

Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет мистецтв і художньо-освітніх технологій
Кафедра образотворчого, декоративного мистецтва,
технологій та безпеки життєдіяльності

С. В. Подолянчук

ОПР МАТЕРІАЛІВ.
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ

Навчальний посібник

Вінниця-2024

УДК 620.17(075.8)

DOI: [https://doi.org/10.31652/620.17\(075.8\)-1-79](https://doi.org/10.31652/620.17(075.8)-1-79)

П44

Рецензенти:

Марущак О. В., кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри декоративного, образотворчого мистецтва, технологій та безпеки життєдіяльності Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Іванчук А. В., кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри декоративного, образотворчого мистецтва, технологій та безпеки життєдіяльності Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Рекомендовано вченою радою факультету мистецтв і художньо-освітніх технологій Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол №2 від 11 вересня 2024 року)

Подолянчук С.В.

П44 Опір матеріалів. Розрахунково-графічні роботи: навчальний посібник. Вінниця: ВДПУ, 2024. 79 с.

Навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості, розрахунково-графічні завдання, методичні вказівки, приклади та довідковий матеріал щодо проведення проєктних розрахунків при різних простих видах опору та визначення основних геометричних характеристик деталей механізмів, машин та елементів конструкцій.

Рекомендується для здобувачів вищої освіти спеціальності 014.10. Середня освіта (Технології).

ПЕРЕДМОВА

Курс «Опору матеріалів» як науки про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість деталей механізмів, машин елементів конструкцій та споруд є органічною частиною дисциплін циклу «Машинознавство». Він являє собою не лише теоретичну основу для цілої групи загально технічних дисциплін, а й забезпечує прикладне, експериментальне та методичне підґрунтя для проведення численних практичних розрахунків.

Важливою умовою успішного засвоєння навчального матеріалу з дисципліни «Опір матеріалів» є формування у здобувачів вищої освіти умінь і навичок у проведенні проєктних та перевірних розрахунків при різних видах простого опору. Самостійне здійснення подібних розрахунків, в тому числі під час виконання розрахунково-графічних завдань, дає змогу здобувачам вищої освіти закріпити набуті теоретичні знання та виробити навички їх ефективного застосування на практиці.

Виконання розрахунково-графічних завдань дає можливість узагальнити набуті знання з погляду їх практичного використання, отримати навички в роботі зі спеціальною і довідковою літературою, навчитися ефективно використовувати сучасні засоби обчислювальної техніки. Для майбутнього вчителя технологій з'являється чудова нагода поглибити власну технічну підготовку та широко використовувати набуті знання у своїй практичній діяльності. Одним з можливих напрямків використання набутих знань може бути розрахунок і проєктування окремих деталей, вузлів, механізмів чи елементів конструкцій складних моделей при роботі гуртків технічної творчості.

В навчальному посібнику висвітлені всі основні питання, які розглядаються в практичній частині курсу «Опір матеріалів». Загалом включено 8 завдань, а саме «Побудова епюр поздовжніх сил, нормальних напружень, відносних деформацій і переміщень для східчастого стержня круглого поперечного перерізу», «Визначення зусиль і напружень в статистично невизначуваних системах», «Визначення геометричних характеристик складних плоских перерізів», «Розрахунок заклепкових з'єднань на зріз і зминання», «Проєктний розрахунок суцільного і порожнистого валів при крученні», «Підбір двотаврового перерізу консолі, виготовленої з маловуглецевої сталі», «Проєктний розрахунок двоопорної дерев'яної балки», «Розрахунок стержнів на стійкість».

Кожне розрахунково-графічне завдання включає 4 основні розділи:

- короткі теоретичні відомості: містять стислу інформацію щодо основних теоретичних положень та закономірностей проведення розрахунків;

- завдання: визначають розрахункові схеми й числові дані для практичних завдань;

- методичні рекомендації: дають здобувачам вищої освіти поради щодо оптимальних шляхів реалізації розрахункових алгоритмів;

- приклади: наводять приклади розв'язування конкретних задач.

Крім того, в додатках розміщений довідковий матеріал, призначений для проведення розрахунків без використання додаткових літературних джерел.

Вибір свого варіанту здійснюється за даними, які визначаються викладачем. Перша цифра варіанта відповідає номеру розрахункової схеми, крім четвертого завдання, де перша цифра відповідає номеру рядка таблиць 4.1. Друга цифра варіанта відповідає номеру рядка таблиці з числовими даними (для четвертого завдання – це таблиця 4.2.).

I. ПОБУДОВА ЕПЮР ПОЗДОВЖНИХ СИЛ, НОРМАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ, ВІДНОСНИХ ДЕФОРМАЦІЙ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ДЛЯ СХІДЧАСТОГО СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

1.1. Короткі теоретичні відомості

Розтяганням (стисканням) називається вид деформації, що обумовлений силами, які діють вздовж осі бруса. Брус, який працює на розтягання (стискання) називається **стержнем**. У цьому випадку із шести відомих внутрішніх силових факторів діє лише один – поздовжня (осьова) сила N .

Наявність осьової сили N спричиняє появу в поперечному перерізі стержня нормальних напружень σ , які пов'язані з силою N інтегральною залежністю

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (1.1)$$

де A – площа поперечного перерізу стержня.

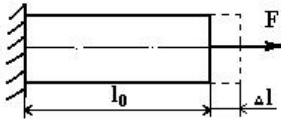


Рис.1.1.

Відсутність поперечних сил дає підставу припустити, що дотичні напруження в кожній точці поперечного перерізу дорівнюють нулю.

Під дією зовнішньої осьової сили F (рис 1.1.) стержень, що мав початкову довжину l_0 , подовжиться на величину Δl . Відношення **абсолютного подовження** Δl до початкової довжини стержня l_0 називається **відносною поздовжньою деформацією** або **відносною деформацією** ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (1.2)$$

Встановлено, що при розтяганні (стисканні) в зоні пружних деформацій справджується **закон Гука**:

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (1.3)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, що називається модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду або модулем Юнга. Модуль Юнга є однією з найважливіших фізичних констант матеріалу. Він виражається в паскалях (Па).

Математичний вираз закону Гука може відобразитись в іншому вигляді

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (1.4)$$

Враховуючи сталість модуля Юнга для однорідного та ізотропного матеріалу і справедливості гіпотези плоских перерізів при розтяганні (стисканні), одним із наслідків якої є сталість відносної деформації всіх волокон стержня ($\epsilon = \text{const}$), та підставляючи вираз (1.3) у (1.1) отримуємо формулу

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.5)$$

за якою визначається нормальне напруження при розтяганні (стисканні).

При проведенні практичних розрахунків часто необхідно знати переміщення деякого поперечного перерізу стержня відносно іншого перерізу, умовно закріпленого. В цьому випадку переміщення λ дорівнює зміні довжини відрізка стержня між нерухомим та розглядуваним перерізами та визначається за формулою

$$\lambda(x) = \frac{Fx}{EA}, \quad (1.6)$$

де F – рівнодійна зовнішніх сил, яка чисельно дорівнює значенню внутрішніх сил N на відповідній ділянці стержня, x – відстань між нерухомим і розглядуваним перерізами, E – модуль Юнга, A – площа поперечного перерізу стержня.

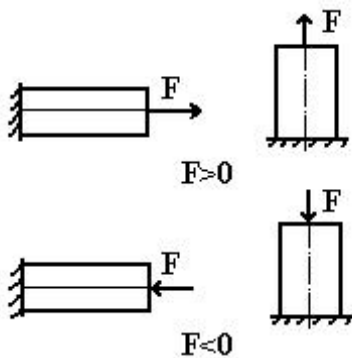


Рис.1.2.

В більшості випадків необхідною умовою проведення розрахунків при розтяганні (стисканні) є побудова епюр поздовжніх сил. З метою уникнення неоднозначності в трактуваннях отриманих результатів, загальноприйнятим є таке правило знаків: поздовжня (осьова) сила вважається додатною, якщо вона спричинює розтягання стержня, і від'ємною, якщо вона спричинює стискання стержня (рис. 1.2).

1.2. Завдання №1

Для зображеного на рис. 1.3 східчастого стержня круглого поперечного перерізу, виготовленого з маловуглецевої сталі ($E=2,1 \cdot 10^5$ МПа), побудувати епюри:

- поздовжніх сил N ;
- нормальних напружень σ ;
- відносних деформацій ϵ ;
- переміщень λ .

Дані для розрахунків взяти з таблиці 1.1.

Таблиця 1.1.

№ п/п	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	F_4 , кН	a, м	b, м	c, м	d_1 , мм	d_2 , мм	d_3 , мм
1	11	3	65	9	0,4	2,2	1,7	11	9	8
2	13	5	61	11	0,5	2,0	1,6	12	10	9
3	15	10	58	14	0,6	1,9	1,5	13	12	11
4	17	15	55	19	0,7	1,8	1,4	14	13	12
5	20	20	49	23	0,8	1,7	1,2	15	14	12
6	22	25	47	27	0,9	1,6	1,0	17	15	13
7	25	30	42	36	1,0	1,5	0,8	18	16	15
8	26	35	39	36	1,1	1,4	0,8	20	17	10
9	27	40	36	26	1,2	1,3	1,0	22	19	9
10	29	45	34	23	1,3	1,2	1,1	23	20	12
11	30	50	31	21	1,4	1,1	1,3	25	19	14
12	32	55	28	17	1,5	1,0	1,6	27	17	15
13	33	50	25	14	1,6	0,9	1,7	28	15	12
14	35	65	23	11	1,7	0,8	1,8	30	24	15
15	37	70	21	9	1,9	0,7	2,0	32	22	17

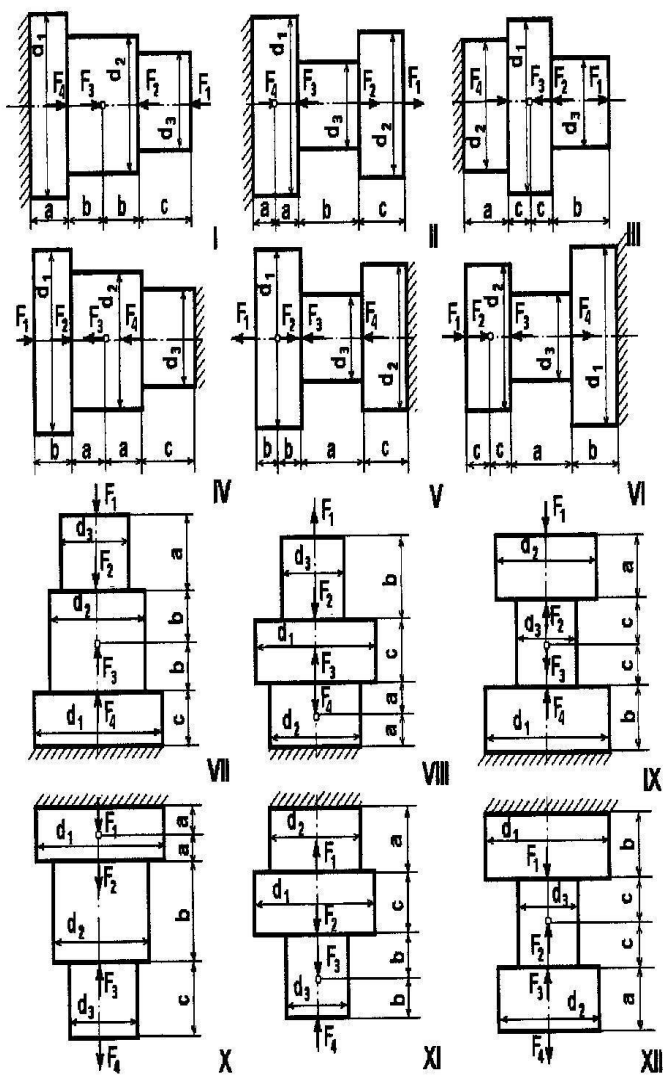


Рис. 1.3.

1.3. Методичні рекомендації

Розв'язування задач подібного типу розпочинається із розбиття східчастого стержня на ділянки. При цьому слід виконати дві основні умови:

- поперечний переріз ділянки повинен бути сталим;
- на ділянці має діяти лише один силовий фактор.

Побудова епюр поздовжніх сил N розпочинається із незакріпленого кінця. Це дає змогу уникнути необхідності визначення опорних реакцій. При цьому дія власної ваги стержня не враховується. Визначення рівнодійної N здійснюється для кожної ділянки окремо на основі відомих рівнянь статички з урахуванням правила знаків.

Нормальні напруження для кожної ділянки знаходяться за формулою (1.5). При цьому використовується значення площі поперечного перерізу відповідної ділянки. Відносна деформація ϵ визначається на основі математичного виразу закону Гука за формулою (1.4). Модуль Юнга для даного завдання є сталим, хоча в загальному випадку ділянки східчастого стержня можуть бути виготовлені з різних матеріалів, а отже, мати різне значення модуля E . Оскільки знаки нормальних напружень і відносних деформацій визначаються напрямком поздовжньої сили, то знаки відповідних ділянок цих трьох епюр повинні бути однаковими.

Побудова епюр переміщень λ розпочинається із закріпленого кінця стержня, оскільки наперед відомо, що в точці закріплення $\lambda=0$. Визначення переміщень здійснюється за формулою (1.6). Оскільки епюра λ являє собою пряму лінію, що нахилена до осі під деяким кутом, необхідно визначати значення переміщення на початку і в кінці ділянки, а потім з'єднувати отримані на епюрі точки. Враховуючи зміну послідовності побудови епюр, нумерацію ділянок змінювати не рекомендується, а крайні точки ділянок бажано додатково позначити літерами (наприклад, А, В, С і т. і.).

Епюри поздовжніх сил, нормальних напружень, відносних деформацій і переміщень будують, виходячи із загальноприйнятих правил:

- вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають таким чином, щоб вона була паралельна або збігалася з віссю стержня;
- ординати епюри відкладають перпендикулярно до осі;
- штрихують епюри лініями, які перпендикулярні до бази;
- ординати відкладають в масштабі;
- на епюрах проставляють числа, що відповідають значенням характерних ординат, а в полі епюри проставляють знак;
- біля епюри в кружечку вказують силовий чи геометричний

фактор та його одиницю вимірювання.

При проведенні розрахунків і побудові епюр слід пам'ятати, що більшість технічних розрахунків здійснюється до сотих частин тієї чи іншої величини (до другого знаку після коми).

1.4. Приклад

Для зображеного на рис 1.4. східчастого стержня ($a=4\text{м}$, $b=2\text{м}$, $c=3\text{м}$) круглого поперечного перерізу ($d_1=12\text{мм}$, $d_2=15\text{мм}$, $d_3=17\text{мм}$), що виготовлений з маловуглецевої сталі ($E=2,1 \cdot 10^5 \text{МПа}$) і навантажений силами $F_1=20\text{кН}$, $F_2=35\text{кН}$, $F_3=50\text{кН}$, $F_4=15\text{кН}$, побудувати епюри поздовжніх сил N , нормальних напружень σ , відносних деформацій ϵ та переміщень λ .

Розв'язування

1. Розбиваємо східчастий стержень на ділянки.
2. Знаходимо величини поздовжніх сил на кожній ділянці стержня

$$\text{ділянка I} \quad N_I = F_1 = 20\text{кН};$$

$$\text{ділянка II} \quad N_{II} = F_1 - F_2 = (20 - 35)\text{кН} = -15\text{кН};$$

$$\text{ділянка III} \quad N_{III} = F_1 - F_2 + F_3 = (20 - 35 + 50)\text{кН} = 35\text{кН};$$

$$\text{ділянка IV} \quad N_{IV} = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = (20 - 35 + 50 - 15)\text{кН} = 20\text{кН}.$$

3. Знаходимо площу поперечного перерізу кожної ділянки

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12^2}{4} \text{мм}^2 = 113,04 \text{мм}^2 = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{м}^2;$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 15^2}{4} \text{мм}^2 = 176,63 \text{мм}^2 = 1,77 \cdot 10^{-4} \text{м}^2;$$

$$A_3 = \frac{\pi d_3^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 17^2}{4} \text{мм}^2 = 226,87 \text{мм}^2 = 2,27 \cdot 10^{-4} \text{м}^2;$$

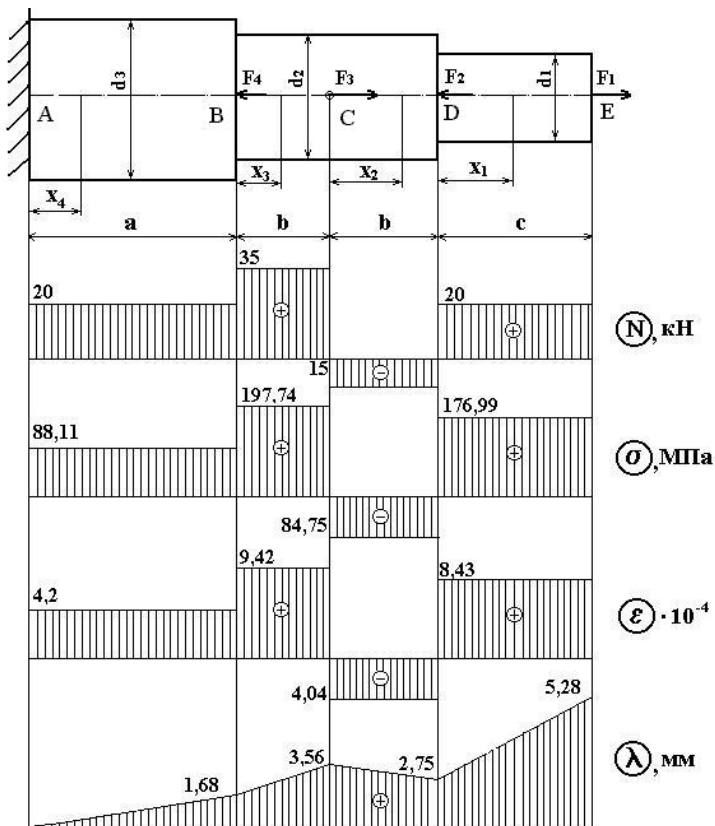


Рис.1.4.

