx 3,14159$.

$$n=1: \quad R_1 \left(\frac{\pi}{9} \right) \leq \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \approx 0,00061 > 0,0001,$$

$$n=2: \quad R_2 \left(\frac{\pi}{9} \right) \leq \frac{1}{6!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^6 \approx 0,000075 < 0,0001$$

Отже,

$$\cos 20^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \approx 1 - 0,06092 + 0,00061 = 0,93969.$$

4) Для обчислення логарифмів можна використати розклад логарифмічної функції у степеневий ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1; 1].$$

Зауважимо, що цей ряд дуже повільно збігається.

Отже,

$$\ln 1,2 = \ln(1+0,2) = 0,2 - \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,2^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{0,2^n}{n} + \dots$$

Отримали знакопочеревний ряд і залишок:

$$|R_n(0,2)| \leq \frac{0,2^{n+1}}{n+1} < 0,0001.$$

$$n=3: \quad R_3\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4 \cdot 5^4} = \frac{1}{2500} > \frac{1}{10000},$$

$$n=4: \quad R_4\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5 \cdot 5^5} = \frac{1}{15625} < \frac{1}{10000}.$$

Тому:

$$\ln 1,2 \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} - \frac{1}{4 \cdot 5^4} \approx 0,2 - 0,02 + 0,00267 - 0,0004 \approx 0,1827.$$

Однак, формулу для розкладу логарифмічної функції все ж таки можна перетворити у конструктивну, на що у свій час вказував Леонард Ейлер.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) \quad (24.1)$$

Покладемо в цьому розкладі: $\frac{1+x}{1-x} = 1+u \Rightarrow x = \frac{u}{2+u}; |x| < 1 \Rightarrow$

$\left| \frac{u}{2+u} \right| < 1 \Rightarrow u > -1$. Отже,

$$\ln(1+u) = 2 \left(\frac{u}{u+2} + \frac{1}{3} \left(\frac{u}{u+2} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{u}{u+2} \right)^{2n-1} + \dots \right) \quad (24.2)$$

Наприклад,

$$\ln 4 = 2 \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2n-1} + \dots \right) \approx 1,38629436.$$

Якщо у формулі (24.1) покласти $x = \frac{1}{2m+1}$, то:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1 + \frac{1}{2m+1}}{1 - \frac{1}{2m+1}} = \frac{2m+2}{2m} = \frac{m+1}{m},$$

$$\ln \frac{m+1}{m} = 2 \left(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2m+1)^{2n-1}} + \dots \right),$$

$$\ln(m+1) = \ln m + 2 \left(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2m+1)^{2n-1}} + \dots \right)$$

Оцінімо n -ий залишок такого ряду:

$$\begin{aligned} R_n &= 2 \left(\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)(2m+1)^{2n+3}} + \dots \right) \leq \\ &\leq \frac{2}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{(2m+1)^2} + \dots \right) = \frac{2}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2m+1)^2}} = \\ &= \frac{2}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} \cdot \frac{(2m+1)^2}{2m(2m+2)} = \frac{1}{m(2n+1)(2m+1)^{2n-1}(2m+2)} \leq \\ &\leq \frac{1}{m(2n+1)(2m+1)^{2n}} \end{aligned}$$

Обчислимо $\ln 2$ ($n = 4$, $m + 1 = 2$; $m = 1$):

$$\ln 2 \approx \ln 1 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} \right) \approx 0,6931, \quad R_n < \frac{1}{9 \cdot 3^8} < 10^{-4}.$$

Цей ряд збігається швидше, ніж геометрична прогресія із знаменником $\frac{1}{9}$. Тому збільшення на один член ряду збільшує точність $\ln 2$ приблизно на один десятковий знак.

Для обчислення $\ln 3$ ($m + 1 = 3$, $m = 2$) достатньо взяти перші три члени, оскільки

$$R_3 < \frac{1}{2 \cdot (2 \cdot 2 + 3) \cdot 5^4} < 0,00011,$$

і

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} \right) \approx 0,6931 + 0,40547 = 1,0986. \quad \blacksquare$$

Задача 24.2. Обчислити число π .

Розв'язання. Іноді при обчисленні значень функцій зручно користуватися почленним диференціюванням або інтегруванням. Для обчислення числа π розглянемо розклад в ряд функції

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

який є рівномірно збіжним $\forall x \in [-R; R] \subset (-1; 1)$. Отже такий ряд можна почленно інтегрувати в інтервалі збіжності:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Оскільки функція $\operatorname{arctg} x$ є неперервною у точці $x = 1$, то вважають, що останній ряд буде збіжним і в точці $x = 1$, а його сума $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. Однак цей ряд дуже повільно збігається, оскільки для того, щоб похибка обчислення була

меншою $\varepsilon > 0$: $|\Delta| = |R_n| < \frac{1}{2n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$,

потрібно взяти не менше $\left[\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \right]$ членів ряду. Зокрема, якщо

$\varepsilon = \frac{1}{n_0}$, то $n > \frac{n_0 - 1}{2}$, тобто, щоб отримати значення числа π з

точністю до 10^{-3} , потрібно взяти не менше $\left[\frac{1000-1}{2} \right] = 499$ членів

ряду.

Тому побудуємо ряд, який збігається швидше. Нехай $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$.

$$\text{Тоді } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119},$$

$$\operatorname{tg} \left(4\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}, \text{ звідки:}$$

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}; \quad \frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

$$\pi = 16 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5^3 \cdot 3} + \frac{1}{5^5 \cdot 5} - \dots \right) - 4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{239^3 \cdot 3} + \frac{1}{239^5 \cdot 5} - \dots \right).$$

Отже, якщо нас цікавить значення π з точністю до 10^{-7} , то це означає, що $4 \arctg \frac{1}{239} \approx 4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} \right)$, наступний член знакозмінного ряду $\frac{4}{5 \cdot 239^5} < 10^{-10}$, і

$$16 \arctg \frac{1}{5} \approx 16 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} \right),$$

наступний член розкладу $\frac{16}{11 \cdot 5^{11}} < 10^{-7}$. Остаточню ми отримаємо:

$$\begin{aligned} \pi &\approx 16 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} \right) - 4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} \right) \approx \\ &\approx 16 \cdot 0,19739556 - 4 \cdot 0,00418408 = 3,14159264 \approx 3,1415926. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 24.3. Обчислити з точністю до 10^{-4} інтеграл

$$1) \int_0^1 \sin x^2 dx; \quad 2) \int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx$$

Розв'язання. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку, тобто існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$. Проте такий інтеграл, як відомо, не завжди можна обчислити за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, бо не завжди первісна функція для заданої є елементарною. У цьому разі для обчислення визначеного інтеграла застосовують степеневий ряд.

1) Використаємо для підінтегральної функції розвинення у степеневий ряд:

$$\sin x^2 = \left| t = x^2 \right| = x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$x \in (-\infty; +\infty)$, і цей ряд можна почленно інтегрувати:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin x^2 dx &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^{2 \cdot 3}}{3!} + \frac{x^{2 \cdot 5}}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(2n-1)}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{3!} \frac{x^{2 \cdot 3+1}}{(2 \cdot 3+1)} \Big|_0^1 + \frac{1}{5!} \frac{x^{2 \cdot 5+1}}{(2 \cdot 5+1)} \Big|_0^1 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{x^{2(2n-1)+1}}{4n-1} \Big|_0^1 + \dots = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3! \cdot 7} + \frac{1}{5! \cdot 11} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)! \cdot (4n-1)} + \dots \end{aligned}$$

Маємо знакопочережний числовий ряд, отже

$$|R_n| < \frac{1}{(2n+1)!(4n+3)} < \frac{1}{1000}.$$

Якщо $n = 2$, то $|R_2| < \frac{1}{5! \cdot 11} = \frac{1}{1320} < \frac{1}{10000},$

$n = 3$, то $|R_3| < \frac{1}{7! \cdot 15} = \frac{1}{75600} < \frac{1}{10000}.$

Тому $\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3! \cdot 7} + \frac{1}{5! \cdot 11} = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \approx 0,3103.$ ■

2) Аналогічно до попереднього прикладу використаємо відомі розклади:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} e^x &= \sqrt{x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right), x \in (-\infty; +\infty), \\ \int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx &= \int_0^{\frac{1}{9}} \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{1!} + \frac{x^{\frac{1}{2}+2}}{2!} + \dots + \frac{x^{\frac{1}{2}+n}}{n!} + \dots \right) dx = \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{9}} + \frac{x^{\frac{2}{2}+1}}{1! \left(2 + \frac{1}{2} \right)} \Big|_0^{\frac{1}{9}} + \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{2! \left(3 + \frac{1}{2} \right)} \Big|_0^{\frac{1}{9}} + \dots + \frac{x^{\frac{n+1}{2}+1}}{n! \left(n+1 + \frac{1}{2} \right)} \Big|_0^{\frac{1}{9}} + \dots = \\ &= \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 1! \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 2! \cdot 3^7} + \dots + \frac{2}{(2n+1) \cdot n! \cdot 3^{2n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Оцінимо залишок ряду:

$$\begin{aligned}
 R_n &= \frac{2}{(2n+3)(n+1)!3^{2n+3}} + \frac{2}{(2n+5)(n+2)!3^{2n+5}} + \dots = \\
 &= \frac{2}{(n+1)!3^{2n+3}} \left(\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{(n+2)(2n+5) \cdot 3^2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(2n+7) \cdot 3^4} + \dots \right) < \\
 &< \frac{2}{(n+1)!3^{2n+3} \cdot (2n+3)} \left(1 + \frac{1}{(n+2) \cdot 3^2} + \frac{1}{(n+2)^2 \cdot 3^4} + \dots \right) = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{геом.прогресія} \\ b_1 = 1 \\ q = \frac{1}{(n+2)3^2} < 1 \end{array} \right| = \frac{2}{(n+1)!3^{2n+3} \cdot (2n+3)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(n+2) \cdot 3^2}} = \\
 &= \frac{2(n+2)}{(n+1)!3^{2n+1}(2n+3)(9n+17)}. \\
 R_n &< \frac{2(n+2)}{(n+1)!3^{2n+1}(2n+3)(9n+17)} < \frac{1}{10000}.
 \end{aligned}$$

Якщо $n = 2$, то $R_2 < \frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 35} < 0,0001$, тому достатньо для заданої точності взяти два члени числового ряду:

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx \approx \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} \approx 0,02469 + 0,00165 = 0,02634 = 0,0263. \quad \blacksquare$$

Задача 24.4. Знайти похідну k -го порядку функції $f(x)$ у

точці x_0 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $k = 7$, $x_0 = 0$;

Розв'язання. Перший спосіб передбачає знаходження семи похідних й обчислення сьомої похідної у точці $x_0 = 0$. Цей спосіб зрозумілий, однак можуть бути складнощі із обчисленням похідних.

Спробуємо розкласти функцію $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ у степеневий ряд, використавши відомі розклади з таблиці 1 попереднього параграфу.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+x^2} = x \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} = \\ &= x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - x^{11} + \dots, \quad |x| < 1. \\ f'(x) &= 1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8 - 11x^{10} + \dots, \\ f''(x) &= -6x + 5 \cdot 4x^3 - 7 \cdot 6x^5 + 9 \cdot 8x^7 - 11 \cdot 10x^9 + \dots, \\ f'''(x) &= -6 + 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 6 \cdot 5x^4 + 9 \cdot 8 \cdot 7x^6 - 11 \cdot 10 \cdot 9x^8 + \dots, \\ f^{IV}(x) &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x - 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6x^5 - 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8x^7 + \dots, \\ f^V(x) &= 5! - 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5x^4 - 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7x^6 + \dots, \\ f^{(6)}(x) &= -7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3 - 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6x^5 + \dots, \\ f^{(7)}(x) &= -7! + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 - 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5x^4 + \dots, \\ f^{(7)}(0) &= -7! \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 24.5. Знайти границю функції у точці:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}; & \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}; \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right); & \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}. \end{aligned}$$

Розв'язання.

