УДК 517.95

Віта Ігнатко,
студентка факультету математики, фізики,
комп'ютерних наук і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Сергій Бак,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Галина Ковтонюк,
канд. пед. наук, доцент
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ

Анотація. *У статті розглядається ідея методу оберненої задачі розсіювання на прикладі лінеаризованого рівняння Кортевега-де Фріза. Нелінійне рівняння представляється як умова сумісності двох допоміжних лінійних задач. Описується пара Лакса для нелінійного рівняння.*

Ключові слова: *обернена задача розсіювання, рівняння Кортевега-де Фріза, перетворення Фур'є.*

Abstract. *The article discusses the idea of the inverse scattering method using the example of the linearized Korteweg-de Vries equation. A nonlinear equation is represented as a compatibility condition for two auxiliary linear problems. A Lax pair for a nonlinear equation is described.*

Keywords: *inverse scattering problem, Korteweg-de Vries equation, Fourier transform.*

При описі багатьох фізичних, хімічних, біологічних явищ та процесів використовують нелінійні математичні моделі на основі нелінійних диференціальних рівнянь. Детальне дослідження нелінійних математичних моделей є надзвичайно важливим для розуміння фізичної природи та особливостей таких процесів і явищ. Серед фізичних явищ особливої уваги заслуговує явище поширення відокремлених хвиль на поверхні води.

У 1895 році нідерландські математики Д. Кортевег і Г. де Фріз вперше математично строго розв'язали задачу про поширення відокремлених хвиль у прямокутному каналі і тим самим поклали початок гідродинамічної теорії нелінійних хвиль ([12]). Узагальнивши метод Релея, Кортевег і де Фріз в 1895 році вивели рівняння для опису довгих хвиль на воді:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

де $u = u(x, t)$ – відхилення від стану рівноваги поверхні води, яке залежить від координати x і часу t.

У 1953 році американські фізики Е. Ферм, С. Улам та Дж. Паста, досліджуючи питання про термалізацію енергії в нелінійних дискретно навантажених струнах, розглянули коливання 64 важків, пов'язаних одна з одною пружинками. Рух ланцюга важок, який вони розглядали, описувався системою

$$m\ddot{q}_n(t) = U'\big(q_{n+1}(t) - q_n(t)\big) - U'\big(q_n(t) - q_{n-1}(t)\big),\; n = \overline{1, N},$$

де $q_n(t)$ – відхилення n-ої важки в момент часу t, m – маса важки, $N = 64$.

У 1965 році мериканські фізики Н. Забускі і М. Крускал встановили, що рівняння, яке використовували Фермі, Паста і Улам, при зменшенні відстані між важками і при необмеженому зростанні їх числа переходить в рівняння Кортевега–де Фріза. Тобто по суті задача, запропонована Фермі, зводилася до чисельного розв'язання рівняння Кортевега–де Фріза, запропонованого в 1895 році для опису відокремленої хвилі Рассела. Продовжуючи обчислювальні експерименти з моделювання розповсюдження відокремлених хвиль, Забускі і Крускал розглянули їх зіткнення. Чудовою властивістю цих хвиль є те, що після своєї взаємодії форма і швидкість цих хвиль відновлюються. Процес, під час якого після взаємодії хвиль зберігаються форма і швидкість, нагадує пружне зіткнення двох частинок. Тому Забускі і Крускал ([14]) такі відокремлені хвилі назвали *солітонами* (від англ. solitary – відокремлений). Ця спеціальна назва відокремлених хвиль, співзвучна електрону, протону та багатьом іншим елементарним частинкам, у даний час загальноприйнята.

У 1967 році в статті [11] американські фізики К. Гарднер, Дж. Грін, М. Крускал і Р. Міура використали перетворення рівняння Кортевега–де Фріза до системи двох лінійних диференціальних рівнянь, що називається тепер парою Лакса, названої на честь американського математика П. Лакса, який вніс великий вклад у розвиток теорії солітонів ([13]), і відкрили новий метод розв'язування ряду дуже важливих нелінійних рівнянь в частинних похідних. Цей метод отримав назву *методу оберненої задачі розсіяння*, оскільки в ньому істотно використовується розв'язання задачі квантової механіки про відновлення потенціалу за даними розсіяння.