4. Знаходимо нормальні напруження на кожній ділянці стержня:

ділянка I

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_1} = \frac{20000 \text{ H}}{1,13 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 176,99 \text{ МПа};$$

ділянка II

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{15000 \text{ H}}{1,77 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -84,75 \text{ МПа};$$

ділянка III

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_2} = \frac{35000 \text{ H}}{1,77 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 197,74 \text{ МПа};$$

ділянка IV

$$\sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{A_3} = \frac{20000 \text{ Н}}{2,27 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 88,11 \text{ МПа};$$

5. Знаходимо відносні деформації на кожній ділянці:

ділянка I $\varepsilon_I = \frac{\sigma_I}{E} = \frac{176,99 \text{ МПа}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 0,000843 = 8,43 \cdot 10^{-4};$

ділянка II $\varepsilon_{II} = \frac{\sigma_{II}}{E} = -\frac{84,75 \text{ МПа}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = -0,000404 = -4,04 \cdot 10^{-4};$

ділянка III $\varepsilon_{III} = \frac{\sigma_{III}}{E} = \frac{197,74 \text{ МПа}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 0,000942 = 9,42 \cdot 10^{-4};$

ділянка IV $\varepsilon_{IV} = \frac{\sigma_{IV}}{E} = \frac{88,11 \text{ МПа}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 0,00042 = 4,2 \cdot 10^{-4};$

6. Для кожної ділянки стержня знаходимо переміщення перерізу, що розташований на довільній відстані x від іншого, умовно закріпленого перерізу.

ділянка IV $\lambda_{IV} = \frac{N_{IV} \cdot x_4}{EA_3};$

при $x_4 = 0$

$$\lambda_{IV} = \lambda_A = 0$$

при $x_4 = a = 4 \text{ м}$

$$\lambda_{IV} = \lambda_B = \frac{20000 \text{ Н} \cdot 4 \text{ м}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 2,27 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 0,00168 \text{ м} = 1,68 \text{ мм}$$

ділянка III $\lambda_{III} = \lambda_B + \frac{N_{III} \cdot x_3}{EA_2};$

при $x_3 = 0$

$$\lambda_{III} = \lambda_B = 1,68 \text{ мм}$$

при $x_3 = b = 2 \text{ м}$

$$\lambda_{III} = \lambda_C = 0,00168 \text{ м} + \frac{35000 \text{ Н} \cdot 2 \text{ м}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 0,00356 \text{ м} = 3,56 \text{ мм}$$

ділянка II $\lambda_{II} = \lambda_c + \frac{N_{II} x_2}{EA_2};$

при $x_2 = 0$

$$\lambda_{II} = \lambda_c = 3,56 \text{ мм}$$

при $x_2 = b = 2 \text{ м}$

$$\lambda_{II} = \lambda_D = 0,00356 \text{ м} - \frac{15000 \text{ Н} \cdot 2 \text{ м}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 0,00275 \text{ м} = 2,75 \text{ мм}$$

ділянка I $\lambda_I = \lambda_D + \frac{N_I x_1}{EA_1};$

при $x_1 = 0$

$$\lambda_I = \lambda_D = 2,75 \text{ мм}$$

при $x_1 = c = 3 \text{ м}$

$$\lambda_I = \lambda_E = 0,00275 \text{ м} + \frac{20000 \text{ Н} \cdot 3 \text{ м}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 0,00528 \text{ м} = 5,28 \text{ мм}$$

7. Відкладаючи отримані числові значення, будемо епюри поздовжніх сил N , нормальних напружень σ , відносних деформацій ε і переміщень λ (рис. 1.4)

II. ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ І НАПРУЖЕНЬ В СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМАХ

2.1. Короткі теоретичні відомості

Статично невизначуваними називають системи, зусилля (реакції) в елементах яких неможливо визначити лише за допомогою рівнянь статички. Усі такі системи (конструкції) мають додаткові (зайві) зв'язки у вигляді кріплень, стержнів або інших елементів. В загальному випадку всі ці зв'язки не потрібні для забезпечення геометричної незмінності та рівноваги конструкції при дії навантаження. Проте їх наявність суттєво впливає на умови експлуатації, а в багатьох випадках такі зв'язки є необхідними для забезпечення міцності та жорсткості конструкції.

Ступінь статичної невизначуваності визначається як різниця між кількістю невідомих зусиль і числом можливих рівнянь статички. Відомо, що в загальному випадку можливо скласти 6 рівнянь статички. Для плоских систем ця кількість зменшується до трьох, а в окремих випадках – до двох.

При розв'язанні статично невизначуваних задач доцільно дотримуватись такої послідовності:

1. *Статичний аспект задачі*: складаються рівняння рівноваги відокремлених елементів конструкції, що мають невідомі зусилля. Одним з варіантів в цьому випадку може бути така система рівнянь:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum F_{x_i} = 0 \\ \sum F_{y_i} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

де $\sum M_A$ – сума моментів відносно довільно вибраної точки A , $\sum F_{x_i}$ – сума проєкцій всіх силових факторів, що діють паралельно осі x , $\sum F_{y_i}$ – сума проєкцій всіх силових факторів, що діють паралельно осі y .

2. *Геометричний аспект задачі*: складаються рівняння, що встановлюють взаємозв'язок між деформаціями окремих елементів. У випадку статично невизначуваної системи, яка складається з абсолютно жорсткої балки, що шарнірно закріплена у деякій точці, та прямолінійних стержнів, такий взаємозв'язок визначається формулою:

$$\frac{\Delta l_1}{x_1} = \frac{\Delta l_2}{x_2}, \quad (2.2)$$

де $\Delta l_1, \Delta l_2$ – абсолютні деформації відповідно стержнів 1 і 2, x_1, x_2 –

відстані відповідно від стержнів 1 і 2 до точки, в якій шарнірно закріплена абсолютно жорстка балка.

3. Фізичний аспект задачі: на основі закону Гука для кожного елементу встановлюється взаємозв'язок між внутрішніми зусиллями (поздовжніми силами) і обумовленими ними абсолютними деформаціями. В результаті встановлення такого взаємозв'язку отримуємо:

$$\begin{cases} \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \\ \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \end{cases} \quad (2.3)$$

де N_1, N_2 – поздовжні сили, що виникають відповідно у стержнях 1 і 2; l_1, l_2 – довжини стержнів 1 і 2; A_1, A_2 – площі поперечних перерізів стержнів 1,2; E_1, E_2 – модулі Юнга матеріалів стержнів 1, 2.

4. Синтез: полягає у спільному розв'язуванні рівнянь (2.1), (2.2), (2.3) і знаходженні невідомих зусиль чи напружень, що виникають в стержнях під дією зовнішніх сил.

2.2. Завдання №2

Для системи, яка складається з абсолютно жорсткої балки, що шарнірно закріплена у точці A , та стержнів круглого поперечного перерізу, виготовлених з однакового матеріалу (рис. 2.1), необхідно визначити зусилля в стержнях та підрахувати напруження, що виникають в стержні під дією сили F .

Дані для розрахунків взяти з таблиці 2.1.

Таблиця 2.1.

№	F, кН	l_1 , м	l_2 , м	d_1 , мм	d_2 , мм	a, м	b, м	c, м
1	10	1,1	0,6	30	40	1,1	0,9	2,1
2	15	1,3	1,1	40	45	0,9	1,4	1,9
3	20	1,5	1,2	50	55	0,7	1,1	1,7
4	25	2,0	1,5	60	65	0,5	1,2	1,5
5	27	2,5	2,0	70	75	0,6	0,8	2,1
6	30	3,0	2,2	80	85	0,7	1,2	1,6
7	28	3,5	2,5	90	95	1,0	1,3	0,8
8	26	3,5	2,5	100	105	1,1	1,5	1,9
9	24	3,0	2,0	90	110	1,2	1,1	1,8
10	22	2,5	1,8	85	120	1,4	0,8	1,2
11	19	2,0	1,5	75	125	1,7	0,7	1,4
12	16	1,5	1,3	65	130	1,9	0,6	1,3

Продовження таблиці 2.1.

13	12	1,3	1,0	55	135	2,0	0,9	1,2
14	9	1,1	0,7	45	140	2,1	0,8	1,5
15	7	1,0	0,5	35	150	2,2	1,1	1,7

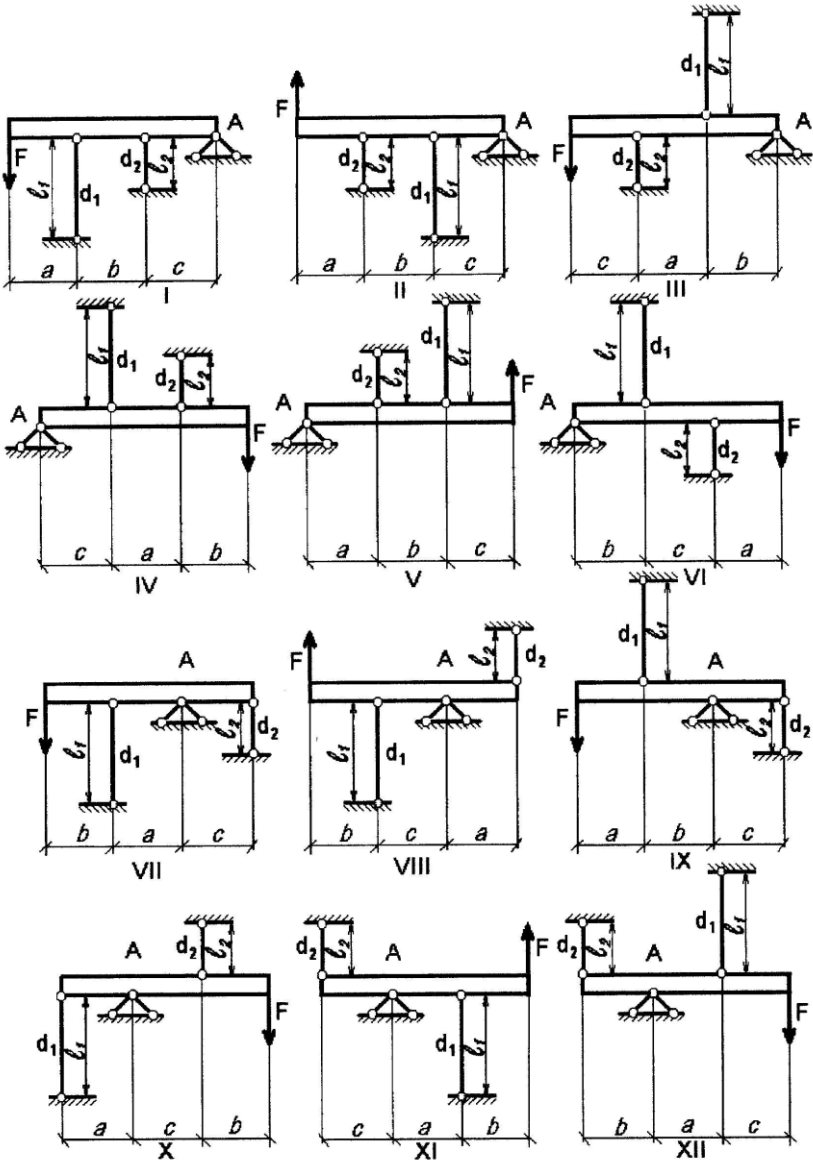


Рис.2.1.

2.3. Методичні рекомендації

Розв'язування задач подібного типу розпочинається із визначення ступеня статичної невизначуваності. При цьому слід пам'ятати, що кількість можливих рівнянь статички плоскої системи за певних обставин, наприклад, у випадку, коли всі зовнішні сили, а отже і внутрішні реакції, паралельні лише одній з двох координатних осей, може зменшуватись до двох.

При складанні першого рівняння системи (2.1) точку, відносно якої визначаються моменти від силових факторів, доцільно вибирати таким чином, щоб вона збігалася з точкою прикріплення абсолютно жорсткої балки до шарнірно нерухомої опори. В цьому випадку одне з невідомих зусиль, а саме – реакція в опорі, до рівняння не увійде, що дещо спростить надалі розв'язування задачі.

При складанні рівнянь, що встановлюють взаємозв'язок між деформаціями окремих елементів, знак абсолютної деформації не враховується, а враховується лише її числове значення. Якщо стержні виготовлені з однакового матеріалу, значення модуля Юнга E в обох рівняннях системи (2.3) буде однаковим.

Спільне розв'язування рівнянь (2.1), (2.2), (2.3) передбачає на початковому етапі досягнення їх максимального спрощення з підставленням на завершальній стадії числових значень.

2.4. Приклад

Для системи (рис. 2.2), яка складається з абсолютно жорсткої балки, що шарнірно закріплена у точці A , та стержнів круглого поперечного перерізу ($d_1=20\text{мм}$, $d_2=30\text{мм}$) довжиною $l_1=0,25\text{м}$, $l_2=0,5\text{м}$, виготовлених з однакового матеріалу, необхідно визначити зусилля в стержнях та підрахувати напруження, що виникають під дією сили $F=12\text{кН}$. Точка прикладання сили F і взаємне розташування стержнів визначаються параметрами $a=1\text{м}$, $b=1,2\text{м}$, $c=0,7\text{м}$.

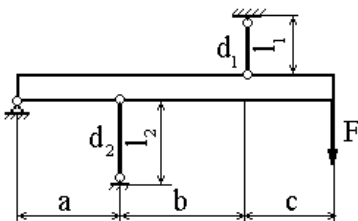


Рис.2.2

Розв'язування

1. Замінюючи зв'язки та зовнішні сили дією відповідних реакцій та внутрішніх зусиль в стержнях, отримуємо розрахункову схему, зображену на рис. 2.3.

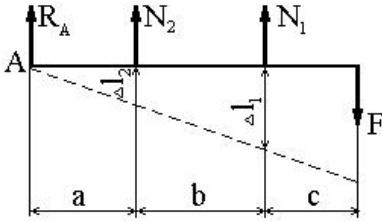


Рис.2.3

2. Визначаємо ступінь статичної невизначуваності системи:

- кількість невідомих зусиль – 3 (N_1 , N_2 , R_A);

- кількість можливих рівнянь статичної системи сил, які діють паралельно одній із координатних осей – 2;

- ступінь статичної

невизначуваності – 1.

3. Статична сторона задачі:

$$\sum F_{y_i} = 0 \quad R_A + N_1 + N_2 - F = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad N_2 a + N_1 (a + b) - F (a + b + c) = 0$$

4. Геометрична сторона задачі:

$$\frac{\Delta l_1}{a + b} = \frac{\Delta l_2}{a}$$

5. Фізична сторона задачі:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}$$

6. Синтез

З рівняння, що характеризує взаємозв'язок між деформаціями окремих елементів, отримуємо

$$\Delta l_1 = (a + b) \frac{\Delta l_2}{a} = (1 + 1,2) \frac{\Delta l_2}{1}$$

$$\Delta l_1 = 2,2 \Delta l_2$$

Враховуючи фізичну сторону задачі

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1} = 2,2 \frac{N_2 l_2}{EA_2}$$

$$N_1 = 2,2 \frac{A_1 l_2}{A_2 l_1} N_2$$

Знаходимо площі поперечних перерізів стержнів

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} \text{ мм}^2 = 314 \text{ мм}^2 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 30^2}{4} \text{ мм}^2 = 706,5 \text{ мм}^2 = 7,07 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

Підставляючи вихідні дані, отримаємо

$$N_1 = 2,2 \frac{A_1 l_2}{A_2 l_1} N_2 = 2,2 \frac{3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 0,5 \text{ м}}{7,07 \cdot 10^{-4} \cdot 0,25 \text{ м}} N_2$$

$$N_1 = 1,95 N_2$$

Використовуючи рівняння статистичної рівноваги, отримаємо

$$N_2 a + 1,95 N_2 (a + b) - F(a + b + c) = 0$$

$$N_2 (a + 1,95a + b) = F(a + b + c)$$

$$N_2 = F \frac{a + b + c}{2,95a + b} = 12000 \text{ Н} \frac{(1 + 1,2 + 0,7) \text{ м}}{(2,95 \cdot 1 + 1,2) \text{ м}}$$

$$N_2 = 8385,54 \text{ Н} \approx 8,39 \text{ кН}$$

Тоді поздовжня сила N_1 дорівнює

$$N_1 = 1,95 N_2 = 1,95 \cdot 8385,54 \text{ Н} = 16351,8 \text{ Н} = 16,35 \text{ кН}$$

Визначасмо нормальні напруження в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{16351,8 \text{ Н}}{3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 52075796,18 \text{ Па} \approx 52,08 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{8385,54 \text{ Н}}{7,07 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 11860735,50 \text{ Па} \approx 11,86 \text{ МПа}$$

III. ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СКЛАДНИХ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

3.1. Короткі теоретичні відомості

Опір стержня різним видам деформацій часто залежить не лише від матеріалу тіла та його розмірів, а й від обрису осі, форми поперечних перерізів та їх розташування. До **основних геометричних характеристик** поперечних перерізів належать:

- площа поперечного перерізу;
- статичні моменти площі;
- моменти інерції.

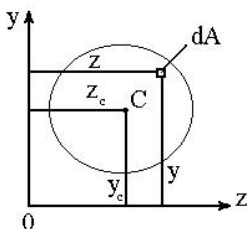


Рис.3.1.

Визначення площ поперечних перерізів простих фігур (квадрата, прямокутника, трикутника, круга тощо) здійснюється за відомими залежностями.

Статичний момент площі являє собою інтеграл добутку елементарної площі на відстань до осі (рис. 3.1).

$$S_z = \int_A y dA \qquad S_y = \int_A z dA \qquad (3.1)$$

Статичний момент виражається в одиницях довжини в третьому степені, найчастіше в см^3 або м^3 .

Підставляючи у формулу (3.1) координати центра ваги y_c та z_c , отримаємо

$$S_z = A y_c \qquad S_y = A z_c \qquad (3.2)$$

Звідси координати центра ваги простої фігури

$$y_c = \frac{S_z}{A} \qquad z_c = \frac{S_y}{A} \qquad (3.3)$$

Для простих геометричних фігур визначення координат центра ваги здійснюється за спрощеними залежностями:

для прямокутника (рис. 3.2)

$$y_c = \frac{1}{2} b \qquad z_c = \frac{1}{2} a \qquad (3.4)$$

для прямокутного трикутника (рис. 3.3), якщо відлік здійснюється від прямого кута

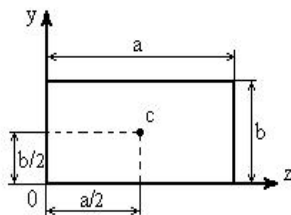


Рис.3.2.

$$y_c = \frac{1}{3}b \quad z_c = \frac{1}{3}a \quad (3.5)$$

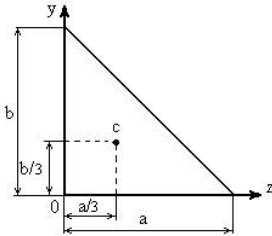


Рис.3.3.

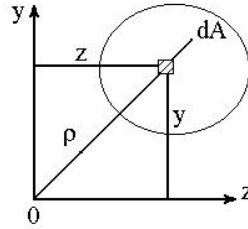


Рис.3.4.