1) Функцію $\ln x$ в околі точки $x_0 = 1$ подамо у вигляді степеневому ряду, використовуючи відомі розклади:

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$$

Тоді:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^{n-1}}{n} + \dots \right) = 1. \quad \blacksquare$$

2) Розкладемо функції $\sin x$ і $\operatorname{tg} x$ у степеневий ряд :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$y = \operatorname{tg} x :$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x,$$

$$y'' = 2 \cos^{-3} x \cdot \sin x; \quad y''' = -6 \cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2 \cos^{-2} x;$$

$$y^{IV} = -24 \cos^{-5} x \cdot \sin^3 x - 6 \cos^{-4} x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^{-3} x \cdot \sin x;$$

$$y^V = -120 \cos^{-6} x \sin^4 x - 72 \cos^{-4} x \sin^2 x + 36 \cos^{-4} x \sin^2 x +$$

$$+ 12 \cos^{-2} x + 12 \cos^{-4} x \sin^2 x + 4 \cos^{-2} x;$$

$$y(0) = \operatorname{tg} 0 = 0; \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 2;$$

$$y^{VI}(0) = 0; \quad y^{(5)}(0) = -8;$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \cdot x + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{16}{5!} x^5 + \dots$$

Повернемося до знаходження границі:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) - \left(x + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{16}{5!} x^5 + \dots \right)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(-\frac{1}{3!} - \frac{2}{3!} \right) + x^5 \left(\frac{1}{5!} - \frac{16}{5!} \right) + \dots}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \dots \right) = -\frac{1}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}{x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots \right)}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots} = 0. \quad \blacksquare$$

4) Використаємо розклад в степеневий ряд експоненціальної функції:

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots,$$

$$a^{-x} = e^{-x \ln a} = 1 - x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} - \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\ln a)^2 + 2 \frac{x^4 (\ln a)^4}{4!} + \dots}{x^2} = \ln^2 a. \quad \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

№1. Обчислити із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

1) $\cos 10^0$;	2) $\sin 10^0$;	3) $\sin 1^0$;
4) $\sqrt[3]{500}$;	5) $\sqrt[3]{68}$;	6) $\sqrt[7]{129}$;
7) $\ln 1,3$;	8) $\ln 0,98$;	9) $\sqrt[10]{1000}$;
10) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$;	11) $\arcsin \frac{1}{3}$;	12) $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{10}$.

№2. Обчислити інтеграли із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

1) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$;	2) $\int_0^{0,8} x^{10} \sin x dx$;
3) $\int_0^{0,5} x \ln(1+x^2) dx$;	4) $\int_2^4 \frac{1}{e^x} dx$;

$$5) \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx;$$

$$6) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx;$$

$$7) \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4};$$

$$8) \int_0^{0,2} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} dx;$$

$$9) \int_0^{0,25} \sqrt[3]{1+x^2} dx;$$

$$10) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$$

З3. Знайти похідну k -го порядку функції $f(x)$ в точці x_0 :

$$1) f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad k=7, \quad x_0=0;$$

$$2) f(x) = x^6 e^x, \quad k=10, \quad x_0=0;$$

$$3) f(x) = x^2 \ln(4+x^2), \quad k=11, \quad x_0=0;$$

$$4) f(x) = \frac{1}{(x^2 - 6x + 18)^2}, \quad k=6, \quad x_0=3;$$

$$5) f(x) = \ln \frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}, \quad k=4, \quad x_0=0;$$

$$6) f(x) = \ln \frac{x^2 - 2x + 3}{2-x}, \quad k=7, \quad x_0=1.$$

З4. Знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right)^{(n)};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \right)^{(n)};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\arctg x}{x} \right)^2 \right)^{(n)};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctg x \cdot \ln(1+x^2) \right)^{(n)};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x(1-x^2)} \ln \frac{1+x}{1-x} \right)^{(n)};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{(n)} .;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - \operatorname{ch} x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \right);$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x}{e^{4x} - 1}.$$

5. Обчислити похибку наближеної рівності

$$\ln(n+1) \approx \ln n + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)^{2k-1}}$$

і обчислити $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$, $\ln 5$, $\ln 10$ з точністю до 10^{-4} .

Творче завдання

Тема. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Мета: систематизувати наближені методи обчислень за допомогою степеневих рядів, зрозуміти їх практичне застосування. Проаналізувати методи, визначити та порівняти похибки при даних обчисленнях. Набути практичних вмінь та навичок при користуванні програмним забезпеченням (Microsoft Office).

Робота над проектом

1. Опрацювати лекційний матеріал посібника: Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу (Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди). Вінниця 2009. 272 с.

2. Пригадати принцип роботи з офісним пакетом Microsoft Office, зокрема Microsoft Word та Microsoft Excel, СКМ.

3. Виконати завдання.

1°. Обчислити число $l \cdot e^a$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-3}$, $\Delta_2 = 10^{-5}$.

2°. Обчислити $\cos \beta^0$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

Обчислити $\sin \beta^0$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

3°. Обчислити $\sqrt[n_1]{m_1}$ та $\sqrt[n_2]{m_2}$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

4°. Обчислити з точністю до $\Delta_1 = 10^{-4}$, $\Delta_2 = 10^{-8}$ визначений інтеграл $\int_0^p \sqrt[l]{1+x^r} dx$, де $l, \beta, m_1, m_2, p, q, r, a, f, c$ – відповідні параметри.

Схема дій

1°. Обчислити число $l \cdot e^a$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-3}$, $\Delta_2 = 10^{-5}$.

Приклад. $l=1, a=1$. $l \cdot e^a = 1 \cdot e^1 = e$.

Розв'язання.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots; e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!};$$

$$R_n(x) \leq \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \Delta.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	n	n!	l	a	Rn	Δ	Rn<Δ	ai	$l \cdot e^a$		
2	8	1	1	1	0,000003061924	0,00001	ИСТИНА	1,0	2,718055555556		
3		2						0,5			
4		3						0,166666666667			
5		4						0,041666666667			
6		5						0,008333333333			
7		6						0,001388888889			
8		7						0,000198412698			
9		8						0,000024801587			
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											

Рис. 24.1

Відповідь. $e \approx 2,7180556$.

2°. Обчислити $\cos \beta^0$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \gamma$, де γ – градусна міра кута, – формула для переводу

градусної міри кута в радіани.

Степеневі ряди:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots;$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots.$$

Приклад.

	A	B	C	D	E	F	G
	град.→рад.	n	β	$ R_n(x) $	Δ	$ R_n(x) < \Delta$	n
1	0,55850536	6	0,55850536	0,0000000000019230527039352	0,0000000001	ИСТИНА	1
2							2
3							3
4							4
5							5
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							

Рис. 24.2

	F	G	H	I	J
	$ R_n(x) < \Delta$	n	a_i	$\cos \beta$	$\cos \beta$
1	ИСТИНА	1	-0,15596411893079500000	0,848048096154506	0,848048096156426
2		2	0,00405413439897652000		
3		3	-0,00004215329997089330		
4		4	0,00000023480008178521		
5		5	-0,00000000081378639734		
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					

Рис. 24.3

§ 25. Системи комп'ютерної математики

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Електронні засоби навчання	Electronic learning tools
Електронні таблиці	Spread sheets
Системи комп'ютерної математики	Computer math systems
Графічний калькулятор	Graphing calculator
3D Калькулятор	3D calculator
Калькулятор Сюїта	Calculator Suite

У сучасному освітньому середовищі, говорячи про інформаційні технології, фактично маємо на увазі **електронні засоби навчання** (ЕЗН). Під електронними засобами навчання розуміють програмні продукти, розроблені з використанням комп'ютерних та телекомунікаційних технологій, які сприяють активному й творчому засвоєнню майбутніми фахівцями знань, умінь і навичок, необхідних для їхньої професійної діяльності [16].

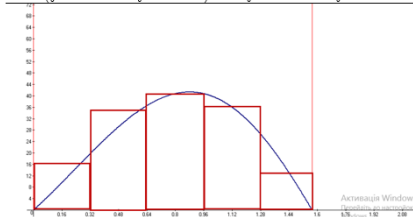
Основною метою створення електронних засобів навчання є трансформація реальних об'єктів вивчення у візуальну інформацію, яка є більш доступною для сприйняття і сприяє ефективному засвоєнню навчального матеріалу. Електронні засоби навчання, таким чином, забезпечують повне або модельне представлення про об'єкт вивчення, виокремлюють його змістові характеристики та подають їх у зручній для навчального сприйняття формі.

До складу електронних засобів навчання, залежно від дидактичної мети, рівня складності реалізації (у тому числі програмної) та інших чинників, можуть входити: електронні таблиці, електронні бібліотеки (підручники), мультимедійні презентації, навчальні тренажери, тестові системи, віртуальні лабораторні роботи, операційні системи, бази даних, вебсайти, відеокурси тощо [16].

Окрему увагу варто приділити *електронним таблицям*, або табличним процесорам, які є прикладним програмним забезпеченням загального призначення для опрацювання даних, поданих у табличній формі. Електронна таблиця дозволяє зберігати великі обсяги вхідних даних, результатів обчислень, а також алгебраїчні та логічні зв'язки між ними. Користувач має можливість редагувати, переглядати, передавати в електронному вигляді або друкувати ці таблиці. У клітинках таблиць можуть зберігатися дані різних типів: текстові, числові, дати, формули тощо. Основною перевагою електронних таблиць є автоматизований перерахунок пов'язаних даних у разі зміни значення будь-якого з елементів таблиці.

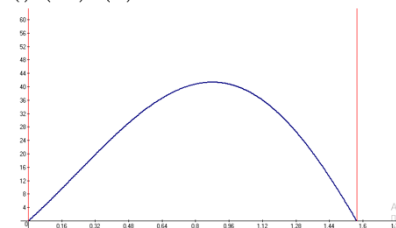
Електронні таблиці широко використовуються в навчанні математичних дисциплін, зокрема під час виконання лабораторних робіт, що потребують значних обсягів обчислень і складних для ручного виконання. Наприклад, у курсі математичного аналізу під час вивчення тем, пов'язаних із наближеними методами обчислення, доцільно застосовувати програмне середовище Microsoft Excel. На рис. 25.1 представлено приклад використання електронної таблиці для теми «Наближені методи обчислення визначених інтегралів».

Обладнання: ПК з відповідним програмним забезпеченням, посібник "Лекції з математичного аналізу", "Робочий зошит студента".

