УДК 517.97

Сергій Бак,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Галина Ковтонюк,
канд. пед. наук, доцент
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Тетяна Липа,
студентка факультету математики, фізики,
комп'ютерних наук і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЛАНЦЮГІВ ОСЦИЛЯТОРІВ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ

Анотація. *У статті встановлено існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для рівнянь, які описують динаміку нескінченних ланцюгів нелінійних осциляторів у вагових просторах.*

Ключові слова: *ланцюги осциляторів, задача Коші, глобальний розв'язок, вагові простори.*

Abstract. *The article establishes the existence and uniqueness of a global solution to the Cauchy problem for equations describing the dynamics of infinite chains of nonlinear oscillators in weighted spaces.*

Key words: *chains of oscillators, Cauchy problem, global solution, weighted spaces.*

Нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються для моделювання складних квантових явищ. Зокрема, останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною. Серед рівнянь, які описують такі моделі, найбільш відомими є рівняння ланцюгів осциляторів, дискретне рівняння sin-Ґордона, система Фермі–Пасти–Улама, дискретне нелінійне рівняння Шредінгера.

Задача Коші для ланцюгів осциляторів вивчалася в статтях [2; 3; 10] і для систем осциляторів на двовимірній ґратці в статтях [1; 6; 7; 9; 11]. У цих статтях вивчалися питання існування локальних і глобальних розв'язків, їх обмеженості у просторі l^2. Зауважимо, що існування періодичних розв'язків (які є глобальними) вивчалося в статтях [5; 8]. Питання коректності задачі Коші для дискретного нелінійного рівняння Шредінгера вивчалося в статті [4].

В даній роботі вивчаються деякі питання динаміки нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Нехай $q_n(t)$ – узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з двома своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_n(t) = -U_n'\left(q_n(t)\right) + a_{n-1}\left(q_{n-1}(t) - q_n(t)\right) - a_n\left(q_n(t) - q_{n+1}(t)\right),\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n\to\pm\infty} q_n(t) = 0, \qquad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_n(r)$ запишемо у вигляді $U_n(r) = -\frac{c_n}{2}r^2 + V_n(r)$ і покладемо $b_n = c_n - a_n - a_{n-1}$. Тоді система (1) набуде вигляду

$$\ddot{q}_n(t) = a_n q_{n+1}(t) + a_{n-1}q_{n-1}(t) + b_n q_n(t) - V_n'\left(q_n(t)\right),\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (3)$$

Враховуючи граничні умови (2), при певних припущеннях це рівняння природно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q) \qquad (4)$$

в гільбертовому просторі l^2 дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, де $(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1}q_{n-1} + b_n q_n$, а нелінійний оператор B визначається формулою $B(q)_n = V_n'(q_n)$. Скалярний добуток і норма в l^2 позначаються $(\cdot\,,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ відповідно.

За означенням, *розв'язком* рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значенням в l^2. Якщо розв'язок визначений на всій числовій прямій, то він називається *глобальним*, у протилежному випадку – *локальним*.

Передбачається, що

(i) *послідовності* $\{a_n\}$ *і* $\{c_n\}$ *дійсних чисел обмежені;*

(ii) $V_n(r)$ *– функція класу* C^1 *на* $\mathbb{R}$, $V_n(0) = V_n'(0) = 0$ *і для будь-якого* $R > 0$ *існує таке* $C = C(R) > 0$, *що для всіх* $n \in \mathbb{Z}$

$$\left|V_n'(r_1) - V_n'(r_2)\right| \le C\left|r_1 - r_2\right|,\ \ |r_1|, |r_2| \le R. \tag{5}$$

Іноді замість (ii) ми будемо використовувати більш строге припущення:

