УДК 517.97

Сергій Бак,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Галина Ковтонюк,
канд. пед. наук, старший викладач
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ЛОКАЛІЗОВАНІ СТОЯЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНОМУ НЕЛІНІЙНОМУ РІВНЯННІ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА ІЗ НАСИЧУВАНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Анотація. *У статті одержано умови існування локалізованих стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. Для цього використано варіаційний підхід і метод періодичних апроксимацій.*

Ключові слова: *стояча хвиля, дискретне нелінійне рівняння Шредінгера, двовимірна ґратка, насичувана нелінійність.*

Abstract. *The conditions for the existence of localized standing waves in a discrete nonlinear Schrödinger-type equation with saturable nonlinearity on a two-dimensional lattice are obtained. For this, the variational approach and the method of periodic approximations are used.*

Key words: *standing wave, discrete nonlinear Schrödinger equation, two-dimensional lattice, saturable nonlinearity.*

У цій статті вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера вигляду

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t)-a_1\Delta_{(1)}\psi_{n,m}(t)-a_2\Delta_{(2)}\psi_{n,m}(t)+f\left(\psi_{n,m}(t)\right)=0,\ \left(n,m\right)\in\mathbb{Z}^2, \qquad (1)$$

де $\psi_{n,m}\left(t\right)$ – хвильова функція $\left(n,m\right)$-ї частинки, $a_1, a_2\in\mathbb{R}^+$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ калібровно інваріантна функція, тобто

$$f\left(e^{i\omega t}z\right)=e^{i\omega t}f(z)$$

для всіх $\omega\in\mathbb{R}$, та

$$\left(\Delta_{(1)}\psi\right)_{n,\,m}=\psi_{n+1,\,m}+\psi_{n-1,\,m}-2\psi_{n,\,m},$$

$$\left(\Delta_{(2)}\psi\right)_{n,\,m}=\psi_{n,\,m+1}+\psi_{n,\,m-1}-2\psi_{n,\,m}$$

дискретні оператори Лапласа відповідно за змінними n і m.

Ця стаття присвячена *насичуваним* нелінійностям $f(z)$. Це означає, що на нескінченності $f(z)$ росте як $const\cdot|z|$. Важливими прикладом таких нелінійностей є функція $f(u)=\dfrac{\nu|u|^p}{1+\mu|u|^p}u,\ \mu>0, \nu>0,\ p>1.$

Зауважимо, що в статтях [2; 3; 6] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера на одновимірній ґратці, а в [1; 4; 5; 7; 8; 9] – на двовимірній ґратці.

Всюди далі припускається, що послідовність $\left\{x_{n,m}\right\}\subset\mathbb{R}$ є N-періодичною, тобто

$$x_{n+N,m}=x_{n,m+N}=x_{n,m}.$$

Стоячою хвилею в даному випадку є розв’язок вигляду

$$\psi_{n,m}\left(t\right)=u_{n,m}\exp\left(-i\omega t\right), \qquad (2)$$

де $\left\{u_{n,m}\right\}\subset\mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega\in\mathbb{R}$ – частотою. Такі розв’язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами (за аналогією до лакунарних солітонів у фотонних кристалах).

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (1) і враховуючи, що $\left|\exp(-i\omega t)\right| = 1$, одержимо рівняння

$$Lu_{n,m} - \omega u_{n,m} = f\left(u_{n,m}\right), \tag{3}$$

де

$$Lu_{n,m} = -a_1 \Delta_{(1)} u_{n,m} - a_2 \Delta_{(2)} u_{n,m}.$$

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з k-періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто

$$u_{n+k,m} = u_{n,m+k} = u_{n,m} \tag{4}$$

та

$$\lim_{n,m \to \pm\infty} u_{n,m} = 0 \tag{5}$$

відповідно.

Нехай $F(t)$ первісна функція для функції $f(t)$, тобто $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$

Тоді всюди далі припустимо, що виконуються наступні умови:

(i) $f(t) = o(t),\ t \to 0;$

(ii) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{f(t)}{t} = l < \infty;$

(iii) $f \in C^1(\mathbb{R})$ i $f(t)t < f'(t)t^2,\ t \neq 0;$

(iv) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{2} f(t)t - F(t) \right) = \infty.$

Легко перевірити, що нелінійність $f(u) = \dfrac{\nu |u|^p}{1 + \mu |u|^p} u,\ \mu > 0,\ \nu > 0,\ p > 1,$ задовольняють умови $(i)-(iii)$. Крім того, вона задовольняє (iv) при $1 < p \le 2$.