 $k=1, a=4, b=7, m=2.$
$$\begin{aligned}
 I_1 &= 2^2 \int_0^{\pi/2} (4x + 7) \sin 2x \, dx = \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} (4x \sin 2x + 7 \sin 2x) \, dx = \\
 &= 4 \left(\int_0^{\pi/2} 4x \sin 2x \, dx + \int_0^{\pi/2} 7 \sin 2x \, dx \right) = 4 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin 2x \, dx + 7 \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx \right) =
 \end{aligned}$$


1.4. Обчислити інтеграл методом прямокутників. Зробити відповідні обчислення середовищі Microsoft Excel 2003 для $n=5$ та $n=10$.

$$= \left| \begin{array}{cc} uv - \int v \, du & \\ u = x & du = dx \\ dv = \sin 2x \, dx & v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = 4(4(-\frac{1}{2}x \cos 2x) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx - 7(\frac{1}{2} \cos 2x) \Big|_0^{\pi/2}) = 4(-4\frac{\pi}{4}(-1) + 0 - \frac{7}{2}(-1) + \frac{7}{2}) = 4(\pi + 7) = 4\pi + 28 = 40.5663706.$$

$$Y(x)=4*(4*x+7)*\sin(2*x)$$


Для $n=5$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x	b	b-a	n	x	$y=(4*x+2)*5*(n/2)^2$	$5*(n/2)^2$	$f=(G2)^*(I2)$	$i=(H2)^4$	$b-a/f$	
2	0	1.6	1.571	5	6.15706	2.87578007	32.81888316	10.3103562	41.24162	0.314159	
3					0.471239	7.118806081					
4					0.785398	10.14159246					
5					1.099557	9.22136152					
6					1.413717	3.91056883					

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	6.00	1.57	1.57	10.00	$y=6d^2/7\pi n^2z$	$C_{\text{pym}}=y/Fz^{1/3}n^{1/3}$	$C_{\text{pym}}^2/C_{\text{pym}}^2=10M^2/4$	(b-a)/n	
2					0.08	1.14	64.83	10.18	40.73
3					0.24	3.61			0.16
4					0.39	6.06			
5					0.55	8.20			
6					0.71	9.71			
7					0.86	10.33			
8					1.02	9.88			
9					1.18	8.28			
10					1.34	5.60			
11					1.48	2.63			

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2} \right)$$

Для $n=5$

11	a	b	c	b-a	$(b-a)^2/(24^2\pi^2)$	$\Gamma(a)$	$\Gamma(b)$
12	0	1.57	5	1.5706	0.006496641	$16^2\cos(2^*a)16^4(4^*a+7)^*\cos(2^*a)^2$	$16^6\cos(2^*a)^2+16^6\cos(2^*a)+16^6(4^*a+7)^*\sin(2^*a)$
13							
14							
15							
16							
17						$\Gamma(b, 3d)$	$\ln$
18						89.19188155	0.5741599
19							

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	z		$10 \cdot 4^x + 3(2^x + 1)$	10	1^x
2	0	1.57	00	1.5700	0.00000001	$10^2 \cdot \cos(2^x + 2) + 4(2^x + 1) \cdot \cos(2^x + 2)$	$10^2 \cdot \cos(2^x + 2) + 4(2^x + 1) \cdot \cos(2^x + 2) + 3(2^x + 1)^2 \cdot x \cdot 2^x \cdot (\cos(2^x + 2))$
3							
4							
5							
6						$1^2(0.00)$	E_0
7						$170,092,7911$	0.267083374

Тестові завдання є актуальним педагогічних інструментом у

610

здобувачами освіти. Застосування тестових завдань дозволяє не лише швидко оцінити результати навчання, а й отримати автоматизовану статистику успішності за підсумками виконаної роботи.

Тестові завдання можуть мати як відкриту, так і закриту форму, при цьому доцільним є їхнє структурування за рівнями складності. Такий підхід забезпечує адаптивність завдань до потреб студентів з різним рівнем підготовки – від початкового до високого.

Сьогодні у відкритому доступі в мережі Internet наявна значна кількість онлайн-ресурсів, що надають можливість створення та адміністрування тестів. Найпоширеніші з них наведено на рис. 25.2.



Рис. 25.2. Ресурси для створення тестувань.

У процесі вивчення математичних дисциплін доцільним є використання *систем комп'ютерної математики* (СКМ) – програмних засобів, призначених для виконання числових і символьних обчислень різного ступеня складності з метою розв'язання математичних, наукових або прикладних задач. СКМ охоплюють широкий спектр програмних продуктів – від відносно простих систем, таких як Mathcad і Derive, до потужних інструментів з розширеними функціональними можливостями, зокрема Mathematica, MATLAB та Maple, що забезпечують візуальну інтерпретацію результатів обчислень.

Важливою особливістю СКМ є інтерактивність, що дозволяє користувачеві впливати на хід обчислень та коригувати стратегію розв'язання задач відповідно до поставленої мети. Високий рівень

візуалізації, притаманний сучасним СКМ, підвищує ефективність сприйняття обчислювальних процесів і результатів. Вибір конкретної системи визначається цілями її застосування, характером та складністю задач, а також специфікою навчальної або професійної діяльності.

СКМ стали невід'ємним інструментом як для фахівців-математиків, так і для науковців та інженерів, які використовують математичні методи для моделювання й дослідження об'єктів у різних галузях. Вони широко застосовуються для розв'язання наукових, інженерних і навчальних задач, забезпечують зручну наочність вхідних даних і результатів, функціонують як довідники з математичних розрахунків. Завдяки потужній графіці, засобам візуального програмування й використання техніки мультимедіа роль СКМ виходить далеко за межі лише математичних розрахунків [7, 24].

СКМ дедалі ширше використовують викладачі математичних дисциплін у закладах вищої освіти під час проведення лекцій, лабораторних та практичних занять з метою активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів, розвитку їх системного мислення, просторової уяви, самостійності. За допомогою СКМ студенти чітко можуть виділити в завданні об'єкт дослідження, а також систему та системні зв'язки за допомогою яких формується системне мислення.

Станом на сьогодні існує велика кількість таких програмних засобів, зокрема: Maple, Maxima, GeoGebra, Mathematica, Derive, MATLAB, MathCAD, AdvancedGrapher, Gran. Кожна з перелічених систем має власні переваги та обмеження, що представлено в таблиці 25.1.

Таблиця 25.1. Порівняльна таблиця систем комп'ютерної математики (за В. Л. Юнчик, А. А. Федонюк) [27]

СКМ	Переваги СКМ	Недоліки СКМ
<i>Derive</i> 	Аналітичні обчислення. Мінімальні вимоги до апаратних ресурсів.	Слабка візуалізація і графіка, недостатня підтримка функцій в символьних обчисленнях.
<i>Mathematica</i> 	Сумісність із комп'ютерними платформами. Документи (notebook). Підтримка синтезу звуку. 3D-графіка.	Надмірний захист від копіювання. Орієнтація на досвідчених користувачів.
<i>Matlab</i> 	Унікальні матричні засоби, дескрипторна графіка, висока швидкість обчислень, адаптація до завдань користувача і численність пакетів розширення системи.	Обмежені можливості символьних обчислень. Дороговизна системи та 11 пакетів розширень.
<i>Mathcad</i> 	Якісна графіка і візуалізація обчислень. Зручний інтерфейс. Наявність палітри математичних знаків. Великий вибір електронних книг і бібліотек, операторів і функцій	Обмеженість символьної математики. Примітивне програмування. Вартість електронних книг бібліотек.

<i>Maple</i> 	Продумане ядро символічних обчислень. Документи (notebook). Високоякісна графіка. Зручна система допомоги.	Відсутність синтезу звуків.
<i>MuPad</i> 	Чітка графіка. Документи (notebook). Достатні вимоги до апаратних ресурсів.	Форматування графіків. Обмежена система допомоги й апробація.
<i>GeoGebra</i> 	Якісна графіка і візуалізація. Зручний інтерфейс. Вільна поширюваність. Інтерактивна графіка, алгебра та електронні таблиці. Постійно оновлювана база методичних і дидактичних матеріалів у вільному доступі. Форум користувачів.	Немає функцій обчислення об'єму фігур обертання.
<i>Gran</i>	Український програмний засіб, зручний інтерфейс.	Відсутність можливості online-роботи.

Однією з перших систем комп'ютерної математики є **Maxima**, ключовою перевагою якої є розширена підтримка символічних обчислень. За допомогою даного програмного засобу можна ефективно розв'язувати алгебраїчні рівняння та системи рівнянь, виконувати операції диференціювання, інтегрування, а також розкладання функцій у ряди. Найзручнішою графічною оболонкою

для роботи з *Maxima* вважається *wxMaxima*, яка поєднує зручність та функціональність, властиву відомим програмним продуктам *Maple* та *MathCAD*. Система має ґрунтовну документацію, що сприяє її ефективному використанню в освітньому й науковому процесі.

Maxima функціонує як консольна програма та підтримує пакетний режим обробки даних, що дозволяє здійснювати передавання команд через текстовий файл із подальшим отриманням результатів у вигляді текстового виводу. Крім того, *Maxima* може слугувати платформою для створення спеціалізованих додатків, зокрема із використанням розмітки *TeX* та її розширення *TeXmacs*.

Дана СКМ інтегрована до багатьох дистрибутивів операційної системи *Linux* і доступна у відповідних репозиторіях. Вона входить до складу освітніх збірок, зокрема *AltLinux*, *Edubuntu* та *EduMandriva*.

Окремої уваги заслуговують програмні засоби серії **GRAN**, які функціонують під управлінням операційної системи *Windows*. Вони вирізняються простотою у використанні, інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом, наближеним до середовища типових офісних і мультимедійних програм (*Microsoft Word*, *Microsoft Excel*, *СУБД*, графічні та музичні редактори), а також підтримкою контекстно-чутливої допомоги.

Зокрема:

*GRAN-1 (G*raphic*A*nalysis) призначено для графічного аналізу функцій;

*GRAN-2D (G*raphic*A*nalysis 2-*D*imension) – для аналізу систем геометричних об'єктів на площині;

*GRAN-3D (G*raphic*A*nalysis 3-*D*imension) – для роботи з просторовими геометричними об'єктами.

Ці програмні засоби можуть ефективно застосовуватися в освітньому процесі для формування навичок дослідження математичних моделей засобами комп'ютерної графіки.

Програмний засіб **AdvancedGrapher** [11], що працює на базі операційної системи Windows, вирізняється зручним і функціональним інтерфейсом користувача. Серед його можливостей – побудова до 100 графіків на одній координатній площині в межах одного документа. Програма підтримує побудову графіків у полярних координатах, роботу з параметричними рівняннями, графічне представлення рівнянь, нерівностей та їхніх систем. Також AdvancedGrapher забезпечує проведення регресійного аналізу (зокрема побудову регресійних кривих), виконує чисельне інтегрування, пошук нулів і екстремумів функцій, має вбудований калькулятор та інші обчислювальні інструменти.

Комплексна обчислювальна платформа **Matlab** надає сучасне інтегроване середовище розробки (IDE), що включає вікно команд, історію виконання команд, а також менеджер файлів. Matlab широко застосовується для створення прикладних програм із керованим кодом. Базова версія програмного продукту містить великий набір математичних функцій, а об'єктно-орієнтована парадигма програмування разом із розвинутими засобами побудови графічного інтерфейсу користувача забезпечує платформі конкурентні переваги над більшістю інших математичних систем. Основним недоліком є висока вартість ліцензії.

Для вивчення тем, пов'язаних із динамічною геометрією, доцільно використовувати спеціалізовані математичні пакети, такі як DG, GeoGebra, Cabri II Plus, TheGeometer'sSketchpad, які забезпечують інтерактивну побудову та дослідження геометричних об'єктів і конструкцій [27].

GeoGebra є потужною системою динамічної математики, що має універсальний характер і широко застосовується в освітньому процесі для підтримки вивчення геометрії, алгебри, математичного аналізу, теорії ймовірності, математичної статистики та інших розділів математики [12].

У процесі навчання математичних дисциплін GeoGebra використовується як інструмент для наочного подання математичних об'єктів і виразів, візуалізації процесів їх побудови, а також як середовище для моделювання та емпіричного дослідження їхніх властивостей. Крім того, система виконує функції інструментально-вимірювального комплексу, забезпечуючи користувачеві доступ до спеціалізованих засобів створення, трансформації та вимірювання характеристик математичних об'єктів.

Застосування GeoGebra значно підвищує наочність навчального матеріалу, сприяє кращому розумінню теоретичних положень за рахунок інтерактивних ілюстрацій (графіків, таблиць, динамічних моделей), а також дозволяє уникнути рутинних операцій, пов'язаних з побудовою допоміжних конструкцій і зображень. Середовище забезпечує ефективну демонстрацію властивостей досліджуваних об'єктів і сприяє активному залученню здобувачів освіти до дослідницької діяльності.

