

С. М. Бак

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СОЛІТОНІВ

Посібник для студентів спеціальності

111 Математика

Вінниця – 2024

ББК 22.161.6я73

Б19

УДК 517.9+534(075.8)

*Рекомендовано до друку Вченою радою факультету математики,
фізики і комп'ютерних наук*

(протокол № 1 від 30 листопада 2021 року)

Рецензенти:

Клочко В. І. – доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор;

Ковтонюк М. М. – доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор.

Бак С. М. *Основи теорії солітонів*: навчальний посібник. 2-е вид. випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2024. 100 с.

Посібник написано на основі курсу лекцій автора, відповідно до діючої навчальної програми дисципліни «Основи теорії солітонів», затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. У посібнику висвітлено основні питання з таких розділів: «Вступ до теорії солітонів», «Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь», «Метод оберненої задачі розсіяння» та «Варіаційний метод дослідження дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем». Посібник написано для студентів спеціальності 111 Математика, може бути корисним для студентів фізичних спеціальностей, вчителів, викладачів, магістрантів, аспірантів.

ISBN 978-617-8028-30-5

© С. М. Бак, 2024

Зміст

Передмова.	5
Розділ 1. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ СОЛІТОНІВ.	7
§1.1. Хвилі та їх види. Хвильове рівняння	7
1.1.1. Хвилі в природі. Класифікація хвиль.	7
1.1.2. Виведення хвильового рівняння.	10
1.1.3. Задача Коші для рівняння коливань струни. Формула Даламбера.	14
1.1.4. Мішані задачі для рівняння коливань струни. Метод Фур'є.	18
§1.2. Солітони та їх види.	24
1.2.1. Відкриття відокремленої хвилі. Рівняння Кортевега-де Фріза.	24
1.2.2. Виведення рівняння Кортевега-де Фріза.	27
1.2.3. Задача Фермі-Пасти-Улама.	30
1.2.4. Солітони Кортевега-де Фріза.	34
1.2.5. Груповий солітон і нелінійне рівняння Шредінгера.	35
1.2.6. Модель Френкеля-Конторової. Топологічний солітон і рівняння синус-Гордона.	37
Запитання і завдання для самоконтролю.	40
Розділ 2. ПРЯМІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ СОЛІТОННИХ РІВНЯНЬ.	42
§2.1. Метод Хіרותи.	42
§2.2. Метод перетворення Беклунда.	48
2.2.1. Перетворення Беклунда для рівняння КдФ.	48
2.2.2. Перетворення Беклунда для ланцюга Тоди.	51
2.2.3. Перетворення Беклунда для рівняння синус- Гордона.	54
Запитання і завдання для самоконтролю.	58

Розділ 3. МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ.	59
§3.1. Інтегрування рівняння КдФ методом оберненої задачі розсіювання.	59
3.1.1. Перетворення Фур'є.	60
3.1.2. Пара Лакса для рівняння КдФ.	61
3.1.3. Пряма задача розсіювання.	64
3.1.4. Обернена задача розсіювання.	65
§3.2. Інтегрування рівняння синус-Гордона методом оберненої задачі розсіювання.	71
Запитання і завдання для самоконтролю.	75
 Розділ 4. ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНИХ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ.	 77
§4.1. Існування біжучих хвиль в системах осциляторів.	77
§4.2. Існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера.	88
Запитання і завдання для самоконтролю.	95
Список рекомендованої літератури.	97
Предметний покажчик.	99

ПЕРЕДМОВА

Одним із найдивовижніших хвильових явищ є утворення відокремлених хвиль або солітонів, найвідомішим прикладом яких є цунамі. Такі хвилі виникають не тільки на поверхні води, але й в інших середовищах та описують найрізноманітніші явища.

Цей посібник написано відповідно до діючої навчальної програми дисципліни «Основи теорії солітонів», затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, на основі курсу лекцій, який читався автором студентам спеціальності 111 Математика факультету математики, фізики і комп'ютерних наук Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Програма курсу «Основи теорії солітонів» складена з урахуванням того факту, що він є складовою частиною підготовки магістра математики, а його зміст сприяє формуванню високої фізико-математичної культури.

У посібнику висвітлено основні ідеї сучасної теорії нелінійних рівнянь математичної фізики, а також методи їх інтегрування і дослідження, зокрема, розглянуто основні питання з таких розділів: «Вступ до теорії солітонів», «Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь», «Метод оберненої задачі розсіяння» та «Варіаційний метод дослідження дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем».

Теоретичний матеріал ілюструється прикладами. Наприкінці кожного змістового модуля подано запитання і завдання для самоконтролю, що дозволить забезпечити більш

ефективне опрацювання і засвоєння студентом (читачем) навчального матеріалу у процесі самостійної роботи.

Також наприкінці посібника подано список рекомендованої літератури, що полегшить пошук необхідного матеріалу, який виходить за межі цього посібника. Після списку літератури подано предметний покажчик, який безумовно полегшить користування посібником.

Посібник написано для студентів спеціальності 111 Математика, може бути корисним для студентів фізичних спеціальностей, вчителів, викладачів, магістрантів, аспірантів.

РОЗДІЛ 1. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ СОЛІТОНІВ

§1.1. Хвилі та їх види. Хвильове рівняння

1.1.1. Хвилі в природі. Класифікація хвиль. Зі шкільного курсу фізики добре відомо, що якщо в будь-якій точці пружного середовища (твердого, рідкого або газоподібного), яке представляє собою велике число зв'язаних між собою частинок, збурити коливання, то вони будуть передаватися в інші місця. Ця передача збурень обумовлена тим, що близькі ділянки середовища пов'язані одна з одною. При цьому коливання, збурені в одному місці, розповсюджуються в просторі з певною швидкістю. Нагадаємо означення збурення і коливання.

Збурення – зміна стану середовища.

Коливання – специфічні рухи або зміни стану систем різної природи (механічної, фізичної, біологічної, хімічної, економічної тощо), для яких спостерігається певна повторюваність у часі.

Слово «хвиля» виникло давно і означало почергову появу «горбів» і «западин», які «бігли» по поверхні моря. Пізніше це слово проникло в акустику та оптику. «Біжуча» по морю хвиля – одне з найкрасивіших і найзначніших явищ природи.

Хвилею прийнято називати процес передачі збурень середовища (зокрема, коливань) від однієї точки до іншої.

Хвильовий процес – процес передачі коливань.

При цьому частинки середовища не рухаються разом з хвилею, а коливаються навколо своїх положень рівноваги.

Механічна рівновага – стан тіла, що знаходиться у спокої або рухається рівномірно, в якому сума сил, що діють на нього, дорівнює нулю.

Класифікація хвиль:

- За ознакою розповсюдження в просторі: *стоячі, біжучі.*
- За характером хвилі: *коливальні, відокремлені (солітони).*
- За типом хвиль: *поперечні, поздовжні, змішаного типу.*
- За законами, що описує хвильовий процес: *лінійні, нелінійні.*
- За властивостями субстанції: *хвилі в дискретних структурах, хвилі в неперервних субстанціях.*
- За геометрією: *сферичні (просторові), одновимірні (плоскі), спіральні.*

Природа механізму поширення хвилі може бути різною. У простому випадку зв'язки між ділянками в середовищі можуть бути обумовлені силами пружності, які виникають через деформації в середовищі. При цьому у твердому пружному середовищі можуть поширюватися як *поздовжні хвилі*, при яких зміщення частинок середовища здійснюються в напрямку поширення хвилі, так і *поперечні хвилі*, у яких зміщення частинок перпендикулярні поширенню хвилі. У рідині або газі на відміну від твердих тіл немає сил опору зміщенню, тому можуть поширюватися тільки поздовжні хвилі. Добре відомий приклад поздовжніх хвиль в природі – звукові хвилі, які виникають через пружність повітря.

Зовнішні тіла, які спричиняють збурення стану середовища, називаються *джерелами хвиль*. Поширення пружних хвиль полягає в передачі коливань від джерела.

Частинки середовища послідовно втягуються в процес коливань відносно свого попереднього положення рівноваги. Швидкість v таких коливань частинок називається *коливальною швидкістю*. Кінематичною ознакою хвильового руху є поширення фази коливань (форми хвилі), а динамічною – перенесення енергії без перенесення частинок речовини. Швидкість c перенесення фази називається *фазовою швидкістю поширення хвилі*. Фазова швидкість залежить тільки від механічних характеристик – модуля пружності і густини речовини.

Серед хвиль іншої природи особливе місце займають електромагнітні хвилі, передача збурень у яких відбувається через коливання електричного і магнітного полів. Середовище, в якому поширюються електромагнітні хвилі, як правило, робить істотний вплив на процес поширення хвиль, однак електромагнітні хвилі на відміну від пружних можуть поширюватися навіть у вакуумі. Зв'язок між різними ділянками в просторі при поширенні таких хвиль обумовлена тим, що зміна електричного поля викликає появу магнітного поля і навпаки.

З явищами поширення електромагнітних хвиль ми часто стикаємося в нашому повсякденному житті. До цих явищ відносяться радіохвилі, застосування яких у техніці загальновідомо. У цьому зв'язку можна згадати роботу радіо і телебачення, яка заснована на прийомі радіохвиль. До електромагнітних явищ, тільки в іншому частотному діапазоні, відноситься також світло, за допомогою якого ми бачимо навколишні предмети.

За характером розповсюдження в просторі розрізняють *стоячі* та *біжучі* хвилі.

Стояча хвиля – це хвиля, яка при будь-якій фазі коливань не поширюється (локалізована) у просторі. Характерною особливістю стоячої хвилі є наявність у ній вузлів (точок, у яких амплітуда хвилі дорівнює нулю) та пучностей (точок, у яких амплітуда максимальна), причому положення вузлів і пучностей залишається незмінним у просторі (рис. 1.1). Стояча хвиля утворюється в результаті накладання двох когерентних біжучих хвиль з однаковими амплітудами, які поширюються назустріч одна одній.

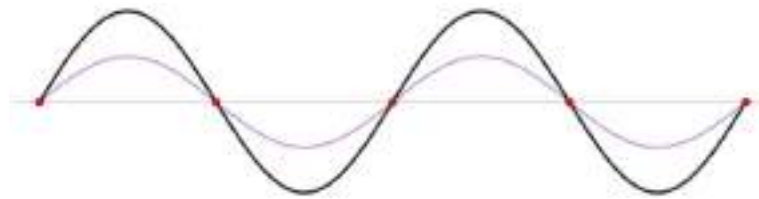


Рис. 1.1. Стояча хвиля

У *біжучій хвилі* (поширюється в просторі зі скінченною швидкістю) відбувається перенесення енергії, а в *стоячій хвилі* через площини, в яких розташовані вузли, енергія не перетікає.

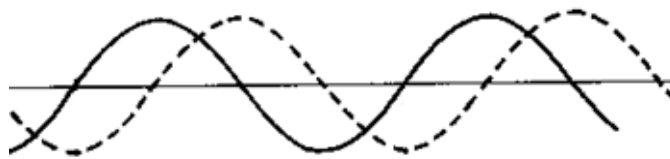


Рис. 1.2. Біжуча хвиля

1.1.2. Виведення хвильового рівняння. Однією з перших математичних моделей, які зводяться до рівнянь з частинними похідними, було рівняння малих поперечних коливань *струни* (тонка, абсолютно гнучка, пружна нитка з рівномірно

розподіленою лінійною густиною ρ_0). Перше означає, що товщиною струни у порівнянні з її довжиною можна знехтувати. Абсолютна гнучкість означає, що струна не працює на згин, тобто напруження, які виникають в струні, направлені по дотичній до профілю струни. Пружність дозволяє застосувати закон Гука: зміна сили натягу струни пропорційна зміні її довжини.

Розглянемо струну, натягнуту вздовж відрізка $[0, l]$, кінці якої $x = 0$ та $x = l$ закріплені нерухомо. Якщо вивести струну із стану рівноваги, то вона почне коливатись. Нехай струна коливається у площині xOy , а самі коливання є поперечними, тобто кожна точка струни рухається у напрямку, перпендикулярному до осі Ox . Позначимо через $u(x, t)$ відхилення від положення рівноваги точки струни з координатою x в момент часу t . Припустимо, що коливання струни є малими, тобто відхилення точок струни від положення рівноваги мале порівняно з її довжиною, а тангенс кута нахилу дотичної до профілю струни малий у порівнянні з одиницею, тобто

$$1 + tg^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \approx 1.$$

Складемо диференціальне рівняння, яке задовольняє функція $u = u(x, t)$. Зауважимо, що при фіксованому $t = t_0$ рівняння $u = u(x, t_0)$ визначає профіль струни в момент часу

$t = t_0$, а частинна похідна $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=t_0}$ – кутовий коефіцієнт дотичної до профілю струни в точці з абсцисою x в момент часу t_0 .

Нехай натяг струни в положенні рівноваги дорівнює T_0 . Покажемо, що в довільній точці струни в будь-який момент часу натяг струни також дорівнює T_0 . Для цього виділимо частину струни між точками M_1 та M_2 і замінимо дію відкинутих частин струни силами натягу $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ (рис. 1.3). Оскільки всі точки струни рухаються у напрямку, перпендикулярному осі Ox , то сума проекцій усіх сил на цю вісь повинна дорівнювати нулю:

$$-|\vec{T}_1|\cos\alpha_1 + |\vec{T}_2|\cos\alpha_2 = 0.$$

Але

$$\cos\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_i}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1, \quad i = 1, 2,$$

звідки $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T_0$.

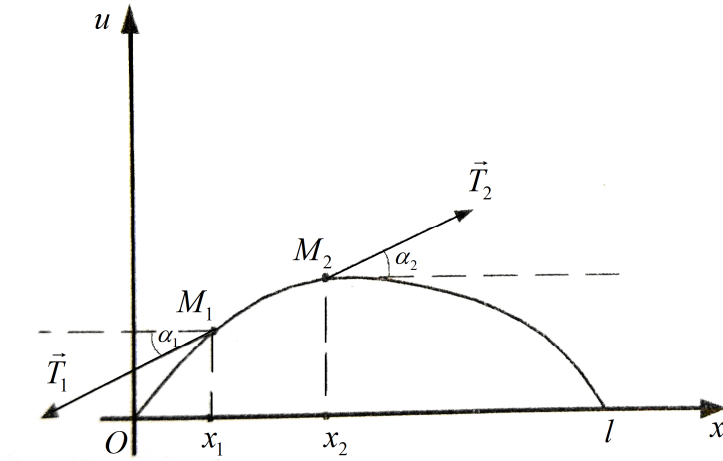


Рис. 1.3

Видовження струни

$$M_1 M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1,$$

тобто дорівнює видовженню струни в стані спокою. Отже, згідно закону Гука, натяг струни в довільній точці сталий у будь-який момент часу, тобто

$$|\vec{T}(x, t)| = T_0.$$

Тепер покладемо $x_1 = x$ та $x_2 = x + dx$. Тоді за другим законом Ньютона ($F = ma$):

$$\rho_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \sin \alpha_2 - T_0 \sin \alpha_1. \quad (1.1)$$

Але згідно зі зробленими припущеннями

$$\cos \alpha_i \approx 1, \quad i = 1, 2,$$

тобто

$$\sin \alpha_i \approx \operatorname{tg} \alpha_i = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_i}, \quad i = 1, 2.$$

Тому рівняння (1.1) набуває вигляду

$$\rho_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_1} \right)$$

або, враховуючи, що $x_2 - x_1 = dx$:

$$\rho_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx,$$

звідки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.2)$$

або

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (1.2')$$

де $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$. Рівняння (1.2) називається *рівнянням вільних малих поперечних коливань струни або однорідним одновимірним хвильовим рівнянням*.

Зауважимо, що в загальному випадку на струну в площині коливань можуть діяти деякі сили, перпендикулярні за напрямом до осі Ox . У цьому випадку одержується рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (1.3)$$

де $f(x, t)$ – щільність сили, розрахованої на одиницю маси струни. При цьому рівняння (1.3) називається *рівнянням вимушених малих поперечних коливань струни або неоднорідним одновимірним хвильовим рівнянням*.

Аналогічно можна вивести двовимірне хвильове рівняння:

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (1.4)$$

яке описує коливання мембрани (плоскої пружної гнучкої тонкої пластини).

У загальному випадку n -вимірне хвильове рівняння має вигляд

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

де $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласа.

1.1.3. Задача Коші для рівняння коливань струни.

Формула Даламбера. Розглянемо задачу Коші для рівняння вільних малих поперечних коливань необмеженої струни (однорідне одновимірне хвильове рівняння):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.6)$$

з початковими умовами

$$u|_{t=0} \equiv u(x, 0) = \varphi(x), \quad (1.7)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (1.8)$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – задані функції. Зауважимо, що прийняті в умовах (1.7) і (1.8) позначення розуміються як правосторонні границі:

$$u(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} u(x, t), \quad u_t(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} u_t(x, t).$$

Припустимо, що $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ і покажемо, що за цих умов задача (1.6) – (1.8) має розв’язок.

За допомогою заміни

$$\boxed{\xi = x - at, \eta = x + at},$$

рівняння (1.6) можна звести до канонічної форми

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (1.9)$$

Інтегруючи рівняння (1.9) послідовно за змінними ξ та η , знаходимо його загальний розв’язок

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = u_1(\xi) + u_2(\eta),$$

де $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R})$ – довільні функції. Повертаючись до заміни, одержуємо загальний розв’язок рівняння (1.6)

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at). \quad (1.10)$$

Функції u_1, u_2 знайдемо з початкових умов (1.7), (1.8):

$$\begin{cases} u_1(x) + u_2(x) = \varphi(x), \\ -au_1'(x) + au_2'(x) = \psi(x). \end{cases} \quad (1.11)$$

Диференціюючи перше рівняння системи (1.11), маємо

$$\begin{cases} u_1'(x) + u_2'(x) = \varphi'(x), \\ -au_1'(x) + au_2'(x) = \psi(x). \end{cases} \quad (1.12)$$

З системи (1.11) знаходимо

$$u_1'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) - \frac{1}{2a}\psi(x),$$

звідки, фіксуючи довільно $x_0 \in \mathbb{R}$ та інтегруючи обидві частини останньої рівності від x_0 до x , одержуємо

$$\begin{aligned} u_1(x) = u_1(x_0) + \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{2}\varphi'(\tau) - \frac{1}{2a}\psi(\tau) \right) d\tau = u_1(x_0) + \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(x_0) - \\ - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau + C, \end{aligned} \quad (1.13)$$

де $C = u_1(x_0) - \frac{1}{2}\varphi(x_0)$. Другу функцію знаходимо з першого рівняння системи (1.11):

$$u_2(x) = \varphi(x) - u_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau - C. \quad (1.14)$$

Підставляючи функції (1.13), (1.14) в рівність (1.10) знаходимо розв'язок задачі Коші (1.6) – (1.8):

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau. \quad (1.15)$$

Формула (1.15) називається *формулою Даламбера*.

