

УМОВИ ІСНУВАННЯ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ ОСЦИЛЯТОРІВ, РОЗМІЩЕНИХ НА ДВОВИМІРНІЙ РЕШІТЦІ

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, що описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній решітці. Нехай $q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n,m) -го осцилятора в момент часу t . Припускається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'(q_{n,m}) + q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}, (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

В статті [12] вивчалися періодичні розв'язки для системи осциляторів розміщених на двовимірних решітках, а в статтях [7] та [8] – біжучі хвилі в таких системах. Зокрема, в [7] розглядалась система із непарною 2π -періодичною нелінійністю. А в [8] взагалі розглядалися лінійні осцилятори.

В даній статті за допомогою методу критичних точок досліджено питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

Постановка задачі. Розглянемо систему осциляторів з потенціалом:

$$U(r) = -\frac{c_0}{2}r^2 + V(r).$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$\ddot{q}_{n,m} = \Delta q_{n,m} + c_0 q_{n,m} - V'(q_{n,m}), \quad (2)$$

де

$$(\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$$

– двохвимірний дискретний оператор Лапласа.

Біжуча хвиля має вигляд

$$q_n(t) = u(n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct)$$

і для її профілю $u(s)$, де $s = n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct$, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} c^2 u''(s) = & u(s + \cos \varphi) + u(s - \cos \varphi) + \\ & + u(s + \sin \varphi) + u(s - \sin \varphi) - 4u(s) + c_0 u(s) - V'(u(s)). \end{aligned} \quad (3)$$

Відмітимо, що функція неперервного аргументу $u(s)$, $u \in \mathbb{R}$ називається профілем хвилі. Константа $c \neq 0$ представляє собою швидкість хвилі. Цікавими є не тривіальні хвилі з профілем тотожно відмінним від нуля.

У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі

достатньо знайти розв'язок рівняння (3) з умовою періодичності

$$u(s + 2k) = u(s), s \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Профіль відокремленої хвилі є розв'язком рівняння (3) з крайовою умовою на нескінченності

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \quad (5)$$

Всюди далі під розв'язком рівняння (3) розуміється функція $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (3) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

При значеннях кута φ , який визначає напрям поширення хвилі, а саме при $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ і $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, задача зводиться до одновимірного випадку.

$$c^2 \psi''(s) = \psi(s+1) + \psi(s-1) - 2\psi(s) + \frac{c_0}{2} \psi(s) - \frac{1}{2} V'(\psi(s)).$$

Всюди далі припускається, що потенціал $V(r)$ задовольняє умову:

(h) функція $V(r)$ неперервно диференційовна, $V(0) = 0$ і $V'(r) = o(r)$, при $r \rightarrow 0$ та існує таке $\mu > 2$, що

$$0 < \mu V(r) \leq V'(r)r, r \neq 0.$$

Зазначимо, що в рівняння (3) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівнянню (3), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$.

З рівняння (3) та умовою (4) пов'язується функціонал

$$J_k(u) = \int_{-k}^k \left\{ \frac{c^2}{2} (u'(s))^2 - \frac{1}{2} (u(s + \cos \varphi) - u(s))^2 - \frac{1}{2} (u(s + \sin \varphi) - u(s))^2 + \frac{c_0}{2} u^2(s) - V(u(s)) \right\} ds, \quad (6)$$

який визначений на просторі

$$E_k = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u(s + 2k) = u(s)\}$$

з нормою

$$\|u\|_k = (\|u\|_{L^2(-k,k)}^2 + \|u'\|_{L^2(-k,k)}^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-k}^k (u(s)^2 + u'(s)^2) ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тобто E_k – соболевський простір $2k$ -періодичних функцій.

З крайовою умовою (5) пов'язаний функціонал

$$J(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{c^2}{2} (u'(s))^2 - \frac{1}{2} (u(s + \cos \varphi) - u(s))^2 - \frac{1}{2} (u(s + \sin \varphi) - u(s))^2 + \frac{c_0}{2} u^2(s) - V(u(s)) \right\} ds$$

$$-\frac{1}{2}(u(s + \sin \varphi) - u(s))^2 + \frac{c_0}{2}u^2(s) - V(u(s))\}ds, \quad (7)$$

який визначений на просторі $E = H^1(\mathbb{R})$ зі стандартною соболевською нормою:

$$\|u\| = (\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u^2(s) + (u'(s))^2) ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Допоміжні леми. Для отримання основного результату знадобляться наступні леми:

Лема 1. За зроблених вище припущень, J_k та J – функціонали класу C^1 на E_k та E відповідно. Їх похідні виражаються формулами

$$\langle J'_k(u), h \rangle = \int_{-k}^k \{c^2 u'(s)h'(s) + (u(s + \cos \varphi) + u(s - \cos \varphi) + u(s + \sin \varphi) + u(s - \sin \varphi) - 4u(s))h(s) + c_0 u(s)h(s) - V'(u(s))h(s)\} ds \quad (8)$$

$$\langle J'(u), h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \{c^2 u'(s)h'(s) + (u(s + \cos \varphi) + u(s - \cos \varphi) + u(s + \sin \varphi) + u(s - \sin \varphi) - 4u(s))h(s) + c_0 u(s)h(s) - V'(u(s))h(s)\} ds. \quad (9)$$

Лема 2. Критичні точки функціоналів J_k і $J \in C^2$ – розв'язками рівняння (3), що задовольняють умови (4) і (5) відповідно.