GeoGebra поєднує функціональні можливості програм динамічної геометрії (CabriGeometry, Geometer'sSketchpad), систем комп'ютерної алгебри (Derive, Maple) у доступному та зручному для викладання й вивчення математики. GeoGebra є ефективним інструментом для побудови графіків математичних функцій та візуалізації математичних об'єктів.

Актуальна версія GeoGebra підтримує декілька динамічно взаємопов'язаних представлень математичних об'єктів, зокрема

графічне, алгебраїчне та табличне. Попри розширення функціональних можливостей, інтерфейс програми залишається інтуїтивно зрозумілим, що є основою концептуального підходу до її подальшого розвитку.

Система комп'ютерної математики GeoGebra пропонує сучасні інструменти для викладання і вивчення математичних дисциплін у закладах вищої освіти (рис. 25.3) [12].



Рис. 25.3. Інструменти GeoGebra.

Однією з базових програм є **Графічний Калькулятор**, яка дає змогу студентам будувати графіки функцій, досліджувати параметричні та полярні криві, працювати зі слайдерами для динамічного аналізу змін параметрів. Цей додаток широко використовується у курсах математичного аналізу та аналітичної геометрії, де особливо важливо візуалізувати складні залежності та властивості функцій.

Для тривимірного моделювання в математичних курсах застосовується **3D Калькулятор**, який дозволяє будувати просторові фігури, векторні поля, графіки функцій двох змінних, поверхні другого порядку тощо. Його використання є надзвичайно корисним при вивченні аналітичної геометрії у просторі, тем векторного аналізу та диференціальних рівнянь. Тривимірна візуалізація значно полегшує засвоєння просторових понять, що традиційно викликають труднощі у студентів.

Науковий Калькулятор має вузькоспеціалізоване призначення: він виконує обчислення зі складними виразами, статистичними параметрами, тригонометричними та

логарифмічними функціями. Цей інструмент використовується у розв'язанні прикладних задач, зокрема в математичній статистиці, теорії ймовірностей, а також під час виконання тестових завдань, де потрібно швидко отримати чисельний результат.

Для забезпечення комплексної роботи над задачами різного рівня складності створено **Калькулятор Сюїта** – інтегрований додаток, який об'єднує функціональність усіх попередніх калькуляторів. Він зручний для застосування в умовах змішаного або дистанційного навчання, коли студентам потрібно оперативно перемикатися між 2D- та 3D-візуалізаціями або виконувати символічні обчислення.

Одним з найпотужніших додатків для академічного використання є **GeoGebra Класична**. Це повнофункціональне середовище з системою комп'ютерної алгебри (СКА), можливістю створення інтерактивних аплетів, анімацій, побудови складних геометричних конструкцій і автоматизованих досліджень. Воно особливо корисне під час створення дидактичних матеріалів викладачами та підготовки студентських дослідницьких проєктів.

Для організації навчального процесу та створення мультимедійних матеріалів застосовується **Нотатки** – додаток, який дозволяє поєднувати текстові пояснення, формули, графіки, зображення й відео в одному інтерактивному зошиті. Це сприяє активному навчанню, де студенти можуть вести власні цифрові конспекти, додаючи до них динамічні ілюстрації або приклади, що змінюються в реальному часі.

З метою формування обчислювальних навичок і закріплення теоретичних знань доцільно використовувати **Математичний практикум**. Цей додаток містить адаптивні вправи з автоматичною перевіркою правильності розв'язань, надає покрокові підказки,

допомагає студентам самостійно навчатися й удосконалювати навички (рис. 25.4) [12].

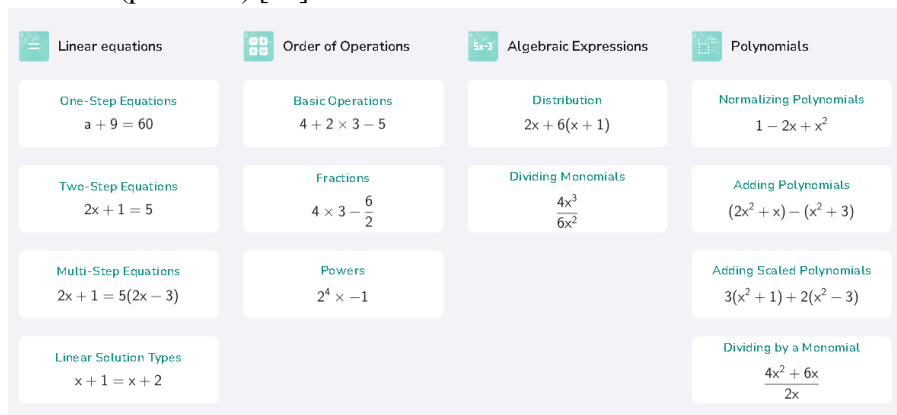


Рис. 25.4. Математичний практикум.

Для інтерактивного управління навчальним процесом викладачі використовують **GeoGebra Співробітництво в класі** (рис. 25.5). Цей додаток дозволяє створювати цифрові уроки, організовувати онлайн-активності, відстежувати дії студентів у реальному часі та надавати зворотний зв'язок. Такий підхід активізує студентів, сприяє розвитку самостійності й забезпечує ефективну комунікацію між учасниками освітнього процесу.

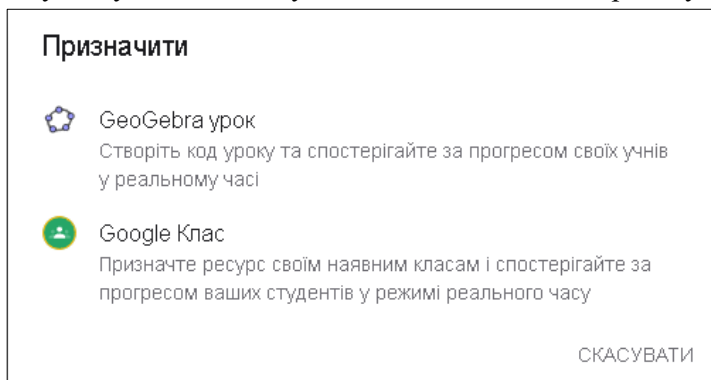


Рис. 25.5. Співробітництво у класі.

Додатки GeoGebra формують цілісне цифрове середовище для підтримки вивчення математичних дисциплін у вищій школі,

поеднуючи інструменти для аналітичного мислення, візуалізації, самостійної роботи та організації взаємодії студентів і викладачів.

Система має розширений набір **статистичних функцій**, що дозволяє обчислювати ключові статистичні характеристики вибірки, зокрема **міри центральної тенденції та математичне сподівання**. Інтерфейс GeoGebra забезпечує наочне подання результатів аналізу у вигляді **гістограм, діаграм розсіювання, полігонів частоттабличних представлень даних**, що сприяє глибшому розумінню статистичних закономірностей.

З метою вдосконалення сервісу для збереження, перегляду, використання та обміну відкритими електронними дидактичними матеріалами, створеними за допомогою GeoGebra, було розроблено спеціалізовану онлайн-платформу GeoGebraTube, яка надає користувачам можливість оцінювати якість представлених ресурсів і залишати коментарі, сприяючи формуванню спільноти практиків і розвитку методичних напрацювань.

GeoGebra постійно розвивається як програмний продукт. Одним із прикладів інновацій є впровадження режиму іспиту – спеціального інструменту, який дозволяє проводити контрольні заходи без доступу до інтернету, GeoGebraTube чи іншого стороннього програмного забезпечення. Усі дії користувача під час іспиту автоматично фіксуються в журналі, що забезпечує прозорість і контроль навчального процесу.

Однією з важливих характеристик системи динамічної математики **GeoGebra** є її інтеграція з платформою дистанційного навчання **Moodle**. Це забезпечується за допомогою спеціального модуля – **GeoGebraFilter (MathApplets)**, доступного на офіційному сайті moodle.org [4]. Застосування цього фільтра дозволяє вбудовувати аплети GeoGebra до різноманітних елементів курсу: навчальних лекцій, лабораторних і практичних робіт, тестів,

форумів, блогів тощо. У параметрах фільтра можна налаштувати характеристики візуалізації аплетів (ширину, висоту, тип пристрою користувача), що забезпечує адаптивність відображення ресурсів відповідно до використовуваного апаратного забезпечення. Джерелом аплетів можуть слугувати як зовнішні ресурси (зокрема, офіційний сайт GeoGebra), так і внутрішні сховища системи Moodle. Крім того, GeoGebra доступна й для мобільного використання – завдяки версії **GeoGebraMobile**.

Для підвищення мобільності у навчанні створено додаток GeoGebraGraphingCalculator, який доступний на платформах Android, iOS та Windows. Цей інструмент сприяє ефективній організації навчання математичних дисциплін і дозволяє створювати динамічні графічні об'єкти з доступом до ресурсів GeoGebraTube.

У системі GeoGebra реалізовано модуль для управління домашніми завданнями: викладач може призначати завдання, а платформа зберігає всі дані щодо його виконання – оцінки, дати, тривалість роботи та інформацію про побудову кожної спроби. Студенти мають можливість зберігати проміжні результати для подальшого доопрацювання аплетів, що сприяє розвитку навичок самооцінювання та вдосконалення математичної грамотності [24].

Запропоновано інфраструктуру сучасних вебресурсів на базі технологій Web 2.0, хмарних сервісів і Вікі-платформ для підтримки користувачів, налагодження між ними співпраці та обміну досвідом роботи з GeoGebra. Офіційний сайт www.geogebra.org [12] надає доступ до:

- вільної науково-методичної бази з матеріалами дидактичного призначення;
- форуму користувачів для обговорення актуальних питань;

➤ інформаційних повідомлень щодо подій, тренінгів та ініціатив у світовій спільноті GeoGebra.

Для активізації досліджень і подальшого вдосконалення системи динамічної математики GeoGebra у травні 2008 року під час конференції в Кембриджі було засновано Міжнародний інститут GeoGebra (InternationalGeoGebraInstitute, IGI) – міжнародну професійну мережу, основними завданнями якої є:

➤ забезпечення навчання, підтримки та професійного розвитку вчителів, викладачів і студентів педагогічних закладів вищої освіти;

➤ модернізація й удосконалення функціонального пакету GeoGebra;

➤ створення та вільне поширення інноваційних дидактичних матеріалів, розроблених із використанням GeoGebra;

➤ розвиток співпраці між IGI та регіональними центрами GeoGebra;

➤ проведення і підтримка наукових досліджень, орієнтованих на покращення процесу викладання й вивчення математики.

Сьогодні спільнота GeoGebra налічує понад 300 000 відкритих інтерактивних робочих аркушів і книг, що використовуються в освітньому процесі. Для сприяння колективній діяльності між учнями та викладачами реалізовано функціонал GeoGebra-груп (CollaborationforEveryone), який дозволяє спільно опрацьовувати текстові документи, зображення, відео, PDF-файли та аплети.

GeoGebra підтримує понад 50 мов і здобула численні міжнародні відзнаки в галузі освітніх технологій, серед яких: EASA 2002, Comenius 2004, eTwinning 2006, AECT 2008, BETT finalist 2009, TechAward 2009, NTLC Award 2010, MERLOT ClassicsAward 2013, Microsoft PartneroftheYear 2015, Archimedes 2016 тощо.

Існує низка обґрунтованих причин, що зумовлюють потребу фахівців у галузі математики та науково-технічних досліджень опанувати основи роботи з кількома системами комп'ютерної математики. Серед таких причин можна виокремити наступні:

➤ необхідність раціонального вибору програмного забезпечення відповідно до специфіки розв'язуваних математичних задач, що забезпечує ефективність обчислювального процесу;

➤ потреба у перехресній перевірці результатів складних обчислень шляхом їхнього розв'язання в різних математичних середовищах, що підвищує достовірність і надійність отриманих висновків;

➤ вимога до підготовки якісних математичних документів (наукових статей, технічних звітів, навчальних матеріалів тощо), що передбачає інтеграцію аналітичних, символьних і графічних можливостей різних СКМ.