Якщо через центр ваги провести координатні осі, то отримана система координат буде називатись центральною, а координатні осі – **центральною осями**. Статичні моменти площі в цьому випадку будуть дорівнювати нулю.

Координати центра ваги попередньо розділеної на прості частини складної фігури знаходимо за формулами

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (3.6)$$

Серед моментів інерції плоских фігур (рис. 3.4), які виражаються в одиницях довжини в четвертому степені, найчастіше в см^4 , розрізняють:

осьові моменти інерції

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A z^2 dA \quad (3.7)$$

полярний момент інерції

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad (3.8)$$

відцентровий момент інерції

$$I_{zy} = \int_A zy dA \quad (3.9)$$

Для простих геометричних фігур осьові моменти інерції відносно центральних осей визначаються за такими формулами:

Для прямокутника (рис. 3.5)

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad I_z = \frac{bh^3}{12} \quad (3.10)$$

для прямокутного трикутника (рис. 3.6)

$$I_y = \frac{hb^3}{36} \qquad I_z = \frac{bh^3}{36} \qquad (3.11)$$

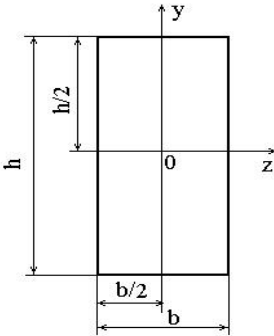


Рис.3.5.

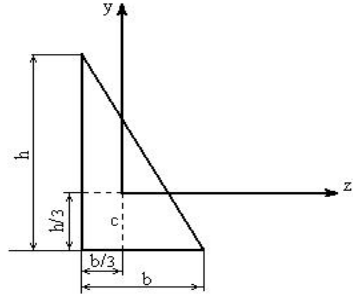


Рис.3.6.

Осьовий момент інерції складної фігури визначається за формулою

$$I_z = I_z^I + I_z^{II} + I_z^{III}, \qquad (3.12)$$

де $I_z^I, I_z^{II}, I_z^{III}$ – осьові моменти інерції простих фігур.

Оскільки моменти інерції простих фігур визначаються відносно власних координатних осей, то в практичних розрахунках необхідно використовувати формули визначення моментів інерції відносно паралельних осей.

Для осьових моментів інерції

$$I_{yI} = I_y + b^2 A \qquad I_{zI} = I_z + a^2 A, \qquad (3.13)$$

де I_{yI}, I_{zI} – осьові моменти інерції в новій системі координат, I_y, I_z – осьові моменти інерції в попередній системі координат, b – відстань між осями y і y_I , a – відстань між осями z і z_I .

Для відцентрових моментів інерції

$$I_{y_I z_I} = I_{zy} + abA, \qquad (3.14)$$

де $I_{y_I z_I}$ – відцентровий момент інерції в новій системі координат, I_{zy} – осьовий момент інерції в попередній системі координат.

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю ($I_{zy}=0$), називаються **головними**.

Найбільше практичне значення мають осі, які одночасно є і головними, і центральними. Для визначення положення головних центральних осей несиметричної фігури систему координат з початком у центрі ваги необхідно повернути на деякий кут α_0 , величина якого знаходиться за формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} \quad (3.15)$$

Додатні значення кута α_0 відкладають проти годинникової стрілки.

Значення головних моментів інерції знаходять за формулами

$$I_u = \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right] \quad (3.16)$$

$$I_v = \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) \mp \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right] \quad (3.17)$$

При цьому, якщо $I_z > I_y$ слід використовувати верхні знаки, якщо $I_y > I_z$ – нижні.

Тоді радіуси інерції:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} \quad (3.18)$$

3.2. Завдання №3

Для несиметричного поперечного перерізу, зображеного на рис. 3.7, визначити координати центра ваги, положення головних центральних осей, значення головних моментів інерції та радіусів інерції.

Дані для розрахунків взяті з таблиці 3.1.

Таблиця 3.1.

№ п/п	a, см	b, см	c, см	d, см
1	4	3	17	25
2	6	4	15	23
3	8	5	14	22
4	10	6	13	20
5	13	8	11	18
6	17	10	9	16
7	20	13	8	14
8	23	15	7	12
9	20	17	8	10
10	17	19	9	8
11	13	21	11	7
12	10	22	13	6
13	8	23	14	5
14	6	24	15	4
15	4	25	17	3

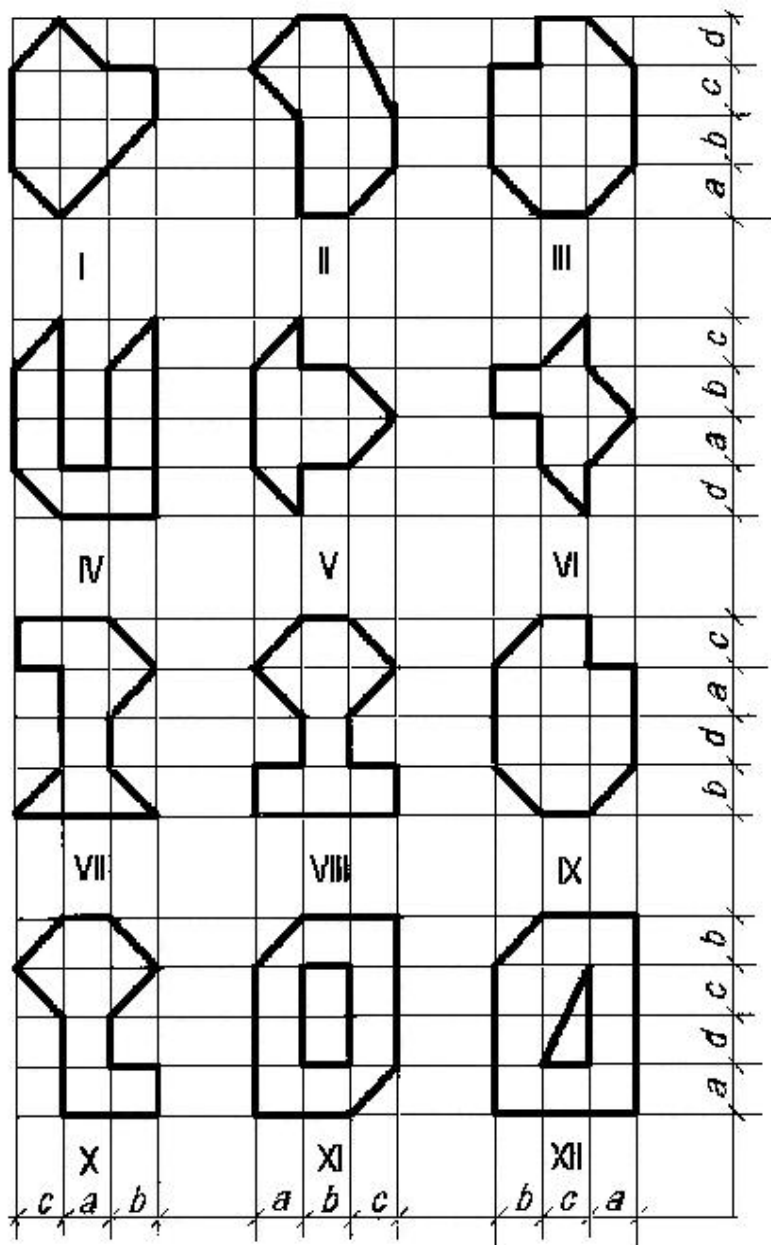


FIG. 3.7.

3.3. Методичні рекомендації

Перший етап розв'язування задачі полягає у виборі довільної системи координат. При цьому бажано, щоб координатні осі збігалися зі сторонами складної фігури, а саму фігуру доцільно розміщувати в I квадранті. В цьому випадку координати центрів ваги простих фігур будуть мати лише додатні значення, що на початковому етапі дещо полегшить розрахунки.

З метою використання вже відомих формул для визначення моментів інерції, простими фігурами слід вважати прямокутники й прямокутні трикутники. Визначення координат центру ваги простих фігур здійснюється за формулами (3.4) та (3.5) в єдиній системі. Це вимагає врахування їх місця розташування в обраній системі координат. Особливу увагу слід звернути на визначення координат центру ваги прямокутного трикутника. Для знаходження координати центру ваги складної фігури використовують формулою (3.6).

Допоміжні системи координат вибирають таким чином, щоб їх початок збігався з центром ваги кожної простої фігури. При цьому відповідні осі таких систем повинні бути взаємно паралельними. Осьові моменти інерції визначають за формулами (3.10), (3.11). Відцентровий момент інерції в цьому випадку дорівнює нулю.

Наступним етапом розв'язання задачі є проведення початкової системи координат, осі якої паралельні вже вибраним, а початок координат збігається з центром ваги складної фігури. Використовуючи формули переходу до паралельних осей (3.13), (3.14), обчислюємо значення осьових та відцентрового моментів інерції складної фігури у вибраній системі координат.

Положення головних центральних осей знаходимо шляхом визначення тангенса кута їх нахилу до координатних осей початкової системи координат за формулою (3.15). Розрахунок завершується знаходженням за формулами (3.16), (3.17) значень головних моментів інерції та за формулою (3.18) – радіусів інерції.

3.4. Приклад

Для несиметричного поперечного перерізу (рис. 3.8) з параметрами $a=5\text{см}$, $b=4\text{см}$, $c=3\text{см}$, $d=6\text{см}$, визначити координати центра ваги, положення головних центральних осей, значення головних моментів інерції та радіусів інерції.

Розв'язування

1. Проводимо довільну систему прямокутних координат yOz .
2. Розбиваємо поперечний переріз на прості частини: прямокутники й прямокутні трикутники.

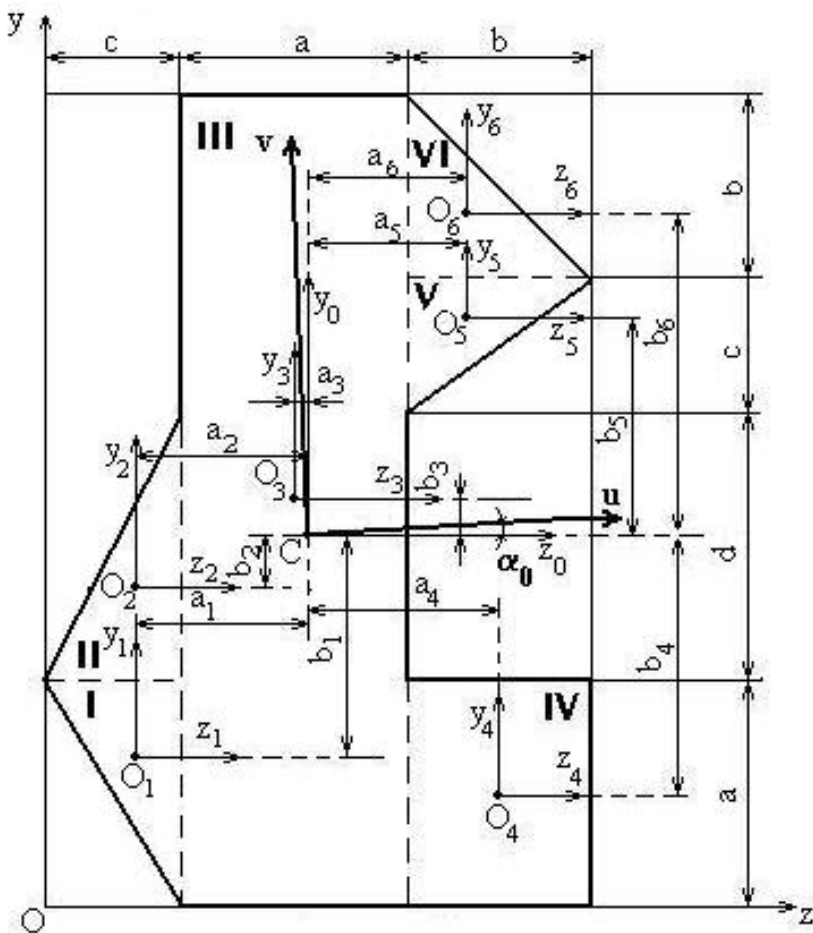


Рис. 3.8.

3. Знаходимо координати центра ваги простих фігур:

$$y_{c1} = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 5\text{см} = 3,33\text{см}$$

$$z_{c1} = \frac{2}{3}c = \frac{2}{3} \cdot 3\text{см} = 2\text{см}$$

$$y_{c2} = a + \frac{1}{3}d = (5 + \frac{1}{3} \cdot 6)\text{см} = 7\text{см}$$

$$z_{c2} = \frac{2}{3}c = \frac{2}{3} \cdot 3\text{см} = 2\text{см}$$

$$y_{c3} = \frac{1}{2}(a + d + c + b) = \frac{1}{2}(5 + 6 + 3 + 4) = 9\text{см}$$

$$z_{c3} = c + \frac{1}{2}a = (3 + \frac{1}{2} \cdot 5)\text{см} = 5,5\text{см}$$

$$y_{c4} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot 5\text{см} = 2,5\text{см}$$

$$z_{c4} = c + a + \frac{1}{2}b = (3 + 5 + \frac{1}{2} \cdot 4)\text{см} = 10\text{см}$$

$$y_{c5} = a + d + \frac{2}{3}c = (5 + 6 + \frac{2}{3} \cdot 3)\text{см} = 13\text{см}$$

$$z_{c5} = c + a + \frac{1}{3}b = (3 + 5 + \frac{1}{3} \cdot 4)\text{см} = 9,33\text{см}$$

$$y_{c6} = a + d + c + \frac{1}{3}b = (5 + 6 + 3 + \frac{1}{3} \cdot 4)\text{см} = 15,33\text{см}$$

$$z_{c6} = c + a + \frac{1}{3}b = (3 + 5 + \frac{1}{3} \cdot 4)\text{см} = 9,33\text{см}$$

4. Для каждой з простых фігур проводимо центральні системи координат (з початком в центрі ваги фігури): $y_1O_1z_1$, $y_2O_2z_2$, $y_3O_3z_3$, $y_4O_4z_4$, $y_5O_5z_5$, $y_6O_6z_6$.

5. Визначаємо площі поперечних перерізів простих фігур.

$$A_1 = \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3\text{см}^2 = 7,5\text{см}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}dc = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\text{см}^2 = 9\text{см}^2$$

$$A_3 = a(a + d + c + b) = 5(5 + 6 + 3 + 4)\text{см}^2 = 90\text{см}^2$$

$$A_4 = ab = 5 \cdot 4 \text{ см}^2 = 20 \text{ см}^2$$

$$A_5 = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}4 \cdot 3 \text{ см}^2 = 6 \text{ см}^2$$

$$A_6 = \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}4^2 \text{ см}^2 = 8 \text{ см}^2$$

Тоді загальна площа всієї фігури

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 7,5 + 9 + 90 + 20 + 6 + 8 = 140,5 \text{ см}^2$$

6. Знаходимо положення центра ваги

$$y_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{c_i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 y_{c_1} + A_2 y_{c_2} + A_3 y_{c_3} + A_4 y_{c_4} + A_5 y_{c_5} + A_6 y_{c_6}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6}$$

$$y_c = \frac{7,5 \cdot 3,33 + 9 \cdot 7 + 90 \cdot 9 + 20 \cdot 2,5 + 6 \cdot 13 + 8 \cdot 15,33}{7,5 + 9 + 90 + 20 + 6 + 8} = 8,18 (\text{см})$$

$$z_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_{c_i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 z_{c_1} + A_2 z_{c_2} + A_3 z_{c_3} + A_4 z_{c_4} + A_5 z_{c_5} + A_6 z_{c_6}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6}$$

$$z_c = \frac{7,5 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 90 \cdot 5,5 + 20 \cdot 10 + 6 \cdot 9,33 + 8 \cdot 9,33}{7,5 + 9 + 90 + 20 + 6 + 8} = 6,11 (\text{см})$$

7. Проводимо центральну систему координат складної фігури $y_0 C z_0$ (з початком в центрі ваги поперечного перерізу).