Зауважимо, що функція $u = f(x - vt)$ представляє собою *біжучу хвилю*. Це означає, що вона залежить від координати x і часу t через змінну $s = x - vt$. Ця змінна характеризує положення точки координат, що рухається зі швидкістю хвилі v , тобто вона позначає положення спостерігача, який постійно знаходиться на гребені хвилі. Графік цієї функції визначає

профіль хвилі, який зі збільшенням часу t переміщається в площині (x, u) вздовж осі Ox зі швидкістю v вправо, якщо $v > 0$, і вліво, якщо $v < 0$. Тому, оскільки функція $u_1(x - at)$ визначає біжучу хвилю, яка поширюється у додатному напрямку осі абсцис зі швидкістю $\frac{dx}{dt} = a$, а функція $u_2(x + at)$ визначає біжучу хвилю, яка поширюється у від'ємному напрямку осі абсцис з тією ж швидкістю, то розглянутий метод знаходження розв'язку задачі Коші (1.6) – (1.8) називають *методом біжучих хвиль*.

З наведених міркувань випливає, що якщо функція $u = u(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (1.6) – (1.8), то її можна однозначно звести до вигляду (1.15). З іншого боку, неважко перевірити, що за зроблених вище припущень формула (1.15) визначає розв'язок задачі (1.6) – (1.8). Таким чином, правильна теорема:

Теорема 1.1. Якщо $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, то задача Коші (1.6) – (1.8) має єдиний розв'язок, який визначається формулою Даламбера (1.15).

Приклад 1.1. Знайти закон вільних малих поперечних коливань однорідної необмеженої струни, якщо в початковий момент часу $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = \sin^2 x$.

Розв'язання.

За формулою Даламбера (1.15) шуканий закон коливань визначається функцією

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left((x-at)^2 + (x+at)^2 \right) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sin^2 \tau d\tau = \\
 &= x^2 + a^2 t^2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\tau) d\tau = x^2 + a^2 t^2 + \frac{1}{4a} \left(\tau - \frac{1}{2} \sin 2\tau \right) \Big|_{x-at}^{x+at} = \\
 &= x^2 + a^2 t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2at \cos 2x.
 \end{aligned}$$

1.1.4. Мішані задачі для рівняння коливань струни.

Метод Фур'є. Розглянемо мішану (початково-крайову) задачу для рівняння вільних малих поперечних коливань обмеженої струни (струни із закріпленими кінцями):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (1.16)$$

з початковими умовами

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (1.17)$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – задані функції, та крайовими умовами

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.18)$$

Додатково також припустимо, що виконуються умови

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (1.19)$$

Мішану задачу (1.16) – (1.18) можна розв'язати *методом Фур'є* або *методом відокремлення змінних*. Відповідно до цього методу будемо шукати розв'язок задачі (1.16) – (1.18) у вигляді

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (1.20)$$

де $X(x) \not\equiv 0$, $T(t) \not\equiv 0$ – деякі поки невідомі функції. Знаходячи частинні похідні функції (1.20)

$$u_{tt} = X(x)T''(t), \quad u_{xx} = X''(x)T(t),$$

і підставляючи їх у рівняння (1.16), одержуємо тотожність

$$X(x)T''(t) \equiv a^2 X''(x)T(t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0.$$

Далі, відокремлюючи змінні, маємо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \equiv \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (1.21)$$

де λ – деяка стала, яку для зручності подальших міркувань взято зі знаком мінус. З рівностей (1.21) для визначення функцій X і T одержуємо два звичайних диференціальних рівняння 2-го порядку:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (1.22)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (1.23)$$

Підставляючи розв'язок (1.20) в крайові умови (1.18), одержуємо рівності

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0,$$

звідки випливає, що

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (1.24)$$

Таким чином, для відшукування функції X ми одержали крайову задачу (1.22), (1.24). Ця задача має тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$ для будь-яких значень параметра λ . Проте нас цікавлять нетривіальні розв'язки. Ті значення параметра λ , при яких задача (1.22), (1.24) має нетривіальні розв'язки, називаються *власними значеннями*, а відповідні їм нетривіальні розв'язки цієї задачі – *власними функціями*. При цьому задача знаходження власних значень і власних функцій називається *задачею Штурма-Ліувілля*. Множину всіх власних значень називають *спектром* задачі Штурма-Ліувілля. Тому цю задачу також ще називають *спектральною задачею*. Зауважимо, що ця задача може мати тільки дійсні власні значення і кожному

власному значенню відповідає з точністю до сталого множника лише одна власна функція.

Розв'яжемо задачу (1.22), (1.24). Для цього спочатку потрібно знайти загальний розв'язок рівняння (1.22). Характеристичне рівняння має вигляд $\Lambda^2 + \lambda = 0$, звідки $\Lambda = \pm\sqrt{-\lambda}$. Тоді розглянемо випадки:

I. Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв'язок заданого рівняння (1.22) має вигляд $X(x) = C_1x + C_2$ і крайові умови (1.24) задовольняє лише тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$. Останнє означає, що $\lambda = 0$ не є власним значенням.

II. Якщо $\lambda < 0$, то загальний розв'язок заданого рівняння (1.22) має вигляд $X(x) = C_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Використавши крайові умови (1.24), одержимо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1e^{l\sqrt{-\lambda}} + C_2e^{-l\sqrt{-\lambda}} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2, \\ C_1(e^{l\sqrt{-\lambda}} - e^{-l\sqrt{-\lambda}}) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

Знову одержали тривіальний розв'язок, тобто від'ємних власних значень задача (1.22), (1.24) не має.

III. Якщо ж $\lambda > 0$, то $\sqrt{-\lambda} = \pm\sqrt{\lambda}i$, а тому загальний розв'язок рівняння (1.22) має вигляд $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$. Використавши крайові умови (1.24), одержимо систему

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, \\ C_1 \cos l\sqrt{\lambda} + C_2 \sin l\sqrt{\lambda} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin l\sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$$

Таким чином, крайова задача (1.22), (1.24) має нетривіальні розв'язки тільки при $\sin l\sqrt{\lambda} = 0$, тобто при $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, звідки одержуємо всі власні числа:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

і відповідні власні функції (визначаються з точністю до сталого множника):

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Розв'яжемо тепер рівняння (1.23), замінивши в ньому λ на знайдені власні значення. Його загальний розв'язок для кожного n має вигляд

$$T(t) = A_n \cos \sqrt{a^2 \lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{a^2 \lambda_n} t = A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким чином, за формулою (1.20) одержуємо функції

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \\ = \sin \frac{\pi n}{l} x \left(A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.25)$$

які є розв'язками рівняння (1.16) і задовольняють крайові умови (1.18).

Далі розглянемо ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (1.26)$$

Припустимо, що ряд (1.26) збігається і його можна почленно диференціювати двічі за кожною змінною. Виберемо

коефіцієнти A_n і B_n ряду (1.26) так, щоб він задовольняв початкові умови (1.17), тобто

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x), \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} u'_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a\pi n}{l} A_n \sin \frac{a\pi n}{l} t + \frac{a\pi n}{l} B_n \cos \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi n}{l} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Формули (1.27), (1.28) означають, що функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ розвинені в ряди Фур'є за системою функцій $\left\{ \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}$ на відріжку $[0, l]$. А отже,

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (1.29)$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{l}{a\pi n} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.30)$$

Таким чином, підставляючи (1.29) і (1.30) в (1.26) одержуємо формальний розв'язок задачі (1.16) – (1.18). Якщо ряд (1.26) рівномірно збігається, а його сума є двічі неперервно диференційовною, то вона є класичним розв'язком мішаної задачі (1.16) – (1.18).

Зауважимо, що загальний член ряду (1.26) можна подати у вигляді

$$u_n(x, t) = a_n \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \left(\frac{a\pi n}{l} t + \varphi_n \right), \quad (1.31)$$

де $a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\sin \varphi_n = \frac{A_n}{a_n}$, $\cos \varphi_n = \frac{B_n}{a_n}$. Функції вигляду (1.31)

називають *стоячими хвилями*. Згідно (1.31) кожна точка x струни здійснює гармонічні коливання з частотою $\omega_n = \frac{a\pi n}{l}$,

фазою φ_n та амплітудою $a_n \left| \sin \frac{\pi n}{l} x \right|$. Точки $x = \frac{ml}{n}$ ($m = \overline{1, n-1}$), в

яких $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$, впродовж усього процесу коливань струни

залишаються нерухомими і називаються *вузлами* стоячої хвилі.

Точки $x = \frac{(2m+1)l}{2n}$ ($m = \overline{1, n-1}$), в яких $\left| \sin \frac{\pi n}{l} x \right| = 1$, здійснюють

коливання з максимальною амплітудою a_n і називаються *пучностями* стоячої хвилі.

Зазначимо, що у випадку крайових умов іншого вигляду схема розв'язування відповідної мішаної задачі не змінюється.

§1.2. Солітони та їх види

1.2.1. Відкриття відокремленої хвилі. Рівняння Кортевега-де Фріза. Дуже важливим і цікавим типом хвиль є хвилі на поверхні води, які здавна привертали до себе увагу дослідників. Так у 1834 році шотландський інженер і дослідник Дж. Скотт Рассел, вивчаючи пропускну здатність каналів Юніон та Форз-Клайд, вперше відкрив відокремлену хвилю. Він спостерігав переміщення по каналу баржі, яку тягла пара коней. Несподівано баржа зупинилася, але маса води, яку баржа привела в рух, не зупинилася, а зібралася біля носу судна, а потім відірвалася від нього. Далі ця маса води покотилася по каналу з великою швидкістю у вигляді відокремленого підвищення, не змінюючи своєї форми і не знижуючи швидкості (рис. 1.4).

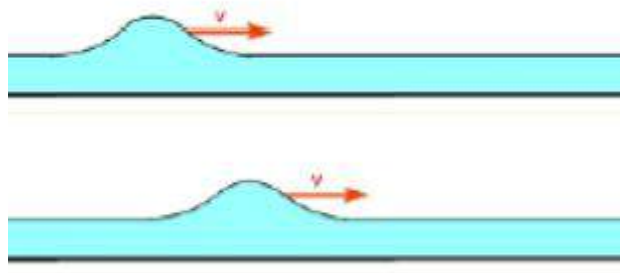


Рис. 1.4. Рух відокремленої хвилі вздовж каналу

Впродовж усього життя Рассел неодноразово повертався до спостереження за цією хвилею і встановив ще деякі її властивості. По-перше, він помітив, що вона рухається з постійною швидкістю і без зміни форми. По-друге, знайшов залежність швидкості C цієї хвилі від глибини каналу h і висоти хвилі a :

$$C = \sqrt{g(a+h)},$$

де g – прискорення вільного падіння, причому $a < h$. По-третє, Рассел виявив, що можливий розпад однієї великої хвилі на кілька хвиль. По-четверте, він зазначив, що в експериментах спостерігаються тільки хвилі підвищення. Одного разу він звернув увагу, що відокремлені хвилі проходять одна через одну без будь-яких змін, як і малі хвилі, утворені на поверхні води. Однак на останню дуже важливу властивість він не звернув істотної уваги. Результати спостережень Рассела було опубліковано в 1844 році в статті «Доповідь про хвилі». Проте Дж. Ейрі та Дж. Стокс піддали сумніву правильність спостережень Рассела. Через тривалий час певну ясність в спостереження Рассела внесли французький вчений, механік Ж. Буссінеск (1872 рік) і британський фізик Дж. Стрет (Релей) (1876 рік), які незалежно один від одного знайшли аналітичну формулу для підвищення вільної поверхні на воді у вигляді квадрату гіперболічного секансу та обчислили швидкість поширення відокремленої хвилі на воді. Пізніше дослідни Рассела були повторені іншими дослідниками і отримали підтвердження.

Остаточна ясність в проблемі, яка виникла після дослідів Рассела по відокремленій хвилі, настала після роботи датських учених Д. Кортевега і Г. де Фріза (де Вріза), які спробували розібратися в суті спостережень Рассела. Узагальнивши метод Релея, ці вчені в 1895 році вивели рівняння для опису довгих хвиль на воді. Кортевег і де Фріз, використовуючи рівняння гідродинаміки, розглянули відхилення $u(x, t)$ від стану

рівноваги поверхні води при відсутності вихорів і при сталості густини води. Вони припустили, що при поширенні хвилі виконуються дві умови для безрозмірних параметрів

$$e = \frac{a}{h} \ll 1, \quad d = \frac{h}{l} \ll 1. \quad (1.32)$$

Тут a – амплітуда хвилі, h – глибина басейну, в якому розглядаються хвилі, l – довжина хвилі (рис. 1.5). Суть умов (1.32) полягала в тому, що амплітуда розглянутих хвиль була набагато меншою, ніж глибина басейну, але в той же час довжина хвилі була набагато більше, ніж глибина басейну. Таким чином, Кортевег і де Фріз розглядали довгі хвилі.

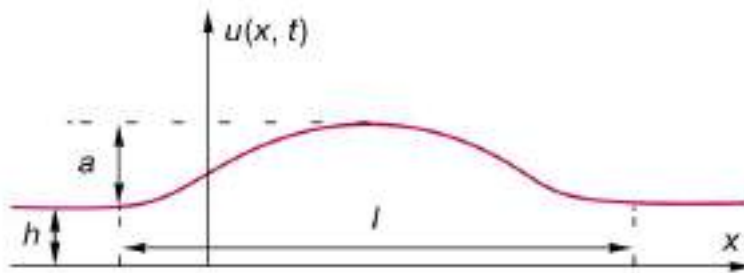


Рис. 1.5. Відокремлена хвиля

Рівняння, яке було ними отримано, має вигляд

$$u_t + buu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.33)$$

Тут $u(x, t)$ – відхилення від положення рівноваги поверхні води (форма хвилі) – залежить від координати x і часу t . Рівняння (1.33) має хвильовий розв'язок, який виражається через спеціальну еліптичну функцію, вивчену К. Якобі. За певних умов еліптична функція Якобі переходить в гіперболічний секанс і розв'язок має вигляд

$$u(x, t) = \frac{2k^2}{\operatorname{ch}^2(k(x - 4k^2t) + \varphi_0)}, \quad (1.34)$$

де φ_0 – довільна стала. Зазначимо, що розв’язок (1.34) рівняння Кортевега-де Фріза є *біжучою хвилею*. Він є граничним випадком хвилі нескінченно великого періоду. Саме цей граничний випадок є відокремленою хвилею, що відповідає спостереженню Рассела в 1834 році.

1.2.2. Виведення рівняння Кортевега-де Фріза.

Розглянемо однорідне одновимірне хвильове рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (1.35)$$

Це рівняння описує досить широкий клас хвильових процесів у найрізноманітніших однорідних середовищах. Зокрема, воно описує поширення незатухаючих хвиль зі сталою швидкістю a . При цьому враховуються три основні умови. По-перше, відсутність *дисипації* (розсіювання енергії). Це виражається в інваріантності рівняння (1.33) відносно заміни t на $-t$ (обернення часу). По-друге, амплітуда коливань повинна бути достатньо малою. При цьому нелінійні по коливній величині u члени рівняння малі і ними можна знехтувати. І по-третє, у розглядуваному діапазоні хвиль повинна бути відсутньою *дисперсія* (залежність швидкості поширення від частоти і довжини хвилі). Якщо відмовитися від нехтування дисипацією, нелінійністю і дисперсією, то загальність (універсальність) рівняння (1.33) зникає. Однак, якщо не нехтувати повністю вказаними ефектами, а вважати їх *малими*, то знову можна отримати рівняння, вигляд якого буде одним і тим же для широкого класу явищ. Виникає запитання: чи має зміст враховувати ці малі поправки, тобто, чи існують випадки, коли ці малі поправки приводять до якісно нових ефектів? Інакше їх

не варто було б приймати до уваги. Проте зрозуміло, що якщо процес триває досить довгий час, то всі вказані ефекти можуть суттєво змінити розв'язок. Насправді навіть мала дисипація енергії приведе до затухання хвилі. Дисперсія приводить до розпливання хвильового пакета, що також за досить великий час може значно змінити розв'язок. Що стосується нелінійних ефектів, то вони приводять до скручування фронту хвилі.

Тому ми поставимо перед собою мету одержати наближене рівняння, яке буде правильно описувати ефекти малих поправок. При цьому ми обмежимося консервативними (без втрат енергії) системами, а отже, як і раніше будемо нехтувати дисипацією.