Такий підхід сприяє формуванню універсальної професійної компетентності та розширює інструментальні можливості дослідника або педагога.

Розглянемо, які з команд програмного забезпечення GeoGebra ми можемо використовувати при вивченні теми «§ 11. Обчислення площ плоских фігур і довжин плоских кривих».

Задача 11.1. Знайти площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 11.1.

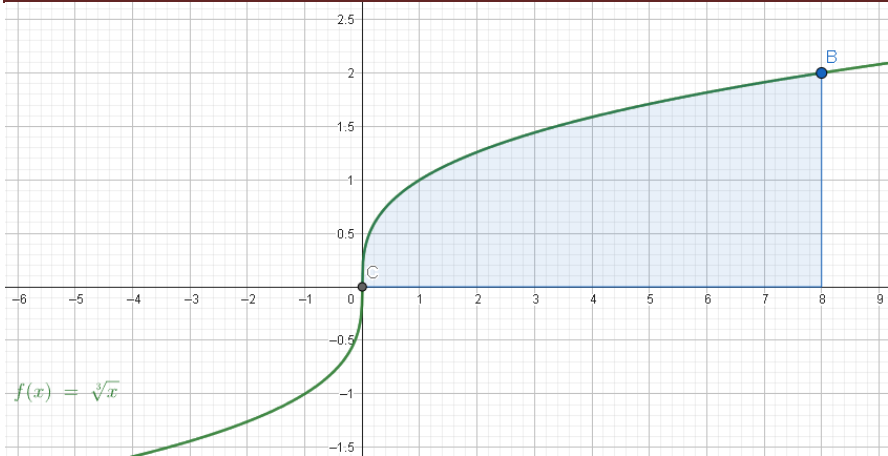


Рис. 11.1.

Розв'язання.***I спосіб (без використання програмного засобу).***

Будемо використовувати формулу $\int_a^b f(x)dx$:

$$S_1 = \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \Big|_0^8 = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{8^4} - 0) = 12 \text{ (кв. од.)}$$

II спосіб (за допомогою програми GeoGebra).

1) у рядок введення записуємо функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

2) вказуємо точку $C(0;0)$;

3) ставимо точку з координатами $B(8;2)$;

4) обчислюємо інтеграл, для цього серед запропонованих функцій обираємо *ІнтегралМіж(Функція, Початкове значення x, кінцеве значення)*, вносимо відповідні значення і отримаємо результат розрахунку $S=12$ (рис. 25.6).

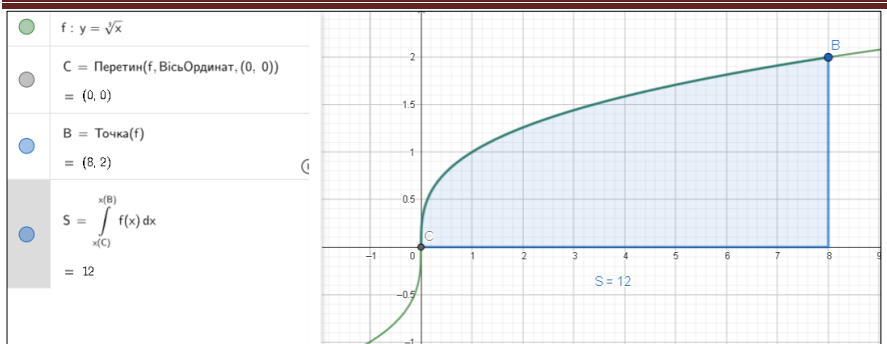


Рис. 25.6.Обчислення площі криволінійної трапеції у GeoGebra

У таблиці 25.2, розроблений Стефаном Штейнхаусом, подано порівняльні характеристики найбільш відомих і поширених у світі СКМ, що дає уявлення про можливість їх використання у закладах вищої освіти при вивченні математичних дисциплін.

Таблиця 25.2. Порівняльна таблиця систем комп'ютерної математики (за С. Штейнхаусом) [5]

СКМ(версія)	GAUSS 8.0	Maple V11	Mathematica 6.0	Matlab 2008a	Scilab 4.1.2
Категорія порівняння	%	%	%	%	%
Математичні операції (38%)	69,56	55,10	76,04	68,79	43,88
Графічні операції (10%)	60,86	60,88	84,63	88,49	51,32
Засоби програмування (9%)	62,70	50,81	64,86	72,43	62,16
Управління даними (5%)	62,43	64,06	76,03	72,77	53,71
Доступні операційні платформи (2%)	76,92	69,23	100,00	76,92	46,15
Швидкість обчислень (36%)	21,85	11,16	39,07	54,68	24,51

Системи комп'ютерної математики

Інсталяція, зручність у навчанні використанні (15%)	35,41	87,54	96,27	76,52	35,41
Загальний результат	52,11	51,13	71,05	69,58	42,28
Рейтинг	3	4	1	2	5
СКМ(версія)	GAUSS 8.0	Maple V11	Mathematica 6.0	Matlab 2008a	Scilab 4.1.2
Категорія порівняння	%	%	%	%	%
Стандартні математичні функції (5%)	77,27	100,0	100,0	98,18	81,82
Алгебра (15%)	76,97	87,88	84,85	93,94	78,79
Аналіз (10%)	84,62	100,0	100,0	100,0	84,62
Чисельна математика (10%)	53,33	75,00	100,0	85,00	41,67
Стохастика, розподіли (20%)	63,87	64,44	92,00	46,89	33,89
Статистика (20%)	64,17	9,57	34,96	53,39	31,30
Інші математичні функції (20%)	73,85	23,08	64,62	56,15	11,54
Загальний результат	69,56	55,10	76,04	68,79	43,88
Рейтинг	2	4	1	3	5

На прикладі прикладної задачі з математичного аналізу, що має економічний зміст, можна продемонструвати доцільність використання тієї чи іншої системи комп'ютерної математики. Розглянемо наступну постановку задачі: виготовляються два види товарів, кількість яких позначено як x та y ; ціни відповідно становлять $P_1 = 8$, $P_2 = 10$ грошових одиниць. Функція витрат на

виробництво має вигляд $C = x^2 + xy + y^2$. Необхідно визначити таку кількість кожного з товарів, за якої прибуток підприємства буде максимальним.

Для розв'язання цієї задачі будується математична модель, яка зводиться до задачі знаходження екстремуму функції двох змінних. Проаналізуємо розв'язання даної задачі в середовищі комп'ютерної математики **Maple** (рис. 25.7). Це програмне забезпечення надає зручні засоби як для побудови математичної моделі та її аналітичного опрацювання, так і для візуалізації отриманих результатів, що істотно спрощує аналіз і тлумачення розв'язку.

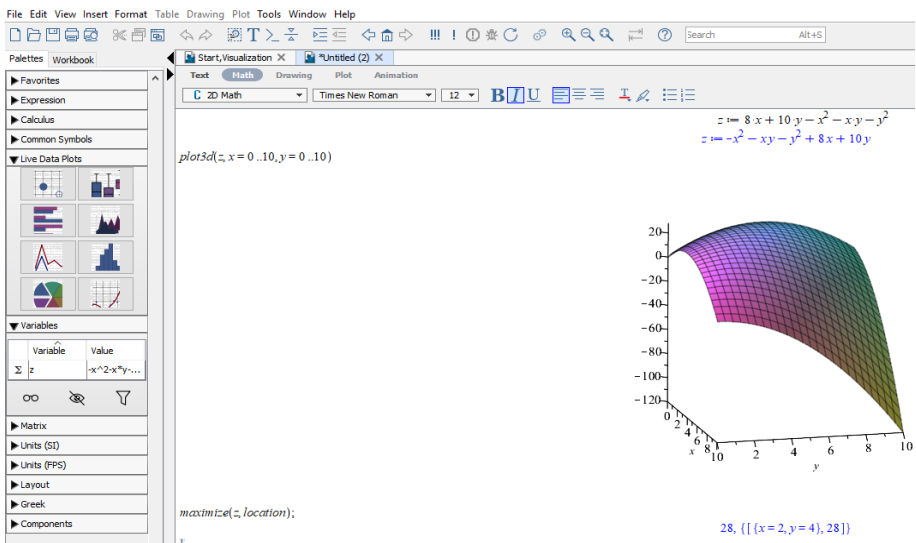


Рис.25.7. Розв'язання математичної моделі в Maple
(виконання авторське).

Наступне програмне середовище **Maxima** (рис. 25.8). Тут для отримання розв'язку математичної моделі потрібно зробити чимало логічних кроків. Також є можливість візуалізувати задачу.

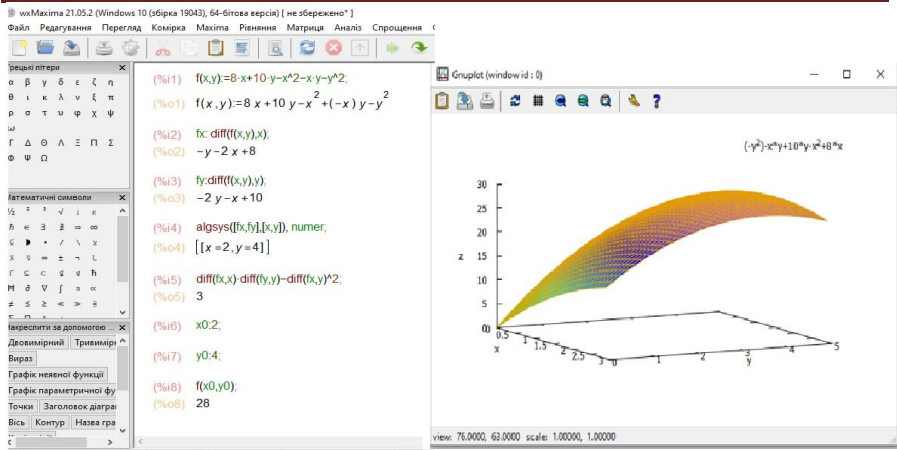


Рис.25.8. Розв'язання математичної моделі в Maxima (виконання авторське).

А от, наприклад, у програмному середовищі GeoGebra (рис. 25.9) дану задачу розв'язати неможливо, оскільки тут є лише можливість знайти екстремум функції однієї змінної. Проте тут є можливість візуалізації задачі, що теж може бути корисним під час її розв'язування.

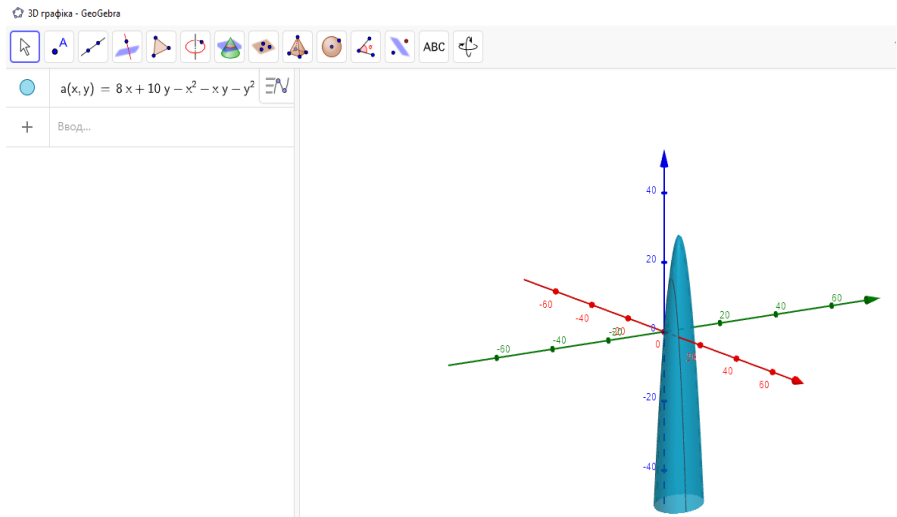


Рис. 25.9. Візуалізація задачі в GeoGebra (виконання авторське).