Нехай $k \ge 2$ – ціле число. Тоді через E_k позначимо простір всіх k-періодичних послідовностей $\left\{u_{n,m}\right\}$, які задовольняють умову (4). Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком

$$\left(u, v\right)_k = \sum_{(n,m)\in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{(n,\, m)\in Q_k} \left|u_{n,m}\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де $Q_k = \left\{ (n,\, m) \in \mathbb{Z}^2 : -\left[\frac{k}{2}\right] \le n, m \le k - \left[\frac{k}{2}\right] - 1 \right\}$, $\left[\frac{k}{2}\right]$ – ціла частина $\frac{k}{2}$.

Позначимо через E простір $l^2 = l^2\left(\mathbb{Z}^2\right)$.

Зауваження 1. Оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі E, а його спектр збігається з відрізком $\left[0,\, 4(a_1 + a_2)\right]$ і є абсолютно неперервним. Зокрема, L не має власних векторів в E. Причому за виконання умов (i_7), (ii_7) функція $\frac{f(t)}{|t|}$ строго зростаюча, тоді як функція $\frac{1}{2} f(t)t - F(t)$ строго зростає при $t \ge 0$ і строго спадає при $t \le 0$, а отже, є невід'ємною.

На просторах E_k та E розглянемо відповідно функціонали

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\left(L_k u - \omega u,\, u\right)_k - \sum_{(n,\, m)\in Q_k} F\left(u_{n,m}\right),$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\left(Lu - \omega u,\, u\right) - \sum_{(n,\, m)\in \mathbb{Z}^2} F\left(u_{n,m}\right),$$

де L_k – оператор L, який діє в просторі E_k. Безпосереднім обчисленням одержуємо:

Лема 1. *В зроблених припущеннях, функціонали J_k та J належать класу C^1, а їх похідні визначаються формулами*

$$\left\langle J_k'(u),\, h\right\rangle = \left(L_k u - \omega u,\, h\right)_k - \sum_{(n,\, m)\in Q_k} \theta f\left(u_{n,m}\right) h_{n,m}\,,\; u, h \in E_k.$$

$$\left\langle J'(u),\, h\right\rangle = \left(Lu - \omega u,\, h\right) - \sum_{(n,\, m)\in \mathbb{Z}^2} \theta f\left(u_{n,m}\right) h_{n,m}\,,\; u, h \in E_k.$$

Крім того, критичні точки J_k та J є розв'язками рівняння (3), що задовольняють умови (4) та (5) відповідно.

Для функціоналів J_k та J означимо відповідні многовиди Нехарі

$$N_k := \left\{ u \in E_k \mid \left\langle J_k'(u), u \right\rangle = 0, u \neq 0 \right\} \subset E_k$$

та

$$N := \left\{ u \in E \mid \left\langle J'(u), u \right\rangle = 0, u \neq 0 \right\} \subset E.$$

Введемо позначення $I_k(u) := \left\langle J_k'(u), u \right\rangle$ та $I(u) := \left\langle J'(u), u \right\rangle$. Це C^1-функціонали, похідні яких визначаються формулами

$$\left\langle I_k'(u), h \right\rangle = 2\left(L_k u - \omega u, h\right)_k - \sum_{(n,\, m) \in Q_k} \left(f\left(u_{n,m}\right) + f'\left(u_{n,m}\right) u_{n,m} \right) h_{n,m},$$

$$\left\langle I'(u), h \right\rangle = 2\left(Lu - \omega u, h\right) - \sum_{(n,\, m) \in \mathbb{Z}^2} \left(f\left(u_{n,m}\right) + f'\left(u_{n,m}\right) u_{n,m} \right) h_{n,m}.$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$, $\omega < 0$ та $\omega + l > 0$. Тоді множини N_k та N є непорожніми замкненими C^1-підмноговидами відповідно у просторах E_k та E, на яких $I_k'(u) \neq 0$ та $I'(u) \neq 0$. Крім того, існує $\beta_0 > 0$ (незалежне від k) таке, що $\|u\|_k \geq \beta_0$, $u \in N_k$, та $\|u\| \geq \beta_0$, $u \in N$.*