Як нам відомо, розв'язок рівняння (1.35) можна подати у вигляді суми двох біжучих хвиль, які рухаються у протилежних напрямках:

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at). \quad (1.36)$$

При врахуванні малої нелінійності і дисперсії ці хвилі можна розглядати незалежно. Фізична причина цього полягає в тому, що такі хвилі надто швидко рухаються відносно одна одної. Кожна з хвиль в (1.36) задовольняє рівняння першого порядку, зокрема, хвиля, яка рухається у додатному напрямку вздовж осі Ox , задовольняє рівняння

$$u_t + au_x = 0. \quad (1.37)$$

Справді, якщо $u = u(x - at)$, то

$$u_x = u'(x - at) \cdot 1 = u'(x - at), \quad u_t = u'(x - at) \cdot (-a) = -au_x.$$

Будемо шукати поправки до рівняння (1.37). Визначимо поправку, пов'язану з дисперсією. Нехай точний закон лінійних хвиль в нашому середовищі має вигляд

$$\omega = kv(k), \quad (1.38)$$

де ω – частота, k – довжина (період), v – швидкість хвилі. При $k \rightarrow 0$ швидкість v повинна прямувати до a . У загальному випадку $v(k)$ є аналітичною функцією від k (розкладається в степеневий ряд, впорядкований за степенями з основою k). За відсутності дисипації цей розклад відбувається за степенями k^2 . Справді, закон дисперсії (1.38) отримується з деякої системи диференціальних рівнянь з дійсними коефіцієнтами. Тому результат розв'язання цієї системи можна подати у вигляді залежності $i\omega$ від ik з дійсними коефіцієнтами. Для того, щоб частота ω в (1.38) була дійсною (це виражає відсутність дисипації), необхідно, щоб розклад швидкості v відбувався за парними степенями ik . Враховуючи сказане, при малих k , залежність $\omega(k)$ можна записати, враховуючи тільки першу поправку, у такому вигляді

$$\omega(k) = ak - \beta k^3. \quad (1.39)$$

Тоді стає зрозуміло, що для того, щоб отримати правильний закон дисперсії (1.38), потрібно в ліву частину рівняння (1.37) додати доданок з третьою похідною

$$u_t + au_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (1.40)$$

Тепер перейдемо до поправки, пов'язаної з нелінійністю. Це найзручніше зробити, якщо врахувати, що в консервативних системах, які ми тут розглядаємо, завжди діють точні закони збереження деяких величин. Фактично, мова може йти про

збереження кількості частинок. Запишемо один з таких законів у вигляді

$$u_t + j_x = 0. \quad (1.41)$$

Задача полягає в тому, щоб наближено виразити потік j через u . З порівняння (1.41) і (1.40) видно, що в лінійному по u наближенні

$$j = au + \beta u_{xx}.$$

У наступному наближенні з'явиться квадратичний по u член

$$j = au + \beta u_{xx} + \frac{\alpha}{2} u^2, \quad \alpha = \text{const}.$$

У результаті одержуємо шукане рівняння, яке враховує перші незникаючі поправки

$$u_t + au_x + \beta u_{xxx} + \alpha uu_x = 0. \quad (1.42)$$

Зробивши в рівнянні (1.42) заміну

$$\xi = x - at, \quad u = \frac{\beta}{\alpha} \tilde{u},$$

одержуємо рівняння типу КдФ

$$\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (1.43)$$

Зауважимо, що після заміни

$$\tilde{u} = \gamma w,$$

де $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, одержуємо більш загальне рівняння типу КдФ

$$w_t + \gamma ww_\xi + w_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (1.44)$$

Зокрема, при $\gamma = 6$ одержуємо рівняння (1.33), виведене Кортевегом і де Фрізом.

1.2.3. Задача Фермі-Пасти-Улама. Роботи Рассела, Кортевега і де-Фріза виявилися забутими на довгі десятиліття.

Лише у 1953 році один із найвидатніших фізиків ХХ століття Е. Фермі попросив своїх колег по Лос-Аламоській лабораторії С. Улама, Дж. Пасту та М. Цингу розв'язати одну з нелінійних задач на ЕОМ «MANIAC I» (англ.: Mathematical Analyzer, Numerical Integrator and Computer). Вони повинні були дослідити питання про термалізацію енергії в нелінійних дискретно навантажених струнах на прикладі коливання 64 важків, пов'язаних одна з одною пружинками (рис. 1.6), які при відхиленні від положення рівноваги отримували силу повернення.



Рис. 1.6. Ланцюг важок

Створюючи початкове коливання, дослідники хотіли подивитися, як ця початкова мода буде розподілятися по всіх інших модах. Передбачалося, що енергія в кінці кінців рівномірно розподілиться між модами, тобто по всій довжині хвилі, тим самим відбудеться термалізація енергії. Фактично задача зводилася до дослідження поведінки систем звичайних диференціальних рівнянь, які спочатку були лінійними, але в які було внесено нелінійність як збурення. Якби такого збурення не було, то енергія кожної нормальної моди лінійної системи, тобто коливань із заданою частотою, була б сталою. Тому можна було сподіватися, що нелінійні взаємодії між модами приведуть до того, щоб енергія системи рівномірно розподілилася між модами. Рух ланцюга важок, який розглядали Е. Фермі, Дж. Паста та С. Улам, описувався системою

$$m\ddot{q}_n(t) = U'(q_{n+1}(t) - q_n(t)) - U'(q_n(t) - q_{n-1}(t)), \quad n = \overline{1, N}, \quad (1.45)$$

де $q_n(t)$ – відхилення n -ої важки в момент часу t , m – маса важки, $N = 64$. Вони розглядали потенціали $U(r)$ вигляду

$$U(r) = \frac{\gamma}{2}r^2 + \frac{\alpha}{3}r^3$$

та

$$U(r) = \frac{\gamma}{2}r^2 + \frac{\beta}{4}r^4.$$

Пізніше системи Фермі-Пасти-Улама (ФПУ) з такими потенціалами назвали α -моделлю та β -моделлю ФПУ відповідно.

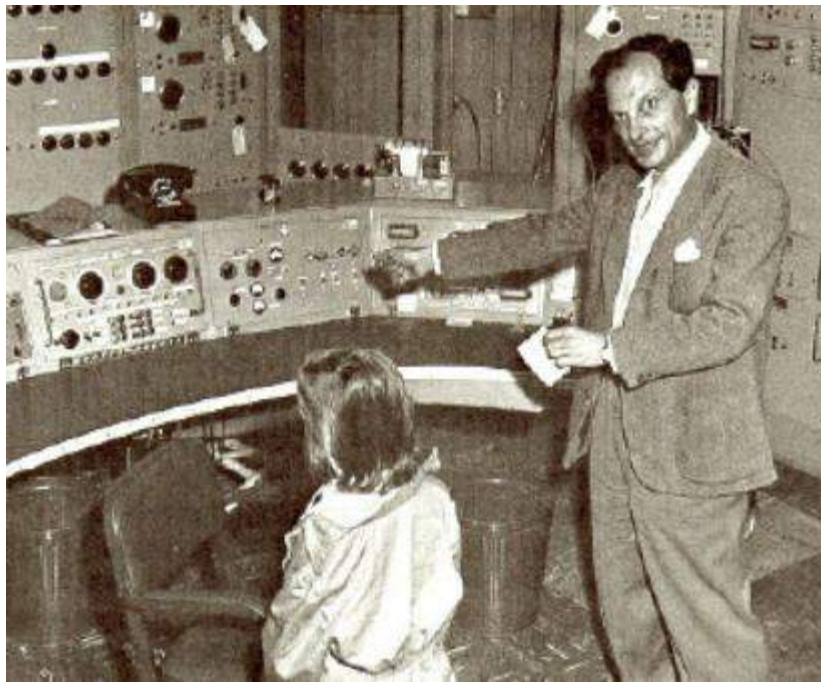


Рис. 1.7. С. Улам під час чисельного експерименту на MANIAC I

У 1954 році після проведення розрахунків цієї задачі на «MANIAC I» очікуваного результату вони не отримали, але виявили, що перекачування енергії в дві або три моди на початковому етапі розрахунку дійсно відбувається, але потім спостерігається повернення до початкового стану. Про цей

парадокс, пов'язаний з поверненням початкового коливання, стало відомо кільком математикам і фізикам. Зокрема, про цю задачу дізналися американські фізики Н. Забускі і М. Крускал, які вирішили продовжити обчислювальні експерименти з моделлю, запропонованою Фермі. Виявилось, що в ланцюжку виникають особливі хвилі (пізніше їх назвали солітонами), які не дають енергії рівномірно розподілятися по всій її довжині. Це було виявлено тільки через 11 років.

Після розрахунків і пошуку аналогій ці вчені встановили, що рівняння, яке використовували Фермі, Паста і Улам, при зменшенні відстані між важками і при необмеженому зростанні їх числа переходить в рівняння Кортевега–де Фріза. Тобто по суті задача, запропонована Фермі, зводилася до чисельного розв'язання рівняння Кортевега–де Фріза, запропонованого в 1895 році для опису відокремленої хвилі Рассела. Приблизно в ті ж роки було показано, що для опису іонно-звукових хвиль в плазмі використовується також рівняння Кортевега–де Фріза. Тоді стало зрозуміло, що це рівняння зустрічається в багатьох областях фізики і, отже, відокремлена хвиля, яка описується цим рівнянням, є широко поширеним явищем.

Варто зауважити, що відносно недавно (у 2015 р.) групою науковців у складі: М. Онорато, Л. Возелла, Д. Промент під керівництвом американського вченого Ю. Львова вдалося знайти розв'язання проблеми Фермі–Пасти–Улама. Вони математично обґрунтували, який рівень енергії необхідний, щоб створити одну повну хвилю в ланцюжку з'єднаних важок, які прагнуть до теплової рівноваги. Головним в їх методиці є поступова передача енергії в той момент, коли збігаються шість

станів в системі. Тоді енергія передається незворотнім чином. При великій кількості ітерацій моменти збігу шести станів з'являються достатню кількість разів, так що передається достатня кількість енергії, щоб досягти термальної рівноваги.

1.2.4. Солітони Кортвега-де Фріза. Продовжуючи обчислювальні експерименти з моделювання розповсюдження таких хвиль, Забускі і Крускал розглянули їх зіткнення (рис. 1.8). З формули для відокремлених хвиль (1.34) випливає, що швидкість руху таких хвиль тим вище, чим більше їх амплітуда, а ширина піку зменшується зі зростанням амплітуди. Таким чином, високі відокремлені хвилі рухаються швидше. Хвиля з більшою амплітудою наздожене рухому попереду хвилю з меншою амплітудою. Далі протягом деякого часу дві хвилі будуть рухатися разом як єдине ціле, взаємодіючи між собою, а потім вони роз'єднуються. Чудовою властивістю цих хвиль є те, що після своєї взаємодії форма і швидкість цих хвиль відновлюються. Обидві хвилі після зіткнення лише зміщуються на деяку відстань в порівнянні з тим, що якби вони рухалися без взаємодії.

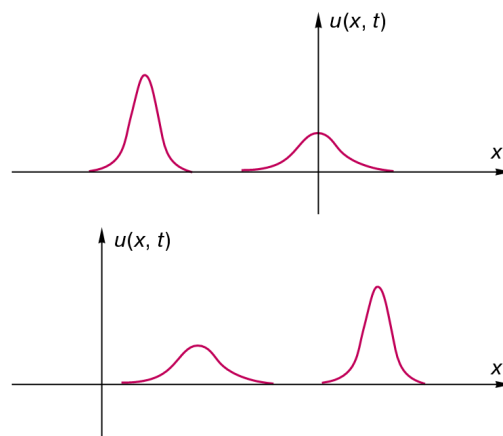


Рис. 1.8. Два солітони до взаємодії (вгорі) і після (внизу)

Процес, під час якого після взаємодії хвиль зберігаються форма і швидкість, нагадує пружне зіткнення двох частинок. Тому Крускал і Забускі такі відокремлені хвилі назвали *солітонами* (від англ. solitary – відокремлений). Ця спеціальна назва відокремлених хвиль, співзвучна електрону, протону та багатьом іншим елементарним частинкам, у даний час загальноприйнята.

1.2.5. Груповий солітон і нелінійне рівняння Шредінгера. У 1967 році американські фізики К. Гарднер, Дж. Грін, М. Крускал і Р. Міура використали перетворення рівняння Кортевега–де Фріза до системи двох лінійних диференціальних рівнянь, що називається тепер *парою Лакса*, названої на честь американського математика П. Лакса, який вніс великий вклад у розвиток теорії солітонів, і відкрили новий метод розв’язування ряду дуже важливих нелінійних рівнянь в частинних похідних. Цей метод отримав назву *методу оберненої задачі розсіювання*, оскільки в ньому істотно використовується розв’язання задачі квантової механіки про відновлення потенціалу за даними розсіювання.

У тому ж 1967 році Т. Бенжамін і Дж. Фейєр теоретичними розрахунками показали, що проста періодична хвиля на глибокій воді нестійка, і тому хвилі розбиваються на групи. Рівняння, за допомогою якого описується поширення груп хвиль на воді, було отримано В. Захаровим в 1968 році. На той час це рівняння вже було відоме у фізиці і носило назву *нелінійного рівняння Шредінгера*

$$iu_t + u_{xx} - 2ku|u|^2 = 0, \quad (1.46)$$

яке описує сукупність явищ у фізиці хвильових процесів (поширення електромагнітних хвиль в плазмі, поширення світла в нелінійних кристалах з дисперсією та ін.).

У 1971 році В. Захаров і А. Шабат показали, що це нелінійне рівняння має розв'язок також у вигляді солітонів, які відрізняються від солітонів Кортевега-де Фріза тим, що вони відповідають формі огинаючої групи хвиль (рис. 1.9).

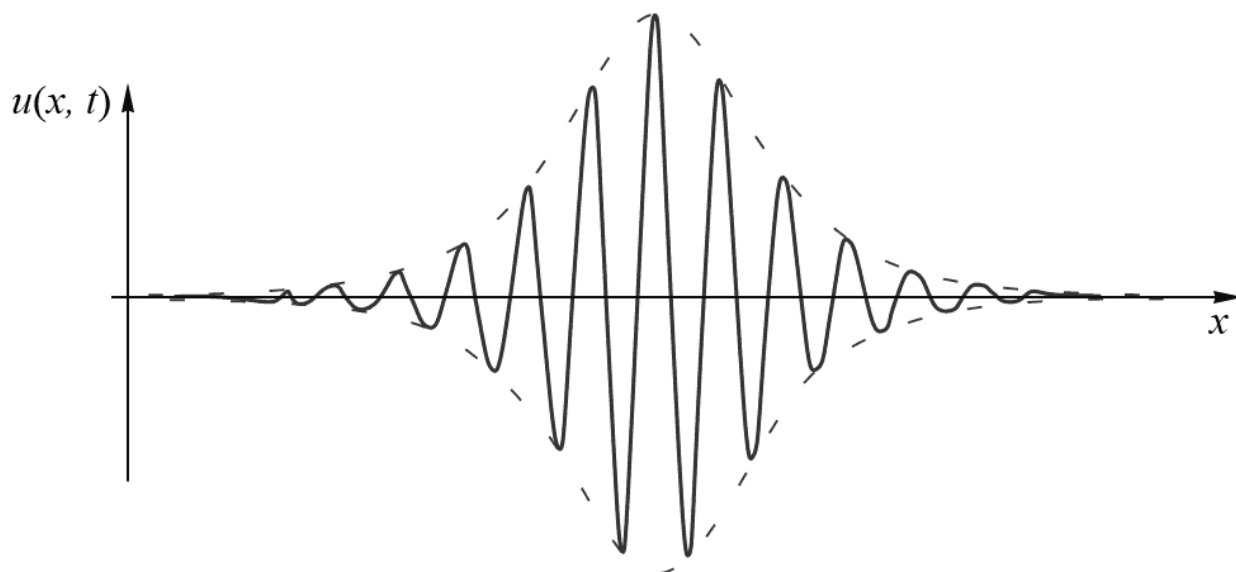


Рис. 1.9. Груповий солітон

Ці солітони називаються *груповими солітонами*, а іноді *солітонами огинаючої*. При цьому форма огинаючої описується залежністю

$$a(x, t) = a_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{x - c_0 t}{l} \right),$$

де a_0 – амплітуда, а l – половина довжини солітона. Зазвичай під огинаючою солітона знаходиться від 14 до 20 хвиль, причому середня хвиля найбільша. З цим пов'язаний добре відомий факт, що найвища хвиля в групі на воді знаходиться між сьомою та десятою («дев'ятий вал»). Якщо в групі хвиль

утворилося більша кількість хвиль, то відбудеться її розпад на кілька груп.

1.2.6. Модель Френкеля-Конторової. Топологічний солітон і рівняння синус-Гордона. Солітон Кортвега-де Фріза і груповий солітон, звичайно, не вичерпує всього різноманіття цих дивовижних нелінійних об'єктів. Не менш популярним, ніж перелічені вище солітони, є так званий *топологічний солітон*, який також має цікаву історію і велику область застосувань. Такі солітони виникають в процесах, які описуються так званим рівнянням синус-Гордона і його дискретним варіантом, який описує універсальну модель низькорозмірної нелінійної фізики – модель Френкеля-Конторової.

Класична модель Френкеля-Конторової була запропонована фізиками Я. Френкелем та Т. Конторовою у 1938 році для опису структури і динаміки кристалічної ґратки.

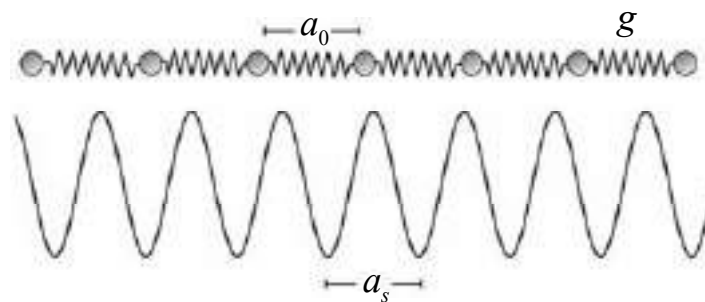


Рис. 1.10. Модель Френкеля-Конторової

На рис. 1.10 зроблено схематичне представлення моделі Френкеля-Конторової – ланцюг частинок, зв'язаних гармонічними пружинами з коефіцієнтом жорсткості g , який

взаємодіє із зовнішнім періодичним потенціалом періоду a_s , причому a_0 – рівноважний крок.

У безрозмірних координатах (степені всіх фізичних величин дорівнюють нулю) із зовнішнім потенціалом вигляду $U(r) = 1 - \cos r$ ця модель описується рівняннями:

$$\ddot{x}_n - g\Delta x_n + \sin x_n = 0, n \in \mathbb{Z}, \quad (1.47)$$

де $x_n = x_n(t)$ – координата n -ої частинки в момент часу t , $(\Delta x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n$ – одновимірний дискретний оператор Лапласа. Я. Френкель і Т. Конторова знайшли розв’язок цієї системи, який мав властивості солітона, але чіткого розуміння, що це таке, в той час ще не було.

Рівняння (1.47) є дискретним варіантом так званого рівняння синус-Гордона. Тобто у континуальному наближенні (коли дискретну змінну представляють як неперервну) модель Френкеля-Конторової зводиться до точно інтегровного рівняння синус-Гордона:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0. \quad (1.48)$$

Рівняння (1.48) належить до нелінійних гіперболічних рівнянь з частинними похідними. Таку назву це рівняння отримало завдяки подібності з відомим рівнянням Клейна-Гордона. Вперше це рівняння було розглянуто в диференціальній геометрії ще в XIX столітті в зв’язку з вивченням псевдосфер, які належать до поверхонь зі сталою від’ємною кривиною. Пізніше з’ясувалося, що рівняння синус-Гордона має досить універсальний характер та описує низку фізичних явищ (поширення імпульсів в дворівневих резонансних

середовищах, поведінка блохівських стінок у феромагнітних кристалах, рух дислокацій та ін.).