8. Визначаємо осьові моменти інерції простих фігур.

$$I_y^I = \frac{ac^3}{36} = \frac{5 \cdot 3^3}{36} \text{ см}^4 = 3,75 \text{ см}^4$$

$$I_z^I = \frac{ca^3}{36} = \frac{3 \cdot 5^3}{36} \text{ см}^4 = 10,42 \text{ см}^4$$

$$I_y^{II} = \frac{dc^3}{36} = \frac{6 \cdot 3^3}{36} \text{ см}^4 = 4,5 \text{ см}^4$$

$$I_z^{II} = \frac{cd^3}{36} = \frac{3 \cdot 6^3}{36} \text{ см}^4 = 18 \text{ см}^4$$

$$I_y^{III} = \frac{(a+d+c+b)a^3}{12} = \frac{(5+6+3+4) \cdot 5^3}{12} \text{ см}^4 = 187,5 \text{ см}^4$$

$$I_z^{III} = \frac{a(a+d+c+b)^3}{12} = \frac{5(5+6+3+4)^3}{12} \text{ см}^4 = 2430 \text{ см}^4$$

$$I_y^{IV} = \frac{ab^3}{12} = \frac{5 \cdot 4^3}{12} \text{ см}^4 = 26,67 \text{ см}^4$$

$$I_z^{IV} = \frac{ba^3}{12} = \frac{4 \cdot 5^3}{12} \text{ см}^4 = 41,67 \text{ см}^4$$

$$I_y^V = \frac{cb^3}{36} = \frac{3 \cdot 4^3}{36} \text{ см}^4 = 5,33 \text{ см}^4$$

$$I_z^V = \frac{bc^3}{36} = \frac{4 \cdot 3^3}{36} \text{ см}^4 = 3 \text{ см}^4$$

$$I_y^{VI} = \frac{b^4}{36} = \frac{4^4}{36} \text{ см}^4 = 7,11 \text{ см}^4$$

$$I_z^{VI} = \frac{b^4}{36} = \frac{4^4}{36} \text{ см}^4 = 7,11 \text{ см}^4$$

9. Знаходимо осьові моменти інерції складної фігури

$$I_y = I_y^I + a_1^2 A_1 + I_y^{II} + a_2^2 A_2 + I_y^{III} + a_3^2 A_3 + I_y^{IV} + a_4^2 A_4 + I_y^V + a_5^2 A_5 + I_y^{VI} + a_6^2 A_6,$$

$$I_y = I_y^I + (y_{c1} - y_c)^2 A_1 + I_y^{II} + (y_{c2} - y_c)^2 A_2 + I_y^{III} + (y_{c3} - y_c)^2 A_3 + I_y^{IV} + (y_{c4} - y_c)^2 A_4 + I_y^V + (y_{c5} - y_c)^2 A_5 + I_y^{VI} + (y_{c6} - y_c)^2 A_6,$$

$$I_y = 3,75 + (3,33 - 8,18)^2 \cdot 7,5 + 4,5 + (7 - 8,18)^2 \cdot 9 + 187,5 + (9 - 8,18)^2 \cdot 90 + 26,67 + (2,5 - 8,18)^2 \cdot 20 + 5,33 + (13 - 8,18)^2 \cdot 6 + 7,11 + (15,33 - 8,18)^2 \cdot 8 = 1677,95 (\text{см}^4)$$

$$I_z = I_z^I + b_1^2 A_1 + I_z^{II} + b_2^2 A_2 + I_z^{III} + b_3^2 A_3 + I_z^{IV} + b_4^2 A_4 + I_z^V + b_5^2 A_5 + I_z^{VI} + b_6^2 A_6,$$

$$I_z = I_z^I + (z_{c1} - z_c)^2 A_1 + I_z^{II} + (z_{c2} - z_c)^2 A_2 + I_z^{III} + (z_{c3} - z_c)^2 A_3 + I_z^{IV} + (z_{c4} - z_c)^2 A_4 + I_z^V + (z_{c5} - z_c)^2 A_5 + I_z^{VI} + (z_{c6} - z_c)^2 A_6,$$

$$I_z = 10,42 + (2 - 6,11)^2 \cdot 7,5 + 18 + (2 - 6,11)^2 \cdot 9 + 2430 + (5,5 - 6,11)^2 \cdot 90 + 41,67 + (10 - 6,11)^2 \cdot 20 + 3 + (9,33 - 6,11)^2 \cdot 6 + 7,11 + (9,33 - 6,11)^2 \cdot 8 = 3270,2 (\text{см}^4)$$

10. Визначаємо відцентровий момент складної фігури з урахуванням того, що для простих фігур центральні осі одночасно є головними ($I_{z_i y_i} = 0$)

$$I_{zy} = a_1 b_1 A_1 + a_2 b_2 A_2 + a_3 b_3 A_3 + a_4 b_4 A_4 + a_5 b_5 A_5 + a_6 b_6 A_6$$

$$I_{zy} = (y_{c1} - y_c)(z_{c1} - z_c)A_1 + (y_{c2} - y_c)(z_{c2} - z_c)A_2 + (y_{c3} - y_c)(z_{c3} - z_c)A_3 + (y_{c4} - y_c)(z_{c4} - z_c)A_4 +$$

$$+ (y_{c5} - y_c)(z_{c5} - z_c)A_5 + (y_{c6} - y_c)(z_{c6} - z_c)A_6,$$

$$I_{zy} = (3,33 - 8,18)(2 - 6,11)7,5 + (7 - 8,18)(2 - 6,11)9 + (9 - 8,18)(5,5 - 6,11)90 +$$

$$+ (2,5 - 8,18)(10 - 6,11)20 + (13 - 8,18)(9,33 - 6,11)6 + (15,33 - 8,18) *$$

$$* (9,33 - 6,11)8 = -16,47 \text{ см}^4$$

11. Визначасмо кут нахилу головних центральних осей складної фігури

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2 \cdot 16,47}{1677,96 - 3270,48} = 0,02069$$

тоді

$$2\alpha_0 = \operatorname{arctg} 0,02069 = 1,19^\circ \approx 1^{\circ} 11' 24''$$

Отже, $\alpha_0 \approx 36'$.

12. З урахуванням того, що $I_z > I_y$, знаходимо значення головних моментів інерції

$$I_u = \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right]$$

$$I_u = \frac{1}{2} \left[(3270,2 + 1677,95) + \sqrt{(3270,2 - 1677,95)^2 + 4(-16,47)^2} \right] =$$

$$= 3270,37 \text{ см}^4$$

$$I_v = \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) \mp \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right]$$

$$I_v = \frac{1}{2} \left[(3270,2 + 1677,95) - \sqrt{(3270,2 - 1677,95)^2 + 4(-16,47)^2} \right] =$$

$$= 1677,78 \text{ см}^4$$

13. Радіуси інерції

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{3270,37 \text{ см}^4}{140,5 \text{ см}^2}} = 4,82 \text{ см}$$

$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{1677,78 \text{ см}^4}{140,5 \text{ см}^2}} = 3,46 \text{ см}$$

IV. РОЗРАХУНОК ЗАКЛЕПКОВИХ З'ЄДНАНЬ НА ЗРІЗ І ЗМИНАННЯ

4.1. Короткі теоретичні відомості

Деформація **зсуву** виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельні перерізи стержня один відносно одного при незмінній відстані між ними (рис. 4.1). При зсуві з шести внутрішніх силових факторів відмінною від нуля залишається лише поперечна сила Q . На зсув працюють більшість шпонкових, штифтових, заклепкових, зварних з'єднань. Деформація зсуву відбувається, наприклад, при різанні ножицями.

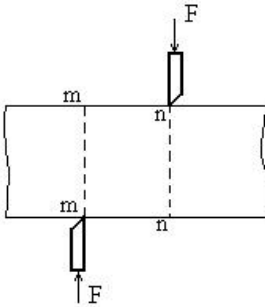


Рис. 4.1.

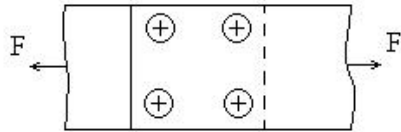


Рис. 4.2.

Враховуючи, що $F=Q$, величину поперечної сили в перерізі можна знайти за такою формулою

$$Q = \int_A \tau dA \quad (4.1)$$

Зважаючи, що при зсуві дотичні напруження розподіляються рівномірно, отримаємо

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A} \quad (4.2)$$

Зрізом називають деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу. Окремим випадком зрізу є сколювання дерев'яних елементів вздовж волокон деревини.

Умова міцності при зрізі (рис. 4.2), з урахуванням реальних умов експлуатації з'єднань, може бути записана в такому вигляді

$$\tau_{зр} = \frac{F}{k n A_{зр}} \leq [\tau_{зр}], \quad (4.3)$$

де F – зовнішнє навантаження, k – кількість площин зрізу, n – число

елементів, що працюють на зріз, $A_{зр}$ – площа поперечного перерізу елемента, що працює на зріз, $[\tau_{зр}]$ – допустиме дотичне напруження.

У випадку з'єднання двох деталей кількість площин зрізу дорівнює одиниці ($k=1$).

Проведення проєктних розрахунків зводиться до визначення необхідної кількості елементів зрізу

$$n \geq \frac{F}{kA_{зр}[\tau_{зр}]} \quad (4.4)$$

або до визначення геометричної характеристики, зокрема, площі поперечного перерізу елемента, що працює на зріз

$$A_{зр} \geq \frac{F}{kn[\tau_{зр}]} \quad (4.5)$$

Для заклепкових з'єднань, якщо заклепка має круглий поперечний переріз, формули (4.4) та (4.5) можна записати у такому вигляді

$$n \geq \frac{4F}{\pi k d^2 [\tau_{зр}]} \quad (4.6)$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{kn\pi[\tau_{зр}]}} \quad (4.7)$$

Виконання умов міцності на зріз не завжди гарантує міцність і надійність з'єднання. Напруження, що виникають під дію зовнішніх сил, спричинюють також зминання поверхонь.

Під **зминанням** розуміють пластичну деформацію, що виникає на поверхнях контакту деталей. Максимальне напруження при зминанні визначається за формулою

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}}, \quad (4.8)$$

де F – зовнішня сила, $A_{зм}$ – площа зминання.

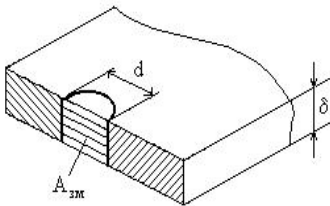


Рис.4.3.

Оскільки характер розподілу тиску по поверхні точно не відомий, для елементів з'єднань, що мають круглий поперечний переріз, $A_{зм}$ являє собою площу проєкції поверхні контакту на діаметральну площину (рис. 4.3). В цьому випадку площу зминання можна знайти за формулою

$$A_{зм} = \delta d, \quad (4.9)$$

де δ – товщина деталі, d – діаметр елемента, що працює на зріз.

Умова міцності при зминанні, з урахуванням реальних умов експлуатації з'єднань, набуває такого вигляду

$$\sigma_{з.м} = \frac{F}{n\delta d} \leq [\sigma_{з.м}], \quad (4.10)$$

де n – кількість елементів, що працюють на зріз, $[\sigma_{з.м}]$ – допустиме нормальне напруження при зминанні.

Проведення проєктних розрахунків, як і у випадку зрізу, зводиться до визначення кількості елементів, що працюють на зминання,

$$n \geq \frac{F}{\delta d [\sigma_{з.м}]} \quad (4.11)$$

або до визначення однієї з геометричних характеристик, наприклад, діаметра елемента, що працює на зминання

$$d \geq \frac{F}{n\delta [\tau_{з.м}]} \quad (4.12)$$

Для реальних з'єднань чи конструкцій, як правило, здійснюють розрахунки як з умови міцності на зріз, так і з умови міцності на зминання.

4.2. Завдання №4

Визначити необхідну кількість заклепок діаметром d (таблиця 4.1) для з'єднання напуском двох листів товщиною δ_1, δ_2 , навантажених силою F (рис. 4.4, таблиця 4.2), якщо відоме допустиме дотичне напруження на зріз $[\tau_{з.р}]$ та допустиме нормальне напруження на зминання $[\sigma_{з.м}]$.

Дані для розрахунків взяти з таблиці 4.2.

Таблиця 4.1.



Рис. 4.4.

№ варіанта	d, мм
I-III	4
IV-VI	5
VII-IX	6
X-XII	8

Таблиця 4.2.

№ п/п	δ_1 , мм	δ_2 , мм	$[\tau_{зр}]$, МПа	$[\sigma_{зм}]$, МПа	F, кН
1	4,0	1,5	100	260	7
2	3,5	1,7	110	280	8
3	3,0	1,8	120	300	9
4	2,5	2,0	130	320	10
5	2,0	2,5	140	340	12
6	1,5	3,0	150	360	15
7	1,0	3,5	160	350	17
8	1,5	4,0	155	330	20
9	2,0	4,5	145	310	18
10	3,0	1,5	132	290	16
11	4,0	1,7	125	270	13
12	4,0	1,8	115	250	9
13	3,0	1,5	132	290	16
14	4,0	1,7	125	270	13
15	4,0	1,8	115	250	9

4.3. Методичні рекомендації

Визначення необхідної кількості елементів зрізу (заклепок) відноситься до найбільш розповсюджених типів практичних завдань при розрахунках на зріз і зминання.

Загальний алгоритм розрахунку виглядає таким чином. Спочатку з умови міцності на зріз за формулою (4.6) визначають необхідну кількість заклепок. При цьому слід врахувати, що при з'єднанні двох деталей напуском існує лише одна площа зрізу.

Розрахунок на зминання розпочинається з вибору найтоншого листа, оскільки саме його геометричні характеристики визначають міцність з'єднання в цілому. Використовуючи формулу (4.11) з умови міцності на зминання знаходять необхідну кількість заклепок.

На завершальному етапі розрахунку здійснюється вибір максимального значення з двох отриманих величин та його округлення до більшого цілого числа.

4.4. Приклад

Визначити необхідну кількість заклепок діаметром $d=5$ мм (рис. 4.4) для з'єднання напуском двох листів товщиною $\delta_1=1,9$ мм,

$\delta_2=2,3\text{мм}$, навантажених силою $F=10\text{кН}$, якщо відоме допустиме дотичне напруження на зріз $[\tau_{зр}]=105\text{ МПа}$ та допустиме нормальне напруження на зминання $[\sigma_{зм}]=285\text{ МПа}$.

Розв'язування

1. Визначаємо необхідну кількість заклепок з умови міцності на зріз

$$n_1 \geq \frac{4F}{\pi k d^2 [\tau_{зр}]}$$

Приймаючи для однієї площини зрізу $k=1$ отримуємо

$$n_1 \geq \frac{4 \cdot 10000}{3,14 \cdot 0,005^2 \text{ м}^2 \cdot 105 \cdot 10^6 \text{ Па}}$$

$$n_1 \geq 4,85$$

2. З двох листів вибираємо найтонший

$$\delta_{\min} = \delta_1 = 1,9\text{мм}$$

3. Визначаємо необхідну кількість заклепок з умови міцності на зминання

$$n_2 \geq \frac{F}{\delta d [\sigma_{зм}]}$$

$$n_2 \geq \frac{10000\text{Н}}{1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 285 \cdot 10^6 \text{ Па}}$$

$$n_2 \geq 3,69$$

4. З двох отриманих значень вибираємо найбільше

$$n_1 = 4,85 > n_2 = 3,69 \text{ і округлюємо його до більшого цілого числа.}$$

Необхідна кількість заклепок $n = 5$.

V. ПРОЄКТНИЙ РОЗРАХУНОК СУЦЬНОГО І ПОРОЖНИСТОГО ВАЛІВ ПРИ КРУЧЕННІ

5.1. Короткі теоретичні відомості

Крученням називають такий вид деформації, за якого в довільному поперечному перерізі бруса, що перпендикулярний до його осі, із шести внутрішніх силових факторів діє лише один – крутильний момент. Прямий брус, що працює на кручення, називається **валом**.

При визначенні невідомих крутильних моментів використовується рівняння рівноваги

$$\sum T_i = 0, \quad (5.1)$$

де T_i – крутильний момент.

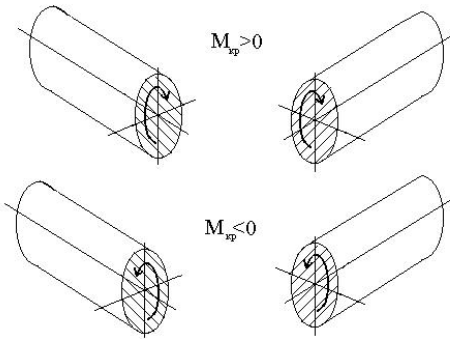


Рис.5.1.

Для визначення крутильного моменту в довільному поперечному перерізі вала використовують правило знаків: крутильний момент вважається додатним, якщо при спостереганні з торця вздовж осі розглядуваної частини він намагається обертати переріз за годинниковою стрілкою, а від'ємним – якщо намагається обертати переріз проти годинникової стрілки (рис. 5.1).

Основними геометричними характеристиками при крученні (рис. 5.2) є:

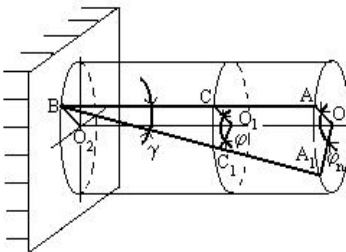


Рис.5.2.

- кут, утворений твірною до і після деформації ($\angle ABA_1$), що називається **кутом зсуву** γ ;

- кут, утворений радіусом до і після деформації ($\angle CO_1C_1$), що характеризує кут повороту одного перерізу відносно іншого, умовно закріпленого, і називається **кутом повороту (закручування)** φ ;

- кут повороту на торці вала, що називається **повним кут**

том повороту (закручування) φ_n .

Ще однією важливою кількісною характеристикою при крученні є *відносний кут повороту (закручування)*

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (5.2)$$

де $d\varphi$ – елементарний кут закручування, dx – нескінченно мала довжина виділеної ділянки вала.

Крутильний момент в такому випадку визначається за такою формулою

$$M_{кр} = \int_A \tau \rho dA, \quad (5.3)$$

де τ – дотичне напруження, що виникає на елементарній площадці dA , розташованій на довільній відстані ρ від центра перерізу.

Враховуючи, що при крученні в межах пружних деформацій справджується закон Гука, математичний вираз якого описується формулою

$$\tau = G\theta\rho, \quad (5.4)$$

де G – модуль пружності другого роду або модуль пружності при зсуві (виражається в Па або в МПа), значення відносного кута повороту можна знайти за формулою

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GI_p}, \quad (5.5)$$

де I_p – полярний момент інерції.

Для суцільного вала діаметром d полярний момент інерції визначається за формулою

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (5.6)$$

Для порожнистого вала

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad (5.7)$$

При цьому

$$\alpha = \frac{d}{D}, \quad (5.8)$$

де d – внутрішній діаметр вала, D – зовнішній діаметр вала.

Використовуючи (5.5) можна записати формулу для визначення взаємного кута закручування двох перерізів, що розташовані на відстані l один від одного. Якщо в межах циліндричного відрізка стержня завдовжки l крутильні моменти в перерізах не змінюються, то

$$\varphi = \frac{M_{kp} l}{GI_p} \quad (5.9)$$

Умова міцності при крученні може бути записана в такому вигляді

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_p} \leq [\tau], \quad (5.10)$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження при крученні, W_p – полярний момент опору при крученні (виражається в одиницях довжини в третьому степені, найчастіше в см^3). Для проведення проєктного розрахунку з умови міцності (5.10) визначаємо полярний момент опору при крученні

$$W_p \geq \frac{M_{kp}}{[\tau]} \quad (5.11)$$

Враховуючи, що для суцільного вала

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (5.12)$$

а для порожнистого

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \quad (5.13)$$

та розв'язуючи спільно відповідно (5.11), (5.12) та (5.11), (5.13), отримаємо вирази для визначення діаметра суцільного вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{kp}}{\pi[\tau]}} \quad (5.14)$$

та зовнішнього діаметра порожнистого вала

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{kp}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}} \quad (5.15)$$

Умова жорсткості при крученні має такий вигляд

$$\theta = \frac{M_{kp}}{GI_p} \leq [\theta], \quad (5.16)$$

де $[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування.

Допустимий відносний кут закручування вибирають залежно від умов навантаження. Так, при статичному навантаженні $[\theta]=0,3^0$ на кожний метр довжини вала; при змінних навантаженнях $[\theta]=0,25^0/\text{м}$, при ударних навантаженнях $[\theta]=0,5^0/\text{м}$. Враховуючи, що у формулі (5.16) відносний кут закручування виражений в радіанах, наведені допустимі значення необхідно помножити на $\pi/180$.