Наслідок 1. *Якщо $I_k(v) \leq 0$ (відповідно $I(v) \leq 0$), то існує єдине $t^* \in (0, 1]$ таке, що $t^* v \in N_k$ (відповідно $t^* v \in N$), а також існує таке $v \in E_k \setminus \{0\}$ (відповідно $v \in E \setminus \{0\}$), що $J_k(v) < 0$ (відповідно $J(v) < 0$).*

З означень J_k та I_k випливає, що на N_k

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2} I_k(u) = \sum_{(n,\, m) \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f\left(u_{n,m}\right) u_{n,m} - F\left(u_{n,m}\right) \right). \quad (6)$$

За умовою (iii_7) $J_k(u) \geq 0$, $u \in N_k$. Аналогічно, з означень J та I випливає, що на N_k

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{2} I(u) = \sum_{(n,\, m) \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{2} f\left(u_{n,m}\right) u_{n,m} - F\left(u_{n,m}\right) \right). \quad (7)$$

та $J(u) \geq 0$, $u \in N$.

Лема 3. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$, $\omega<0$ *та* $\omega+l>0$. *Тоді існує таке число* $\alpha_0=\alpha_0(k)>0$, *що* $J_k(u)\ge\alpha_0$ *для всіх* $u\in N_k$.

Тепер розглянемо наступні задачі мінімізації

$$m_k=\inf\left\{J_k(u):u\in N_k\right\}, \tag{8}$$

$$m=\inf\left\{J(u):u\in N\right\}. \tag{9}$$

Виявляється, що розв'язки цих задач є розв'язками рівняння (3) у відповідних просторах.

Лема 4. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$, $\omega<0$ *та* $\omega+l>0$. *Тоді розв'язки задач (8) і (9) є розв'язками рівняння (3) в просторах* E_k *та* E *відповідно.*

Лема 5. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$, $\omega<0$ *та* $\omega+l>0$. *Тоді задача (8) має розв'язок.*

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iv)$, $\omega<0$ *та* $\omega+l>0$. *Тоді для будь-якого* $k\ge 2$ *рівняння (3) має нетривіальний* k*-періодичний розв'язок* $u\in E_k$. *Більше того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (3) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u\in E_k$, *один з яких невід'ємний.*

Доведення. Існування нетривіального k-періодичного розв'язку $u\in E_k$ випливає з леми 5.

Нехай f непарна функція. Тоді F парна і очевидно, що рівняння (3) має два нетривіальні розв'язки $\pm u\in E_k$. Легко бачити, що

$$\left(L|u|,|u|\right)_k\le\left(Lu,u\right)_k.$$

Крім того, $f\left(|t|\right)|t|=f(t)t$ та $F\left(|t|\right)=F(t)$. А це означає, що

$$I_k\left(|u|\right)\le I_k(u)=0.$$

З іншого боку,

$$\sum_{(n,\,m)\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(\left|u_{n,m}\right|\right)\left|u_{n,m}\right|-F\left(\left|u_{n,m}\right|\right)\right)=\sum_{(n,\,m)\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(u_{n,m}\right)u_{n,m}-F\left(u_{n,m}\right)\right)=m_k.$$

За наслідком 7.1, існує $t^* \in (0, 1]$ таке, що $u^* = t^*|u| \in N_k$. Тоді за зауваженням 7.1 та рівністю (6), маємо

$$J_k\left(u^*\right) \le \sum_{(n,\, m)\in Q_k} \left(\frac{1}{2} f\left(u_{n,m}\right) u_{n,m} - F\left(u_{n,m}\right)\right) = m_k .$$

Таким чином, $J_k\left(u^*\right) = m_k$ та u^* невід'ємний розв'язок, і, отже, можна взяти $u = u^*$. Теорему доведено. □

Наслідок 2. *Нехай* $\omega < 0$ *та* $\omega + l > 0$. *Тоді рівняння (3) з нелінійністю* $f(u) = \dfrac{\nu |u|^p}{1 + \mu |u|^p} u$, *де* $\mu > 0, \nu > 0,\ 1 < p \le 2$, *має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E_k$, *один з яких невід'ємний.*

Аналогічну лему до леми 5 для задачі (9) довести складно. Тому для одержання l^2-розв'язку рівняння (3) ми перейдемо до границі при $k \to \infty$. Для цього знадобиться наступна лема.