У 1962 році англійські фізики Дж. Перрінг і Т. Скірма при аналізі взаємодії елементарних частинок виконали чисельні розрахунки рівняння синус-Гордона. Відповідно до їх розрахунків, виконаних на ЕОМ, відокремлені хвилі, які є розв'язками рівняння синус-Гордона, не змінювали своїх властивостей після взаємодії. Однак на відміну від Крускала і Забускі вони не ввели поняття солітона, хоча їхня робота і випередила на три роки обчислювальний експеримент з відокремленою хвилею Кортевега-де Фріза. Зараз такі солітони називаються *топологічними*.

Зауважимо, що рівняння синус-Гордона застосовується при дослідженні динаміки збуджень намагніченості в магнітних матеріалах, джозефсонівських контактів в напівпровідниках, динаміки дислокацій у фізиці твердого тіла, розповсюдження хвиль розширення в біологічних (ліпідних) мембранах, тощо.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте означення збурення і коливання.
2. Що називають хвилею? Які є види хвиль?
3. Чим відрізняються стоячі і біжучі хвилі?
4. Який вигляд має рівняння вільних малих поперечних коливань струни? Як його вивести?
5. Який вигляд має двовимірне хвильове рівняння?
6. Сформулюйте задачу Коші для рівняння вільних малих поперечних коливань необмеженої струни.
7. Виведіть формулу Даламбера.
8. Розв'язати задачу Коші для рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad \text{якщо:}$$

$$8.1. \quad u(x, 0) = \sin x, \quad u_t'(x, 0) = 0, \quad a = 1.$$

$$8.2. \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t'(x, 0) = A \sin x, \quad A = \text{const}.$$

$$8.3. \quad u(x, 0) = u_t'(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad a = 1.$$

$$8.4. \quad u(x, 0) = h^2 \frac{\sin x}{x}, \quad u_t'(x, 0) = 0.$$

$$8.5. \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t'(x, 0) = \begin{cases} \frac{a}{100}, & x \in (0, l), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (0, l). \end{cases}.$$

9. Сформулюйте мішану задачу для рівняння вільних малих поперечних коливань необмеженої струни.
10. У чому полягає основний зміст методу Фур'є?
11. Що собою представляє відокремлена хвиля і яка історія її відкриття?

12. Який вигляд має рівняння Кортевега-де Фріза? Як його вивчести?
13. У чому полягає зміст задачі Фермі-Пасти-Улама?
14. Який вигляд має система Фермі-Пасти-Улама і який її зв'язок з рівнянням Кортевега-де Фріза?
15. Що собою представляє солітон. Хто вперше ввів таку назву?
16. Що собою представляє груповий солітон?
17. Якою формулою описується огинаюча групи хвиль?
18. Опишіть з фізичної точки зору модель Френкеля-Конторової. Якими рівняннями вона описується?
19. Який вигляд має рівняння синус-Гордона? Який воно має зв'язок з моделлю Френкеля-Конторової?
20. Що собою представляють топологічні солітони?

РОЗДІЛ 2. ПРЯМІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ СОЛІТОННИХ РІВНЯНЬ

§2.1. Метод Хіроти

До найвідоміших прямих методів інтегрування солітонних рівнянь належать метод Хіроти і метод перетворення Беклунда. Перший з них був запропонований у 1971 році японським фізиком Р. Хіртою. Розглянемо суть методу Хіроти на прикладі рівняння Кортевега-де Фріза. Нехай функція $u(x, t)$ задовольняє рівняння КдФ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.1)$$

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x}(3u^2 + u_{xx}) = 0 \quad (2.2)$$

і будемо шукати його розв'язок у формі подвоєної другої логарифмічної похідної

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(x, t) = \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{f} \right) = 2 \frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2} = 2 \left(\frac{f_{xx}}{f} - \left(\frac{f_x}{f} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Виразимо всі складові рівняння (2.2) через функцію $f(x, t)$:

$$\begin{aligned} u_t &= 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{f} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f_x}{f} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} \right); \\ u_x &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{xx}}{f} - \left(\frac{f_x}{f} \right)^2 \right) = 2 \left(\frac{f_{xxx}f - f_{xx}f_x}{f^2} - \frac{2f_x}{f} \left(\frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \frac{f_{xxx}}{f} - 6 \frac{f_{xx} f_x}{f^2} + 4 \left(\frac{f_x}{f} \right)^3; \\
 u_{xx} &= 2 \frac{f_{xxxx} f - f_{xxx} f_x}{f^2} - 6 \frac{f_{xxx} f_x + f_{xx}^2}{f^2} + 12 \frac{f_{xx} f_x^2}{f^3} + 12 \left(\frac{f_x}{f} \right)^2 \frac{f_{xx} f - f_x^2}{f^2}; \\
 3u^2 &= 12 \left(\frac{f_{xx}}{f} - \left(\frac{f_x}{f} \right)^2 \right)^2 = 12 \left(\frac{f_{xx}^2}{f^2} - 2 \frac{f_{xx} f_x^2}{f^3} + \frac{f_x^4}{f^4} \right).
 \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені вирази в рівняння (2.2), одержуємо

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{f_{xt}}{f} - 2 \frac{f_x f_t}{f^2} + 12 \frac{f_{xx}^2}{f^2} - 24 \frac{f_{xx} f_x^2}{f^3} + 12 \frac{f_x^4}{f^4} + \right. \\
 &\left. + 2 \frac{f_{xxxx}}{f} - 2 \frac{f_{xxx} f_x}{f^2} - 6 \frac{f_{xxx} f_x}{f^2} - 6 \frac{f_{xx}^2}{f^2} + 12 \frac{f_{xx} f_x^2}{f^3} + 12 \frac{f_x^2 f_{xx}}{f^3} - 12 \frac{f_x^4}{f^4} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

звідки

$$\frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} + 3 \frac{f_{xx}^2}{f^2} + \frac{f_{xxxx}}{f} - 4 \frac{f_{xxx} f_x}{f^2} = C = \text{const}.$$

Поклавши в останній рівності $C = 0$, одержуємо рівняння

$$ff_{xt} - f_x f_t + 3f_{xx}^2 + ff_{xxxx} - 4f_{xxx} f_x = 0. \quad (2.4)$$

Рівняння (2.4) називається *білінійним рівнянням Хіроти*.

Будемо шукати розв'язок рівняння (2.4) у вигляді ряду теорії збурень, впорядкованого за степенями деякого малого параметра ε :

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)} = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (2.5)$$

Підставляючи (2.5) в рівняння (2.4), одержуємо

$$\begin{aligned}
 &(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots) (\varepsilon f_{xt}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{xt}^{(2)} + \dots) - \\
 &- (\varepsilon f_x^{(1)} + \varepsilon^2 f_x^{(2)} + \dots) (\varepsilon f_t^{(1)} + \varepsilon^2 f_t^{(2)} + \dots) +
 \end{aligned}$$

$$+3\left(\varepsilon f_{xx}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{xx}^{(2)} + \dots\right)^2 + \left(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots\right)\left(\varepsilon f_{xxx}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{xxx}^{(2)} + \dots\right) - \\ -4\left(\varepsilon f_{xxx}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{xxx}^{(2)} + \dots\right)\left(\varepsilon f_x^{(1)} + \varepsilon^2 f_x^{(2)} + \dots\right) = 0,$$

або

$$\left(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots\right)\left(\varepsilon f_{xt}^{(1)} + \varepsilon f_{xxx}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{xt}^{(2)} + \varepsilon^2 f_{xxx}^{(2)} + \dots\right) - \\ -\varepsilon^2\left(f_x^{(1)} + \varepsilon f_x^{(2)} + \dots\right)\left(f_t^{(1)} + \varepsilon f_t^{(2)} + \dots\right) + 3\varepsilon^2\left(f_{xx}^{(1)} + \varepsilon f_{xx}^{(2)} + \dots\right)^2 - \\ -4\varepsilon^2\left(f_{xxx}^{(1)} + \varepsilon f_{xxx}^{(2)} + \dots\right)\left(f_x^{(1)} + \varepsilon f_x^{(2)} + \dots\right) = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , одержуємо систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^1 : f_{xt}^{(1)} + f_{xxx}^{(1)} = 0, \\ \varepsilon^2 : f_{xt}^{(2)} + f_{xxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} - 3\left(f_{xx}^{(1)}\right)^2 + 4f_{xxx}^{(1)} f_x^{(1)}, \\ \dots \\ \varepsilon^{N+1} : f_{xt}^{(N+1)} + f_{xxx}^{(N+1)} = \Phi_{N+1}\left(f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(N)}\right), \\ \dots \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Виявляється, що структура правих частин системи (2.6) така, що ряд (2.5) допускає обрив на будь-якому номері N , тобто, вважаючи, що $f^{(N+1)} \equiv 0$, ми одержимо, що всі наступні рівняння з номерами $N+2, N+3, \dots$ допускають тотожно нульовий розв'язок:

$$f^{(N+2)} = f^{(N+3)} = \dots = 0.$$

У цьому неважко переконатися, якщо подивитися на перші два рівняння при $N=2$, а для всіх інших N потрібно застосувати метод математичної індукції.

Із цього спостереження випливає, що параметр ε можна вибирати довільним (і не обов'язково малим), якщо ми хочемо обірвати ряд на скінченному номері N . Виберемо в цьому випадку $\varepsilon = 1$ і будемо послідовно розв'язувати систему (2.6), вважаючи, що $f^{(N+1)} \equiv 0$.

Перше рівняння в силу лінійності допускає розв'язок у вигляді суми простих хвиль

$$f^{(1)} = \sum_{n=1}^N e^{\theta_n},$$

де $\theta_n = a_n(x - a_n^2 t) + \delta_n$.

Тоді при $N = 1$ маємо

$$f^{(1)} = e^{\theta_1}, \quad f = 1 + e^{\theta_1},$$

звідки, повертаючись до заміни (2.3), одержуємо формулу для одиночного солітона

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{f} \right) = \left[\begin{array}{l} \theta_1 = a_1(x - a_1^2 t) + \delta_1 \\ \Rightarrow \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = a_1, f_x = a_1 e^{\theta_1} \end{array} \right] = \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1 e^{\theta_1}}{1 + e^{\theta_1}} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1}{e^{-\theta_1} + 1} \right) \\ &= 2 a_1^2 \frac{e^{-\theta_1}}{(e^{-\theta_1} + 1)^2} = \frac{a_1^2}{2} \frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{\theta_1}{2}} + e^{-\frac{\theta_1}{2}}}{2} \right)^2} = \\ &= \frac{a_1^2}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta_1}{2}} = \frac{a_1^2}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{a_1(x - a_1^2 t) + \delta_1}{2}}. \end{aligned}$$

Поклавши $a_1 = 2k$ і $\frac{\delta_1}{2} = \varphi_0$, одержуємо формулу односолітонного розв'язку рівняння КдФ (одиначного солітона), наведену у попередній лекції

$$u(x, t) = \frac{2k^2}{\text{ch}^2(k(x - 4k^2t) + \varphi_0)}. \quad (2.7)$$

При $N = 2$ маємо

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}.$$

Тоді для знаходження $f^{(2)}$ потрібно розв'язати лінійне рівняння

$$f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} - 3(f_{xx}^{(1)})^2 + 4f_{xxx}^{(1)} f_x^{(1)}. \quad (2.8)$$

Для цього знайдемо частинні похідні, які є в правій частині цього рівняння

$$\begin{aligned} f_x^{(1)} &= a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2}, \quad f_{xx}^{(1)} = a_1^2 e^{\theta_1} + a_2^2 e^{\theta_2}, \\ f_{xxx}^{(1)} &= a_1^3 e^{\theta_1} + a_2^3 e^{\theta_2}, \quad f_t^{(1)} = -(a_1^3 e^{\theta_1} + a_2^3 e^{\theta_2}), \\ f_x^{(1)} f_t^{(1)} &= -a_1^4 e^{2\theta_1} - (a_1 a_2^3 + a_2 a_1^3) e^{\theta_1 + \theta_2} - a_2^4 e^{2\theta_2}, \\ -3(f_{xx}^{(1)})^2 &= -3(a_1^4 e^{2\theta_1} + 2a_1^2 a_2^2 e^{\theta_1 + \theta_2} + a_2^4 e^{2\theta_2}) = \\ &= -3a_1^4 e^{2\theta_1} - 6a_1^2 a_2^2 e^{\theta_1 + \theta_2} - 3a_2^4 e^{2\theta_2}, \\ 4f_{xxx}^{(1)} f_x^{(1)} &= 4a_1^4 e^{2\theta_1} + 4(a_1 a_2^3 + a_2 a_1^3) e^{\theta_1 + \theta_2} + 4a_2^4 e^{2\theta_2}. \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння (2.8) одержуємо

$$f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = 3a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}. \quad (2.9)$$

Розв'язок рівняння (2.9) будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$f^{(2)} = A e^{\theta_1 + \theta_2}. \quad (2.10)$$

Знайдемо частинні похідні

$$f_x^{(2)} = A(a_1 + a_2)e^{\theta_1 + \theta_2}, \quad f_{xt}^{(2)} = A(a_1 + a_2)(-a_1^3 - a_2^3)e^{\theta_1 + \theta_2},$$

$$f_{xxxx}^{(2)} = A(a_1 + a_2)^4 e^{\theta_1 + \theta_2}.$$

Тепер, підставляючи (2.10) в (2.9), маємо

$$A\left((a_1 + a_2)(-a_1^3 - a_2^3) + (a_1 + a_2)^4\right)e^{\theta_1 + \theta_2} = 3a_1a_2(a_1 - a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2},$$

$$A(-a_1a_2^3 - a_1^3a_2 + 4a_1a_2^3 + 6a_1^2a_2^2 + 4a_1^3a_2) = 3a_1a_2(a_1 - a_2)^2,$$

$$3a_1a_2(a_1 + a_2)^2 A = 3a_1a_2(a_1 - a_2)^2,$$

звідки $A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$. Таким чином, маємо

$$f = 1 + f^{(1)} + f^{(2)} = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2},$$

звідки одержується *двохсолітонний розв'язок* рівняння КдФ

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{f} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + \frac{(a_1 - a_2)^2}{a_1 + a_2} e^{\theta_1 + \theta_2}}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}} \right). \quad (2.11)$$

Аналогічно знаходяться всі інші функції $f^{(k)}$, $k = 3, 4, \dots, N$. Відповідний розв'язок рівняння КдФ, який відповідає сумі N членів ряду (2.5), називається *N -солітонним розв'язком*. Зауважимо, що з фізичної точки зору формула (2.11) описує процес взаємодії двох одиночних солітонів. Причому, якщо $a_1 > a_2$, то солітон з амплітудою $2a_1^2$ буде рухатися швидше, ніж солітон з амплітудою $2a_2^2$ ($v_1 = 2a_1^2 > 2a_2^2 = v_2$), дожене його і після взаємодії обжене. При цьому обидва солітони після взаємодії збережуть свої форми і швидкості, які вони мали до взаємодії.

§2.2. Метод перетворення Беклунда

Ще одним прямим методом інтегрування солітонних рівнянь є метод, пов'язаний зі спеціальним нелінійним перетворенням. Ці перетворення, як правило, містять додаткові довільні сталі, тому на кожному кроці одержуються істотно нові розв'язки. При цьому можна починати з будь-якого тривіального, наприклад, нульового розв'язку і отримати за кроків N -солітонний розв'язок.

2.2.1. Перетворення Беклунда для рівняння КдФ. Як і вище, суть цього методу продемонструємо на прикладі рівняння КдФ. У рівнянні (2.1) замінимо u на $-u$ і розглянемо рівняння

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.12)$$

Зробимо підстановку

$$u = v_x + v^2 + \lambda, \quad (2.13)$$

де $v(x, t)$ – нова невідома функція, λ – деяка довільна стала.

Тоді

$$\begin{aligned} u_t &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) v_t, \\ -6uu_x + u_{xxx} &= -6(v_x + v^2 + \lambda)(v_{xx} + 2vv_x) + \frac{\partial}{\partial x}(v_{xxx} + 2v_x^2 + 2vv_{xx}) = \\ &= -6\underline{v_x v_{xx}} - \underline{6(v^2 + \lambda)v_{xx}} - \underline{12vv_x^2} - 12(v^2 + \lambda)vv_x + \\ &\quad + \underline{v_{xxxx}} + \underline{4v_x v_{xx}} + \underline{2v_x v_{xx}} + 2vv_{xxx} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} \right) + 2v \left(-6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) \left(-6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} \right),$$

і з рівняння (2.12) одержуємо рівняння

$$v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} = 0, \quad (2.14)$$

яке називається *модифікованим рівнянням КдФ*. Зауважимо, що якщо v – розв’язок рівняння (2.14), то $-v$ – також його розв’язок. Отже, функція $u_1 = -v_x + v^2 + \lambda$ буде розв’язком рівняння КдФ (2.12). При цьому u_1 , взагалі кажучи, не збігається з вихідним розв’язком u .

Для того щоб виключити проміжну функцію v з перетворення $u \mapsto u_1$, зробимо заміну

$$u = 2w_x, \quad u_1 = 2(w_1)_x. \quad (2.15)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{u - u_1}{2} &= v_x = (w - w_1)_x, \quad v = w - w_1, \\ v^2 + \lambda &= u - v_x = 2w_x - (w - w_1)_x = (w + w_1)_x, \\ v^2 + \lambda &= (w - w_1)^2 + \lambda, \end{aligned}$$

і для функцій w і w_1 одержуємо систему

$$\begin{cases} (w + w_1)_x = (w - w_1)^2 + \lambda, \\ (w - w_1)_t - 6(w + w_1)_x (w - w_1)_x + (w - w_1)_{xxx} = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Формули (2.16) називаються *перетворенням Беклунда*.