Для проведення проєктного розрахунку з умови жорсткості

(5.16) визначаємо полярний момент інерції

$$I_p \geq \frac{M_{kp}}{G[\theta]} \quad (5.17)$$

Розв'язуючи спільно (5.17), (5.6) та (5.17), (5.7), отримаємо формули для визначення діаметра суцільного вала

$$d \geq 4 \sqrt{\frac{32M_{kp}}{G\pi[\theta]}} \quad (5.18)$$

та зовнішнього діаметра порожнистого вала

$$D \geq 4 \sqrt{\frac{32M_{kp}}{G\pi[\theta](1-\alpha^4)}} \quad (5.19)$$

Отримані в процесі розрахунків значення діаметрів округлюють до стандартної величини (додаток 1).

Важливим елементом практичних розрахунків при крученні є підбір раціональної форми поперечного перерізу при дотриманні умов міцності та жорсткості. Оптимальний вибір поперечного перерізу дозволяє зекономити матеріал, що призводить до полегшення і в більшості випадків – до здешевлення конструкції. В якості критерія економічності профілю може слугувати безрозмірна величина

$$i = \frac{A_2}{A_1}, \quad (5.20)$$

де A_2 – площа поперечного перерізу, наприклад, порожнистого вала, A_1 – площа поперечного перерізу суцільного вала.

Економія матеріалу, як правило, оцінюється відносним показником

$$\chi = \frac{|A_1 - A_2|}{A_1} \cdot 100\% \quad (5.21)$$

5.2. Завдання №5

Для вала круглого поперечного перерізу, навантаженого крутильними моментами T_1, T_2, T_3, T_4 (рис. 5.3.), побудувати епюри крутильних моментів, відносних кутів закручування і кутів закручування та з умови міцності й жорсткості при статичному навантаженні підібрати діаметр суцільного та порожнистого вала, якщо для останнього відомо співвідношення α внутрішнього (d) і зовнішнього (D) діаметрів.

Дані для розрахунків взяти з таблиці 5.1.

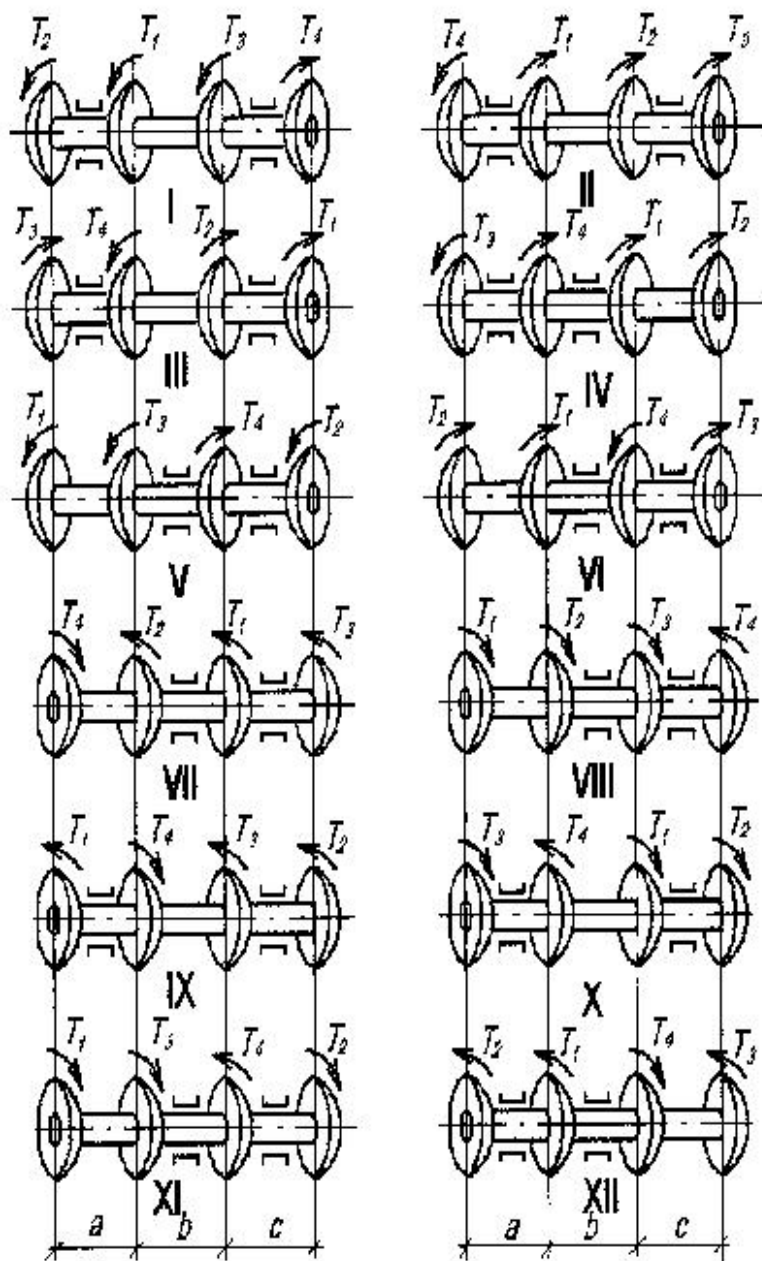


Рис. 5.3.

Таблиця 5.1.

№ п/п	T ₁ , Н·м	T ₂ , Н·м	T ₃ , Н·м	a, м	b, м	c, м	α	G,*10 ⁴ МПа	$[\tau]$, МПа
1	300	210	250	1,35	0,15	0,75	0,95	8,35	14,5
2	400	280	350	1,30	0,20	0,85	0,90	8,30	15,0
3	500	370	450	1,25	0,25	0,95	0,85	8,25	15,5
4	600	460	550	1,20	0,30	1,05	0,80	8,20	16,0
5	700	540	650	1,15	0,35	1,15	0,75	8,15	17,0
6	800	630	750	1,10	0,40	1,25	0,70	8,10	18,0
7	900	720	850	1,05	0,45	1,25	0,65	8,05	19,0
8	1000	810	950	1,00	0,50	1,15	0,60	8,00	20,0
9	1100	910	850	0,95	0,55	1,05	0,55	7,95	21,0
10	1200	1090	750	0,90	0,60	0,95	0,50	7,90	22,0
11	1300	1120	650	0,85	0,65	0,85	0,45	7,85	22,5
12	1400	1230	550	0,80	0,70	0,70	0,40	7,80	23,0
13	1500	1270	450	0,80	0,75	0,95	0,35	7,75	23,5
14	1600	1340	350	0,75	0,70	0,85	0,30	7,70	24,0
15	1700	1410	250	0,70	0,60	0,70	0,25	7,65	24,5

5.3. Методичні рекомендації

Розв'язування задачі розпочинається зі знаходження з умови статичної рівноваги (5.1) значення невідомого крутильного моменту. При цьому використовують правило знаків теоретичної механіки: якщо крутильний момент діє проти годинникової стрілки, то він вважається додатним. Епюру крутильного моменту будують, використовуючи метод перерізів з урахуванням правила знаків (рис. 5.1)

Для проведення проектних чи перевірних розрахунків з побудованої епюри крутильних моментів вибирають максимальне за абсолютною величиною значення $M_{кр}$. Тому у випадку, коли крутильний момент від'ємний, знак «мінус» в подальших розрахунках не враховують.

Підбір діаметра суцільного вала проводять за таким алгоритмом. Спочатку визначають значення d з умови міцності за формулою (5.14), потім з умови жорсткості за формулою (5.18). Оскільки розрахунок проводиться для статичного навантаження, значення допустимого відносного кута закручування приймають рівним $0,3^0/м$ ($[\theta]=0,3^0/м$). На завершальному етапі два отриманих значення порівнюють, вибирають більше й округлюють до найближчої більшої стандартної величини (додаток 1).

Значення відносних кутів закручування знаходять для кожної ділянки окремо за формулою (5.5). При цьому знаки θ на відповідних ділянках будуть збігатися зі знаком результуючого моменту на цій же ділянці.

Визначення кутів закручування φ здійснюють за формулою (5.9), пам'ятаючи, що величина φ залежить від довжини ділянки вала. Тому значення кута закручування визначають на початку і в кінці ділянки, а епюра φ буде являти собою систему ліній, нахилених під кутом до осі абсцис. При цьому нульове значення φ відкладають в точці прикладення того крутильного моменту, який має відмінний від інших трьох T напрямок (знак).

Практично за таким же алгоритмом здійснюють підбір зовнішнього діаметра порожнистого вала. Спочатку з умови міцності визначають значення D за формулою (5.15), а потім з умови жорсткості – за формулою (5.19). З двох отриманих значень вибирають найбільше з подальшим округленням до найближчої більшої стандартної величини, а потім за формулою (5.8) визначають внутрішній діаметр порожнистого вала.

Розрахунок завершується визначенням за формулою (5.20) економічності профілю порожнистого вала в порівнянні з валом суцільним, а за формулою (5.21) визначається економія матеріалу.

5.4. Приклад

Для вала круглого поперечного перерізу (рис. 5.4) з геометричними параметрами $a=1,17\text{м}$, $b=0,85\text{м}$, $c=0,63\text{м}$, що навантажений крутильними моментами $T_1=1000\text{Н}\cdot\text{м}$, $T_2=1900\text{Н}\cdot\text{м}$, $T_3=500\text{Н}\cdot\text{м}$, побудувати епюри крутильних моментів, відносних кутів закручування і кутів закручування та з умови міцності та жорсткості при статичному навантаженні підібрати діаметр суцільного та порожнистого вала, якщо для останнього відомо співвідношення $\alpha=0,7$ внутрішнього і зовнішнього діаметрів. Допустиме дотичне напруження складає $[\tau]=20\text{МПа}$, а модуль пружності другого роду $G=8\cdot 10^4\text{МПа}$.

Розв'язування

1. З умови статичної рівноваги вала знаходимо значення невідомого крутильного моменту

$$\sum T_i = 0$$

$$T_2 - T_1 - T_3 - T_4 = 0$$

$$T_4 = T_2 - T_1 - T_3 = (1900 - 1000 - 500)\text{Н}\cdot\text{м} = 400\text{Н}\cdot\text{м}$$

2. Розбиваємо вал на ділянки й знаходимо крутільні моменти на кожній ділянці вала:

ділянка I $M_{крI} = T_1 = 1000H \cdot м$

ділянка II $M_{крII} = T_1 - T_2 = (1000 - 1900)H \cdot м = -900H \cdot м$

ділянка III $M_{крIII} = T_1 - T_2 + T_3 = (1000 - 1900 + 400)H \cdot м = -500H \cdot м$

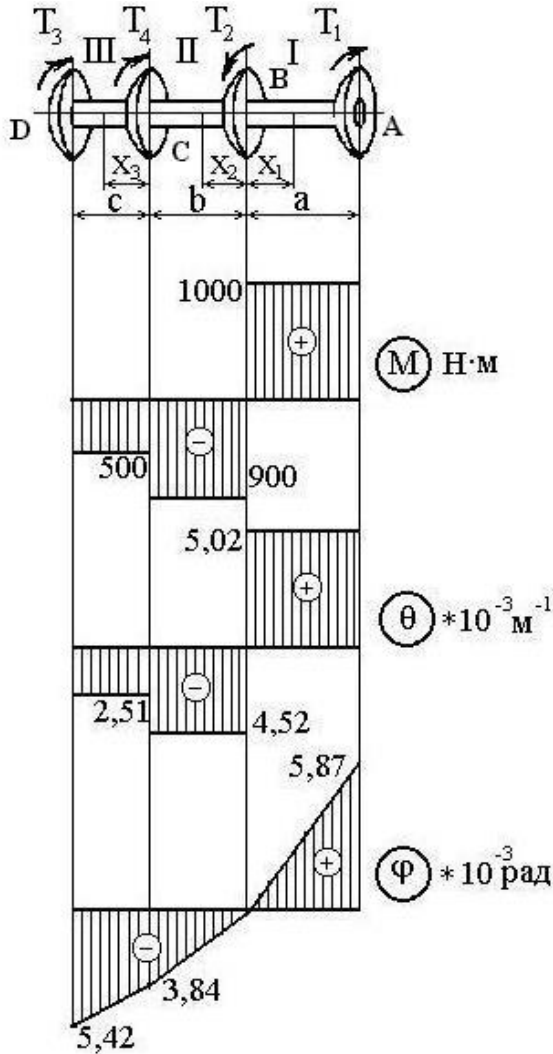


Рис. 5.4.

3. Вибираємо найбільше за абсолютною величиною значення крутильного моменту

$$M_{\max} = M_{крI} = 1000H \cdot m$$

4. Визначаємо діаметр суцільного вала з умови міцності

$$d' \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000H \cdot m}{3,14 \cdot 20 \cdot 10^6 Pa}} = 0,06339m = 63,39mm$$

5, Визначаємо діаметр суцільного вала з умови жорсткості

$$d'' \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi[\theta]}}$$

При цьому для статичного навантаження приймаємо $[\theta] = 0,3^\circ / m$, або переводячи в радіани

$$[\theta] = 0,3^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = 0,0052m^{-1}$$

Тоді

$$d'' \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1000H \cdot m}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 Pa \cdot 3,14 \cdot 0,0052m^{-1}}} = 0,07035m = 70,35mm$$

6. З двох отриманих значень вибираємо найбільше ($d_{\max} = 70,35mm$) і округлюємо до стандартної величини (додаток 1). Остаточно приймаємо $d = 71mm$.

7. Для суцільного вала визначаємо полярний момент інерції

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 71^4}{32} mm^4 = 2493521,1 mm^4 = 2,49 \cdot 10^{-6} m^4$$

8. Знаходимо відносні кути закручування на кожній ділянці вала:

ділянка I

$$\theta = \frac{M_{крI}}{GI_p} = \frac{1000H \cdot m}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 Pa \cdot 2,49 \cdot 10^{-6} m^4} = 0,00502m^{-1} = 5,02 \cdot 10^{-3} m^{-1}$$

ділянка II

$$\theta = \frac{M_{крII}}{GI_p} = -\frac{900H \cdot m}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 Pa \cdot 2,49 \cdot 10^{-6} m^4} = -0,00452m^{-1} = -4,52 \cdot 10^{-3} m^{-1}$$

ділянка III

$$\theta = \frac{M_{крIII}}{GI_p} = -\frac{500H \cdot m}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 Pa \cdot 2,49 \cdot 10^{-6} m^4} = -0,00251m^{-1} = -2,51 \cdot 10^{-3} m^{-1}$$

9. Для кожної ділянки вала знаходимо кути закручування:

$$\text{ділянка I} \quad \varphi_I = \frac{M_{крI} x_1}{GI_p}$$

$$\text{при } x_1=0 \quad \varphi_I = \varphi_B = 0$$

$$\text{при } x_1=a=1,17\text{м}$$

$$\varphi_I = \varphi_A = \frac{M_{крI} a}{GI_p} = \frac{1000\text{Н} \cdot \text{м} \cdot 1,17\text{м}}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \text{Па} \cdot 2,49 \cdot 10^{-6} \text{м}^4} = 5,87 \cdot 10^{-3} \text{рад}$$

$$\text{ділянка II} \quad \varphi_{II} = \frac{M_{крII} x_2}{GI_p}$$

$$\text{при } x_2=0 \quad \varphi_{II} = \varphi_B = 0$$

$$\text{при } x_2=b=0,85\text{м}$$

$$\varphi_{II} = \varphi_C = \frac{M_{крII} b}{GI_p} = -\frac{900\text{Н} \cdot \text{м} \cdot 0,85\text{м}}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \text{Па} \cdot 2,49 \cdot 10^{-6} \text{м}^4} = -3,84 \cdot 10^{-3} \text{рад}$$

$$\text{ділянка III} \quad \varphi_{III} = \varphi_C + \frac{M_{крIII} x_3}{GI_p}$$

$$\text{при } x_3=0 \quad \varphi_{III} = \varphi_C = -3,84 \cdot 10^{-3} \text{рад}$$

$$\text{при } x_3=c=0,63\text{м} \quad \varphi_{III} = \varphi_D = \varphi_C + \frac{M_{крIII} c}{GI_p}$$

$$\varphi_D = -3,84 \cdot 10^{-3} - \frac{500\text{Н} \cdot \text{м} \cdot 0,63\text{м}}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \text{Па} \cdot 2,49 \cdot 10^{-6} \text{м}^4} = -5,42 \cdot 10^{-3} \text{рад}$$

10. Визначаємо зовнішній діаметр порожнистого вала з умови міцності

$$D' \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000\text{Н} \cdot \text{м}}{3,14 \cdot 20 \cdot 10^6 \text{Па}(1-0,7^4)}} = 0,06946\text{м} = 69,46\text{мм}$$

11. Визначаємо діаметр порожнистого вала з умови жорсткості

$$D'' \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi[\theta](1-\alpha^4)}}$$

При цьому для статичного навантаження приймаємо $[\theta]=0,3^0/\text{м}$, або переводячи в радіани $[\theta]=0,0052\text{м}^{-1}$.

Тоді

$$D'' \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1000\text{Н} \cdot \text{м}}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \text{Па} \cdot 3,14 \cdot 0,0052\text{м}^{-1} \cdot (1-0,7^4)}} = 0,07535\text{м} = 75,35\text{мм}$$

12. З двох отриманих значень вибираємо найбільше ($D_{\max}=75,35\text{мм}$) і округлюємо його до стандартної величини. Остаточоно

приймаємо

$$D = 80_{\text{мм}}$$

13. Визначаємо внутрішній діаметр порожнистого вала

$$d = cD = 0,7 \cdot 80_{\text{мм}} = 56_{\text{мм}}$$

14. Знаходимо площу поперечного перерізу суцільного вала

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 71^2}{4} \text{ мм}^2 = 3957,19_{\text{мм}^2}$$

15. Знаходимо площу поперечного перерізу порожнистого вала

$$A_2 = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 80^2}{4} - \frac{3,14 \cdot 56^2}{4} = 5024,0 - 2461,76 = 2562,24 \text{ мм}^2$$

16. Визначаємо критерій економічності профілю

$$i = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2562,24_{\text{мм}^2}}{3957,19_{\text{мм}^2}} = 0,65$$

17. Визначаємо економію матеріалу

$$\chi = \frac{|A_1 - A_2|}{A_1} \cdot 100\% = \frac{3957,19 - 2562,24}{3957,19} \cdot 100\% = 35,25\%$$

VI. ПІДБІР ДВОТАВРОВОГО ПЕРЕРІЗУ КОНСОЛІ, ВИГОТОВЛЕНОЇ З МАЛОВУГЛЕЦЕВОЇ СТАЛІ

6.1. Короткі теоретичні відомості

Брус зазнає деформації *згинання*, якщо в площинах, що проходять через його вісь, діють сили або пари сил, що перпендикулярні до його осі. В цьому випадку вісь бруса змінює свою кривизну.