(ii') *припущення* (ii) *виконується зі сталою* C, *яка не залежить від* R, *тобто існує така стала* $C > 0$, *що для всіх* $n \in \mathbb{Z}$

$$\left|V_n'(r_1) - V_n'(r_2)\right| \le C\left|r_1 - r_2\right|.$$

Задача Коші полягає у знаходженні розв'язку рівняння (4), який задовольняє початкові умови

$$q(0) = q^{(0)},\ \dot{q}(0) = q^{(1)}. \tag{6}$$

Нехай $\Theta = \{\theta_n\}$ послідовність додатних чисел (*вага*). Тоді позначимо через l_Θ^2 простір всіх двохсторонніх послідовностей дійсних чисел з нормою

$$\|u\|_\Theta = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_n u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(u, v)_\Theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_n u_n v_n.$$

Всюди далі припускаємо, що вага задовольняє таку умову:

(iii) *послідовність* $\Theta = \{\theta_n\}$ є обмеженою знизу додатною сталою та існує стала $c_0 > 0$ така, що

$$c_0^{-1} \le \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} \le c_0$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}$.

Вага, яка задовольняє умову (iii) називається *регулярною*.

Згідно цієї умови вагові простори l_Θ^2 неперервно і компактно вкладені в l^2, причому

$$\|u\| \le C\|u\|_\Theta, \ u \in l_\Theta^2,$$

з деякою сталою $C > 0$. Тому всі ці простори неперервно і компактно вкладені в простір l^∞ обмежених послідовностей з нормою

$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|.$$

Якщо $\theta_n \equiv 1$, то $l_\Theta^2 = l^2$.

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$ *і* $q \in C^2\big((-T,T);l^2\big)$ *розв'язок задачі (4), (6) з* $q^{(0)}, q^{(1)} \in l_\Theta^2$. *Тоді* $q \in C^2\big((-T,T);l_\Theta^2\big)$.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови* (i) *та* (ii'). *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l_\Theta^2$ *і* $q^{(1)} \in l_\Theta^2$ *задача (4), (6) має єдиний глобальний розв'язок* $q \in C^2\big(\mathbb{R};l_\Theta^2\big)$.

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови* (i) *та* (ii). *Крім того, припустимо, що оператор* A *недодатний, тобто* $(Aq,q) \le 0$ *для будь-якого* $q \in l^2$ *та* $V_n(r) \ge 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$ *і* $r \in \mathbb{R}$. *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l_\Theta^2$ *і* $q^{(1)} \in l_\Theta^2$ *задача (4), (6) має єдиний глобальний розв'язок* $q \in C^2\big(\mathbb{R};l_\Theta^2\big)$.

Таким чином, у цій встановлено існування і єдиність глобальних розв'язків задачі Коші для ланцюгів осциляторів у вагових просторах.

Література:

1. Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Український математичний вісник*. 2019. Т.16, №4. С. 465-476. (Engl.: Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 246, No. 5 (May). P. 593-601.)
2. Bak S., N'Guerekata G., Pankov A. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations. *Communications in Mathematical Analysis*. 2010. Vol. 8, № 1. P. 79–86.
3. Bak S. N., Pankov A. A. On the dynamical equations of a system of linearly coupled nonlinear oscillators. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2006. Vol. 58, №6. P.815-822.
4. Pankov A. Global well-posedness for discrete non-linear Schrödinger equation. *Applicable Analysis.*2010. Vol. 89, № 9. P. 1513–1521.
5. Бак С.М. Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній гратці. *Карпатські математичні публікації*. 2012. Т. 4, №2. С. 175-196.
6. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. Вип. 5. С. 3–9.
7. Бак С. М. Про обмеженість глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. 2019. Вип. 20. С. 5-12.
8. Бак С. Н., Панков А. А. О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов. *Доповіді НАН України*. 2004. №9. С.13-16.
9. Бак С. М., Баранова О. О., Білик Ю. П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 4. С. 18–24.
10. Бак С. Н., Панков А. А. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов. *Український математичний журнал*. 2006. Т. 58, №6. С.723-729.
11. Бак С. М., Рум'янцева К. Є. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. Вип. 6. С. 29-36.