Для ілюстрації застосування цих перетворень покладемо

$$w = 0$$

та обчислимо u_1 . У цьому випадку система (2.16) набуває вигляду

$$\begin{cases} (w_1)_x = w_1^2 + \lambda, \\ -(w_1)_t + 6(w_1)_x^2 - (w_1)_{xxx} = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Роблячи заміну

$$w_1 = -\frac{f_x}{f}, \quad (w_1)_x = -\frac{f_{xx}}{f} + \frac{f_x^2}{f^2},$$

з першого рівняння системи (2.17) одержуємо

$$-\frac{f_{xx}}{f} + \frac{f_x^2}{f^2} = \frac{f_x^2}{f^2} + \lambda,$$

або

$$f_{xx} + \lambda f = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$f = e^{k(x+c)} + e^{-k(x+c)}, \quad \lambda = -k^2, \quad c = c(t).$$

Тоді

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{f_x}{f} = -\frac{ke^{k(x+c)} - ke^{-k(x+c)}}{e^{k(x+c)} + e^{-k(x+c)}} = -k \operatorname{th}(k(x+c)), \\ (w_1)_t &= -\frac{k^2 c_t}{\operatorname{ch}^2(k(x+c))}, \quad (w_1)_x = -\frac{k^2}{\operatorname{ch}^2(k(x+c))}, \\ (w_1)_{xx} &= \frac{2k^3 \operatorname{sh}(k(x+c))}{\operatorname{ch}^3(k(x+c))}, \\ (w_1)_{xxx} &= \frac{2k^4 \operatorname{ch}^4(k(x+c)) - 6k^4 \operatorname{sh}^2(k(x+c)) \operatorname{ch}^2(k(x+c))}{\operatorname{ch}^6(k(x+c))} = \\ &= \frac{2k^4 \operatorname{ch}^2(k(x+c)) - 6k^4 \operatorname{sh}^2(k(x+c))}{\operatorname{ch}^4(k(x+c))} = \\ &= \frac{2k^4 \operatorname{ch}^2(k(x+c)) - 6k^4 (\operatorname{ch}^2(k(x+c)) - 1)}{\operatorname{ch}^4(k(x+c))} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-4k^4 \operatorname{ch}^2(k(x+c)) + 6k^4}{\operatorname{ch}^4(k(x+c))} = \frac{-4k^4}{\operatorname{ch}^2(k(x+c))} + \frac{6k^4}{\operatorname{ch}^4(k(x+c))},$$

і з другого рівняння системи (2.17) маємо:

$$\frac{k^2 c_t}{\operatorname{ch}^2(k(x+c))} + \frac{6k^4}{\operatorname{ch}^4(k(x+c))} + \frac{4k^4}{\operatorname{ch}^2(k(x+c))} - \frac{6k^4}{\operatorname{ch}^4(k(x+c))} = 0,$$

звідки

$$c_t + 4k^2 = 0, \quad c(t) = -4k^2 t + c_0.$$

І остаточно, поклавши $\varphi_0 = kc_0$, одержуємо формулу односолітонного розв'язку рівняння КдФ (2.12)

$$u_1 = 2(w_1)_x = -\frac{2k^2}{\operatorname{ch}^2(k(x - 4k^2 t) + \varphi_0)}. \quad (2.18)$$

2.2.2. Перетворення Беклунда для ланцюга Тоди.

Відповідні перетворення Беклунда існують для всіх солітонних рівнянь. Проілюструємо їх застосування на прикладі ланцюга Тоди, названого на честь японського фізика М. Тоди, який у 1971 році вказав на існування в ньому солітонних розв'язків. Ланцюг Тоди представляє собою нескінченний ланцюг нелінійно зв'язаних частинок, кожна з яких взаємодіє з двома найближчими сусідами. Динаміка цього ланцюга описується нескінченною системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\ddot{q}_n = e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.19)$$

де $q_n = q_n(t)$ – координата (поздовжнє зміщення, відхилення від положення рівноваги) n -ї частинки в момент часу t . Розв'язок $q_n = q_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$ (двохстороння функціональна послідовність

$\{q_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ системи (2.19) однозначно визначається початковими умовами

$$q_n(0) = q_n^{(0)}, \quad \dot{q}_n(0) = q_n^{(1)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Візьмемо деякий розв'язок $q_n = q_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, і розглянемо такі перетворення $q_n \mapsto r_n$:

$$\begin{cases} \dot{q}_n = e^{q_n - r_n} + e^{r_{n-1} - q_n} - \alpha, \\ \dot{r}_n = e^{q_n - r_n} + e^{r_n - q_{n+1}} - \alpha, \end{cases} \quad (2.20)$$

де $\alpha = \text{const}$. Покажемо, що $\{r_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ також задовольняє систему (2.19). Диференціюючи по t друге рівняння системи (2.20), одержуємо

$$\begin{aligned} \ddot{r}_n &= (\dot{q}_n - \dot{r}_n) e^{q_n - r_n} + (\dot{r}_n - \dot{q}_{n+1}) e^{r_n - q_{n+1}} = \\ &= (e^{q_n - r_n} + e^{r_{n-1} - q_n} - e^{q_n - r_n} - e^{r_n - q_{n+1}}) e^{q_n - r_n} + \\ &+ (e^{q_n - r_n} + e^{r_n - q_{n+1}} - e^{q_{n+1} - r_{n+1}} - e^{r_n - q_{n+1}}) e^{r_n - q_{n+1}} = \\ &= (e^{r_{n-1} - q_n} - e^{r_n - q_{n+1}}) e^{q_n - r_n} + (e^{q_n - r_n} - e^{q_{n+1} - r_{n+1}}) e^{r_n - q_{n+1}} = \\ &= e^{r_{n-1} - r_n} - e^{q_n - q_{n+1}} + e^{q_n - q_{n+1}} - e^{r_n - r_{n+1}} = e^{r_{n-1} - r_n} - e^{r_n - r_{n+1}}. \end{aligned}$$

Таким чином, система (2.20) задає перетворення Беклунда для ланцюга Тоди. Як і у випадку рівняння КдФ, застосуємо перетворення (2.20) до нульового розв'язку

$$q_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді система (2.20) набуде вигляду

$$\begin{cases} 0 = e^{-r_n} + e^{r_{n-1}} - \alpha, \\ \dot{r}_n = e^{-r_n} + e^{r_n} - \alpha. \end{cases} \quad (2.21)$$

Домноживши друге рівняння системи (2.21) на e^{r_n} , одержуємо

$$e^{r_n} \dot{r}_n = \frac{d}{dt} e^{r_n} = 1 + e^{2r_n} - \alpha e^{r_n},$$

або, після заміни $u = e^{r_n}$

$$u' = u^2 - \alpha u + 1, \quad du = (u^2 - \alpha u + 1) dt.$$

Відокремлюючи змінні, отримуємо табличний інтеграл

$$\int \frac{du}{u^2 - \alpha u + 1} = \int \frac{du}{\left(u - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1 - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{u - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}} = t + C_n,$$

де C_n – сталі інтегрування.

Для побудови солітонного розв'язку потрібно взяти $\alpha \geq 2$.

Далі зручно зробити таку параметризацію

$$\alpha = 2 \operatorname{ch} \tau, \quad \beta = -\operatorname{sh} \tau.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}} &= \sqrt{1 - \operatorname{ch}^2 \tau} = \sqrt{-\operatorname{sh}^2 \tau} = i \operatorname{sh} \tau = -i \beta, \\ u - \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}} (t + C_n) \right) = \\ &= -i \beta \operatorname{tg}(-i \beta (t + C_n)) = i \beta \operatorname{tg}(i \beta (t + C_n)) = \\ &= [\operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z] = -\beta \operatorname{th}(\beta (t + C_n)), \\ e^{r_n} = u &= \frac{\alpha}{2} - \beta \operatorname{th}(\beta (t + C_n)) = \operatorname{ch} \tau + \frac{\operatorname{sh} \tau \operatorname{sh}(\beta (t + C_n))}{\operatorname{ch}(\beta (t + C_n))} = \\ &= \frac{\operatorname{ch} \tau \operatorname{ch}(\beta (t + C_n)) + \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh}(\beta (t + C_n))}{\operatorname{ch}(\beta (t + C_n))} = \\ &= [\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y] = \\ &= \frac{\operatorname{ch}(\beta (t + C_n) + \tau)}{\operatorname{ch}(\beta (t + C_n))}. \end{aligned}$$

Далі знайдемо C_n . З першого рівняння системи (2.21) маємо

$$e^{-r_n} + e^{r_{n-1}} - \alpha = \frac{\operatorname{ch}(\beta(t + C_n))}{\operatorname{ch}(\beta(t + C_n) + \tau)} + \frac{\operatorname{ch}(\beta(t + C_{n-1}) + \tau)}{\operatorname{ch}(\beta(t + C_{n-1}))} - \alpha = 0.$$

Розв'язок цього рівняння відносно C_n можна записати у вигляді

$$\beta C_n = -\tau(n+1).$$

Справді,

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \tau(n+1))}{\operatorname{ch}(\beta t - \tau(n+1) + \tau)} + \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \tau n + \tau)}{\operatorname{ch}(\beta t - \tau n)} - \alpha = \\ &= \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \tau(n+1)) + \operatorname{ch}(\beta t - \tau n + \tau)}{\operatorname{ch}(\beta t - \tau n)} - \alpha = \\ &= \left[\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} \right] = \\ &= \frac{2 \operatorname{ch}(\beta t - \tau n) \operatorname{ch} \tau}{\operatorname{ch}(\beta t - \tau n)} - \alpha = 2 \operatorname{ch} \tau - \alpha \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким чином, односолітонний розв'язок ланцюга Тоди має вигляд

$$e^{r_n} = \frac{\operatorname{ch}(\beta t - \tau n)}{\operatorname{ch}(\beta t - \tau(n+1))}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2.2.3. Перетворення Беклунда для рівняння синус-Гордона. І на завершення зазначимо, що вперше процедура побудови часткових розв'язків нелінійних рівнянь за допомогою перетворення Беклунда була запропонована у 1880 році скандинавським математиком А. Беклундом для знаходження розв'язків рівняння синус-Гордона в його праці з диференціальної геометрії, присвяченій вивченню поверхонь

сталюї від'ємної кривини. Нагадаємо, що рівняння синус-Гордона має вигляд

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0. \quad (2.22)$$

Це рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$u_{xt} = \sin u. \quad (2.23)$$

Візьмемо деякий розв'язок $u(x, t)$ і розглянемо перетворення

$u \mapsto v$:

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = \lambda \sin \frac{u+v}{2}, \\ \frac{u_t + v_t}{2} = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{u-v}{2}, \end{cases} \quad (2.24)$$

де λ – довільний дійсний параметр. Система (2.24) задає перетворення Беклунда для рівняння (2.23), тобто функція $v(x, t)$ є розв'язком рівняння синус-Гордона, якщо виконуються рівняння (2.23) і (2.24). Справді, продиференціювавши перше рівняння системи (2.24) по t , а друге – по x , маємо

$$\begin{aligned} \frac{u_{xt} - v_{xt}}{2} &= \lambda \frac{u_t + v_t}{2} \cos \frac{u+v}{2} = \sin \frac{u-v}{2} \cos \frac{u+v}{2}, \\ \frac{u_{tx} + v_{tx}}{2} &= \frac{1}{\lambda} \frac{u_x - v_x}{2} \cos \frac{u-v}{2} = \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}. \end{aligned}$$

Тепер, віднімаючи від другого рівняння перше, одержуємо

$$v_{xt} = \sin v.$$

Далі аналогічно, як і вище, застосуємо перетворення Беклунда до нульового розв'язку $u = 0$. Поклавши в системі (2.24) $u = 0$, маємо

$$\begin{cases} \frac{v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{v}{2}, \\ \frac{v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{v}{2}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Для зручності зробимо заміну

$$\omega = \frac{v}{2}.$$

Тоді перше рівняння системи (2.25) набуде вигляду

$$\omega_x = -\lambda \sin \omega, \quad \frac{d\omega}{\sin \omega} = -\lambda dx.$$

Інтегруючи останнє рівняння, одержуємо

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{\sin \omega} &= -\int \lambda dx, \\ \int \frac{d\omega}{\sin \omega} &= \int \frac{\sin \omega d\omega}{\sin^2 \omega} = \int \frac{d(\cos \omega)}{\cos^2 \omega - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} = -\lambda(x - C), \\ \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} &= \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} = e^{-2\lambda(x-C)}, \end{aligned}$$

де C – стала інтегрування. Звідси

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= e^{-\lambda(x-C)}, \quad \frac{\omega}{2} = \operatorname{arctg} e^{-\lambda(x-C)}, \\ \frac{v}{4} &= \operatorname{arctg} e^{-\lambda(x-C)} = \operatorname{arctg} e^{-\lambda x + \lambda C}. \end{aligned}$$

Тут стала інтегрування C повинна залежати від t , так, щоб задовольнялось друге рівняння системи (2.25). Розв'язок другого рівняння знаходиться аналогічно і має вигляд

$$\frac{v}{4} = \operatorname{arctg} e^{\frac{t-t_0}{\lambda}}.$$

Звідси, вибираючи $e^{\lambda C(t)} = e^{\lambda x_0} e^{\frac{t-t_0}{\lambda}}$, одержуємо остаточний односолітонний розв'язок рівняння синус-Гордона

$$v(x, t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-\lambda(x-x_0) - \frac{1}{\lambda}(t-t_0)}, \quad x_0, t_0 = \text{const}, \quad (2.26)$$

або

$$v(x, t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-\lambda x - \frac{t}{\lambda} + \varphi_0}, \quad \varphi_0 = \text{const}. \quad (2.27)$$

Зауважимо, що побудований розв'язок відрізняється від солітонів рівняння КдФ. На відміну від солітонів рівняння КдФ, розв'язок (2.26) не прямує до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$, оскільки $\operatorname{arctg} \varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ при $\varphi \rightarrow \pm\infty$. Залежно від знаку параметра λ розрізняють два випадки: *кінк* ($\lambda < 0$) та *антикінк* ($\lambda > 0$). Ці назви (англ. kink – вигин, петля) походять від виду графіків цих розв'язків (рис. 2.1). Нагадаємо, що такі солітони називаються *топологічними*.

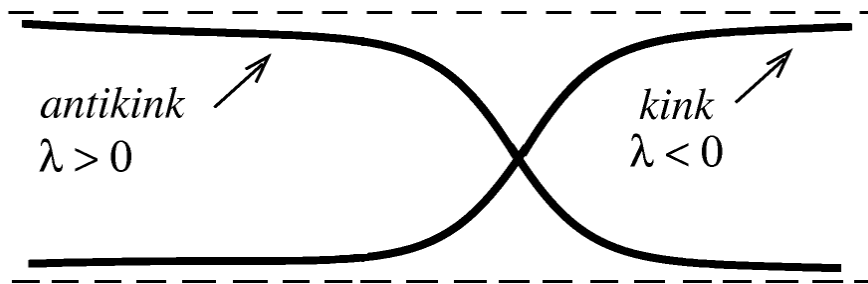


Рис. 2.1. Кінк та антикінк

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які ви знаєте прямі методи інтегрування солітонних рівнянь?
2. Розкрийте суть методу Хіרותи.
3. Який вигляд має білінійне рівняння Хіרותи?
4. Який вигляд має односолітонний розв'язок рівняння КдФ?
5. Виведіть односолітонний розв'язок рівняння КдФ за допомогою методу Хіרותи.
6. Який вигляд має двохсолітонний розв'язок рівняння КдФ?
7. Виведіть двохсолітонний розв'язок рівняння КдФ за допомогою методу Хіרותи.
8. Який зв'язок між амплітудою і швидкістю солітона?
9. Розкрийте суть методу перетворення Беклунда.
10. Запишіть модифіковане рівняння КдФ.
11. Який вигляд має перетворення Беклунда для рівняння КдФ?
12. Виведіть односолітонний розв'язок рівняння КдФ за допомогою методу перетворення Беклунда.
13. Що собою представляє ланцюг Тоди?
14. Який вигляд має перетворення Беклунда для ланцюга Тоди?
15. Який вигляд має односолітонний розв'язок для ланцюга Тоди?
16. Виведіть односолітонний розв'язок для ланцюга Тоди за допомогою методу перетворення Беклунда.
17. Який вигляд має перетворення Беклунда для рівняння синус-Гордона?
18. Який вигляд має односолітонний розв'язок рівняння синус-Гордона?
19. Виведіть односолітонний розв'язок рівняння синус-Гордона за допомогою методу перетворення Беклунда.
20. Що собою представляють кінки та антикінки?

РОЗДІЛ 3. МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ

§3.1. Інтегрування рівняння КдФ методом оберненої задачі розсіювання

Існує два види задач розсіювання: прямі (визначення даних розсіювання для заданого потенціалу) та обернені (визначення потенціалу за заданими даними розсіювання). Обернені задачі розсіювання як правило зустрічаються в ситуаціях, коли неможливі безпосередні вимірювання. Типовий приклад – дослідження стану стінок артерій за допомогою ультразвуку. Ослаблену ділянку стінки артерії, наприклад, аневризму, можна виявити за допомогою спектрального аналізу ультразвукових коливань. Іншим типовим прикладом такої оберненої задачі є аналіз сейсмічних даних. Він дозволяє не тільки слідкувати за активністю землетрусів у земній корі, але й є потужним інструментом у геофізичних дослідженнях детальної структури земної мантії і ядра. З аналізу сейсмічних хвиль, відбитих і заломлених шарами порід, через які вони проходять, можна отримати інформацію про густину та інші властивості цих порід. Це приклад оберненої задачі розсіювання: знаючи хвилі, які надходять і відходять з відомого джерела, визначити природу невідомого розсіювача хвиль. В медицині, хімії, фізиці і техніці часто необхідно отримати детальну інформацію про будову макромолекул, наприклад, для молекул ДНК або для нового виду штучного волокна. Найбільш поширеним є метод рентгеноструктурного аналізу. За фотографією в рентгенівських променях можна визначити

природу молекул, які розсіюють ці промені. Теоретично ця обернена задача зводиться до визначення перетворення Фур'є для одержаного розподілу густини зображення у рентгенівських променях.

