

**ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО**

**ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ І ТЕХНОЛОГІЙ**

**Кафедра алгебри і методики навчання математики**

**ДИПЛОМНА РОБОТА**

**на тему: «Технології конструювання та дослідження сингулярних  
функцій»**

**Студентки ступеня вищої освіти бакалавр,  
групи 4-БМ, напряму підготовки 6.040201 Математика\*  
Тіманової Алли Володимирівни**

**Науковий керівник:  
доцент кафедри математики і методики навчання  
математики, кандидат фізико-математичних наук  
Панасенко О.Б.**

Національна шкала \_\_\_\_\_

Кількість балів: \_\_\_\_\_ Оцінка: ECTS \_\_\_\_\_

Голова комісії \_\_\_\_\_  
(підпис) (ініціали, прізвище)

Члени комісії \_\_\_\_\_  
(підпис) (ініціали, прізвище)

\_\_\_\_\_ (підпис) (ініціали, прізвище )

\_\_\_\_\_ (підпис) (ініціали, прізвище )

\_\_\_\_\_ (підпис) (ініціали, прізвище )

Вінниця – 2017

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
РОЗДІЛ 1. КЛАСИЧНІ ПРИКЛАДИ СИНГУЛЯРНИХ ФУНКЦІЙ .....	6
1.1. Функція Салема .....	6
1.2. Функція Мінковського.....	9
1.3. Функція Кантора.....	14
1.4. Класифікації сингулярних функцій розподілу.....	33
РОЗДІЛ 2. КОНСТРУЮВАННЯ СИНГУЛЯРНИХ ФУНКЦІЙ І ДОСЛІДЖЕННЯ ЇХНІХ ВЛАСТИВОСТЕЙ .....	36
2.1. Шляхи узагальнень функцій Салема, Кантора, Мінковського.....	36
2.2. Модуль неперервності сингулярних функцій. ....	42
2.2.1. Модуль неперервності функції.....	42
2.2.2. Сингулярні функції з наперед заданим модулем неперервності. ..	48
2.3. Сингулярні функції, означені в термінах частоти вживання трійкових цифр аргументу. ....	53
ВИСНОВКИ.....	59
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	60

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Неперервні функції були і залишаються важливим об'єктом вивчення у математиці. Але у множині неперервних функцій дійсної змінної існують масивні класи функцій, графіки яких володіють складною локальною поведінкою. До таких функцій відносять, зокрема, ніде не монотонні, ніде не диференційовні, сингулярні функції. Перші приклади таких функцій були яскравими контрприкладми аналізу [11]. В останні три десятиліття різко зріс інтерес до їх вивчення, оскільки, з одного боку, з'явився новий інструментарій для вивчення їхніх властивостей (дробові міри, фрактальні розмірності тощо), а з іншого – окреслилась чітка сфера їхніх застосувань після публікації знаменитої монографії Бенуа Мандельброта «Фрактальна геометрія природи» [19].

В поле зору дипломної роботи потрапляють сингулярні функції – це неперервні функції дійсної змінної, які відмінні від константи, але похідна яких дорівнює нулю майже скрізь. Функція Кантора – найперший і найвідоміший приклад такої функції. Сьогодні відомі цілі класи сингулярних функцій, серед яких є і немонотонні, проте в дипломній роботі розглядатимуться лише монотонні сингулярні функції.

Математичний апарат для вивчення властивостей сингулярних функцій досі формується і є нерозвиненим. Тривають пошуки нових інструментів, які могли б бути корисними для зручного означення таких функцій та аналізу їхніх властивостей. Сингулярні функції зараз є об'єктом дослідження в галузі теорії ймовірностей. Не в останню чергу це пов'язано з тим, що в множині всіх функцій розподілу сингулярні функції займають з топологічної точки зору «перше» місце: множина сингулярних функцій в цьому просторі є множиною другої категорії Бера [26] (теорема Замфіреску). Сьогодні науковці переконані, що нехтувати мікроструктурами реальних об'єктів, процесів і явищ – це, по меншій мірі, спотворювати істинну природу речей. А серйозно

їх враховувати в математичних моделях якраз і допомагають фрактали, сингулярні функції, недиференційовні функції, тощо. Названі об'єкти сьогодні об'єднують спільні проблеми, основною з яких є недостатній розвиток ефективних способів їх задання та вивчення [26].

Таким чином, **об'єктом** дослідження в дипломній роботі є неперервні функції дійсної змінної зі складною локальною поведінкою, а **предметом** дослідження – сингулярні функції.

**Мета дослідження дипломної роботи** – вивчити властивості класичних сингулярних функцій та описати сучасні технології конструювання нових прикладів таких функцій.

**Завданнями** дипломної роботи є:

- описати класичні приклади сингулярних функцій: функції Кантора, Салема, Мінковського;
- вивчити шляхи узагальнень функцій Кантора, Салема, Мінковського;
- розглянути шляхи конструювання сингулярних функцій з наперед заданими властивостями;
- побудувати нові приклади сингулярних функцій та вивчити їхні властивості.

**Методи дослідження.** Розділи сформовані на основі аналізу літератури з історії математики, математичного аналізу, а також математичної наукової літератури. Для обґрунтування основних результатів другого розділу використовуються методи математичного аналізу, аналізу функцій дійсної змінної. Отримані при розв'язанні вказаних завдань результати знайдуть своє застосування в теорії функцій дійсної змінної та теорії ймовірностей.

**Апробація результатів дипломної роботи.** Основні результати дипломної роботи доповідались на Всеукраїнській науково-практичній конференції «Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності», яка проходила 18–19 травня 2017 року у Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського.