Побудувати адекватну математичну модель певного процесу не просто, проте набагато складнішим є знаходження точних аналітичних розв'язків нелінійних рівнянь. Для побудови точних розв'язків повністю інтегровних рівнянь зараз розвинені різні ефективні підходи. Проте метод оберненої задачі розсіювання вважається одним із фундаментальних та найефективніших методів ([1–5]).

Метод оберненої задачі виник як своєрідне нелінійне узагальнення класичного методу Фур'є, призначеного для інтегрування лінійних рівнянь з частинними похідними. В обох випадках процедура складається з трьох етапів ([1, с.13]):

1) початкова умова $u(x,0)$ подається у вигляд перетвореної функції простим виразом. В результаті чого отримуємо обернену функцію при $t = 0$;

2) оскільки перетворена функція відносно проста, то легко встановлюється еволюція перетвореної функції в момент часу $t > 0$ В результаті отримуємо обернену функцію при $t > 0$;

3) знання перетвореної функції в деякий момент часу $t > 0$ дозволяє, застосовуючи обернене перетворення, отримати розв'язок задачі $u(x,t)$.

Розглянемо цю аналогію на прикладі лінеаризованого рівняння Кортевега-де Фріза

$$u_t + u_{xxx} = 0\,,\; u \in \mathrm{R}\,,$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x)\,,\; u_0 \in \mathrm{R}\,.$$

Запишемо вирази для перетворення функцій у такому вигляді:

- пряме перетворення Фур'є:

$$F(u) = \tilde{u}(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x,t)dx\,,$$

- обернене перетворення Фур'є:

$$F^{-1}(u) = u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\tilde{u}(\lambda,t)d\lambda\,.$$

На першому етапі виконаємо підстановку початкової умови в пряме перетворення Фур'є:

$$F(u_0) = \tilde{u}(\lambda,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x,0)dx$$

На другому етапі знайдемо еволюція перетвореної функції з часом. Використовуючи правила обчислення похідних, запишемо:

$$F(u_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\frac{\partial u}{\partial t}dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u dx = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u} = \tilde{u}_t\,,$$

$$F(u_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}dx = i\lambda F(u)\,,$$

$$F(u_{xxx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx = (i\lambda)^3 F(u)\,.$$

Підставивши ці похідні у лінеаризоване рівняння Кортевега-де Фріза, одержимо звичайне диференціальне рівняння відносно змінної t

$$\tilde{u}_t + i\lambda^3\tilde{u} = 0\,,$$

де λ – змінна в перетворені Фур'є, входить як сталий параметр.

Загальний розв'язок прямого перетворення Фур'є має вигляд

$$\widetilde{u}(\lambda,t) = C(\lambda)e^{-i\lambda^3 t}.$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є, отримаємо розв'язок шуканого рівняння:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda)d\lambda,$$

де стала інтегрування $C(\lambda)$ знаходиться з початкової умови

$$C(\lambda) = \widetilde{u}(\lambda, t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}u(x,0)dx = F(u_0).$$

Роль перетворення Фур'є у випадку нелінійного рівняння Кортевега-де Фріза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

буде відображати перетворення розсіювання, яке здійснюється звичайним лінійним диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + (\lambda^2 + u)\Phi = 0$$

з коефіцієнтом $u = u(x,t)$ – розв'язок рівняння Кортевега-де Фріза.