3.1.1. Перетворення Фур'є. Метод оберненої задачі виник як своєрідне нелінійне узагальнення класичного методу Фур'є, призначеного для інтегрування лінійних рівнянь з частинними похідними. Розглянемо цю аналогію на прикладі лінеаризованого рівняння КдФ

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

з початковою умовою

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^2(\mathbb{R}). \quad (3.2)$$

Розглянемо два перетворення функцій:

- *пряме перетворення Фур'є:*

$$F(u) = \hat{u}(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} u(x, t) dx,$$

- *обернене перетворення Фур'є:*

$$F^{-1}(u) = u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \hat{u}(\lambda, t) d\lambda.$$

Застосуємо перетворення Фур'є до задачі (3.1), (3.2). Спочатку виконаємо підстановку початкової умови в пряме перетворення Фур'є:

$$F(u_0) = \hat{u}(\lambda, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} u_0(x) dx.$$

Далі, використовуючи правила обчислення похідних, запишемо:

$$F(u_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} u dx = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u} = \hat{u}_t,$$

$$F(u_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = i\lambda F(u) = i\lambda \hat{u},$$

$$F(u_{xxx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx = (i\lambda)^3 F(u) = -i\lambda^3 \hat{u}.$$

Тепер, підставляючи ці похідні в рівняння (3.1), одержуємо звичайне диференціальне рівняння відносно змінної t

$$\hat{u}_t - i\lambda^3 \hat{u} = 0, \quad (3.3)$$

де λ – змінна в перетворенні Фур'є, входить як сталий параметр. Загальний розв'язок рівняння (3.3) має вигляд

$$\hat{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{i\lambda^3 t}.$$

Стала інтегрування $C(\lambda)$ знаходиться з початкової умови в точці $t = 0$

$$C(\lambda) = \hat{u}(\lambda, 0) = F(u_0).$$

Таким чином, ми знайшли перетворення Фур'є розв'язку задачі Коші (3.1), (3.2). Застосовуючи обернене перетворення Фур'є, одержуємо шуканий розв'язок:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x + i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda.$$

3.1.2. Пара Лакса для рівняння КдФ. Роль перетворення Фур'є у випадку нелінійного рівняння КдФ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

буде відігравати *перетворення розсіяння*, яке здійснюється звичайним лінійним диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + (\lambda^2 + u)\Phi = 0 \quad (3.4)$$

з коефіцієнтом $u = u(x, t)$, що є розв'язком рівняння КдФ. Припускаючи, що $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, визначимо дані розсіювання $a(\lambda, t)$ і $b(\lambda, t)$ співвідношенням:

$$\Phi \rightarrow \begin{cases} e^{-i\lambda x}, & x \rightarrow -\infty, \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.5)$$

З'ясуємо, який зв'язок має рівняння (3.4) з рівнянням КдФ. Виявляється, що рівняння (3.4) входить в так звану *пару Лакса*, названу на честь американського математика П. Лакса:

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi, \\ \Psi_t = A\Psi, \end{cases} \quad (3.6)$$

де невідома функція Ψ є матрицею

$$\Psi = \Psi(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix},$$

так само як коефіцієнти $L = L(x, t, \lambda)$ і $A = A(x, t, \lambda)$.

Очевидно, що L і A не можуть бути довільними, оскільки вони задають два незалежні рівняння пари Лакса (3.6) для однієї невідомої функції Ψ . Припускаючи, що всі компоненти Ψ , L та A є гладкими, а Ψ – фундаментальним розв'язком ($\det \Psi \neq 0$), знайдемо умову сумісності рівнянь (3.6).

Продиференціювавши перше рівняння по t , а друге – по x , отримуємо

$$\Psi_{xt} = L_t\Psi + L\Psi_t = \Psi_{tx} = A_x\Psi + A\Psi_x.$$

Виразивши Ψ_t та Ψ_x із рівнянь (3.6), отримаємо

$$L_t + LA = A_x + AL \text{ або } L_t - A_x = [A, L], \quad (3.7)$$

де $[A, L]$ – комутатор матриць L та A , тобто $[A, L] = AL - LA$. Рівняння (3.7) є необхідною і достатньою умовою сумісності системи (3.6).

Виберемо матриці L та A у вигляді

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda & iu \\ i & -i\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.8)$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

де λ – довільний комплексний параметр, а $u = u(x, t)$ – деяка функція, яка не залежить від λ . Можна показати, що для того щоб функція u задовольняла рівняння КдФ, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова сумісності (3.7) з матрицями (3.8) і (3.9).

Виведемо рівняння (3.4) з першого рівняння пари Лакса (3.6)

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda & iu \\ i & -i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}.$$

З цієї системи знайдемо рівняння для Ψ_{21} . Для цього перепишемо систему в скалярному вигляді для першого стовпця матриці Ψ :

$$\begin{cases} \Psi'_{11} = i\lambda \Psi_{11} + iu \Psi_{21}, \\ \Psi'_{21} = i \Psi_{11} - i\lambda \Psi_{21}. \end{cases}$$

Диференціюючи друге рівняння, маємо

$$\Psi''_{21} = i \Psi'_{11} - i\lambda \Psi'_{21} = i(i\lambda \Psi_{11} + iu \Psi_{21}) - i\lambda(i \Psi_{11} - i\lambda \Psi_{21}),$$

Звідки одержуємо рівняння

$$\Psi''_{21} + (\lambda^2 + u) \Psi_{21} = 0, \quad (3.10)$$

яке збігається з рівнянням (3.4) при $\Psi_{21} = \Phi$.

Таким чином, задача інтегрування рівняння КдФ зводиться до задачі інтегрування пари Лакса (3.6), оскільки, знаючи розв'язок Ψ , легко знайти u із співвідношень (3.6) та (3.8)

$$\begin{pmatrix} i\lambda & u \\ 1 & -i\lambda \end{pmatrix} = \Psi_x \Psi^{-1}.$$

3.1.3. Пряма задача розсіювання. Рівняння (3.4) описує поведінку хвильової функції Φ одновимірної квантової частинки в потенціальному полі u . Тому рівняння (3.4) прийнято називати *рівнянням Шредінгера*, диференціальний оператор $\frac{d^2}{dx^2} + u$ – *оператором Шредінгера*, а його коефіцієнт u – *потенціалом* рівняння або оператора Шредінгера. При цьому сталу λ прийнято називати *спектральним параметром*, оскільки вона відіграє роль частоти вільної квантової частинки. Легко бачити, що

$$\Phi = c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x} \text{ при } u \equiv 0.$$

Будемо розглядати клас потенціалів, які задовольняють умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) |u(x, t)| dx < \infty, \quad u \in C^\infty. \quad (3.11)$$

Умова (3.11) означає, що потенціал u гладкий і достатньо швидко спадає при $|x| \rightarrow \infty$ (швидше, ніж $x^{-\alpha}$, $\alpha \geq 2$). Ця умова дозволяє явно визначити асимптотичні стани початкової і розсіяної хвилі на нескінченності

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0, \quad |x| \gg 1,$$

звідки маємо, що

$$\Phi \rightarrow c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x}, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Виберемо початкову умову на мінус нескінченності

$$\Phi \rightarrow e^{-i\lambda x}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (3.12)$$

Тоді на плюс нескінченності отримаємо

$$\Phi \rightarrow a(\lambda, t) e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t) e^{i\lambda x}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.13)$$

Коефіцієнти $a(\lambda, t)$ і $b(\lambda, t)$ називаються *коефіцієнтом проходження* і *коефіцієнтом відбиття* відповідно. Разом вони складають *дані розсіювання* потенціалу $u(x, t)$. Виявляється, що динаміка по t так визначених даних розсіювання схожа на динаміку по t даних Фур'є для лінеаризованого рівняння КдФ, розглянутого вище:

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{8i\lambda^3 t}.$$

Визначення даних розсіювання за заданим потенціалом за формулами (3.11), (3.12) і (3.13) називається *прямою задачею розсіювання*. Зауважимо, що дані розсіювання однозначно виражаються через одну комплексно значну функцію

$$r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)}, \quad (3.14)$$

яка називається *коефіцієнтом відбиття*.

3.1.4. Обернена задача розсіювання. *Обернена задача розсіювання* полягає у відновленні потенціалу $u(x, t)$ в рівнянні Шредінгера (3.4) за його даними розсіювання $a(\lambda, t)$ і $b(\lambda, t)$, визначеними співвідношенням (3.5).

Кажуть, що значення $\lambda \in \mathbb{C}$ належать *дискретному спектру* оператора Шредінгера (3.4) з потенціалом $u(x, t)$, якщо $\Phi(\lambda, x, t) \in L^2(\mathbb{R})$, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\lambda, x, t)|^2 dx < \text{const}.$$

При цьому ці значення λ називаються *власними значеннями*, а відповідні розв'язки – *власними функціями* диференціального оператора Шредінгера.

Виявляється, що у випадку відсутності дискретного спектра ($a(\lambda) \neq 0$ для всіх $\text{Im } \lambda \geq 0$) потенціал $u(x, t)$ пов'язаний з хвильовою функцією Φ таким співвідношенням

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda (\Phi(\lambda, x, t)e^{i\lambda x} - 1). \quad (3.15)$$

Використовуючи співвідношення (3.5) можна показати, що потенціал $u(x, t)$ обчислюється за *формулою обертання*:

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t), \quad (3.16)$$

де функція $K(x, y, t)$ є розв'язком *рівняння Гельфанда–Левітана–Марченка* (ГЛМ)

$$K(x, y, t) + F(x + y, t) + \int_x^{+\infty} K(x, s, t) F(s + y, t) ds = 0, \quad x < y, \quad (3.17)$$

з ядром, яке обчислюється за формулою

$$F(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} dz. \quad (3.18)$$

Таким чином, можна сформулювати стандартний алгоритм розв'язування оберненої задачі розсіяння для рівняння КдФ:

1. За даними розсіювання $a(\lambda, t) = a(\lambda, 0)$ та $b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{8i\lambda^3 t}$ знайти коефіцієнт відбиття (3.14)

$$r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = \frac{b(\lambda, 0)}{a(\lambda, 0)} e^{8i\lambda^3 t}.$$

2. Знайти ядро рівняння ГЛМ за формулою (3.18).

3. Знайти розв'язок рівняння ГЛМ (3.17).

4. Знайти розв'язок рівняння КдФ за формулою обертання (3.16).

Розглянемо тепер випадок дискретного спектра оператора Шредінгера. Виявляється, що точки дискретного спектра збігаються з нулями коефіцієнта проходження, тобто λ_n – власне значення тоді і тільки тоді, коли $a(\lambda_n) = 0$. Крім того, якщо потенціал $u(x, t)$ задовольняє умову (3.11), то множина власних значень $\{\lambda_n\}$ не більш, ніж скінченна. А при дійсному $u(x, t)$ всі власні значення лежать на уявній осі, тобто

$$\lambda_n = i\chi_n, \quad \chi_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

При цьому χ_n не залежать від t , а для коефіцієнтів відбиття правильна формула

$$b_n(i\chi_n, t) = b_n e^{8\chi_n^3 t}, \quad b_n = \text{const}.$$

У цьому випадку алгоритм розв'язування оберненої задачі розсіювання залишається тим самим, а потенціал $u(x, t)$ відновлюється за формулою обертання (3.16).

У випадку $b(\lambda) \equiv 0$ ($r(\lambda) \equiv 0$) можна вивести формулу для загальних N -солітонних розв'язків рівняння КдФ. У цьому випадку ядро рівняння ГЛМ буде виродженим, тобто

$$F(z, t) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n(i\chi_n, t)e^{-\chi_n z}}{ia'(i\chi_n, t)} = \sum_{n=1}^N \beta_n(t)e^{-\chi_n z}, \quad (3.19)$$

де $\beta_n(t) = \frac{b_n(i\chi_n, t)}{ia'(i\chi_n, t)} = \beta_n e^{8\chi_n^3 t}$, $\beta_n = \text{const.}$ А сам розв'язок рівняння

ГЛМ знаходиться за допомогою засобів лінійної алгебри. Зокрема, його шукають у вигляді

$$K(x, y, t) = \sum_{n=1}^N K_n(x, t)e^{-\chi_n y}. \quad (3.20)$$

Тоді рівняння ГЛМ (3.17) розпадається на систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} K_1(x, t)A_{11}(x, t) + K_2(x, t)A_{12}(x, t) + \dots + K_N(x, t)A_{1N}(x, t) = -\beta_1(t)e^{-\chi_1 x}, \\ K_1(x, t)A_{21}(x, t) + K_2(x, t)A_{22}(x, t) + \dots + K_N(x, t)A_{2N}(x, t) = -\beta_2(t)e^{-\chi_2 x}, \\ \dots \\ K_1(x, t)A_{N1}(x, t) + K_2(x, t)A_{N2}(x, t) + \dots + K_N(x, t)A_{NN}(x, t) = -\beta_N(t)e^{-\chi_N x}, \end{cases} \quad (3.21)$$

де матриця коефіцієнтів цієї системи $A(x, t) = \{A_{ij}(x, t)\}$ складається з функцій

$$A_{ij}(x, t) = \delta_{ij} + \frac{\beta_i(t)e^{-x(\chi_i + \chi_j)}}{\chi_i + \chi_j}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.22)$$

Розв'язуючи систему (3.21) методом Крамера і підставляючи її розв'язок в рівність (3.20), знаходимо розв'язок рівняння ГЛМ

$$\begin{aligned} K(x, x, t) &= \sum_{n=1}^N K_n(x, t)e^{-\chi_n x} = \\ &= \frac{1}{\det A(x, t)} \sum_{n=1}^N \det A_{(n)}(x, t)e^{-\chi_n x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln \det A(x, t), \end{aligned}$$

де матрицю $A_{(n)}(x, t)$ отримуємо з матриці $A(x, t)$ заміною n -го стовпця на стовпець коефіцієнтів правої частини. І остаточно формула обертання (3.16) набуває вигляду

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A(x, t). \quad (3.23)$$

Зокрема, при $N = 1$ матриця $A(x, t)$ стає скаляром

$$A(x, t) = 1 + \frac{\beta e^{8\chi^3 t} e^{-2\chi x}}{2\chi} = 1 + \frac{\beta e^{-2\chi x + 8\chi^3 t}}{2\chi},$$

а її визначник збігається з самою матрицею. Знайшовши другу логарифмічну похідну

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln \det A(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(1 + \frac{\beta e^{-2\chi x + 8\chi^3 t}}{2\chi} \right) = \\ &= \frac{2\chi}{2\chi + \beta e^{-2\chi x + 8\chi^3 t}} \cdot \frac{\beta e^{-2\chi x + 8\chi^3 t}}{2\chi} \cdot (-2\chi) = \\ &= -\frac{2\chi \beta e^{-2\chi x + 8\chi^3 t}}{2\chi + \beta e^{-2\chi x + 8\chi^3 t}} = -\frac{2\chi \beta}{2\chi e^{2\chi x - 8\chi^3 t} + \beta}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\chi \beta}{2\chi e^{2\chi x - 8\chi^3 t} + \beta} \right) = \\ &= \frac{2\chi \beta}{\left(2\chi e^{2\chi x - 8\chi^3 t} + \beta \right)^2} \cdot 2\chi e^{2\chi x - 8\chi^3 t} \cdot 2\chi = \\ &= \frac{8\chi^3 \beta e^{2\chi x - 8\chi^3 t}}{\left(2\chi e^{2\chi x - 8\chi^3 t} + \beta \right)^2} = \frac{4\chi^2}{\left(\sqrt{\frac{2\chi}{\beta}} e^{\chi x - 4\chi^3 t} + \sqrt{\frac{\beta}{2\chi}} e^{-\chi x + 4\chi^3 t} \right)^2} = \\ &= \frac{4\chi^2}{\left(e^{\chi x - 4\chi^3 t + \ln \sqrt{\frac{2\chi}{\beta}}} + e^{-\chi x + 4\chi^3 t - \ln \sqrt{\frac{2\chi}{\beta}}} \right)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{4\chi^2}{4\operatorname{ch}^2\left(\chi x - 4\chi^3 t + \ln\sqrt{\frac{2\chi}{\beta}}\right)} = \frac{\chi^2}{\operatorname{ch}^2\left(\chi\left(x - 4\chi^2 t\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{2\chi}{\beta}\right)},$$

за формулою (3.23) одержуємо односолітонний розв'язок рівняння КдФ

$$u(x, t) = -\frac{2\chi^2}{\operatorname{ch}^2\left(\chi\left(x - 4\chi^2 t\right) + \varphi_0\right)}, \quad (3.24)$$

де $\varphi_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{2\chi}{\beta}$.

§3.2. Інтегрування рівняння синус-Гордона методом оберненої задачі розсіювання

Розглянемо рівняння синус-Гордона у канонічному вигляді

$$u_{xt} = \sin u. \quad (3.25)$$

Проінтегруємо рівняння (3.25) методом оберненої задачі розсіювання.

Розпочнемо з пари Лакса, яка тут має вигляд

$$\begin{cases} \Psi_x = \begin{pmatrix} i\lambda & \frac{i u_x}{2} \\ \frac{i u_x}{2} & -i\lambda \end{pmatrix} \Psi, \\ \Psi_t = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix} \Psi. \end{cases} \quad (3.26)$$

Функціональний клас для потенціалу u дещо відрізняється від випадку рівняння КдФ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x dx < \infty, \quad u \rightarrow \pi k \text{ при } x \rightarrow \pm\infty, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.27)$$

Ключову роль при інтегруванні рівняння (3.25) відіграє перше рівняння пари Лакса. У даному випадку воно не зводиться до простого скалярного рівняння другого порядку, а може бути записане у вигляді системи для пари скалярних функцій $\Phi_1 = \Psi_{21}$ і $\Phi_2 = \Psi_{22}$

$$\begin{aligned} (\Phi_1)_x &= i\lambda\Phi_1 + \frac{i u_x}{2}\Phi_2, \\ (\Phi_2)_x &= \frac{i u_x}{2}\Phi_1 - i\lambda\Phi_2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

з умовами розсіювання

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty, \\ \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} b(\lambda, t)e^{i\lambda x} \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Як у випадку рівняння КдФ, ці умови випливають із розв'язків рівняння (3.28) з нульовим потенціалом $u = 0$

$$\begin{aligned} (\Phi_1)_x &= i\lambda\Phi_1 \Rightarrow \Phi_1 = C_1 e^{i\lambda x}, \\ (\Phi_2)_x &= -i\lambda\Phi_2 \Rightarrow \Phi_2 = C_2 e^{-i\lambda x}. \end{aligned}$$

При цьому дані розсіювання мають вигляд

$$a(\lambda, t) = a(\lambda), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda) e^{\frac{it}{2\lambda}}. \quad (3.29)$$

Рівняння Гельфанда-Левітана-Марченка для відновлення потенціалу за даними розсіювання для рівняння синус-Гордона перетворюється в систему двох інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} K_1(x, y, t) + \int_x^{+\infty} K_2(x, \xi, t) F(\xi + y, t) d\xi = 0, \\ K_2(x, y, t) + \int_x^{+\infty} K_1(x, \xi, t) \overline{F}(\xi + y, t) d\xi = \overline{F}(x + y, t). \end{cases} \quad (3.30)$$

Коефіцієнт відбиття і ядро рівнянь (3.30) мають вигляд

$$r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda)},$$

$$F(z, t) = \sum_{j=1}^N \beta_j e^{\frac{it}{2\lambda_j}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} d\lambda,$$

$$\text{де } \beta_j = \frac{b_j}{ia'(\lambda_j)}.$$

Розв'язок рівняння синус-Гордона знаходиться за формулою обертання

$$u(x, t) = -2K_2(x, x, t). \quad (3.31)$$

Подібно до рівняння КдФ, N -солітонні розв'язки тут відповідають умові $b(\lambda) \equiv 0$ ($r(\lambda) \equiv 0$). В цьому випадку система (3.31) зводиться до лінійної системи алгебраїчних рівнянь з матрицею

$$A(x, t) = \{A_{kj}(x, t)\}, \quad k, j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.32)$$

$$A_{kj}(x, t) = \frac{\beta_j}{\lambda_k + \lambda_j} e^{i(\lambda_k + \lambda_j)x - \frac{it}{2\lambda_j}}.$$

Тоді N -солітонний розв'язок рівняння синус-Гордона знаходиться за формулою

$$u(x, t) = 2i \ln \frac{\det(E + A(x, t))}{\det(E - A(x, t))}, \quad (3.33)$$

де E – одинична матриця.