Знання та вміння працювати з різними системами комп'ютерної математики є сьогодні невід'ємною складовою якісної математичної освіти. Ці системи дають можливість реалізувати сучасний підхід до вивчення математики, де теоретичні знання поєднуються з практичними навичками моделювання, обчислення та візуалізації.

Важливо, щоб студенти не лише володіли математичним апаратом, а й розуміли, *які інструменти доцільно застосовувати для розв'язання конкретних типів математичних задач.*

Наприклад, GeoGebra – це ідеальний інструмент для візуалізації функцій, побудови графіків, динамічної геометрії та роботи з інтерактивними моделями. MATLAB чи Mathematica, натомість, більш ефективні для складного чисельного моделювання, роботи з великими масивами даних, символьними обчисленнями та автоматизованим доведенням тверджень. Така орієнтація в можливостях і обмеженнях різних СКМ формує у студентів гнучкість мислення, технологічну та інформативну компетентність і вміння приймати обґрунтовані рішення у процесі математичного аналізу.

Особливо важливим є розвиток навичок порівняння результатів розрахунків, отриманих у різних середовищах СКМ. Це дозволяє не лише виявити похибки чи неточності, а й краще зрозуміти природу задачі, проконтролювати достовірність та адекватність обраного для розв'язку методу. Такий порівняльний підхід формує в студентів критичне ставлення до отриманих результатів, розвиває навички математичного моделювання та дослідницької діяльності.

Більше того, володіння СКМ сприяє формуванню професійних компетентностей студентів, зокрема в галузях інженерії, прикладної математики, економіки, ІТ тощо. В умовах цифрової

трансформації суспільства здатність працювати з математичними моделями, візуалізувати процеси, оцінювати альтернативи та прогнозувати результати – це ключові навички, які затребувані на ринку праці. Тому інтеграція СКМ в освітній процес не є просто технічним оновленням освітнього середовища, а є стратегічним кроком до формування нової генерації фахівців, здатних мислити аналітично, діяти ефективно та використовувати цифрові інструменти для розв'язання реальних задач.

Завдання для самостійних і контрольних робіт з теми «Функціональні ряди»

№1. Знайти область збіжності функціональних рядів:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x;$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^{2n-1};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!};$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n};$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} 10^{nx};$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx)};$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{2^n \sqrt{n}};$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n;$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n};$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)};$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{2n}} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \right)^n;$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n;$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!};$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n};$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n} + 2};$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n};$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^{2n}};$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n + \sqrt{x}};$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+x} \right)^n;$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx};$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \ln^n (x^2 + 2x);$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}};$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)};$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x} \right)^n;$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n!};$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{3};$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n;$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right)^n.$$

З2. Знайти радіус й інтервал збіжності степеневого ряду:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1};$$

$$16. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}} (x-1)^n;$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^{n-1}};$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2} \right)^{n^2} (x+2)^n;$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2};$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2};$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1};$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{3n-2}}{3n-2};$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n}{2^{n-1} n^n} (x+1)^n;$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}};$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{nx}{e} \right)^n;$$

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n^2+2) (x-2)^n;$$

$$9. \sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x+1)^n;$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3x-1)^n}{n(n+3)};$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2} x^{4n};$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} 3nx^{3n-1};$$

$$26. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x)^n;$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)};$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}};$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n (x-1)^n;$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} x^n;$$

$$15. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^3} (x-1)^n;$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}+1};$$

$$28. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n} x^{5n};$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \cos \frac{1}{3^n}\right) x^n;$$

$$30. \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} (x+2)^n.$$

З3. Розвинути функцію в ряд Маклорена:

$$1. f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x;$$

$$2. f(x) = \ln(12 - x - x^2);$$

$$3. f(x) = e^{-x^2};$$

$$4. f(x) = (1+x)e^{-x};$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}};$$

$$6. f(x) = x^2 \arccos 2x;$$

$$7. f(x) = \ln((2+x)^{2+x}) + \ln((2-x)^{2-x})$$

;

$$8. f(x) = \sqrt[3]{8-x^3};$$

$$9. f(x) = \frac{1}{2x^2+5x-3};$$

$$10. f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2};$$

$$11. f(x) = x \ln(1+x);$$

$$12. f(x) = (x - \operatorname{tg} x) \cos x;$$

$$16. f(x) = -\ln \cos x; \quad 17.$$

$$f(x) = \ln(10+x); \quad 18.$$

$$f(x) = (1+x)^x;$$

$$19. f(x) = \sin 3x \sin 5x;$$

$$20. f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x;$$

$$21. f(x) = \ln \frac{2x+1}{x^2-4x+4};$$

$$22. f(x) = \frac{x}{x+4};$$

$$23. f(x) = e^{\cos x};$$

$$24. f(x) = x^2 \ln(4+x^2);$$

$$25. f(x) = \sqrt[3]{8-x^3};$$

$$26. f(x) = \ln(x^3 + \sqrt{64+x^6});$$

$$27. f(x) = x \ln(x^2 + \sqrt{9+x^4});$$

13. $f(x) = (1+x)^x$;

28. $f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$;

14. $f(x) = \frac{x}{2x^4 + 5x^2 + 2}$;

29. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

15. $f(x) = x \cos^3 2x$;

30. $f(x) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

З4. Обчислити наближено з точністю до вказаної величини ε , скориставшись розкладом у степеневий ряд відповідної функції.

1. e , $\alpha = 0,0001$

2. $\sqrt[5]{250}$, $\alpha = 0,01$

3. $\sin 1$, $\alpha = 0,00001$

4. $\sqrt{1,3}$, $\alpha = 0,001$

5. $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{10}$, $\alpha = 0,001$

6. $\ln 3$, $\alpha = 0,0001$

7. $\operatorname{ch} 2$, $\alpha = 0,0001$

8. $\lg e$, $\alpha = 0,0001$

9. π , $\alpha = 0,00001$

10. e^2 , $\alpha = 0,001$

11. $\cos 2^\circ$, $\alpha = 0,001$

12. $\sqrt[3]{80}$, $\alpha = 0,001$

13. $\ln 5$, $\alpha = 0,001$

14. $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $\alpha = 0,001$

15. $\sqrt[6]{738}$, $\alpha = 0,001$

16. $\sqrt[3]{e}$, $\alpha = 0,00001$

17. $\sin 1^\circ$, $\alpha = 0,0001$

18. $\sqrt[3]{8,36}$, $\alpha = 0,001$

19. $\ln 10$, $\alpha = 0,0001$

20. $\arcsin \frac{1}{3}$, $\alpha = 0,001$

21. $\lg 7$, $\alpha = 0,001$

22. $\sqrt{e}$, $\alpha = 0,0001$

23. $\cos 10^\circ$, $\alpha = 0,0001$

24. $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$, $\alpha = 0,001$

25. $\sqrt[10]{1080}$, $\alpha = 0,001$

26. $\frac{1}{e}$, $\alpha = 0,0001$

27. $\sin \frac{\pi}{100}$, $\alpha = 0,0001$

28. $\sqrt[4]{90}$, $\alpha = 0,001$

29. $\frac{1}{\sqrt[7]{136}}$, $\alpha = 0,001$

30. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\alpha = 0,001$

№5. Обчислити наближено визначений інтеграл з точністю до 0,001, використавши розклад підінтегральної функції у степеневий ряд.

$$1. \int_0^{0.25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$$

$$2. \int_0^1 \arctg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$3. \int_0^{0.2} \sqrt{x} e^{-x} dx$$

$$4. \int_0^{0.5} \frac{\arctg x}{x} dx$$

$$5. \int_0^{0.2} \sqrt{x} \cos x dx$$

$$6. \int_0^{0.5} \ln(1 + x^3) dx$$

$$7. \int_0^1 x^2 \sin x dx$$

$$8. \int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

$$9. \int_0^{0.5} \sqrt{1 + x^2} dx$$

$$10. \int_0^{0.5} \frac{dx}{1 + x^5}$$

$$11. \int_0^1 \sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{4}} dx$$

$$12. \int_0^{0.5} \frac{\sin x^2}{x} dx$$

$$13. \int_0^{0.1} \frac{e^x - 1}{x} dx$$

$$14. \int_0^{0.5} x^2 \cos 3x dx$$

$$15. \int_0^{0.5} \ln(1 + x^2) dx$$

$$16. \int_0^{0.4} \sqrt{x} e^{\frac{-x}{4}} dx$$

$$17. \int_{0.3}^{0.5} \frac{1 + \cos x}{x^2} dx$$

$$18. \int_0^{0.5} \frac{\arctg x^2}{x^2} dx$$

$$19. \int_0^{0.8} \frac{1 - \cos x}{x} dx$$

$$20. \int_0^1 \sin x^2 dx$$

$$21. \int_0^{0.1} \frac{\ln(1 + x)}{x} dx$$

$$22. \int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx$$

$$23. \int_0^1 \sqrt{x} \sin x dx$$

$$24. \int_0^{25} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}} dx$$

25. $\int_0^1 \cos \frac{x^2}{4} dx$

26. $\int_0^1 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) dx$

27. $\int_0^{0,5} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx$

28. $\int_0^{0,1} \sqrt{1-x^3} dx$

29. $\int_0^{0,5} e^{-x^7} dx$

30. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$

З6. Знайти розклад у степеневий ряд за степенями x розв'язку диференціального рівняння, записати перші три відмінні від нуля члени розкладу:

1. $y' = xy + e^y, y(0) = 0$

2. $y' = x^2 y^2 + 1, y(0) = 1$

3. $y' = x^2 - y^2, y(0) = \frac{1}{2}$

4. $y' = x^3 + y^2, y(0) = \frac{1}{2}$

5. $y' = x + y^2, y(0) = -1$

6. $y' = x + x^2 + y^2, y(0) = 1$

7. $y' = 2 \cos x - xy^2, y(0) = 1$

8. $y' = e^x - y^2, y(0) = 0$

9. $y' = x + y + y^2, y(0) = 1$

10. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$

11. $y' = x^2 y^2 + y \sin x, y(0) = \frac{1}{2}$

12. $y' = 2y^2 + ye^x, y(0) = \frac{1}{3}$

13. $y' = e^{3x} + 2xy^2, y(0) = 1$

14. $y' = x + e^y, y(0) = 0$

15. $y' = y \cos x + 2 \cos y, y(0) = 0$

16. $y' = x^2 + 2y^2, y(0) = 0,2$

17. $y' = x^2 + xy + y^2, y(0) = 0,5$

18. $y' = e^{\sin x} + x, y(0) = 0$

19. $y' = xy - y^2, y(0) = 0,2$

20. $y' = 2x + y^2 + e^x, y(0) = 1$

21. $y' = x \sin x - y^2, y(0) = 1$

22. $y' = 2x^2 - xy, y(0) = 0$

23. $y' = x - 2y^2, y(0) = 0,5$

24. $y' = xe^x + 2y^2, y(0) = 0$

25. $y' = x^2 + xy + y^2, y(0) = 1$

26. $y' = xy + e^x, y(0) = 0$

27. $y' = ye^x, y(0) = 1$

28. $y' = 2 \sin x + xy, y(0) = 0$

29. $y' = x^2 + e^y, y(0) = 0$

30. $y' = x^2 + y, y(0) = 1$

Індивідуальне навчально-дослідницьке завдання

Тема. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Мета: систематизувати наближені методи обчислень за допомогою степеневих рядів, зрозуміти їх практичне застосування. Проаналізувати методи, визначити та порівняти похибки при даних обчисленнях. Набути практичних вмінь та навичок при користуванні програмним забезпеченням (Microsoft Office).

Обладнання: ПК з відповідним програмним забезпеченням, навчальні посібники з математичного аналізу.