Припустимо $u \to 0$ при $x \to \pm\infty$, визначимо дані розсіювання $a(\lambda,t)$ і $b(\lambda,t)$ співвідношенням $\theta(u) = \{a,b\}$:

$$\Phi \to \begin{cases} e^{-i\lambda x}, & x \to -\infty, \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t)e^{i\lambda x} & x \to +\infty. \end{cases}$$

Виявляється, що динаміка по t так визначених даних розсіювання схожа на динаміку по t даних Фур'є для лінеаризованого рівняння Кортевега-де Фріза, розглянутого вище:

$$a(\lambda,t) = a(\lambda,0),\ b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}.$$

Для розвитку методу оберненої задачі розсіювання, а також для кращого розуміння математичної природи методу, суттєвим стало представлення нелінійного рівняння як умови сумісності двох допоміжних лінійних задач:

$$\begin{cases} L\Psi = \lambda\Psi \\ \Psi_t = -A\Psi \end{cases}$$

або

$$\Psi_{xt} = \Psi_{tx}$$

Умову сумісності подамо у вигляді умови комутативності лінійних диференціальних операторів допоміжних лінійних задач:

$$L_t\Psi + L\Psi_t = \lambda\Psi_t.$$

Вважаючи, що власні значення λ не залежать від часу, продиференціюємо перше рівняння умови сумісності з урахуванням другого рівняння

$$L_t\Psi + L(-A\Psi) = \lambda(-A\Psi),$$

$$L_t\Psi = (LA - AL)\Psi.$$

Отже, лінійні оператори L і A утворюють *пару Лакса* для нелінійного рівняння, якщо виконується *умова сумісності*

$$L_t = [L, A],$$

яка співпадає з самим нелінійним рівнянням, де $[L, A] = LA - AL$ – комутатор операторів L і A.

Представлення нелінійного рівняння у вигляді операторного рівняння дозволяє звести аналіз вихідного *нелінійного рівняння* до аналізу двох більш простих *лінійних рівнянь*. Цією властивістю володіють не всі диференціальні нелінійні рівняння, а лише ті, які мають солітонні розв'язки. Зауважимо, що розв'язки такого типу в дискретних системах (системах осциляторів, системах типу Фермі-Пасти-Улама, дискретних рівняннях типу синус-Ґордона, дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці) за допомогою варіаційного методу вивчалися у працях [6–10].

Висновки. Описана ідея методу оберненої задачі як своєрідне нелінійне узагальнення класичного методу Фур'є, який призначений для інтегрування лінійних рівнянь з частинними похідними.

Література:

1.Герасимчук В.С. Метод оберненої задачі розсіювання та його застосування:навч. посібник. Київ: НТУУ «КПІ», 2015. 96 с.

2.Гладка З.М. Метод оберненої задачі розсіювання для рівняння Кортверега-де Фріза з початковими даними типу сходинки: автореф. дис. на здобуття наукового ступення канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03 Харків, 2016. 19 с.

3.Дубровский В.Г. Элементарное введение в метод обратной задачи и теория солитонов: курс лекций. Новосибирск: НГТУ, 1997. 88 с.

4.Новокшенов В. Ю. Введение в теорию солитонов. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 96 с.

5.Сироїд І.П. Комплексний метод оберненої задачі розсіяння і дослідження несамоспряжених пар Лакса для системи Кортверега-де Фріза. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, 2005. 191с.

6.Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 69, №4. P.509-520.

7.Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2019. Vol. 52, № 2. P. 176-184.

8.Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.

9.Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75-87.

10. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Український математичний вісник*. 2020. Т.17, №3. С. 301-312.

11. Gardner C. S. , Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method of solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys.Rew.Lett.* 1967. Vol.19. P. 1095-1097.

12. Korteweg D. J., de Vries G. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves. *Phil. Mag*. 1895. № 39. P. 422–433.

13. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Commun*s *Pure and Appl. Math*. 1968. Vol. 21, № 15. P. 467–490.

14. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of “solutions” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett*. 1965. Vol. 15. P. 240–243.

УДК 371.3:004

Юлія Іщенко, Вадим Іщенко,

студенти факультету математики, фізики,

комп'ютерних наук і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРНЕТ-СЕРВІСІВ ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Анотація. *Проведено аналіз популярних Інтернет-сервісів, що використовують для організації навчання. Визначено їх переваги та недоліки. Охарактеризовано основні можливості сервісу GoogleApps.*

Ключові слова: *Інтернет-сервіси, GoogleApps.*