Зокрема, при $N=1$ і $\lambda = i\chi$, $\chi > 0$, матриця $A(x, t)$ стає скаляром

$$A(x, t) = \frac{\beta e^{-2\chi x - \frac{t}{2\chi}}}{2i\chi},$$

і за формулою (3.33) одержуємо односолітонний розв'язок рівняння синус-Гордона

$$u(x, t) = 2i \ln \frac{\det(E + A(x, t))}{\det(E - A(x, t))} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2i \ln \frac{1 + \frac{\beta e^{-2\chi x - \frac{t}{2\chi}}}{2i\chi}}{1 - \frac{\beta e^{-2\chi x - \frac{t}{2\chi}}}{2i\chi}} = 2i \ln \frac{1 - i \frac{\beta e^{-2\chi x - \frac{t}{2\chi}}}{2\chi}}{1 + i \frac{\beta e^{-2\chi x - \frac{t}{2\chi}}}{2\chi}} = \\
&= \left[\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix} \Rightarrow \ln \frac{1-ix}{1+ix} = -2i \operatorname{arctg} x \right] = \\
&= 4 \operatorname{arctg} \frac{\beta e^{-2\chi x - \frac{t}{2\chi}}}{2\chi}. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Зокрема, якщо $\beta > 0$, то односолітонний розв'язок можна подати у вигляді

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} e^{-2\chi x - \frac{t}{2\chi} + \varphi_0}, \tag{3.35}$$

де $\varphi_0 = \ln \frac{\beta}{2\chi}$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому полягають обернені задачі розсіювання?
2. Наведіть приклади обернених задач розсіювання в геофізиці, біології, фізиці, медицині тощо.
3. Запишіть формули прямого та оберненого перетворення Фур'є.
4. За допомогою перетворення Фур'є знайдіть розв'язок задачі Коші для лінеаризованого рівняння КдФ.
5. Яким диференціальним рівнянням визначається перетворення розсіювання для нелінійного рівняння КдФ?
6. Яким співвідношенням визначаються дані розсіювання для нелінійного рівняння КдФ?
7. Що собою представляє пара Лакса?
8. Покажіть, як задача інтегрування рівняння КдФ зводиться до задачі інтегрування пари Лакса.
9. Який вигляд має оператор Шредінгера?
10. У чому полягає пряма задача розсіювання для рівняння КдФ?
11. У чому полягає обернена задача розсіювання для рівняння КдФ?
12. Запишіть формулу обернення для рівняння КдФ.
13. Який вигляд має рівняння Гельфанда–Левітана–Марченка?
14. Сформулюйте стандартний алгоритм розв'язування оберненої задачі розсіювання для рівняння КдФ.
15. За допомогою методу оберненої задачі розсіювання знайдіть односолітонний розв'язок рівняння КдФ.

16. Запишіть рівняння синус-Гордона у канонічному вигляді.
17. Який вигляд має пара Лакса для рівняння синус-Гордона.
18. Запишіть формулу обертання для рівняння синус-Гордона.
19. Запишіть формулу, за допомогою якої можна знайти N -солітонний розв'язок рівняння синус-Гордона методом оберненої задачі розсіювання.
20. За допомогою методу оберненої задачі розсіювання знайдіть односолітонний розв'язок рівняння синус-Гордона.

РОЗДІЛ 4. ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНИХ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ

§4.1. Існування біжучих хвиль в системах осциляторів

Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. До таких систем належать нескінченні системи нелінійних осциляторів, дискретні рівняння типу синус-Гордона, системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера. Варто зазначити, що системи зв'язаних осциляторів широко використовують для моделювання різноманітних процесів в хімії (хімічні осцилятори) та біології (біологічні осцилятори), при дослідженні нейронних мереж тощо.

Праці Е. Фермі, Дж. Пасти та С. Улама дали поштовх для великої кількості подальших чисельних та аналітичних досліджень. До систем типу Фермі-Пасти-Улама (ФПУ) належить цілком інтегрована ґратка (ланцюг) Тоди. На жаль, ґратка Тоди є єдиною відомою повністю інтегрованою системою типу ФПУ. Переважна більшість існуючих результатів стосуються точних і наближених часткових розв'язків або чисельного моделювання. В цих роботах часто знаходяться розв'язки без визначення достатніх умов їх існування. Тому надзвичайно важливим є питання встановлення достатніх умов, за яких ці розв'язки існують.

Важливим класом розв'язків таких систем є біжучі хвилі. Питання існування біжучих хвиль в системах осциляторів, зокрема, в дискретних рівняннях типу синус-Гордона і системах типу Фермі-Пасти-Улама, досліджували Дж. Йосс, К. Кіршгаснер Ж. Фрізеке, Дж. Ваттіс, Д. Сметс, М. Віллем, О. Панков, К. Пфлюгер, Б. Руф, П. Срікант, Г. Аріолі, Дж. Чабровські, Ф. Газзола, А. Шулькін, С. Терраціні, С. Бак, П. Макіта, К. Крейнер, Й. Зіммер, М. Фецкан, В. Ротос та ін.

Найбільш повний огляд результатів про існування розв'язків для систем ФПУ можна знайти в монографії О. Панкова, опублікованій у 2005 році. Тут розглядається одновимірний ланцюг частинок, що взаємодіють зі своїми найближчими сусідами. Рівняння руху такої системи мають вигляд:

$$m_n \ddot{q}_n(t) = U'_{n+1}(q_{n+1}(t) - q_n(t)) - U'_n(q_n(t) - q_{n-1}(t)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

де $q_n(t)$ – координата n -ої частинки в момент часу t , m_n – маса цієї частинки, U_n – потенціал взаємодії між n -ою та $(n-1)$ -ою частинками. Припускається, що існують константи $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, такі, що

$$M_1 \leq m_n \leq M_2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Систему (4.1) можна записати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p, q), \\ \dot{q} = H'_p(p, q); \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p_n^2}{2m_n} + U_{n+1}(q_{n+1} - q_n) \right),$$

де $p_n(t) = m_n \cdot \dot{q}_n(t)$. Нагадаємо, що з фізичної точки зору гамільтоніан визначає повну енергію системи.

Зауважимо, що біжучою хвилею є розв'язок вигляду

$$q_n(t) = u(n - ct),$$

де $u(s)$ – функція неперервного аргументу $s \in \mathbb{R}$. Функція $u(s)$ називається профілем хвилі. Стала $c \neq 0$ представляє собою швидкість хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля переміщується вправо, а якщо $c < 0$, то вліво. Зауважимо, що різниця

$r(s) = u(s+1) - u(s) = \int_s^{s+1} u'(\tau) d\tau$ називається профілем відносних зміщень.

О. Панков дослідив існування чотирьох типів біжучих хвиль:

За відповідних умов існують чотири типи розв'язків:

– періодичні біжучі хвилі: $u(s) = u(s+T)$ для деяких $T > 0$ і всіх $s \in \mathbb{R}$;

– відокремлені біжучі хвилі: $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = 0$;

– «періодичні» біжучі хвилі, тобто хвилі з періодичним профілем відносних зміщень: $u'(s) = u'(s+T)$ для деяких $T > 0$ і всіх $s \in \mathbb{R}$;

– «відокремлені» біжучі хвилі: $\lim_{s \rightarrow -\infty} u'(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} u'(s) = 0$.

Далі розглянемо ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Нехай $q_n(t)$ – узагальнена координата n -го осцилятора в момент часу t . Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з двома своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_n(t) = -U'_n(q_n(t)) + a_{n-1}(q_{n-1}(t) - q_n(t)) - a_n(q_n(t) - q_{n+1}(t)), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.2)$$

Рівняння (4.2) представляють собою нескінченну (зчисленну) систему звичайних диференціальних рівнянь. Розглядаються такі розв'язки системи (4.2), що

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} q_n(t) = 0,$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_n(r)$ запишемо у вигляді

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2}r^2 + V_n(r)$$

і покладемо $b_n = c_n - a_n - a_{n-1}$. Тоді рівняння (4.1) матимуть вигляд

$$\ddot{q}_n(t) = a_n q_{n+1}(t) + a_{n-1} q_{n-1}(t) + b_n q_n(t) - V'_n(q_n(t)), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

Система (4.2) також є гамільтоновою системою з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \left[\|p\|_{l^2}^2 - (Aq, q)_{l^2} \right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(q_n),$$

де $p = \dot{q}$, $(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n$.

За відповідних умов існують два типи розв'язків:

– періодичні біжучі хвилі: $u(s) = u(s + T)$ для деяких $T > 0$

і всіх $s \in \mathbb{R}$;

– відокремлені біжучі хвилі: $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u(s) = 0$.

Розглянемо дискретне рівняння типу *синус-Гордона*

$$\ddot{q}_n(t) = U'(q_{n+1}(t) - q_n(t)) - U'(q_n(t) - q_{n-1}(t)) - K \sin(q_n(t)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

з константою $K > 0$, де $q_n(t)$ – узагальнена координата n -ої частинки. Ці рівняння описують динаміку частинок в нескінченному ланцюзі з пружною взаємодією найближчих

сусідів і зовнішнім потенціалом відповідно до закону Ньютона (як і рівняння осциляторів). Аргументом потенціалу взаємодії $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є дискретне зміщення (зсув) $q_{n+1}(t) - q_n(t)$.

За відповідних умов існують три типи розв'язків:

– гетероклінічні біжучі хвилі:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = -\pi \text{ та } \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = \pi;$$

– гомоклінічні біжучі хвилі: $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = 0$;

– періодичні біжучі хвилі: $u(s) = u(s + T)$ для деяких $T > 0$

і всіх $s \in \mathbb{R}$.

Розглянемо тепер динаміку системи осциляторів на двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m} = q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n, m) -го осцилятора в момент часу t . Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами (рис. 4.1). Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,m}(t) = & c_1 (q_{n+1,m}(t) + q_{n-1,m}(t) - 2q_{n,m}(t)) + \\ & + c_2 (q_{n,m+1}(t) + q_{n,m-1}(t) - 2q_{n,m}(t)) - U'(q_{n,m}(t)), \end{aligned} \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (4.5)$$

де $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

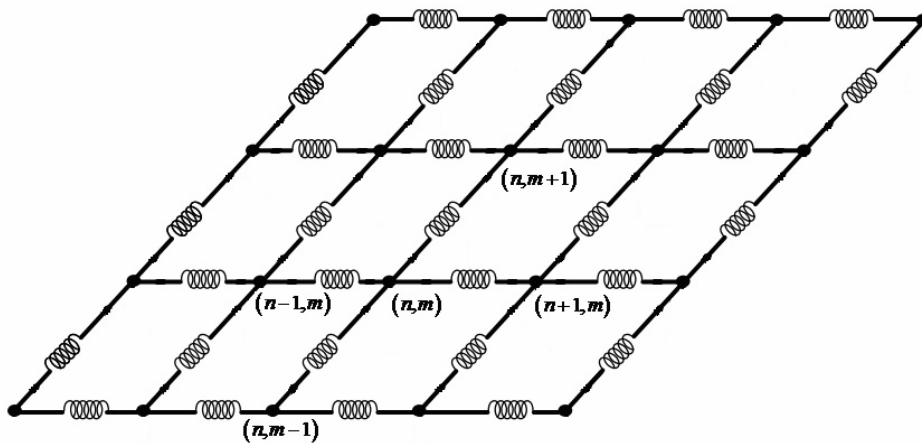


Рис. 4.1. Двовимірна ґратка зв'язаних осциляторів

Розглядаються потенціали вигляду $U(r) = -\frac{a}{2}r^2 + V(r)$, для яких система (4.5) набуває вигляду

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = c_1 \Delta_{(1)} q_{n,m}(t) + c_2 \Delta_{(2)} q_{n,m}(t) + a q_{n,m}(t) - V'(q_{n,m}(t)), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (4.6)$$

де $(\Delta_{(1)} q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} - 2q_{n,m}$, $(\Delta_{(2)} q)_{n,m} = q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 2q_{n,m}$ – дискретні оператори Лапласа відповідно за змінними n і m .

Біжучою хвилею в даному випадку є розв'язок вигляду

$$q_{n,m}(t) = u(n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct), \quad (4.7)$$

де $\vec{l}(\cos \varphi, \sin \varphi)$ – фіксований хвильовий вектор, який задає напрям поширення хвилі. Нагадаємо, що функція неперервного аргументу $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, називається профілем біжучої хвилі. Стала $c \neq 0$ представляє собою швидкість хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля зміщується в одному напрямку, а якщо $c < 0$, то у протилежному.

Після підстановки біжучої хвилі (4.7) в систему (4.6), одержується рівняння для її профілю $u(s)$:

$$c^2 u''(s) = c_1 (u(s + \cos \varphi) + u(s - \cos \varphi) - 2u(s)) + c_2 (u(s + \sin \varphi) + u(s - \sin \varphi) - 2u(s)) + a u(s) - V'(u(s)), \quad (4.8)$$

де $s = n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct$.

Під розв'язком рівняння (4.8) розуміється функція $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, яка задовольняє це рівняння.

Вивчаються біжучі хвилі двох типів: періодичні та відокремлені. У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі достатньо знайти розв'язок рівняння (4.8) з умовою періодичності

$$u(s + 2k) = u(s), s \in \mathbb{R}, \quad (4.9)$$

де $k > 0$ – деяке число. Профіль відокремленої хвилі є розв’язком рівняння (4.8) з крайовими умовами на нескінченності

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \quad (4.10)$$

Зазначимо, що в рівняння (4.8) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівняння (4.8), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$.

Введемо в розгляд множину

$$\Omega(c_1, c_2, a) = \left\{ c > 0 : \min_{\xi \in \mathbb{R}} \sigma(\xi) \geq 0 \right\},$$

де $\sigma(\xi) = c^2 \xi^2 - 4c_1 \sin^2\left(\frac{\xi}{2} \cos \varphi\right) - 4c_2 \sin^2\left(\frac{\xi}{2} \sin \varphi\right) + a$. Очевидно, що ця множина непорожня, якщо $a \geq 0$. Важливу роль відіграє величина c_0 , яка визначається рівністю

$$c_0 = c_0(c_1, c_2, a) := \inf_{c > 0} \Omega(c_1, c_2, a). \quad (4.11)$$

Всюди далі припускається, що потенціал $V(r)$ задовольняє умову:

- (h) функція $V(r)$ неперервно диференційовна, $V(0) = V'(0) = 0$ і $V'(r) = o(r)$, при $r \rightarrow 0$, та існує таке $\mu > 2$, що
- $$0 < \mu V(r) \leq V'(r)r, r \neq 0.$$

Зауважимо, що умову (h) називають умовою Амброзетті–Рабіновича.

Залежно від типу біжучої хвилі, розглядаються функціонали дії

$$J_k(u) = \int_{-k}^k \left[\frac{c^2}{2} (u'(s))^2 - \frac{c_1}{2} (u(s + \cos \varphi) - u(s))^2 - \right. \\ \left. - \frac{c_2}{2} (u(s + \sin \varphi) - u(s))^2 + \frac{a}{2} u^2(s) - V(u(s)) \right] ds, \\ J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2} (u'(s))^2 - \frac{c_1}{2} (u(s + \cos \varphi) - u(s))^2 - \right. \\ \left. - \frac{c_2}{2} (u(s + \sin \varphi) - u(s))^2 + \frac{a}{2} u^2(s) - V(u(s)) \right] ds,$$

визначені відповідно на Соболевських просторах $E_k = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u(s + 2k) = u(s)\}$ та $E = H^1(\mathbb{R})$. Доведено, що критичні точки цих функціоналів є розв'язками рівняння (4.8) у відповідних просторах.

Однією із найпростіших і найбільш використовуваних мінімаксних теорем є теорема про гірський перевал.

Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ класу C^1 . Кажуть, що I задовольняє умову Пале-Смейла, якщо виконується наступна умова:

(PS) якщо $\{u_n\} \subset H$ така послідовність, що $\{I(u_n)\}$ обмежена та $I'(u_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то $\{u_n\}$ містить збіжну підпослідовність.

Зауважимо, що при перевірці цієї умови можна, без обмеження загальності, вважати, що числова послідовність $\{I(u_n)\}$ збігається, оскільки з обмеженої числової послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.

Послідовність $\{u_n\}$ точок гільбертового простору H називається *послідовністю Пале-Смейла функціоналу I на деякому рівні b* , якщо $I(u_n) \rightarrow b$ та $I'(u_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тоді, враховуючи сказане вище, умову Пале-Смейла можна переформулювати наступним чином:

(PS) *Будь-яка послідовність Пале-Смейла $\{u_n\} \subset H$ містить збіжну підпослідовність.*

Теорема 4.1 (про гірський перевал). *Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ класу C^1 , який задовольняє умову Пале-Смейла. Припустимо, що існують $e \in H$ і $r > 0$ такі, що $\|e\| > r$ і $\beta := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e)$. Тоді існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I , що критичне значення*

$$I(u) = b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \beta,$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. При цьому $I(u) \leq \sup_{\tau \geq 0} I(\tau e)$.

Якщо функціонал I задовольняє всі умови цієї теореми, крім умови Пале-Смейла, то кажуть, що він задовольняє геометрію гірського перевалу.