Хід заняття

1. Опрацювати лекційний матеріал посібника: Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу (Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди). Вінниця 2009. 272 с., або матеріали, що розміщені на сайті «Математичний аналіз і диференціальні рівняння вивчаю САМ» kovtonyuk.inf.ua

2. Пригадати принцип роботи з офісним пакетом Microsoft Office, зокрема Microsoft Word та Microsoft Excel.

3. Виконати завдання.

1°. Обчислити число $l \cdot e^a$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-3}$, $\Delta_2 = 10^{-5}$.

2°. Обчислити $\cos \beta^0$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

Обчислити $\sin \beta^0$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

3°. Обчислити $\sqrt[b_1]{m_1}$ та $\sqrt[b_2]{m_2}$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

4°. Обчислити з точністю до $\Delta_1 = 10^{-4}$, $\Delta_2 = 10^{-8}$ визначений інтеграл $\int_0^p \sqrt[q]{1+x^r} dx$, де $l, \beta, m_1, m_2, p, q, r, a, f, c$ – відповідні параметри задані в таблиці 1.

Таблиця 1

№	l	β	m_1	m_2	p
1	2	$f+1$	82	257	$1/2$
2	3	$f+2$	83	258	$1/3$
3	4	$f+3$	84	259	$1/4$
4	5	$f+4$	85	260	$1/5$
5	6	$f+5$	86	261	$1/6$
6	7	$f+6$	87	262	$1/7$
7	8	$f+7$	88	263	$1/8$
8	9	$f+8$	89	264	$1/9$
9	10	$f+9$	90	265	$1/11$
10	11	$f+10$	91	266	$1/12$
11	12	$f+11$	92	267	$1/13$
12	13	$f+12$	93	268	$1/14$
13	14	$f+13$	94	269	$1/15$
14	15	$f+14$	95	270	$1/16$
15	16	$f+15$	96	281	$1/17$
16	17	$f+16$	97	282	$1/18$
17	18	$f+17$	98	283	$1/19$
18	19	$f+18$	99	284	$1/21$
19	20	$f+19$	100	285	$1/22$
20	21	$f+20$	101	286	$1/23$
21	22	$f+21$	102	287	$1/24$
22	23	$f+22$	103	288	$1/25$
23	24	$f+23$	104	289	$1/26$
24	25	$f+24$	105	290	$1/27$
25	26	$f+25$	106	291	$1/28$
26	27	$f+26$	107	292	$1/29$

Для групи А число $a = 4$, для групи Б – $a = 3$, для групи В – $a = 2$.

Для групи А число $f = 0$, для групи Б – $f = 30$, для групи В – $f = 60$.

$$b_1 = \frac{1}{3}, \quad b_2 = \frac{1}{4}.$$

Для групи А число $q = \frac{1}{2}$, для групи Б – $q = \frac{1}{3}$, для групи В – $q = \frac{1}{4}$.

Для групи А число $r = 3$, для групи Б – $r = 2$, для групи В – $r = 1$.

Схема дій

1. Обчислити число $l \cdot e^a$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-3}$, $\Delta_2 = 10^{-5}$.

Приклад: $l=1, a=1$. $l \cdot e^a = 1 \cdot e^1 = e$.

Розв'язання.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots; \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!};$$

$$R_n(x) \leq \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \Delta.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	n	n!	l	a	Rn	Δ	Rn<Δ	ai	l · e ^a
2	8	1	1	1	0,000003061924	0,00001	ИСТИНА	1,0	2,71805555556
3		2						0,5	
4		3						0,16666666667	
5		4						0,04166666667	
6		5						0,00833333333	
7		6						0,00138888889	
8		7						0,000198412698	
9		8						0,000024801587	
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									

Рис. 1

Відповідь. $e \approx 2,7180556$.

2°. Обчислити $\cos \beta^0$ з точністю до $\Delta_1 = 10^{-5}$, $\Delta_2 = 10^{-10}$.

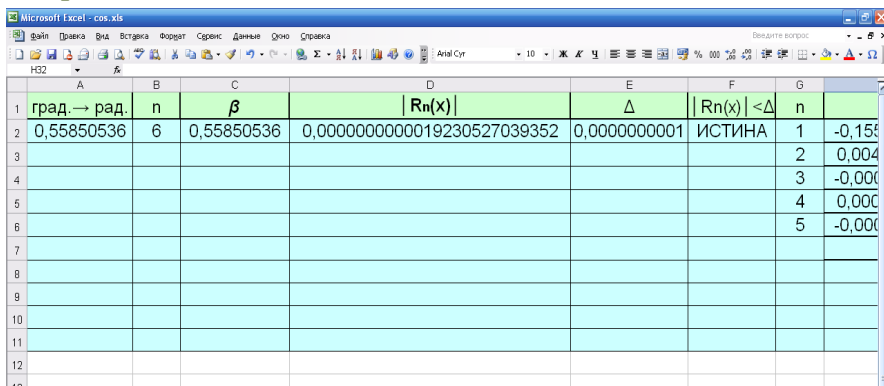
$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \gamma$, де γ – градусна міра кута, – формула для переводу градусної міри кута в радіани.

Степеневі ряди:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots;$$

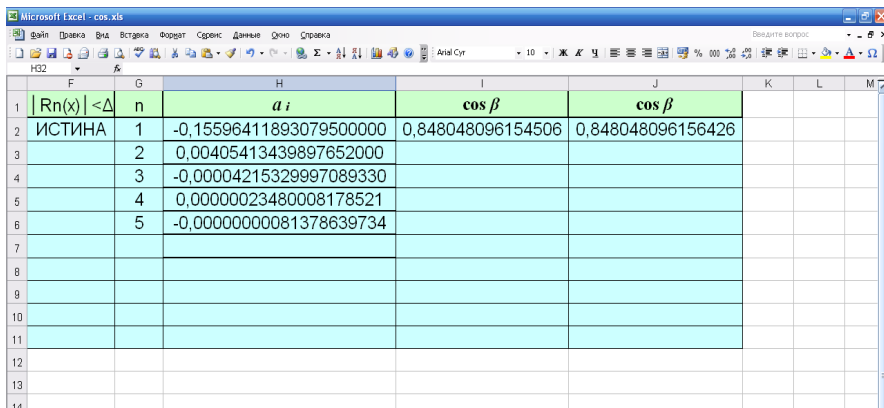
$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots.$$

Приклад.



	A	B	C	D	E	F	G
1	град.→рад.	n	β	$ R_n(x) $	Δ	$ R_n(x) < \Delta$	n
2	0,55850536	6	0,55850536	0,0000000000019230527039352	0,0000000001	ИСТИНА	1
3							2
4							3
5							4
6							5
7							
8							
9							
10							
11							
12							

Рис. 2



	F	G	H	I	J
1	$ R_n(x) < \Delta$	n	a_i	$\cos \beta$	$\cos \beta$
2	ИСТИНА	1	-0,15596411893079500000	0,848048096154506	0,848048096156426
3		2	0,00405413439897652000		
4		3	-0,00004215329997089330		
5		4	0,000000234800008178521		
6		5	-0,00000000081378639734		
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					

Рис. 3

2. Побудувати в програмному середовищі Advanced Grapher

2.2 графік підінтегральної функції .

Приклад.

$$Y(x) = (8 \cdot x + 4) \cdot \sin(9 \cdot x)$$

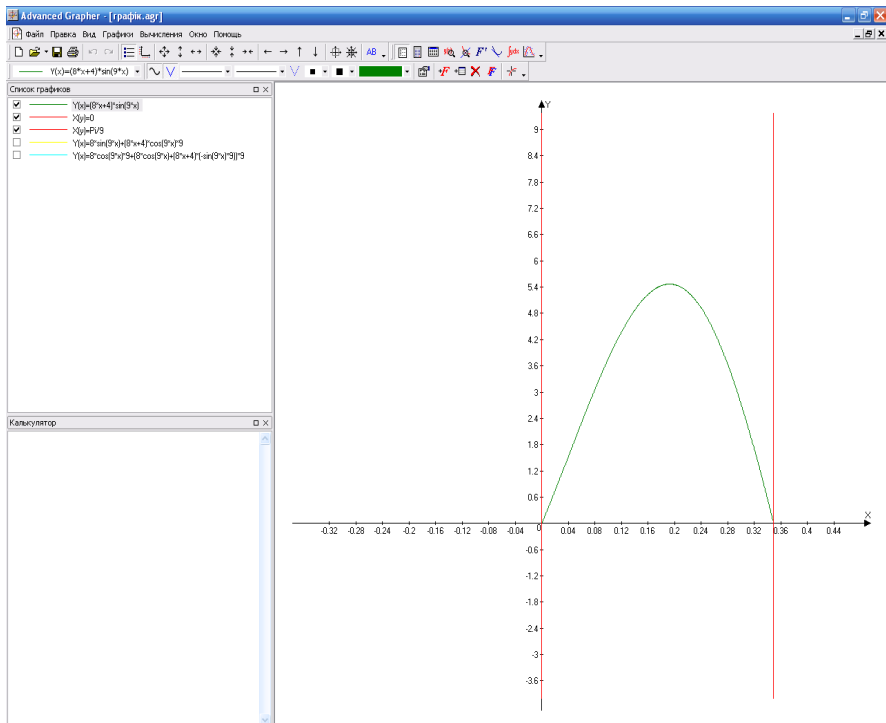


Рис. 4

3. Зобразити схематичний рисунок розбиття даної функції за даним зразком, для $n = 5$ та $n = 10$ (Microsoft Word, Paint та ін.).

Приклад (схематичний рисунок для $n=9$).

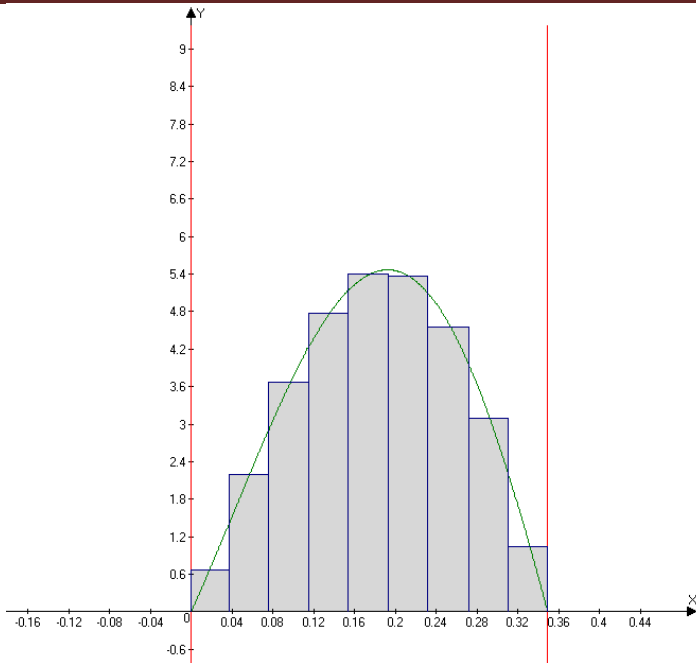


Рис. 5

4. Обчислити інтеграл методом прямокутників. Зробити відповідні обчислення в середовищі Microsoft Excel для $n=5$ та $n=10$. Занотувати хід розв’язку в зошит.

Приклад (обчислення в середовищі Microsoft Excel для $n=9$).

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "Інтеграл.xls". The formula bar shows "=B7*(D1+E2)". The table below contains the following data:

	a	b	b-a (B2-A2)	n	x	y (8*x+4)+sin(8*x)	сума y(0.2+1.3+1.4+1.5+1.6+1.7+1.8+1.9+1.10)	f (0.2^2-0.2)	l (81^1/2)
1									
2	0	0.349066	0.349066	9	0.0194	0.721532555	31.0758424	1.205279484	97.627638
3					0.0582	2.232710567			
4					0.097	3.658399895			
5					0.1357	4.779260362			
6					0.1745	5.396263402			
7					0.2133	5.362397435			
8					0.2521	4.60915529			
9					0.2909	3.163552835			
10					0.3297	1.152570057			
11									
12									
13									

Рис. 6

При даних обчисленнях на практиці слід застосовувати формули:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2} \right) - \text{формула прямокутників},$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) - \text{формула трапецій},$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}))$$

– формула Сімпсона (параболічна формула).