Лема 6. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iv)$, $\omega < 0$ *та* $\omega + l > 0$. *І нехай* u^k – k-*періодичний розв'язок задачі (8). Тоді послідовності* $\{m_k\} = \left\{J_k\left(u^k\right)\right\}$ *та* $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ *обмежені.*

Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iv)$, $\omega < 0$ *та* $\omega + l > 0$. *Тоді рівняння (3) має нетривіальний розв'язок* $u \in E$. *Більше того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (3) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E$, *один з яких невід'ємний.*

Доведення. Нехай $u^k \in E_k$ розв'язок рівняння (3). Тоді за леммою 6 послідовність $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ обмежена та $\left\{u^k\right\}$ задовольняє одну з двох умов:

(vi) *послідовність* $\left\{v^k\right\}$ *задовольняє умову* $\left\|v^k\right\|_{l_k^\infty} = \left\|u^k\right\|_{l^\infty} \to 0$ *при* $k \to \infty$;

(vii) *існують такі* $\delta > 0$ *та* $\left(x_k,\, y_k\right) \in \mathbb{Z}^2$, *що* $\left|v^k_{x_k, y_k}\right| \ge \delta$ *для всіх* k.

В першому випадку $\left\|u^k\right\|_{l_k^p} \to 0$ при $k \to \infty$ для будь-якого $p > 2$. За умовою (i) для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $C_\varepsilon > 0$ таке, що

$$\left|f(t)\right| \le \varepsilon|t| + C_\varepsilon |t|^{p-1}.$$

Оскільки u^k – k-періодичний розв'язок рівняння (3), то

$$|\omega|\left\|u^k\right\|_k^2 \le \left(L_k u^k - \omega u^k,\, u^k\right)_k = \sum_{(n,m)\in Q_k} f\left(u_{n,m}^k\right)u_{n,m}^k \le \varepsilon\left\|u^k\right\|_k^2 + C_\varepsilon \left\|u^k\right\|_{l_k^p}^p.$$

Поклавши $\varepsilon = \dfrac{|\omega|}{2}$, одержуємо

$$\frac{|\omega|}{2}\left\|u^k\right\|_k^2 \le C_\varepsilon \left\|u^k\right\|_{l_k^p}^p \to 0$$

при $k \to \infty$. А це суперечить лемі 2 і, отже, виконання умови (vi) неможливе.

Таким чином, виконується умова (vii). Переходячи до підпослідовності і використовуючи інваріантність дискретних зсувів можна вважати, що $\left|u_{0,0}^k\right| \ge \delta$ з деяким $\delta > 0$. Переходячи знову до підпослідовності, ми також можемо вважати, що існує послідовність $u = \left\{u_{n,m}\right\}$ така, що $u_{n,m}^k \to u_{n,m}$ для всіх $(n,\, m) \in \mathbb{Z}^2$. Легко бачити, що $u \in E$ та $u \ne 0$. Крім того, для рівняння (3) маємо поточкову збіжність і, отже, $u \in E$ – його нетривіальний розв'язок. Друга частина теореми випливає з теореми 2. □

Таким чином, у цій статті одержано результат про існування локалізованих стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці.

Література:

1. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. // Communications in Mathematical Analysis. – 2019. – Vol. 22, № 2. – P. 18–34.
2. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations // Nonlinearity. – 2006. – 19. – P. 27-40.

3. Pankov A. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity / A. Pankov, V. Rothos // Proc. Royal Society A. – 2008. – 464. – P. 3219-3236.
4. Бак С. Існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера на двовимірній ґратці / С. Бак, І. Печериця // Науково-популярний альманах «Математика та інформатика навколо нас». – Вінниця: ФОП Рогальська І.О., 2018. – Випуск 2. – С. 3-9.
5. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – 2017. – Вип. 16. – С. 21-29.
6. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуванню нелінійністю // Математичні студії. — 2010. — Т. 33, №1. — С. 78–84.
7. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – 2018. – Вип. 18. – С. 5-13.
8. Бак С.М. Застосування многовиду Нехарі в задачі про існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера / С.М. Бак, Г.М. Ковтонюк, І.В. Печериця // Актуальні проблеми математики, фізики і технологій : зб. наук. пр. / С. В. Подолянчук (голова) [та ін.] ; Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. – Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2019. – Вип. 16. – С.10-15.
9. Мезенцев В. К. Двумерные солитоны в дискретных системах / В. К. Мезенцев, С. Л. Мушер, И. В. Рыженкова, С. К. Турицын // Письма в ЖЭТФ. – 1994. – Т. 60, вып. 11. – С. 815-821.