Виявляється, що функціонал $J_k(u)$ задовольняє всі умови теореми про гірський перевал, а отже, правильна теорема:

Теорема 4.2. *Нехай виконується умова (h) і $a > 0$. Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c > c_0$ рівняння (4.8) має нетривіальний розв'язок u , що задовольняє умову (4.9). Крім того, існують такі додатні сталі ε_0 , C_0 , ε і C , які не залежать від k , що $\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0$, $\varepsilon \leq J_k(u) \leq C$. Більше того, цей розв'язок не сталий при достатньо великих значеннях k .*

Зауважимо, що оскільки серед встановлених умов існування біжучих хвиль є умова $c > c_0$, то c_0 будемо називати швидкістю звуку (як це зроблено, наприклад, в працях О.

Панкова). Тоді теорема 4.2 встановлює існування надзвукових періодичних біжучих хвиль.

Теорема 4.3. *Нехай виконується умова (h) і $a > 0$. Тоді для будь-якого $c > c_0$ рівняння (4.8) має несталий розв'язок u , який задовольняє умови (4.10), а отже, існують дві несталі відокремлені біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$.*

Для доведення цієї теореми використовується метод періодичних апроксимацій, тобто відокремлена хвиля будується, як границя періодичної хвилі при $k \rightarrow \infty$.

Ще однією популярною мінімаксною теоремою є теорема про зачеплення.

Нехай H – гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z$ такий елемент, що $\|z\| = r$. Позначимо

$$M := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| \leq \rho, \lambda \geq 0\}$$

і

$$M_0 := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \text{ і } \lambda \geq 0, \text{ або } \|u\| \leq \rho \text{ і } \lambda = 0\},$$

тобто M_0 – межа M (∂M). Нехай $N := \{u \in Z : \|u\| = r\}$.

Розглянемо C^1 -функціонал I на H і припустимо, що $\beta := \inf_{u \in N} I(u) > \alpha := \sup_{u \in M_0} I(u)$. В такому випадку говорять, що функціонал I задовольняє геометрію зачеплення.

Теорема 4.4 (про зачеплення). *Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ класу C^1 , який задовольняє умову Пале–Смейла та геометрію зачеплення. Тоді існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I , що критичне значення*

$I(u) := b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} I(\gamma(u)) \geq \beta$, де $\Gamma := \{\gamma \in C(M, H) : \gamma|_{M_0} = id\}$. При цьому $I(u) \leq \sup_{u \in M} I(u)$.

Наступна теорема встановлює існування нетривіальних періодичних біжучих хвиль для рівняння (4.8) для довільних швидкостей $c > 0$. Зокрема, сюди входять хвилі зі швидкостями $c > c_0$ і хвилі зі швидкостями $c \in (0, c_0]$. Існування перших (надзвукових хвиль) було встановлено за допомогою теореми про гірський перевал, а от існування дозвукових хвиль залишалося відкритим.

Теорема 4.5. *Нехай виконується умова (h) і $a > 0$. Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c > 0$ рівняння (4.8) має нетривіальний розв'язок u , що задовольняє умову (4.9).*

Зауваження 4.1. *На відміну від теореми 4.2, теорема 4.5 встановлює існування тільки нетривіальних періодичних хвиль хоча із більш широким діапазоном швидкостей. Довести несталість цих розв'язків тут не вдасться, оскільки в надзвуковому випадку є рівномірні по k оцінки розв'язків і це дає несталість при великих періодах, а у дозвуковому випадку таких оцінок немає. Якби вони були, то за допомогою методу періодичних апроксимацій можна було б одержати і відокремлені хвилі.*

Проте, дещо інакша ситуація у випадку, коли $a = 0$. Наступна теорема встановлює існування несталих періодичних біжучих хвиль.

Теорема 4.6. *Нехай виконується умова (h) і $a = 0$. Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c > 0$ рівняння (4.8) має нетривіальний розв'язок u , що задовольняє умову (4.9). Більше того, цей розв'язок не сталий при достатньо великих значеннях k .*

§4.2. Існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера

Питання існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера вивчали М. Ченг, О. Панков, В. Ротос, С. Бак та ін.

Розглянемо дискретні нелінійні рівняння Шредінгера (ДНРШ) з кубічною нелінійністю

$$i\dot{\psi}_n = -\Delta\psi_n + \varepsilon_n\psi_n - \sigma\chi_n|\psi_n|^2\psi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.12)$$

де $\psi_n = \psi_n(t)$ – хвильова функція, $\sigma = \pm 1$, $(\Delta\psi)_n = \psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n$ дискретний одновимірний Лапласіан, а послідовності ε_n і $\chi_n \in N$ -періодичними по n , тобто $\varepsilon_{n+N} = \varepsilon_n$ і $\chi_{n+N} = \chi_n$. Зауважимо, що рівняння (4.12) також можна подати у гамільтоновому вигляді

$$i\dot{\psi}_n = \frac{\partial H}{\partial \psi_n^*}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

з гамільтоніаном

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[|\psi_n - \psi_{n-1}|^2 + \varepsilon_n |\psi_n|^2 - \frac{1}{2} \sigma \chi_n |\psi_n|^4 \right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\Delta\psi_n \psi_n^* + \varepsilon_n \psi_n \psi_n^* - \frac{1}{2} \sigma \chi_n (\psi_n \psi_n^*)^2 \right], \end{aligned}$$

де $\psi_n^*(t)$ – комплексно спряжена функція до $\psi_n(t)$.

Використовуючи представлення стоячої хвилі у вигляді

$$\psi_n = u_n \exp(-i\omega t),$$

де $\{u_n\}$ – дійсна послідовність (амплітуда) і $\omega \in \mathbb{R}$ (частота), отримаємо рівняння

$$-\Delta u_n + \varepsilon_n u_n - \omega u_n = \sigma \chi_n |u_n|^2 u_n. \quad (4.13)$$

Накладемо таку умову:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} u_n = 0. \quad (4.14)$$

Далі ми розглянемо більш загальне рівняння

$$Lu_n - \omega u_n = \sigma \chi_n |u_n|^2 u_n \quad (4.15)$$

з тією ж самою крайовою умовою (4.14). Тут L лінійний оператор

$$(Lu)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n,$$

де a_n і b_n дійсні N -періодичні послідовності. Оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2 . Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків. Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються *спектральними лакунами*.

У 2006 році О. Панков за допомогою варіаційного підходу із використанням теореми про зачеплення і методу періодичних апроксимацій встановив існування нетривіальних розв'язків $u \in l^2$ рівняння (4.15). Розв'язки, побудовані в його статті, є бризерами спеціального виду. Вони також часто називаються *лакунарними солітонами*. Тут лакунарність означає, що частота ω лежить в спектральній лакуні. Відмітимо, що цей термін прийнятий в нелінійній оптиці, хоча розв'язки такого типу і не є, взагалі кажучи, солітонами в тому смислі, який використовується в теорії повністю інтегровних систем. У 2007 році О. Панков цей результат дещо узагальнив за допомогою варіаційного підходу із використанням многовиду Нехарі.

Тепер розглянемо дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера з кубічною нелінійністю на плоскій цілочисловій ґратці:

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) + \Delta\psi_{n,m}(t) + \theta\mu_{n,m}|\psi_{n,m}(t)|^2\psi_{n,m}(t), \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (4.16)$$

де $\psi_{n,m}(t)$ – хвильова функція (n,m) -ї частинки, $\theta = \pm 1$, а

$$(\Delta\psi)_{n,m} = \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} - 4\psi_{n,m}$$

двовимірний дискретний оператор Лапласа, $\{\mu_{n,m}\} \subset \mathbb{R}$.

Рівняння (4.16) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Такі системи використовують, наприклад, для опису двовимірних систем зв'язаних волоконних світлодіодів і, зокрема, явищ самофокусування і розфокусування. Зауважимо, що параметр θ введено для того, щоб розрізняти *самофокусований* ($\theta = 1$) та *розфокусований* ($\theta = -1$) випадки.

Стоячою хвилею в даному випадку є розв'язок вигляду

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m} \exp(-i\omega t), \quad (4.17)$$

де $u_{n,m} \in \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ – частотою. Такі розв'язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами (за аналогією до лакунарних солітонів у фотонних кристалах).

Підставляючи стоячу хвилю (4.17) в рівняння (4.16) і враховуючи, що $|\exp(-i\omega t)| = 1$, одержимо систему

$$-(\Delta u)_{n,m} - \omega u_{n,m} = \theta\mu_{n,m}|u_{n,m}|^2 u_{n,m}, \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (4.18)$$

Під розв'язком системи (4.18) розуміється послідовність $\{u_{n,m}\} \subset \mathbb{R}$, яка задовольняє цю систему.

Всюди далі припускається, що послідовність $\{\mu_{n,m}\} \subset \mathbb{R}$ є N -періодичною, тобто $\mu_{n+N,m} = \mu_{n,m+N} = \mu_{n,m}$, де N – деяке натуральне число.

Позначимо через

$$(Lu)_{n,m} = a_{n,m}u_{n+1,m} + a_{n-1,m}u_{n-1,m} + b_{n,m}u_{n,m+1} + b_{n,m-1}u_{n,m-1} + c_{n,m}u_{n,m}$$

і розглянемо більш загальну систему

$$(Lu)_{n,m} - \omega u_{n,m} = \theta \mu_{n,m} |u_{n,m}|^2 u_{n,m}, \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (4.19)$$

де послідовності дійсних чисел $\{a_{n,m}\}, \{b_{n,m}\}, \{c_{n,m}\}$ є також N -періодичними.

Зауважимо, що оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2 . Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків. Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються *спектральними проміжками*.

Позначимо через (a, b) – довільний фіксований спектральний проміжок оператора L .

Далі вивчаються стоячі хвилі двох видів: з kN -періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка на нескінченності збігається до нуля (локалізовані розв'язки), тобто

$$u_{n+kN,m} = u_{n,m+kN} = u_{n,m}, \quad (4.20)$$

де k – фіксоване натуральне число, та

$$\lim_{n,m \rightarrow \pm\infty} u_{n,m} = 0 \quad (4.21)$$

відповідно.

Залежно від типу стоячої хвилі, розглядаються функціонали J_k та J .

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$ і позначимо через l_k^2 простір всіх kN -періодичних послідовностей. Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{(n, m) \in Q_k} u_{n, m} v_{n, m}$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{(n, m) \in Q_k} |u_{n, m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$Q_k = \left\{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 : -\left[\frac{kN}{2} \right] \leq n, m \leq kN - \left[\frac{kN}{2} \right] - 1 \right\},$$

і $\left[\frac{kN}{2} \right]$ – ціла частина $\frac{kN}{2}$. На просторі l_k^2 розглянемо функціонал *дії*

$$J_k(u) = \frac{1}{2} (L_k u - \omega u, u)_k - \frac{1}{4} \sum_{(n, m) \in Q_k} x_{n, m} u_{n, m}^4, \quad (4.22)$$

де L_k – оператор L , який діє в просторі l_k^2 . Критичні точки цього функціоналу є розв'язками задачі (4.19), (4.20).

З системою (4.19) та умовою (4.21) пов'язується функціонал *дії*

$$J(u) = \frac{1}{2} (Lu - \omega u, u) - \frac{1}{4} \sum_{(n, m) \in \mathbb{Z}^2} x_{n, m} u_{n, m}^4, \quad (4.23)$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z}^2)$ зі скалярним добутком

$$(u, v) = \sum_{(n, m) \in \mathbb{Z}^2} u_{n, m} v_{n, m}$$

та нормою

$$\|u\| = \left(\sum_{(n, m) \in \mathbb{Z}^2} |u_{n, m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нагадаємо, що кожний елемент l^2 автоматично задовольняє умову (4.21). Критичні точки функціоналу (4.23) є розв'язками задачі (4.19), (4.21).

Наступні дві теореми встановлюють існування нетривіальних періодичних і локалізованих розв'язків системи (4.19) для самофокусованого випадку.

Теорема 4.7. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = 1$, $\omega \in (a; b)$ та $b \neq +\infty$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ система (4.19) має нетривіальний kN -періодичний розв'язок u . Більше того, існують такі додатні сталі ε_0 , C_0 , ε і C , які не залежать від k , що $\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0$, $\varepsilon \leq J_k(u) \leq C$.*

Для доведення цієї теореми використовується теорема про зачеплення.

Теорема 4.8. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = 1$, $\omega \in (a; b)$ та $b \neq +\infty$. Тоді система (4.19) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.*

Для доведення цієї теореми, як і для доведення існування відокремлених хвиль в системі осциляторів, використовується метод періодичних апроксимацій.

Аналогічно одержуються результати для розфокусованого випадку ($\theta = -1$).

Теорема 4.9. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = -1$, $\omega \in (a; b)$ та $a \neq -\infty$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ система (4.19) має нетривіальний kN -періодичний розв'язок u . Більше того, існують такі додатні сталі ε_0 , C_0 , ε і C , які не залежать від k , що $\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0$, $\varepsilon \leq J_k(u) \leq C$.*

Теорема 4.10. Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = -1$, $\omega \in (a; b)$ та $a \neq -\infty$. Тоді система (4.19) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.

З теорем 4.8 і 4.10 випливає теорема:

Теорема 4.11. Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ та $\omega \in (a; b)$. І нехай $b \neq +\infty$, якщо $\theta = 1$, або $a \neq -\infty$, якщо $\theta = -1$. Тоді система (4.19) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.

Оскільки спектр оператора $-\Delta$ є відрізком $[0, 8]$, то з теореми 4.11 одержуємо наслідок:

Наслідок 4.1. Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. І нехай $\omega < 0$, якщо $\theta = 1$, або $\omega > 0$, якщо $\theta = -1$. Тоді система (4.18) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Якими рівняннями описується система Фермі-Пасти-Улама?
2. Який вигляд має гамільтонова система?
3. Запишіть гамільтоніан для системи Фермі-Пасти-Улама.
4. Який вигляд має розв'язок у вигляді біжучої хвилі?
5. Які умови задовольняють відокремлені біжучі хвилі?
6. Якими рівняннями описується динаміка нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів?
7. Запишіть гамільтоніан для системи, яка описує динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.
8. Запишіть дискретні рівняння типу синус-Гордона.
9. Які умови задовольняють гетероклінічні та гомоклінічні біжучі хвилі?
10. Якими рівняннями описується динаміка нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці?
11. Який вигляд має розв'язок у вигляді біжучої хвилі у випадку двовимірної ґратки?
12. Сформулюйте теорему про гірський перевал.
13. Сформулюйте теорему про зачеплення.
14. Залежно від типу біжучої хвилі, запишіть функціонали дії для системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Знайдіть їх похідні.
15. Сформулюйте достатні умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системі лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці.

16. Запишіть дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера на одновимірній і двовимірній ґратках.
17. Запишіть дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера у гамільтоновому вигляді.
18. Який вигляд має розв'язок у вигляді стоячої хвилі?
19. Залежно від типу стоячої хвилі, запишіть функціонали дії для дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці. Знайдіть їх похідні.
20. Сформулюйте достатні умови існування періодичних і локалізованих стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці : дис. ... докт. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
2. Золотарюк Я. О. Теорія солітонів (курс лекцій). Київ: Ін-т теор. фізики ім. М. М. Боголюбова, 2009. 102 с.
3. Шека Д. Д. Вступ до фізики солітонів (курс лекцій). Київ: Ін-т теор. фізики ім. М. М. Боголюбова, 2021. [Електронний ресурс]. URL: <https://ritm.knu.ua/ua/solitons/> (дата звернення: 20.10.2021).

Додаткова

1. Бак С. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. Посібник для студентів спеціальності Середня освіта (Фізика). 2-ге вид., випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2018. 360 с.
2. Бак С. Цей надзвичайний солітон. *Науково-популярний альманах «Математика та інформатика навколо нас»*. Вінниця: ФОП Рогальська І.О., 2018. Випуск 1. С. 9-16.
3. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. Київ: Вища школа, 2004. 525 с.
4. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 69, №4. P.509-520.
5. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2019. Vol. 52, № 2. P. 176-184.

6. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, №1. P.75-87.
7. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
8. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. London-Singapore : Imperial College Press, 2005. 196 p.
9. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrodinger equation. *Nonlinearity*. 2006. Vol. 19. P. 27-40.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Антикінк, 57
Біжуча хвиля, 10, 16, 27, 79, 82
Білінійне рівняння Хіרותи, 43
Відокремлена хвиля, 24, 79, 81, 83
Гамільтоніан, 78, 80, 88
Гамільтонова система, 78, 88
Гетероклінічні біжучі хвилі, 81
Гомоклінічні біжучі хвилі, 81
Груповий солітон, 36
Дані розсіяння, 62
Дискретні нелінійні рівняння Шредінгера, 88
Задача Штурма-Ліувілля, 19
Збурення, 7
Кінк, 57
Коливання, 7
Ланцюг Тоди, 51
Метод Фур'є, 18
Метод Хіרותи, 42
Модель Френкеля-Конторової, 37
Нелінійне рівняння Шредінгера, 35
Обернена задача розсіяння, 65
Оператор Шредінгера, 64
Пара Лакса, 62, 71
Перетворення Беклунда, 49, 52, 55
Перетворення розсіяння, 61
Перетворення Фур'є, 60
Періодичні біжучі хвилі, 79, 81, 82
Пряма задача розсіяння, 64, 65
Рівняння Гельфанда-Левітана-Марченка, 66
Рівняння Кортевега-де Фріза, 26, 30, 42, 48
Рівняння синус-Гордона, 55, 71
Система Фермі-Пасти-Улама, 32, 78
Солітон, 35, 90
Солітонний розв'язок, 45, 47, 51, 54, 57, 70, 74
Спектральний проміжок, 91
Стояча хвиля, 10, 23, 88, 90
Теорема про гірський перевал, 85
Теорема про зачеплення, 86
Топологічний солітон, 39, 57
Умова Амброзетті-Рабіновича, 83
Умова Пале-Смейла, 84, 85
Формула Даламбера, 16
Формула обертання, 66, 73
Функціонал дії, 84, 92
Хвильове рівняння, 13, 14
Хвиля, 7

Навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СОЛІТОНІВ

Навчальний посібник

Підписано до друку 18.12.2024 р.
Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Папір офсетний.
Друк різнографічний. Гарнітура Book Antiqua.
Ум. друк. арк. 4,5
Наклад 100 примірників.

Виготовлювач ФОП Рогальська І.О.

м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 145
тел. (0432) 43-51-39, 65-80-80
E-mail: dilo_vd@ukr.net
Свідоцтво ВОЗ № 635744 від 01.03.2010 р.