5. Обчислити похибку в середовищі Microsoft Excel 2003 для $n=5$ та $n=10$.

Приклад (обчислення похибки в середовищі Microsoft Excel для $n=9$).

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	n	$(b-a)^3/(24*n^2)$	$f'(y)$	$f''(y)$
2	0	0.34907	9	0.0000218789	$81*(8*\sin(9*x)+(8*x+4)*\cos(9*x)^9)$	$81*(8*\cos(9*x)^9+(8*\cos(9*x)+(8*x+4)*(-\sin(9*x)^9))^9)$
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11					$f''(\xi)$	R_n
12					56229,76836	1,230246459
13						
14						

Рис. 7

При обчисленні похибок на практиці слід застосовувати формули:

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi), \xi \in [a,b],$$
 – додатковий член формули прямокутників,

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \xi \in [a, b], \text{ – додатковий член формули трапецій,}$$

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} f^{(4)}(\xi), \xi \in [a, b], \text{ – додатковий член формули}$$

Сімпсона (параболічної формули).

Для обчислення похідних функцій зручно застосовувати середовище *Advanced Grapher 2.2*.

6. Виконати аналогічні операції з обчислення даного визначеного інтеграла методом трапецій та методом парабол за схемою поданою в пунктах 3-5.

7. Зробити відповідні висновки. Вказати доцільність практичного застосування обчислень визначених інтегралів. Проаналізувати похибки при обчисленнях різними методами, встановити точність результату в залежності від розбиття даної підінтегральної функції на заданому проміжку. Порівняти методи обчислень визначених інтегралів. Зазначити, які уміння та навички ви систематизували під час виконання індивідуального завдання.

ПРЕДМЕТНО-ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

A

Абель Н.

Абсолютно збіжний невластний
інтеграл

Адитивна властивість

B

Біноміальний диференціал

B

Верхня сума Дарбу

Г

Гармонійний ряд

Геометрична прогресія

Геометричні застосування ВІ

Гіперболічні функції

Д

Даламбер Ж.

Дарбу Г.

Дзета-функція Рімана

Діаметр розбиття

Діріхле П.Г.

Е

Ейлер Л.

Елементарні раціональні дроби

– в інтегральній формі

– у формі Лагранжа

– у формі Коші

Заміна змінних

– у визначеному інтегралі

– у невизначеному інтегралі,

I

Інтеграл,

– невизначений

– визначений

– властивості

Інтегрування

– раціональних дробів

– раціональних функцій

– ірраціональних виразів

– тригонометричних виразів

– частинами

– підстановкою

– чисельне,

– графічне

Інтегральна сума Рімана

Інтеграл Діріхле

Інтервал збіжності степеневого
рядуІнтеграл із змінною верхньою
межею**K**

Ж	Класи інтегровних функцій
Жордан М.	Кратний корінь
З	Криволінійна трапеція
Залишковий член ряду	Криволінійний сектор
– у формі Пеано	Критерій Дарбу
– Коші збіжності ФП	Коефіцієнти Котеса
– Коші збіжності ФР	П
Л	Первісна
Лінійність інтеграла	
М	Підінтегральна функція
Мажорантний ряд	Підстановки Ейлера
Маклорен К.	Площа поверхні тіла обертання
Метод невизначених коефіцієнтів	Площа сектора кривої, заданої в
Н	полярних координатах
Наближене обчислення визначених інтегралів	Поповнення таблиці інтегралів
– формула прямокутників	Принцип локалізації
– трапеції	Р
– Сімпсона	Ріман Г.Ф.
– Квадратурна формула Ньютона – правило трьох восьмих,	Розклад основних елементарних
– метод Буля,	
– Квадратура Гаусса-Лежандра,	
– Квадратурна формула Чебишева,	
– Квадратурна формула Гаусса-	

Лагерра,

– Квадратурна формула Гаусса-

Ерміта,

– Квадратура Гаусса-Радау,

– Квадратура Гаусса-Лобатто,

– Квадратура Річардсона-

Ромберга,

Невласні інтеграли 1-го роду

– 2-го роду

Нижня сума Дарбу

О

Обчислення об'єму тіла

– площі фігури

– довжини дуги кривої

Ознака Абеля

– Вейєрштрасса рівномірної

збіжності ряду

–Діріхле

Остроградський М.В.

– з додатними членами

– – ознака порівняння

– –ознака Даламбера

– – ознака Коші

– – ознака інтегральна

функцій в ряд Тейлора

Ряд числовий,

– знакозмінний

–знакопочережний

– ознака збіжності Лейбніца

– збіжний

– розбіжний

– збіжний абсолютно

– умовно збіжний

– залишок

– сума

– частинні суми

– властивості

– критерій Коші

– необхідна умова збіжності

– Рімана

Тіло обертання

У

Умовно збіжний ряд

Універсальна тригонометрична

підстановка

С

Степеневий ряд

– рівномірна збіжність

– властивості

– теорема Абеля

– радіус збіжності

– область збіжності

– застосування до наближених
обчислень

– Тейлора

– Маклорена

– достатні умови розкладання
функції в степеневий ряд

Спрямлювана крива

Ф

Фізичні застосування
визначеного

інтеграла

Формула Тейлора,

– Коші-Адамара

– Ньютона-Лейбніца

– квадратурна,

– Ньютона-Котеса,

Функціональні послідовності і
ряди

– область збіжності

– рівномірна збіжність

– властивості

Ч

Частинна сума ряду

Числовий ряд

Член ряду

Т

Табличні інтеграли

Тейлор Б.

Теорема

– про середнє значення для
визначеного інтеграла

Список використаних джерел

1. Hartman G. APEX Calculus. Version 5.0. Open Resource Texts. 2023. URL: <https://www.apexcalculus.com> (дата звернення: 10.06.2025).
2. Hass Y, Weir M. D., Thomas G. B., Yr. University Calculus : early transcendentals Second Edition. Copyright 2012, 2007. 1083 p. ISBN 13: 978-0-321-71739-9.
3. Mathews J. H., Fink K. D. Numerical Methods Using Matlab. 2004. 4th ed. 680 p.
4. Moodle LMS : веб сайт. URL: <https://moodle.org/> (дата звернення: 11.06.2025).
5. Steinhaus S. Comparison of mathematical programs for data analysis (Edition 5.04). Munchen/Germany. 2008. URL: <http://www.scientificweb.de/ncrunch/> (дата звернення: 10.06.2025).
6. Абрамчук В. С., Соя О. М. Методи обчислень : навч.-метод. посіб. Калинівка : ТОВ «Калинівська друкарня», 2012. 175 с.
7. Адашкевська І. Ю. Проблеми конструювання об'єктів в комп'ютерних системах: конспект лекцій. Харків, 2019. 73 с.
8. Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів. Вища математика. Київ : Національна академія управління, 1999. 399 с.
9. Возняк Л.С., Шарин С.В. Чисельні методи : метод. посіб. для студ. природничих спец. Івано-Франківськ : «Плай», 2001. 64 с.
10. Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. Збірник завдань з вищої математики. Типові розрахунки : навч. посіб. Київ : Політехніка, 2000. 296 с.
11. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації: навч. посіб. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 608 с.
12. Інструменти та ресурси GeoGebra : веб сайт. URL: <https://www.geogebra.org/> (дата звернення: 11.06.2025).

13. Кветний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софіна О. Ю., Шушура О. М. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Ч. 1 : навч. посіб. / за заг. ред. Р. Н. Кветного. Вінниця : ВНТУ, 2012. 193 с.
14. Ковтонюк М. М. Лекції з математичного аналізу (Інтегральне числення функції однієї змінної) : навч. посіб. для студ. матем. спец. пед. ВНЗ. Вінниця : ПП «Едельвейс і К», 2013. 289 с.
15. Ковтонюк М. М., Войтовик В. А. Практикум з інтегрального числення функції однієї змінної : посіб. для студ. фіз.-мат. факультетів пед. ВНЗ. Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2015. 277 с.
16. Ковтонюк М. М., Левицька М. В. Формування віртуального освітнього математичного простору як інтелектуального ресурсу викладача університету. *Науково-популярний альманах «Математика та інформатика навколо нас»*. Вінниця, 2022. Вип. 6. С. 33–47. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1g4Zk0w_d7e6FnNWT8qCsV62ojAKvT1Vz (дата звернення: 11.06.2025)
17. Кравченко І. В., Микитенко В. І., Тимчик Г. С. Комп'ютерне моделювання: системи і процеси : підручник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 215 с. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/eb5f589c-6cb5-4fe6-acff-d88b193777af/content> (дата звернення: 11.06.2025)
18. Ляшенко Б.М., Кривонос О.М., Вакалюк Т.А. Методи обчислень : навч.-метод. посіб. для студ. фіз.-мат. факультету. Житомир : В-во ЖДУ ім. І. Франка, 2011. 228 с.
19. Математичний аналіз у прикладах і задачах. Ч. 1. Вступ в аналіз, похідна, інтеграл / І. І. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. Київ : Вища школа, 1975. 680 с.
20. Математичний аналіз : завдання для самостійної роботи студ. : навч.-метод. посіб. / С. А. Кривошея, Н. В. Майко, О. В. Моторна, Т. М. Проценко. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2013. Ч. 1. 323 с.

21. Сайт для студентів спеціальності інформатика : веб сайт.
URL: <https://www.mathros.net.ua/> (дата звернення: 11.06.2025).
22. Система комп'ютерної алгебри Maxima :веб сайт. URL: <https://maxima.sourceforge.io> (дата звернення: 11.06.2025).
23. Тестові завдання з вищої математики : навч. посіб. / Гургула С. І., Мойсишин В. М., Воробйова В. О. та ін.; за ред. Гургули С. І., Мойсишина В. М. Івано-Франківськ : Факел, 2008. 737 с.
24. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у ВНЗ: проблеми, стан і перспективи. *Науковий часопис Українського державного університету імені Михайла Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання.* 2010. Вип. 9 (16), С. 20–34. URL: <https://sj.udu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/298> (дата звернення: 12.06.2025).
25. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. Київ : Видавнича група BVH, 2006. 480 с.
26. Шунда Н. М., Томусяк А. А. Практикум з математичного аналізу. Інтегральне числення. Ряди : навч. посіб. Київ : Вища школа, 1995. 541 с.
27. Юнчик В. Л., Федонюк А. А. Порівняльна характеристика функціональних можливостей систем комп'ютерної математики в процесі розв'язування задач. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Інформаційні системи та мережі.* 2019. Вип. 6. С. 90-102. URL : <https://doi.org/10.23939/sisn2019.02.090> (дата звернення: 16.06.2025).

Підписано до друку 29.09.2025.
Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Друк цифровий.

Друк. арк. 41. Умов. друк. арк. 39,36. Обл.-вид. арк. 14,2.
Наклад 100 прим. Зам. № 7196/1.

Віддруковано ФОП Корзун Д.Ю. з оригіналів замовника.
Свідоцтво про державну реєстрацію фізичної особи-підприємця
серія В02 № 818191 від 31.07.2002 р.

Видавець та виготовлювач ТОВ «ТВОРИ».
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції серія ДК № 6188 від 18.05.2018 р.
21034, м. Вінниця, вул. Немирівське шосе, 62а.
Тел.: 0 (800) 33-00-90, (096) 97-30-934, (093) 89-13-852, (098) 46-98-043.
e-mail: info@tvoru.com.ua
<http://www.tvoru.com.ua>