**Структура дипломної роботи.** Дипломна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел. Перший розділ присвячений означенню та опису різних видів сингулярних функцій. Він сформований на основі аналізу сучасної наукової літератури з математичного аналізу, зокрема, присвяченої фрактальним множинам та функціям. В другому розділі розглядаються різні шляхи узагальнень сингулярних функцій та на основі нового підходу до визначення таких функцій знайдено нові приклади сингулярних функцій.

**Публікації.** Нові наукові результати за результатами дипломного дослідження відображено у статті:

- Тіманова А.В. Сингулярні функції, означені в термінах частоти вживання трійкових цифр аргументу / Панасенко О.Б., Тіманова А.В. // Матеріали науково-практичної конференції «Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності» (18–19 травня 2017 року) . – Вінниця, 2017. – С. ???.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Dobos J. The standard Cantor function is subadditive / J. Dobos // Proc. Amer. Math. Soc. – 124 (N11). – 1996. – P. 3425–3426.
2. Dovgoshey O. The Cantor function / O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, M. Vuorinen // Expo. Math. – 2006, V. 24. – P. 1–37.
3. Edgar G. Measure, topology and fractal geometry / G. Edgar. – 2<sup>nd</sup> edition. New York, NY : Springer, 2008. – xv+268 p.
4. Falconer K. J. Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications / K. J. Falconer. – 2nd adition. Chichester : Wiley, 2003. – xxvii+337 p.
5. Hille E. Remarks on known example of a monotone continuous function / Hille E., Tamarkin J.D. – Amer. Math. Monthly, Vol. 36. – 1929. – P. 255–264.
6. Jo K. A Construction of Strictly Increasing Continuous Singular Function / K. Jo // J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math. – 2016. – Vol. 23, № 1. – P. 21–34.
7. Kairies H.-H. Functional equations for peculiar functions / H.-H. Kairies // Aequ. Math. – 1997, Vol. 53. - P. 207–241.
8. Salem R. On some singular monotonic function which are strickly increasing / Salem R. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – Vol. 53. – P. 423–439.
9. Sanchez J.F. A singular function with a non-zero finite derivative / Juan Fernandez Sanchez, Pelegri Viader, Jaume Paradis, Manuel Diaz Carrillo // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – Volume 75, Issue 13, September 2012. – P. 5010-5014. –DOI: 10.1016/j.na.2012.04.015.
10. Бурбаки Н. Функции действительного переменного : элементарная теория / Н. Бурбаки. – Москва : Наука, 1965. – 424 с.
11. Гелбаум Б. Контрпримеры в анализе / Гелбаум Б., Олмстед Дж. – М. : Мир, 1967. – 252 с.
12. Горин Е.А. Интегралы, связанные с канторовой лестницей / Горин Е.А., Кукушкин Б.Н. // Алгебра и анализ. Том 15, 2003, вып. 3. – С. 188–220.

13. Дзядик В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядик. - М.: Наука, 1977. - 453 с.
14. Ибрагимова Б. М. Оценки модуля гладкости и некоторые его применения в аппроксимациях и интерполяциях функций : дис. канд. физ.-мат. наук / Б. М. Ибрагимова. - Махачкала, 2016. - 111 с.
15. Калашніков А. В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з  $Q$ -зображенням дійсних чисел / А. В. Калашніков, М. В. Працьовитий // Укр. мат. журн. - 2013. - Т. 65, № 3. - С. 405–417.
16. Кравченко В. Ф. Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн / В. Ф. Кравченко, В. М. Масюк. Москва : Радиотехника, 2002. - 80 с.
17. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р. М. Кроновер. - Москва : Постмаркет, 2000. - 352 с.
18. Лузин Н. Н. Интегралы тригонометрический ряд / Н. Н. Лузин. - 2 изд., М.-Л., 1951.
19. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. Москва : Институт компьютерных исследований, 2002. - 656 с.
20. Медведев Ф. А. Очерки истории функций действительного переменного / Ф. А. Медведев. Москва : Наука, 1975. - 248 с.
21. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. - М.: Наука, 1974. - 480с.
22. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю. С. Очан. - Москва : Просвещение, 1981. - 271 с.
23. Пекарский, А.А. Рациональная аппроксимация сингулярных функций / А.А. Пекарский // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. - 1979. - №3. С. 32–40.
24. Працьовитий М. В. Диференціальні і фрактальні властивості одного класу самоафінних функцій / М. В. Працьовитий, О. Б. Панасенко // Вісник

- Львівського університету. Серія механіко-математична. — 2009. — Т. 70. — С. 128–139.
25. Працьовитий М. В. Про означення фрактальний підхід в дослідженнях розподілів ймовірностей / М. В. Працьовитий // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — № 1. — С. 5–26.
26. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 26 с.
27. Рябинин А.А. О сингулярных строго монотонных функциях / А. А. Рябинин, В. Д. Быстрицкий, В. А. Ильичев // Матем. заметки. — 2004. — Т. 76. — Вып. 3. — С. 439–451.
28. Титчмарш Е. Теория функций / Е. Титчмарш. 2-е изд. — Москва : Наука, 1980. — 464 с.
29. Томусяк А. А. Практикум з теорії ймовірності і математичної статистики // А. А. Томусяк, В. С. Трохименко, Н. М. Шунда. — Вінниця. — 2001. — 332 с.
30. Турбин А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. — К. : Наукова думка, 1992. — 208 с.
31. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. — Москва : Мир, 1991. — 260 с.
32. Чернова Н.И. Теория вероятностей. — Режим доступа: <http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/tv/>