Прямолінійний брус, що працює на згинання, називається *балкою*. В «Опорі матеріалів» термін «балка» є значно ширшим, ніж у звичному використанні цього слова. З погляду розрахунку на міцність, жорсткість та стійкість балкою може бути болт, вал редуктора, вісь залізничного вагона, зуб шестерні тощо. *Консоллю* називається балка, яка жорстко закріплена одним кінцем і не має інших опор. Балки, які мають частини, що звисають, називають *консольними*.

Найбільше теоретичне значення має випадок *чистого плоского згинання*, за якого із шести внутрішніх силових факторів не дорівнює нулю лише згинальний момент M . Проте на практиці (рис. 6.1) в поперечному перерізі балки можуть діяти: розподілене навантаження q , поперечна сила Q та згинальний момент M .

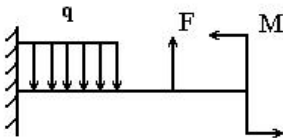


Рис.6.1.

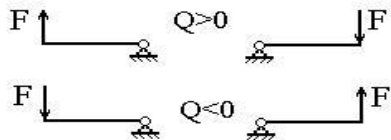


Рис. 6.2.

Для поперечних сил і згинальних моментів встановлюється таке правило знаків:

- поперечна сила вважається додатною, якщо її вектори намагаються повернути відрізану частину балки за годинниковою стрілкою, і від'ємною – якщо проти годинникової стрілки (рис. 6.2.);
- згинальний момент вважається додатним, якщо він викликає стискання верхніх волокон, і від'ємним – якщо він викликає стискання нижніх волокон (рис. 6.3).

Часто на балку діє розподілене по довжині навантаження інтенсивністю q , яке виражається в Н/м. Рівнодійна такого розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі епюри та прикладена в центрі її ваги.

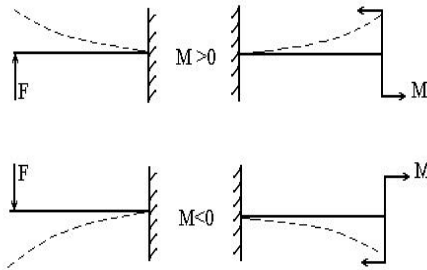


Рис.6.3.

У разі рівномірно розподіленого навантаження q значення результуючої поперечної сили визначається за формулою

$$Q_p = qa \quad (6.1)$$

де a – довжина, на якій діє рівномірно розподілене навантаження.

Згинальний момент визначається традиційно як добуток сили F на плече a

$$M = Fa \quad (6.2)$$

Для рівномірно розподіленого навантаження згинальний момент визначається за формулою

$$M = Q_p x_c, \quad (6.3)$$

де x_c – координата центра ваги епюри q .

Враховуючи, що у випадку рівномірно розподіленого навантаження для прямокутника $x_c = \frac{a}{2}$ та використовуючи формулу

(6.1) отримаємо

$$M = \frac{qa^2}{2} \quad (6.4)$$

В загальному випадку величина згинального моменту визначається за формулою

$$M = \int_A \sigma y dA, \quad (6.5)$$

де σ – нормальне напруження, що виникає при згинанні, y – координата елементарної площі dA .

Сукупність волокон, що не змінює своєї довжини при згинанні балки називається **нейтральним шаром**. Лінія перетину нейтрального шару і поперечного перерізу балки називається **нейтральною лінією (н.л.)**.

Основною геометричною характеристикою балки при згинанні є відносна деформація ε , яка визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}, \quad (6.6)$$

де y – відстань волокна до нейтральної лінії, ρ – радіус кривизни балки.

Враховуючи справедливність гіпотези плоских перерізів при згинанні та розв'язуючи спільно рівняння (6.5) та (6.6) можна

отримати математичний вираз **закону Гука** при згинанні

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}, \quad (6.7)$$

де E – модуль Юнга, I_z – осьовий момент інерції.

Для того, щоб визначити нормальне напруження в довільній точці поперечного перерізу використовують формулу

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y \quad (6.8)$$

З аналізу формули видно, що величина нормального напруження на нейтральній лінії (при $y=0$) дорівнює нулю і пропорційно зростає при віддаленні від неї. Це означає, що матеріал балки в околі нейтральної лінії навантажений мало і працює неефективно.

Тому з метою економії матеріалу і підвищення вантажопідйомності балки необхідно вибирати такі форми поперечного перерізу, у яких більша частина площі була б якомога далі від нейтральної лінії. До таких раціональних профілів відносять двотаврові балки (рис. 6.4, а), швелери (рис. 6.4, б), труби (рис. 6.4, в) та деякі інші види конструкцій.

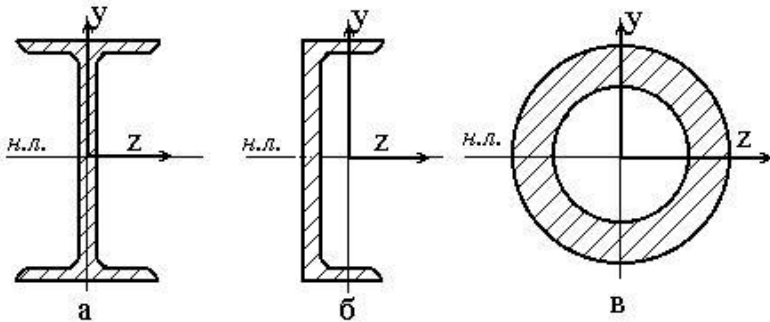


Рис. 6.4.

Умову міцності при згинанні можна записати у такому вигляді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad (6.9)$$

де $[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження при згинанні, W – осьовий момент опору, який має розмірність довжини в третьому степені (м^3 , см^3).

Для стандартних профілів (двотаврової балки, швелера, тавра, кутника) осьовий момент опору є однією з основних геометричних характеристик. Тому в цьому випадку проектний розрахунок (підбір

профілю) зводиться до визначення W за формулою

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \quad (6.10)$$

і округлення його до найближчого більшого значення згідно зі стандартним рядом, який для двотаврової балки приведений у додатку 2.

6.2. Завдання №6

Для консолі, виготовленої з маловуглецевої сталі й навантаженої згинальним моментом M , зосередженою силою F та розподіленим навантаженням q (рис. 6.5) побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів і підібрати згідно зі стандартом двотавровий переріз балки.

Дані для розрахунків взяти з таблиці 6.1.

Таблиця 6.1.

№ п/п	M , кН·м	F , кН	q , кН/м	$[\sigma]$, МПа	a , м	b , м	c , м
1	45	160	60	145	2,5	0,5	0,9
2	50	150	55	150	2,3	0,6	1,0
3	55	140	50	155	2,2	0,7	1,1
4	60	130	45	160	2,0	0,8	1,2
5	65	120	40	165	1,8	0,9	1,3
6	70	110	35	170	1,7	1,0	1,4
7	75	100	30	175	1,6	1,1	1,5
8	80	90	25	180	1,5	1,2	1,6
9	85	80	30	185	1,4	1,3	1,5
10	90	70	35	190	1,3	1,4	1,4
11	95	60	40	195	1,2	1,5	1,3
12	100	50	45	200	1,1	1,6	1,2
13	105	40	50	205	1,0	1,7	1,1
14	110	30	55	210	0,9	1,8	1,0
15	120	20	60	215	0,8	1,9	0,9

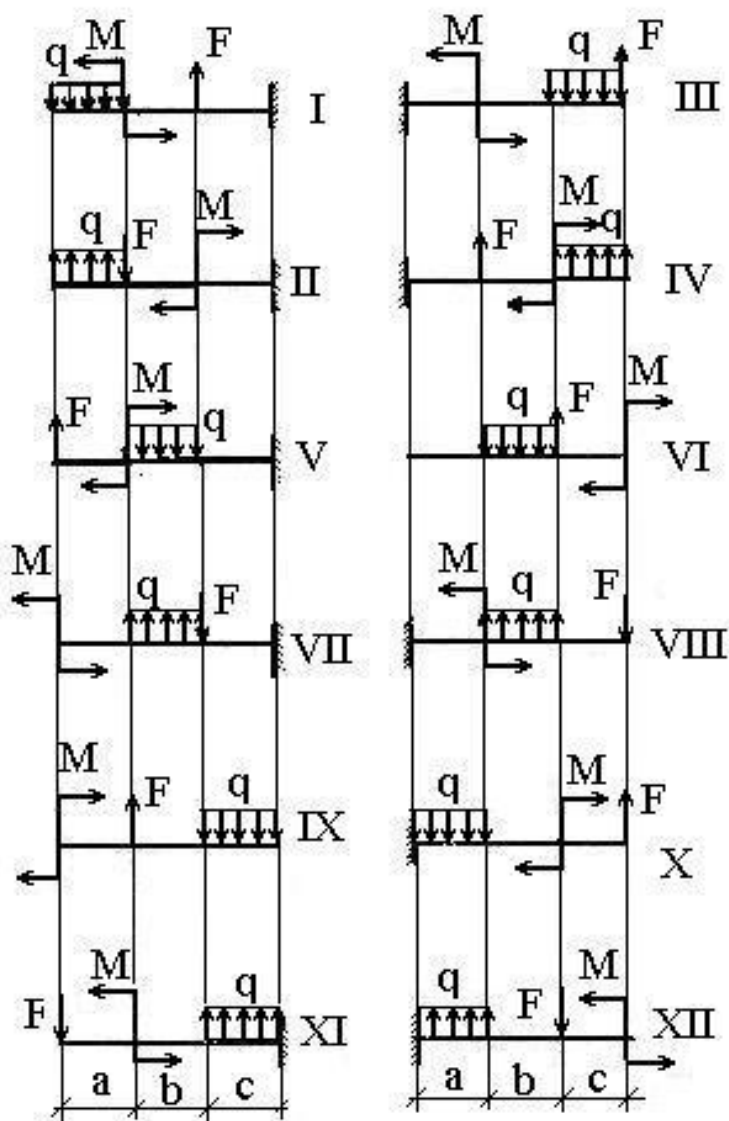


Рис.6.5.

6.3. Методичні рекомендації

Ключовим елементом задач подібного типу є побудова епюор поперечних сил і згинальних моментів. При цьому епюори будують з урахуванням правила знаків (рис. 6.2., 6.3.), починаючи з незакріпленого кінця. Такий порядок звільняє від необхідності визначення реакцій в опорі, які потім можна отримати безпосередньо з побудованих епюор.

Першим етапом при розв'язанні задачі є розбиття балки на ділянки. При цьому при переході від попередньої ділянки до наступної повинен з'являтися лише один силовий фактор (за виключенням тих випадків, коли в одній точці, наприклад, на незакріпленому кінці балки, діє декілька силових факторів).

Значення поперечних сил при наявності на ділянці лише зосереджених зовнішніх навантажень визначають з відомих рівнянь статичної рівноваги. У випадку наявності розподіленого навантаження використовують модифіковану формулу (6.1), підставляючи в початковий вираз замість довжини a змінну величину x та визначаючи величину поперечної сили на початку та в кінці ділянки.

Таким же чином модифікують формули (6.2), (6.4) для знаходження згинальних моментів на відповідних ділянках. При цьому для побудови епюри M на ділянці, де діє розподілене навантаження, а отже згідно з формулою (6.4) спостерігається квадратична залежність, також допускається визначати лише два значення згинального моменту – на початку та в кінці ділянки.

Окремо розглядається ситуація, за якої епюора поперечних сил перетинає осьову лінію. Це означає, що на епюрі згинальних моментів буде спостерігатися екстремум (максимум або мінімум) функції M . Для його знаходження визначають координату точки екстремуму та, підставляючи у відповідний вираз, знаходять величину згинального моменту.

Наступним етапом розрахунків є аналіз побудованих епюор з метою вибору найбільшого за абсолютною величиною згинального моменту. Отримане значення підставляють в формулу (6.10) і таким чином визначають необхідну величину осьового моменту опору. Цю величину бажано перевести в см^3 і, використовуючи стандартний ряд (додаток 2), вибрати відповідний профіль двотаврової балки.

6.4. Приклад

Для консолі з геометричними параметрами $a=2,25\text{м}$, $b=1,85\text{м}$, $c=1,45\text{м}$, виготовленої з маловуглецевої сталі ($[\sigma]=185 \text{ МПа}$) і

навантаженої згинальним моментом $M=67\text{кН}\cdot\text{м}$, зосередженою силою $F=75\text{кН}$ та розподіленим навантаженням $q=55\text{кН/м}$ (рис.6.6), побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів і підібрати згідно зі стандартом двотавровий переріз балки.

Розв'язування

1. Розбиваємо балку на ділянки.

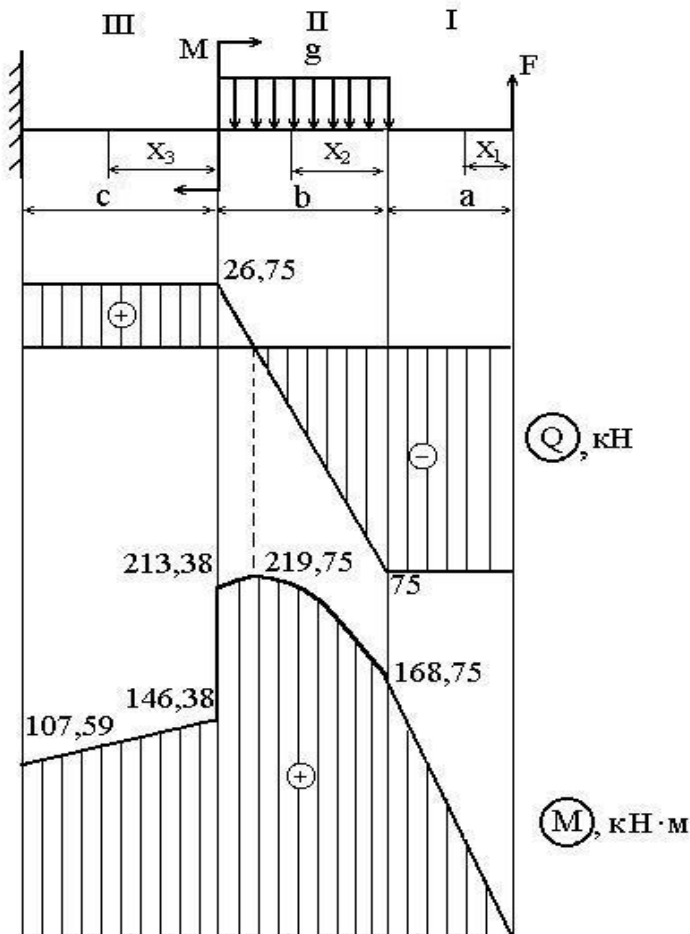


Рис.6.6

2. Знаходимо поперечні сили на кожній ділянці балки:
ділянка I $Q_I = -F_1 = -75\text{кН}$

ділянка II

$$Q_{II} = -F_1 + qx_2$$

при $x_2=0$

$$Q_{II} = -F_1 = -75\kappa H$$

при $x_2=b=1,85\text{м}$

$$Q_{II} = -F_1 + qb = (-75 + 55 \cdot 1,85)\kappa H = 26,75\kappa H$$

ділянка III

$$Q_{III} = -F_1 + qb = (-75 + 55 \cdot 1,85)\kappa H = 26,75\kappa H$$

3. Знаходимо згинальні моменти на кожній ділянці балки:

ділянка I

$$M_I = Fx_1$$

при $x_1=0$

$$M_I = 0$$

при $x_1=a=2,25\text{м}$

$$M_I = F a = 75\kappa H \cdot 2,25\text{м} = 168,75\kappa H \cdot \text{м}$$

ділянка II

$$M_{II} = F(a + x_2) - \frac{qx_2^2}{2}$$

при $x_2=0$

$$M_{II} = F a = 75\kappa H \cdot 2,25\text{м} = 168,75\kappa H \cdot \text{м}$$

при $x_2=b=1,85\text{м}$

$$M_{II} = F(a + b) - \frac{qb^2}{2} = 75\kappa H(2,25 + 1,85)\text{м} - \frac{55 \cdot 1,85^2}{2}\kappa H \cdot \text{м} = 213,38\kappa H \cdot \text{м}$$

З умови подібності трикутників, знаходимо координату екстремуму

$$\frac{75}{x_e} = \frac{26,75}{b - x_e}$$

$$75b - 75x_e = 26,75x_e$$

$$101,75x_e = 75b$$

$$x_e = \frac{75b}{101,75} = \frac{75 \cdot 1,85}{101,75} = 1,36\text{м}$$

Тоді при $x=x_e=1,36\text{м}$

$$M_{II} = F(a + x_e) - \frac{qx_e^2}{2} = 75\kappa H(2,25 + 1,36)\text{м} - \frac{55 \cdot 1,36^2}{2}\kappa H \cdot \text{м} = 219,89\kappa H \cdot \text{м}$$

ділянка III

$$M_{III} = F(a + b + x_3) - qb\left(\frac{b}{2} + x_3\right) - M$$

при $x_3=0$

$$M_{III} = F(a + b) - q\frac{b^2}{2} - M = 75\kappa H(2,25 + 1,85)\text{м} - \frac{55 \cdot 1,85^2}{2}\kappa H \cdot \text{м} -$$

$$-67\kappa H \cdot \text{м} = 146,38\kappa H \cdot \text{м}$$

при $x_3=c=1,45\text{м}$

$$M_{III} = F(a + b + c) - qb\left(\frac{b}{2} + c\right) - M = 75\kappa H(2,25 + 1,85 + 1,45) \cdot m - 55 \cdot 1,85^*$$

$$* \left(\frac{1,85}{2} + 1,45\right) \kappa H \cdot m - 67 \kappa H \cdot m = 107,59 \kappa H \cdot m$$

VII. ПРОЄКТНИЙ РОЗРАХУНОК ДВООПОРНОЇ ДЕРЕВ'ЯНОЇ БАЛКИ

7.1. Короткі теоретичні відомості

В багатьох випадках балки мають ті чи інші опорні пристрої – **опори**. Конструктивні форми опор дуже різноманітні, проте для проведення розрахунків їх схематизують у вигляді *трьох основних типів*:

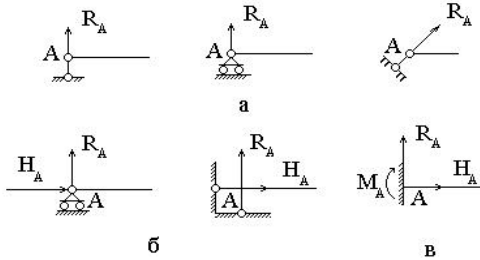


Рис. 7.1.