Лема 3. Правильні наступні нерівності

$$\begin{aligned} \int_{-k}^k |u(s + \cos \varphi) - u(s)|^2 ds &\leq \cos^2 \varphi \int_{-k}^k |u'(s)|^2 ds, \quad u \in E_k, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |u(s + \cos \varphi) - u(s)|^2 ds &\leq \cos^2 \varphi \int_{-\infty}^{\infty} |u'(s)|^2 ds, \quad u \in E, \\ \int_{-k}^k |u(s + \sin \varphi) - u(s)|^2 ds &\leq \sin^2 \varphi \int_{-k}^k |u'(s)|^2 ds, \quad u \in E_k, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |u(s + \sin \varphi) - u(s)|^2 ds &\leq \sin^2 \varphi \int_{-\infty}^{\infty} |u'(s)|^2 ds, \quad u \in E. \end{aligned}$$

Лема 4. Нехай виконується умова (h), $c_0 > 0$ і $c^2 > 1$. Тоді існують такі $\varepsilon_0 > 0$ і $\gamma > 0$, які не залежать від $k \geq 1$, що для нетривіальних критичних точок функціоналів J_k та J правильні нерівності

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq \gamma J_k(u),$$

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|^2 \leq \gamma J(u).$$

Існування періодичних біжучих хвиль. За допомогою теореми про гірський перевал встановимо існування нетривіальних біжучих хвиль з періодичним профілем. Для цього, згідно леми 2, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k . Відмітимо, що $u = 0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожно рівна нулю.

Теорема 1. Нехай виконується умова (h) і $c_0 > 0$. Тоді для будь-яких $k \geq 1$ і $c^2 > 1$ рівняння (3) має розв'язок u , що задовольняє умові (4). Тим самим, існують дві біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$. Більше того, існують такі константи $\varepsilon > 0$ і $C > 0$, які не залежать від k , що

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C,$$

$$\varepsilon_0 \leq J_k \leq C.$$

Сформулюємо теорему про гірський перевал в потрібному вигляді та перевіримо її умови для функціоналу J_k .

Теорема 2. (Про гірський перевал) Нехай I – функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H , що задовольняє умові Пале–Смейла:

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $I'(u_n) \rightarrow 0$ і $I(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.

Припустимо, що існують такі $e \in H$ і $r > 0$, що $\|e\| > r$ і

$$\beta := \inf_{\|v\|=r} I(v) > 0 = I(0) \geq I(e).$$

Тоді існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I , що $I(u) \geq \beta$. При цьому

$$I(u) \leq \sup_{\tau \geq 0} I(\tau e).$$

Перевірку умов теорему 2 почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 5. За умов теорему 1 функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.

Лема 6. За умов теорему 1 існує таке $r_0 > 0$, яке не залежить від k , що

$$\inf_{\|u\|_k=r_0} J_k(u) > 0.$$

Лема 7. За умов теорему 1 існує таке $\tau_0 > 0$ (незалежне від k), що

$$J_k(\tau v_k) = J_1(\tau v_1) \leq 0$$

для всіх $\tau \geq \tau_0$.

Доведення теорему 1. Лема 5-7 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теорему про гірський перевал. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 2, u – C^2 -розв'язок задачі (3), (4). Оцінки знизу для $\|u\|_k$ і $J_k(u)$ випливають із лема 4. Згідно лема 7,

$$J_k(u) \leq \sup_{\tau \geq 0} J_k(\tau v_k) = \sup_{\tau \geq 0} J_1(\tau v_1) = C.$$

Оцінка зверху для $\|u\|_k$ випливає тепер із лема 4. \square

Існування відокремлених біжучих хвиль. Біжучі хвилі в даному випадку знаходяться як критичні точки функціоналу J . Для останнього

виконуються твердження, аналогічні лемам 6 та 7. Таким чином, функціонал J задовольняє частині умов теореми про гірський перевал. Однак, умова Пале–Смейла для цього функціоналу не виконується. Тому критичні точки в даному випадку будуються іншим способом – за допомогою переходу до границі в критичних точках функціоналу J_k при $k \rightarrow \infty$.

Теорема 3. *Нехай виконується умова (h) і $c_0 > 0$. Тоді для будь-якого $c^2 > 1$ рівняння (3) має розв'язок $u \in E$, (отже, він задовольняє умові (5)). Таким чином, існують дві відокремлені біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$.*

Література:

1. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів //Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140–153.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 395 с.
3. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization //Physica D. – 1997. – 103. – P. 201–250.
4. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators //Communications in Mathematical Analysis. – 2007. –Volume 3, Number 1. – P. 19–26.
5. Braun O.M., Kivshar Y.S. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model //Physics Repts. – 1998. – 306. – P. 1–108.
6. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel-Kontorova model. – Berlin: Springer, 2004. – 427 pp.
7. Feckan M., Rothos V. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions //Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319–341.
8. Friesecke G., Matthies K. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice //Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – Volume 3, №1 (February). – P. 105–114.
9. Ioos G., Kirchgassner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators //Commun. Math. Phys. – 2000. – 211. – P. 439–464.
10. Lions P.L. The concentration – compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II //Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire. – 1984. – 1. – P. 223–238.
11. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi – Pasta –Ulam Lattices. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 pp.
12. Srikanth P. On periodic motions of two-dimensional lattices //Functional analysis with current applications in science, technology and industry. – 1998. – Volume 377. – P. 118–122.

Анотація. В даній статті за допомогою методу критичних точок досліджено питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній решітці.

Ключові слова: нелінійні осцилятори, цілочислова решітка, біжучі хвилі, критичні точки, гірський перевал.