- *шарнірно рухома опора* (рис. 7.1, а), в якій може виникати лише одна складова реакції – R_A , що направлена вздовж опорного стержня або перпендикулярно до опорної площини;

- *шарнірно нерухома опора* (рис. 7.1, б), в якій можуть виникати дві складові –

вертикальна реакція R_A та горизонтальна реакція H_A ;

- *жорстко затиснена (закріплена) опора* (рис. 7.1, в), в якій можуть виникати три складові – вертикальна реакція R_A , горизонтальна реакція H_A , момент затиснення (опорний момент) M_A .

Балка, що розміщена на двох опорах, називається двоопорною (рис. 7.2), або простою, або однопрольотною, а відстань l між опорами – прольотом.

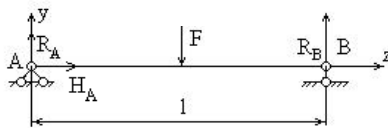


Рис. 7.2.

Відомо, що для простої системи тіл можна скласти три рівняння статки. У випадку двоопорної балки невідомі

реакції знаходять з таких рівнянь рівноваги:

- сума проєкції всіх сил на вісь балки дорівнює нулю

$$\sum F_{z_i} = 0, \quad (7.1)$$

звідки знаходять горизонтальну реакцію H_A .

- сума моментів усіх сил відносно опори A дорівнює нулю

$$\sum M_A = 0, \quad (7.2)$$

звідки знаходять вертикальну реакцію R_B .

- сума моментів усіх сил відносно опори B дорівнює нулю

$$\sum M_B = 0, \quad (7.3)$$

звідки знаходять вертикальну реакцію R_A .

Для контролю, як правило, використовують умову рівності нулю суми проєкції всіх сил на вертикаль

$$\sum F_{y_i} = 0 \quad (7.4)$$

Проте у випадку, коли зовнішні сили паралельні лише вертикальній осі (рис. 7.2), горизонтальних складових реакцій в шарнірно рухомій чи жорстко затисненій опорі не виникає. Тому рівняння (7.1) в цьому випадку скласти неможливо, а кількість рівнянь статyki для такої плоскої системи сил буде дорівнювати двом. Крім того, при складанні рівнянь (7.2), (7.3) користуються правилом знаків з теоретичної механіки, за якого момент вважається додатним, якщо він обертає балку відносно опори проти годинникової стрілки, і від'ємним – якщо обертає за годинниковою стрілкою. При цьому дію опор замінюють відповідними реакціями.

Величину нормального напруження в довільній точці поперечного перерізу можна визначити за формулою

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y, \quad (7.5)$$

де I_z – осьовий момент інерції, y – відстань волокна від нейтральної лінії, M – згинальний момент.

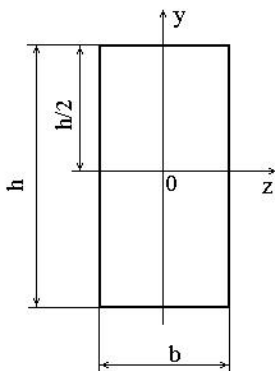


Рис. 7.3.

Це означає, що величина нормального напруження пропорційно зростає в міру віддалення від нейтральної лінії й набуває свого максимального значення у найбільш віддалених від нейтральної лінії волокнах. Наприклад, для прямокутного поперечного перерізу (рис. 7.3) максимальне напруження σ буде спостерігатись при $h/2$, де h – висота перерізу й обчислюватись за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} \cdot \frac{h}{2} \quad (7.6)$$

Величину

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{2I_z}{h} \quad (7.7)$$

називають **осьовим моментом опору**.

Для прямокутного поперечного перерізу

$$W_z = \frac{bh^2}{6}, \quad (7.8)$$

де b – ширина перерізу.

Тоді умова міцності балки при згинанні записується у такому вигляді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad (7.9)$$

де $[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження при згинанні.

Проектний розрахунок в цьому випадку зводиться до визначення W за формулою

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \quad (7.10)$$

Знаючи співвідношення між h і b за формулою (7.8) можна знайти геометричні характеристики прямокутного поперечного перерізу.

7.2. Завдання №7

Для двоопорної дерев'яної балки (рис. 7.4), навантаженої згинальним моментом M , зосередженою силою F та розподіленим навантаженням q , побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів і підібрати прямокутний переріз балки, якщо відомо відношення висоти h до ширини b .

Дані для розрахунків взяті з таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

№ п/п	M , кН·м	F , кН	q , кН/м	$[\sigma]$, МПа	a , м	b , м	c , м	h/b
1	3,5	3,5	0,9	40	2,7	0,3	1,0	1,1
2	4,0	3,3	1,0	45	2,6	0,4	1,1	1,3
3	4,5	3,0	1,1	50	2,5	0,5	1,2	1,5
4	5,0	2,8	1,2	55	2,4	0,6	1,3	1,7
5	5,5	2,6	1,3	60	2,3	0,7	1,4	2,0
6	6,0	2,4	1,4	65	2,2	0,8	1,5	2,2
7	6,5	2,2	1,5	70	2,1	0,9	1,6	2,5
8	7,0	2,1	1,6	80	2,0	1,0	1,7	3,0

Продовження таблиці 7.1

9	7,5	2,0	1,5	70	1,9	1,1	1,6	2,5
10	8,0	1,9	1,4	65	1,8	1,2	1,5	2,2
11	8,5	1,8	1,3	60	1,7	1,3	1,4	2,0
12	9,0	1,7	1,2	55	1,6	1,4	1,3	1,7
13	9,5	1,6	1,1	50	1,5	1,6	1,2	1,5
14	10,0	1,5	1,0	45	1,4	1,7	1,1	1,3
15	11,0	1,4	0,9	40	1,3	1,8	1,0	1,1

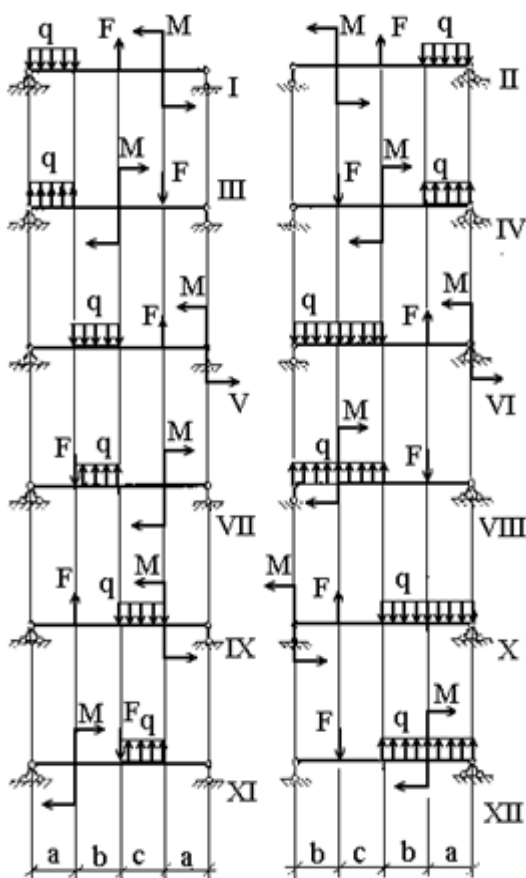


Рис. 7.4.

7.3. Методичні рекомендації

Розрахунок на згинання двоопорних балок розпочинають із визначення опорних реакцій. При цьому слід врахувати, що в окремих випадках, зокрема при дії всіх зовнішніх сил чи розподілених навантажень паралельно одній з координатних осей, кількість реакцій в шарнірно нерухомій опорі буде зменшена до одиниці.

В більшості випадків для визначення опорних реакцій користуються формулами (7.2), (7.3), а формулу (7.4) використовують як перевірку. Напрямок невідомих опорних реакцій вибирають довільно, а у випадку отримання від'ємного значення цей напрямок змінюють на протилежний.

Особливу увагу слід звернути на те, що при складанні рівнянь рівноваги для моментів використовують правило знаків теоретичної механіки: момент вважається додатним, якщо він обертає балку відносно опори проти годинникової стрілки, і від'ємним – якщо обертає за годинниковою стрілкою.

Розбиття балки на ділянки здійснюють з урахуванням рекомендацій п. 6.3. Поперечні сили й згинальні моменти визначаються відповідно за формулами (6.1) та (6.2), (6.4). Епюри будують з урахуванням правила знаків для Q і M (рис. 6.2, 6.3). При цьому напрямок побудови епюр може бути довільний: зліва направо, справа наліво чи комбінований, коли частина епюри будується в одному, а інша частина – в протилежному напрямку. Якщо епюра Q перетнула осьову лінію, то слід дотримуватись алгоритму, описаному в п. 6.3.

Наступним етапом розрахунків є вибір найбільшого за абсолютною величиною значення згинального моменту і визначення за допомогою формули (7.10) осьового моменту опору. Оскільки за умовами задачі співвідношення між висотою і шириною прямокутного поперечного перерізу відоме, то за формулою (7.8) визначаємо конкретні значення h і b , які потім округлюють до стандартних величин (додаток 1).

7.4. Приклад

Для двоопорної дерев'яної балки з геометричними параметрами $a=2,05\text{м}$, $b=1,15\text{м}$, $c=2,75\text{м}$ (рис. 7.5), навантаженої згинальним моментом $M=7,25\text{кН}\cdot\text{м}$, зосередженою силою $F=2,5\text{кН}$ та розподіленим навантаженням $q=1,25\text{кН}/\text{м}$, побудувати епюри поперечних сил, згинальних моментів і підібрати прямокутний переріз

балки, якщо відомо відношення висоти до ширини перерізу ($h/b=2,25$) та значення допустимого нормального напруження $[\sigma]=65$ МПа

Розв'язування.

1. Розбиваємо балку на ділянки.

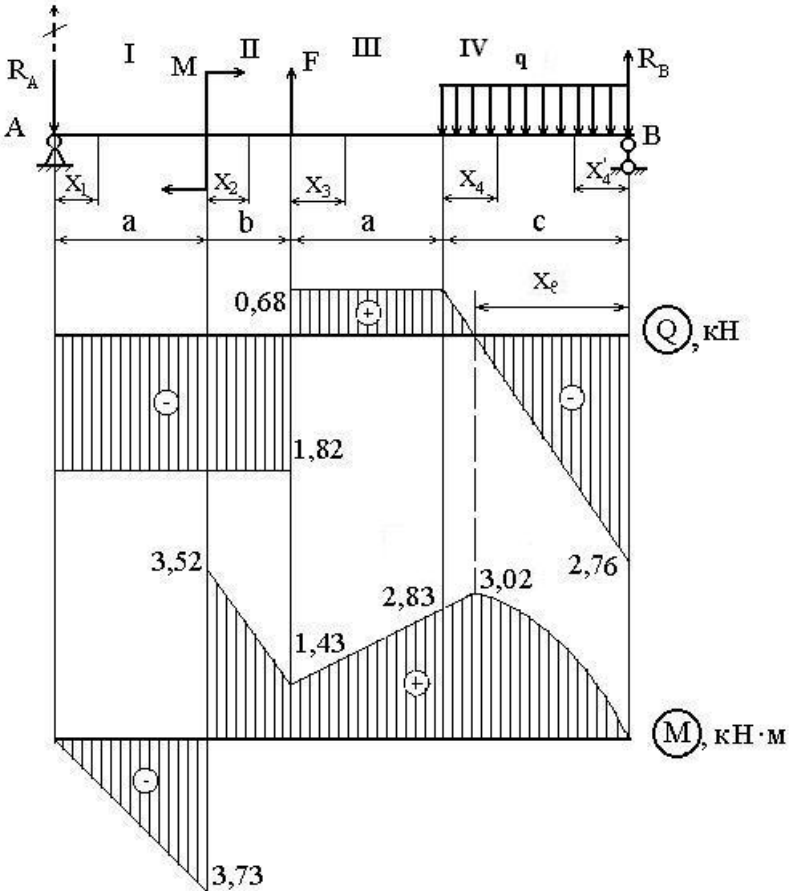


Рис.7.5.

2. Визначаємо опорні реакції

$$\sum M_A = 0$$

$$-M + F(a+b) - qc\left(2a+b+\frac{c}{2}\right) + R_B(2a+b+c) = 0$$

$$R_B = \frac{M + qc(2a + b + \frac{c}{2}) - F(a + b)}{2a + b + c}$$

$$R_B = \frac{7,25 + 1,25 \cdot 2,75(2 \cdot 2,05 + 1,15 + \frac{2,75}{2}) - 2,5(2,05 + 1,15)}{2 \cdot 2,05 + 1,15 + 2,75} = 2,75 \text{кН}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\frac{qc^2}{2} - F(a + c) - M - R_A(2a + b + c) = 0$$

$$R_A = \frac{\frac{qc^2}{2} - F(a + c) - M}{2a + b + c}$$

$$R_A = \frac{1,25 \cdot 2,75^2}{2} - 2,5(2,05 + 2,75) - 7,25}{2 \cdot 2,05 + 1,15 + 2,75} = -1,82 \text{кН}$$

Оскільки отримано від'ємне значення, напрямок реакції R_A змінюємо на протилежний, вважаючи, що $R_A = 1,82$ кН.

Перевірка

$$\sum F_{y_i} = 0$$

$$-R_A + F - qc + R_B = 0$$

$$-1,82 \text{кН} + 2,5 \text{кН} - 1,25 \cdot 2,75 \text{кН} + 2,75 \text{кН} = -0,0075 \text{кН} \approx 0$$

3. Визначаємо поперечні сили на кожній ділянці балки:

ділянка I $Q_I = -R_A = -1,82 \text{кН}$

ділянка II $Q_{II} = -R_A = -1,82 \text{кН}$

ділянка III $Q_{III} = -R_A + F = -1,82 \text{кН} + 2,5 \text{кН} = 0,68 \text{кН}$

ділянка IV $Q_{IV} = -R_A + F - qx_4$

при $x_4 = 0$ $Q_{IV} = -R_A + F = -1,82 \text{кН} + 2,5 \text{кН} = 0,68 \text{кН}$

при $x_4 = c = 2,75 \text{м}$

$$Q_{IV} = -R_A + F - qc = -1,82 \text{кН} + 2,5 \text{кН} - 1,25 \cdot 2,75 \text{кН} = -2,76 \text{кН}$$

4. Визначаємо згинальні моменти на кожній ділянці балки:

ділянка I $M_I = -R_A x_1$

при $x_1 = 0$ $M_I = 0$

при $x_1 = a = 2,05 \text{м}$ $M_I = -R_A a = -1,82 \cdot 2,05 \text{кН} \cdot \text{м} = -3,73 \text{кН} \cdot \text{м}$

ділянка II $M_{II} = -R_A(a + x_2) + M$

при $x_2 = 0$ $M_{II} = -R_A a + M = -1,82 \cdot 2,05 + 7,25 = 3,52 \text{кН} \cdot \text{м}$

при $x_2 = b = 1,15 \text{м}$ $M_{II} = -R_A(a + b) + M$

$$M_{II} = -1,82 \cdot (2,05 + 1,15) + 7,25 = 1,43 \text{кН} \cdot \text{м}$$

ділянка III

$$M_{III} = -R_A(a + b + x_3) + Fx_3 + M$$

$$\begin{aligned} \text{при } x_3=0 \quad M_{III} &= -R_A(a+b) + M \\ M_{III} &= -1,82(2,05+1,15) + 7,25 = 1,43 \text{кН} \cdot \text{м} \\ \text{при } x_3=a=2,05\text{м} \quad M_{III} &= -R_A(2a+b) + Fa + M \end{aligned}$$

$$M_{III} = -1,82(2 \cdot 2,05 + 1,15) + 2,5 \cdot 2,05 + 7,25 = 2,83 \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$\text{ділянка IV (справа)} \quad M_{IV} = R_B x_4' - \frac{q(x_4')^2}{2}$$

$$\text{при } x_4'=0 \quad M_{IV} = 0$$

$$\text{при } x_4'=c=2,75\text{м} \quad M_{IV} = R_B c - \frac{qc^2}{2}$$

$$M_{IV} = 2,75 \cdot 2,75 - \frac{1,25 \cdot 2,75^2}{2} \approx 2,83 \text{кН} \cdot \text{м}$$

З умови подібності трикутників, знаходимо координату екстремуму

$$\frac{2,76}{x_e} = \frac{0,68}{c - x_e}$$

$$2,76c - 2,76x_e = 0,68x_e$$

$$3,44x_e = 2,76c$$

$$x_e = \frac{2,76c}{3,44} = \frac{2,76 \cdot 2,75}{3,44} = 2,21\text{м}$$

$$\text{при } x_4'=x_e=2,21\text{м} \quad M_{IV} = R_B x_e - \frac{qx_e^2}{2}$$

$$M_{IV} = 2,75 \cdot 2,21 - \frac{1,25 \cdot 2,21^2}{2} = 3,02 \text{кН} \cdot \text{м}$$

5. Вибираємо найбільше за абсолютною величиною значення згинального моменту

$$M_{\max} = M_I = 3,73 \text{кН} \cdot \text{м}$$

6. Визначаємо осьовий момент опору

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

$$W_x \geq \frac{3,73 \cdot 10^3 \text{Н} \cdot \text{м}}{65 \cdot 10^6 \text{Па}} = 5,738 \cdot 10^{-5} \text{м}^3 = 57,38 \text{см}^3$$

7. Знаючи відношення $h/b=2,25$, визначаємо ширину перерізу:

$$h/b = 2,25$$

$$\text{отже} \quad h = 2,25b$$

Тоді

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2,25b)^2}{6} = \frac{5,06b^3}{6} = 0,84b^3$$

Звідки

$$b = \sqrt[3]{\frac{W}{0,84}} = \sqrt[3]{\frac{57,38}{0,84}} = 4,09 \text{ см}$$

8. Визначаємо висоту перерізу

$$h = 2,25b = 2,25 \cdot 4,09 = 9,21 \text{ см}$$

9. Округлюючи значення h і b до стандартних величин (додаток 1) отримаємо прямокутний поперечний переріз розміром

$$h \times b = 9,5 \text{ см} \times 4,2 \text{ см}$$

10. Вибираємо найбільше за абсолютною величиною значення згинального моменту

$$M_{\max} = M_{\Pi_e} = 219,89 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

11. Визначаємо осьовий момент опору

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

$$W_x \geq \frac{219,89 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{185 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 1,18859 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1188,59 \text{ см}^3$$

12. Згідно із стандартом вибираємо двотаврову балку N45, яка має момент опору $W=1231 \text{ см}^3$.

VIII. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ

8.1. Короткі теоретичні відомості

Під *стійкістю* розуміють здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги. Пружна рівновага буде стійкою, якщо деформоване тіло при будь-якому малому відхиленні від стану рівноваги намагається повернутися до початкового стану й повертається до нього після припинення зовнішнього впливу, який порушив початковий стан рівноваги.

Пружна рівновага буде нестійкою, якщо деформоване тіло, виведене з неї будь-якою зовнішньою дією, продовжує деформуватися в напрямі наданого йому відхилення й після припинення зовнішньої дії у вихідний стан не повертається.

Між цими двома станами рівноваги існує перехідний стан, який називається *критичним*. При цьому деформоване тіло перебуває у байдужій рівновазі: воно може зберігати вихідну форму, але й може втратити її внаслідок самого незначного впливу.

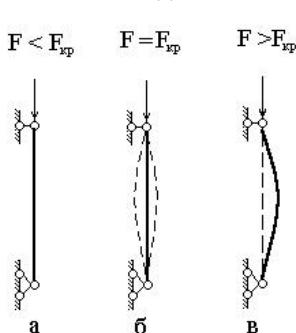


Рис. 8.1.

Тому, якщо сили, що стискають стержень, відносно невеликі, вихідна форма рівноваги залишається стійкою (рис. 8.1, а). При зростанні величини прикладених сил досягається стан байдужої рівноваги, при якому поряд з прямолінійною формою стержня можливі суміжні з нею дещо викривлені форми рівноваги (рис. 8.1, б). При подальшому самому незначному збільшенні навантаження характер деформації

різко змінюється, а рівновага перестає бути стійкою (рис. 8.1, в).

Навантаження, перевищення якого викликає втрату стійкості вихідної форми тіла, називається *критичним*. Величину критичної сили стисненого стержня можна визначити за допомогою формули Ейлера

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}, \quad (8.1)$$

де E – модуль пружності першого роду (модуль Юнга), I_{\min} – мінімальний осьовий момент інерції, l – довжина стержня (рис. 8.2).

Проте виявляється, що на значення критичної сили суттєво впливають умови закріплення кінців стержня. Це знайшло своє

чисельне відображення у коефіцієнті зведення довжини μ (рис. 8.3).



Рис. 8.2.

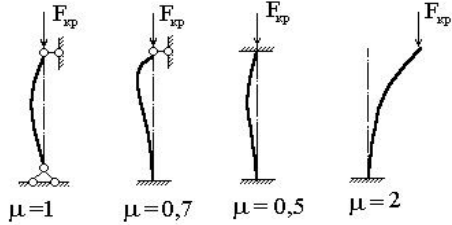


Рис. 8.3.

В цьому випадку реальне значення критичної сили знаходиться за формулою

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (8.2)$$

де добуток

$$l_{зе} = \mu l \quad (8.3)$$

називають зведеною довжиною стержня.

Критичне напруження, що виникає в поперечному перерізі під дією критичної сили, можна знайти з такого виразу

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A}, \quad (8.4)$$

де A – площа поперечного перерізу стержня.

Враховуючи, що найменший радіус інерції визначається за формулою

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \quad (8.5)$$

та увівши безрозмірну величину λ

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (8.6)$$

яка називається **гнуцкістю стержня**, остаточно знайдемо

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (8.7)$$

Умовою стійкості є вираз

$$\sigma_{кр} = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{ст}], \quad (8.8)$$

де $[\sigma_{ст}]$ – допустиме нормальне напруження на стійкість.

Оскільки допустиме нормальне напруження на стійкість та допустиме нормальне напруження стискання взаємопов'язані

$$[\sigma_{cm}] = \varphi[\sigma_-], \quad (8.9)$$

де $[\sigma_-]$ – допустиме нормальне напруження на стискання, φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість, який визначається залежно від матеріалу і гнучкості стержня λ (додаток 3), умову стійкості можна записати в такому вигляді

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma_-] \quad (8.10)$$

Для реалізації проектного розрахунку необхідно визначити площу поперечного перерізу

$$A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma_-]} \quad (8.11)$$

Проектний розрахунок ускладнюється тим, що до формули (8.11) входять взаємозалежні величини: площа поперечного перерізу A та коефіцієнт φ , який залежить від гнучкості стержня λ , а отже, виходячи з аналізу формул (8.6), (8.5), і від площі поперечного перерізу A . Тому при доборі перерізів користуються методом послідовних наближень, варіюючи значення коефіцієнта φ .

При цьому у проектних розрахунках приймають усереднене значення φ_2 , яке визначається за формулою

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}, \quad (8.12)$$

де φ_1 – довільно вибране при першій спробі значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість, яке, як правило, лежить в межах $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,6$, φ_1' – визначене залежно від отриманої площі поперечного перерізу фактичне значення коефіцієнта.

Кількість спроб, як правило 3-4, повторюють до тих пір, поки не буде виконуватись умова стійкості (8.10), або у випадку перенапруження – поки різниця між дійсним нормальним напруженням (σ_∂) і допустимим нормальним напруженням не буде перевищувати наперед визначеної величини. В більшості випадків як граничне значення похибки Δ приймають величину 5%.

$$\Delta = \frac{|\sigma_\partial - [\sigma_-]|}{[\sigma_-]} \cdot 100\% \leq 5\% \quad (8.13)$$

8.2. Завдання №8

Для стержня довжиною l (рис. 8.4), що зазнає дію центрального стискального навантаження F , підібрати за сортаментом двотавровий поперечний переріз.

Дані для розрахунків взяти з таблиці 8.1.

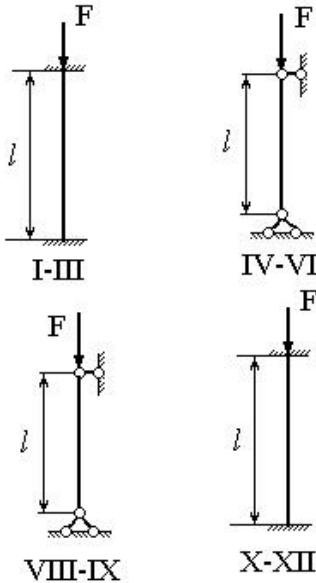


Рис. 8.4.

Таблиця 8.1.

№ п/п	l , м	F , кН	$[\sigma_{-1}]$, МПа
1	1,5	800	120
2	2,0	750	130
3	2,5	700	135
4	3,0	650	140
5	3,5	600	145
6	4,0	550	150
7	4,5	500	155
8	5,0	450	160
9	5,5	400	155
10	6,0	350	150
11	6,5	300	145
12	7,0	250	140
13	7,5	200	135
14	8,0	150	130
15	9,0	100	120

8.3. Методичні рекомендації

Проектний розрахунок на стійкість проводиться за методом послідовних наближень, варіюючи значенням коефіцієнта φ . При першій спробі коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість беруть в межах $\varphi_1=0,5\dots0,6$ (як правило, приймають $\varphi_1=0,5$). Потім за формулою (8.11) знаходять необхідну площу поперечного перерізу.

Наступним етапом розрахунку є вибір за сортаментом відповідного профілю, в нашому випадку – двотаврової балки (за

додатком 2). Для вибраної балки необхідно визначити площу поперечного перерізу та мінімальний радіус інерції.

В залежності від умов закріплення (рис. 8.3) приймаємо відповідне значення коефіцієнта зведення довжини μ та за формулою (8.6) визначаємо гнучкість стержня λ . Завершенням першої спроби є знаходження за додатком 3 реального значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість φ_1' , при необхідності – з використанням лінійної інтерполяції.

В більшості випадків після першого наближення фактичне значення φ_1' значно відрізняється від φ_1 . Це означає, що й реальне напруження суттєво відрізняється від допустимого. Тому розрахунок слід повторити за тим же алгоритмом (здійснити другу спробу), визначивши за формулою (8.12) середнє за модулем значення між φ_1 і φ_1' . Після цього здійснюють третю, а при необхідності – і четверту спробу.

Розрахунок завершують визначенням реального нормального напруження і перевіркою умови стійкості за формулою (8.10). Якщо ця умова не виконується, величина перенапруження, визначена за формулою (8.13), не повинна перевищувати рекомендованої величини, як правило 5 %.

8.4. Приклад

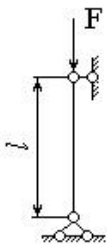


Рис.8.5.

Для стержня (рис. 8.5) довжиною $l=4,75\text{м}$, виготовленого зі сталі Ст2 $[\sigma]=142\text{МПа}$, що зазнає дії центрального стискального навантаження $F=375\text{кН}$, підібрати за сортаментом двотавровий поперечний переріз.

Розв'язування

1. Перше наближення.

1.1. Приймаємо значення коефіцієнта

$$\varphi_1 = 0,5.$$

1.2. Визначаємо необхідну площу поперечного перерізу

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma_{-1}]} = \frac{375000\text{Н}}{0,5 \cdot 142 \cdot 10^6 \text{Па}} = 5,282 \cdot 10^{-3} \text{м}^2 = 52,82 \text{см}^2$$

1.3. За сортаментом вибираємо двотаврову балку №33 з площею $A=53,8 \text{см}^2$ і мінімальним радіусом інерції $i_{\min}=2,79 \text{см}$.

Враховуючи умови закріплення ($\mu=1$), визначаємо гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 475 \text{ см}}{2,79 \text{ см}} = 170,25$$

1.4. Використовуючи лінійну інтерполяцію за додатком 3 визначаємо фактичне значення φ_1'

$$\varphi_1' = 0,26 - \frac{0,26 - 0,23}{10} \cdot 0,25 = 0,25925 \approx 0,26$$

2. Друге наближення

2.1. Визначаємо середнє значення коефіцієнта φ_2

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,26}{2} = 0,38$$

2.2. Визначаємо необхідну площу поперечного перерізу

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma_-]} = \frac{375000 \text{ Н}}{0,38 \cdot 142 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 6,95 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 69,50 \text{ см}^2$$

2.3. За сортаментом вибираємо двотаврову балку №40 з площею $A=72,6 \text{ см}^2$ і мінімальним радіусом інерції $i_{\min}=3,03 \text{ см}$.

2.4. Визначаємо гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 475 \text{ см}}{3,03 \text{ см}} = 156,77$$

2.5. Використовуючи лінійну інтерполяцію за додатком 3 визначаємо фактичне значення φ_2'

$$\varphi_2' = 0,32 - \frac{0,32 - 0,29}{10} \cdot 6,77 = 0,2997 \approx 0,30$$

3. Третє наближення.

3.1. Визначаємо середнє значення коефіцієнта φ_3

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,38 + 0,3}{2} = 0,34$$

3.2. Визначаємо необхідну площу поперечного перерізу

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma_-]} = \frac{375000 \text{ Н}}{0,34 \cdot 142 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 7,767 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 77,67 \text{ см}^2$$

3.3. За сортаментом вибираємо двотаврову балку №45 з площею $A=84,7 \text{ см}^2$ і мінімальним радіусом інерції $i_{\min}=3,09 \text{ см}$.

3.4. Визначаємо гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 475 \text{ см}}{3,09 \text{ см}} = 153,72$$

3.5. Використовуючи лінійну інтерполяцію за додатком 3 визначаємо фактичне значення φ_4

$$\varphi_4 = \varphi = 0,32 - \frac{0,32 - 0,29}{10} \cdot 3,72 = 0,3088 \approx 0,31$$

4. Обчислюємо напруження

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{375000H}{0,31 \cdot 84,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 142,82 \cdot 10^6 \text{ Па} = 142,82 \text{ МПа}$$

Умова стійкості $\sigma \leq [\sigma_-]$ не виконується.

5. Перенапруження становить

$$\Delta = \frac{|\sigma - [\sigma_-]|}{[\sigma_-]} \cdot 100\% = \frac{142,82 - 142}{142} \cdot 100\% = 0,58\% < 5\%$$

6. Остаточо вибираємо для стержня двотаврову балку №45.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гурняк Л. І., Гуцуляк Ю. В., Юзьків Т. Б. Опір матеріалів: посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. Львів: «Новий світ – 2000», 2019. 363 с.
2. Опір матеріалів : навчальний посібник : у 2 ч. / Жигілій Д. О., Верещака С. М., Некрасов С. С., Довгополов Ю. А. Суми : Сумський державний університет, 2022. Ч. І. 159 с.
3. Опір матеріалів : навчальний посібник до виконання розрахунково-графічних робіт і самостійної роботи / Довбуш Т. А., Хомик Н. І., Бабій А. В., Цьонь Г. Б., Довбуш А. Д. Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2022. 220 с.
4. Опір матеріалів : навчально-методичний посібник для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заочної та дистанційної форм навчання / Сліпченко М. В, Алфьоров О. І., Савченко В. Б., Свіргун О. А. Харків, 2023. 153 с.
5. Опір матеріалів : підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка. 2-ге вид., допов. і переробл. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.

ДОДАТКИ

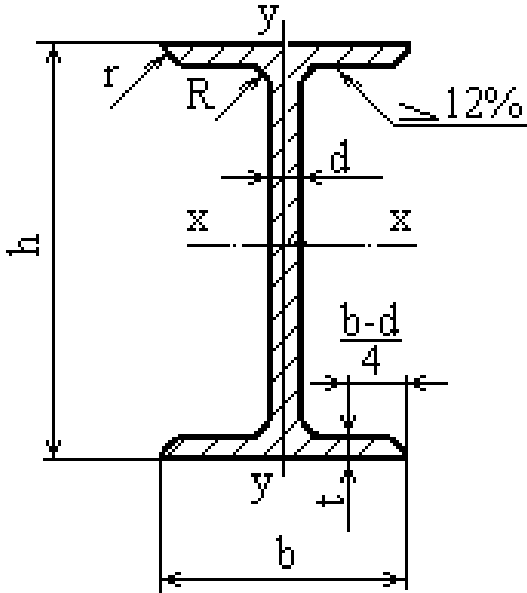
Додаток 1.

Нормальні лінійні розміри

3,2	5,6	10	18	32	56	100	180	320	560
3,4	6,0	10,5	19	34	60	105	190	340	600
3,6	6,3	11	20	36	63	110	200	360	630
3,8	6,7	11,5	21	38	67	120	210	380	670
4,0	7,1	12	22	40	71	125	220	400	710
4,2	7,5	13	24	42	75	130	240	420	750
4,5	8,0	14	25	45	80	140	250	450	800
4,8	8,5	15	26	48	85	150	260	480	850
5,0	9,0	16	28	50	90	160	280	500	900
5,3	9,5	17	30	53	95	170	300	530	950

Додаток 2

Балки двотаврові



Позначення:

- H – висота балки;
- B - ширина полиці;
- d - товщина стінки;
- t - середня товщина полиці;
- J - момент інерції;
- W - момент опору;
- I - радіус інерції.

Номер профілю	Розміри, мм				Площа пере-різу А, см ²
	a	b	d	t	
10	100	55	4,5	7,2	12,0
12	120	64	4,8	7,3	14,7
14	140	73	4,9	7,5	17,4
16	160	81	5,0	7,8	20,2
18	180	90	5,1	8,1	23,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4
20	200	100	5,2	8,4	26,8
20a	200	110	5,2	8,6	28,9
22	220	110	5,4	8,7	30,6
22a	220	120	5,4	8,9	32,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8
24a	240	125	5,6	9,8	37,5
27	270	125	6,0	9,8	40,2
27a	270	135	6,0	10,2	43,2
30	300	135	6,5	10,2	46,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9
33	330	140	7,0	11,2	53,8
36	360	145	7,5	12,3	61,9
40	400	155	8,3	13,0	72,6
45	450	160	9	14,2	84,7
50	500	170	10	15,2	100
55	550	180	11	16,5	118

Номер профілю	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Маса т, кг
10	198	39,7	4,06	17,9	6,49	1,22	9,46
12	350	58,4	4,88	27,9	8,72	1,38	11,5
14	572	81,7	5,73	41,9	11,5	1,55	13,7
16	873	109	6,57	58,6	14,5	1,70	15,9
18	1290	143	7,42	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	1430	159	7,51	114	22,8	2,12	19,9
20	1840	184	8,28	115	23,1	2,07	21,0
20a	2030	203	8,37	155	28,2	2,32	22,7
22	2550	232	9,13	157	28,6	2,27	24,0
22a	2790	254	9,22	206	34,3	2,50	25,8
24	3460	289	9,97	198	34,5	2,37	27,3
24a	3800	317	10,1	260	41,6	2,63	29,4
27	5010	371	11,2	260	41,5	2,54	31,5
27a	5500	407	11,3	337	50,0	2,80	33,9
30	7080	472	12,3	337	49,9	2,69	36,5
30a	7780	518	12,5	436	60,1	2,95	39,2
33	9840	597	13,5	419	59,9	2,79	42,2
36	13380	743	14,7	516	71,1	2,89	48,6
40	19062	953	16,2	667	86,1	3,03	57,0
45	27696	1231	18,1	808	101	3,09	66,5
50	39727	1589	19,9	1043	123	3,23	78,5
55	55962	2035	21,8	1356	151	3,39	92,6

Додаток 3.

Значення коефіцієнта φ

Гнуч- кість λ	Коефіцієнт φ			Гнуч- кість λ	Коефіцієнт φ		
	Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун		Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун
0	1,00	1	1				
10	0,99	0,98	0,97	110	0,52	0,43	-
20	0,96	0,95	0,91	120	0,45	0,36	-
30	0,94	0,92	0,81	130	0,40	0,33	-
40	0,92	0,89	0,69	140	0,36	0,29	-
50	0,89	0,86	0,57	150	0,32	0,26	-
60	0,86	0,82	0,44	160	0,29	0,24	-
70	0,81	0,76	0,34	170	0,26	0,21	-
80	0,75	0,70	0,26	180	0,23	0,19	-
90	0,69	0,62	0,20	190	0,21	0,17	-
100	0,60	0,51	0,16	200	0,19	0,16	-

ЗМІСТ

Передмова.....	3
1. Побудова епюр поздовжніх сил, нормальних напружень, відносних деформацій і переміщень для східчастого стержня круглого поперечного перерізу.....	5
2. Визначення зусиль і напружень в статично невизначуваних системах.....	14
3. Визначення геометричних характеристик складних плоских перерізів.....	20
4. Розрахунок заклепкових з'єднань на зріз і зминання.....	31
5. Проектний розрахунок суцільного і порожнистого валів при крученні.....	36
6. Підбір двотаврового перерізу консолі, виготовленої з маловуглецевої сталі.....	47
7. Проектний розрахунок двохопornoї дерев'яної балки.....	56
8. Розрахунок стержнів на стійкість.....	65
Список літератури.....	72
Додатки.....	73

Навчальне видання

Подолянчук Станіслав Вікторович

Опір матеріалів.

Розрахунково-графічні роботи

Навчальний посібник

**Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського**