Бак С.М., Кудрич Ю.С.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КРИТИЧНИХ ТОЧОК В ЗАДАЧІ ПРО ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В ДИСКРЕТНОМУ РІВНЯННІ SIN-ГОРДОНА НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Вступ. В даній статті за допомогою методу критичних точок досліджено питання про існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Гордона з нелінійною взаємодією сусідніх атомів на двовимірній ґратці.

Подібні системи є цікавими з огляду на чисельні застосування у фізиці [6], [8], [9].

Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі-Пасти-Улама можна знайти в роботах О. Панкова, зокрема в [16] найбільш повний огляд результатів. В той же час для ланцюгів осциляторів відомі лише декілька праць Г. Йосса (G. Iooss) та К. Кіршгаснера (K. Kirschgässner) [12], результати якої отримано методами теорії біфуркацій, а також статті [1] і [7], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль за допомогою методу критичних точок. В статті [17] вивчались періодичні розв'язки для системи осциляторів розміщених на двовимірних ґратках, а в статтях [3], [4], [10], [11] – біжучі хвилі в таких системах. Зокрема, в [10] розглядалась система із непарною 2π–періодичною нелінійністю. А в [11] взагалі розглядалися лінійні осцилятори. В статті [4] одержано умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль. В статті [13] вивчались гетероклінічні біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Гордона з лінійною взаємодією сусідніх атомів на одновимірній ґратці, а в статтях [5] і [14] – біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Гордона з нелінійною взаємодією.

Метою статті є одержання умов існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Гордона з нелінійною взаємодією на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. У цій статті вивчається дискретне рівняння sin-Гордона, яке описує динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелійних атомів, розміщених на плоскій цілочисловій ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n, m)-го атома в момент часу t. Припускається, що кожний атом лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Рівняння руху такої системи мають вигляд:

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,\,m} = U'\left(q_{n+1,\,m} - q_{n,\,m}\right) - U'\left(q_{n,\,m} - q_{n-1,\,m}\right) + \\ +U'\left(q_{n,\,m+1} - q_{n,\,m}\right) - U'\left(q_{n,\,m} - q_{n,\,m-1}\right) + K\sin\left(q_{n,\,m}\right),\ (n,\,m) \in \mathbb{Z}^2,\end{gathered} \tag{1}$$

де $K > 0$. Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь і є двовимірним аналогом дискретного рівняння sin-Гордона з нелінійною взаємодією сусідніх атомів.

Для профілю біжучої хвилі $u(s)$, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$\begin{gathered}c^2u''(s) = U'\big(u(s+\cos\varphi) - u(s)\big) - U'\big(u(s) - u(s-\cos\varphi)\big) + \\ +U'\big(u(s+\sin\varphi) - u(s)\big) - U'\big(u(s) - u(s-\sin\varphi)\big) + K\sin\big(u(s)\big).\end{gathered} \tag{2}$$

Зазначимо, що в рівняння (2) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівняння (2), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$.

Будемо розглядати випадок періодичних біжучих хвиль, для знаходження профілю яких достатньо знайти розв'язок рівняння (2), який задовольняє умову

$$u(s+2k) = u(s),\ s \in \mathbb{R},\ k > 0. \tag{3}$$

Всюди далі під розв'язком рівняння (2) розуміється функція $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (2) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Варіаційне формулювання задачі. Позначимо через E_k гільбертів простір $E_k = \left\{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u(s+2k) = u(s)\right\}$ зі скалярним добутком $(u,\, v)_k = \int\limits_{-k}^{k} \big(u(s)v(s) + u'(s)v'(s)\big)ds$. На просторі E_k означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s+\cos\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)\,d\tau,$$

$$\left(Bu\right)\left(s\right) := u\left(s+\sin\varphi\right) - u\left(s\right) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'\left(\tau\right)d\tau.$$

Надалі передбачається, що потенціал U задовольняє умову:

$\left(i\right)$ $U\left(r\right) = \dfrac{c_0^2}{2}r^2 + V\left(r\right)$, $c_0 \geq 0$, де $V \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ *– парна функція,* $V \not\equiv 0$ *і* $0 \leq \mu V\left(r\right) \leq rV'\left(r\right)$ *для всіх* $r \in \mathbb{R}$ *і деякого* $\mu > 2$.

Неважко переконатися в тому, що якщо виконується умова $\left(i\right)$, то існують такі сталі $d > 0$ і $d_0 \geq 0$, що $V\left(r\right) \geq d\left|r\right|^{\mu} - d_0$.

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k\left(u\right) := \int\limits_{-k}^{k}\left\{\frac{c^2}{2}\left|u'\left(s\right)\right|^2 - U\left(Au\left(s\right)\right) - U\left(Bu\left(s\right)\right) + K\left(1-\cos\left(u\left(s\right)\right)\right)\right\}ds.$$

Безпосереднім обчисленням одержуються наступні два твердження.

Лема 1. *Нехай виконується умова* $\left(i\right)$, *тоді* J_k *– функціонал класу* C^1 *на* E_k, *а його похідна для* $u, h \in E_k$ *виражається формулою*

$$\left\langle J_k'\left(u\right), h\right\rangle = \int\limits_{-k}^{k}\left\{c^2u'\left(s\right)h'\left(s\right) - U'\left(Au\left(s\right)\right)Ah\left(s\right) - \right.$$

$$\left. - U'\left(Bu\left(s\right)\right)Bh\left(s\right) + K\sin\left(u\left(s\right)\right)h\left(s\right)\right\}ds.$$

Лема 2. *Критичні точки функціоналу* J_k *є* C^2*-розв'язками рівняння (*2*), що задовольняють умову (*3*).*

Основний результат. Для одержання основного результату цієї статті знадобиться теорема про гірський перевал (див. [16]).

Теорема 3 (про гірський перевал). *Нехай* I *– функціонал класу* C^1 *на гільбертовому просторі* H, *який задовольняє умову Пале-Смейла:*

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ *така, що* $I'(u_n) \to 0$ та $I(u_n)$ *обмежена, то* $\left(u_n\right)$ *містить збіжну підпослідовність.*

Нехай існують такі $e \in H$ *і* $r > 0$, *що* $\| e \| > r$ *і* $\beta := \inf_{\|v\|=r} I(v) > 0 = I(0) \geq I(e)$. *І нехай* $b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I\left(\gamma\left(t\right)\right)$, *де* $\Gamma = \left\{ \gamma \in C\left(\left[0,1\right], H\right) : \gamma\left(0\right) = 0, \gamma\left(1\right) = e \right\}$. *Тоді* b – *критичне значення функціоналу* I, *тобто існує така критична точка* $u \in H$ *функціоналу* I, *що* $I(u) = b \geq \beta$.

Лема 4. *Нехай виконується умова* (i). *Тоді існують такі* $e \in H$ *і* $r > 0$, *що* $\| e \| > r$ *і* $\beta := \inf_{\|v\|=r} I(v) > 0 = I(0) \geq I(e)$.

Доведення. Візьмемо $\varepsilon > 0$ таке, що $c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon > 0$ і виберемо достатньо мале $r \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ таке, що $\left|V\left(x\right)\right| \leq \varepsilon x^2$ для всіх $x \leq r$. Тоді, використовуючи лему 1 і нерівність $1 - \cos\left(u\right) \geq \dfrac{u^2}{4}$ при $\left|u\right| < \dfrac{\pi}{2}$, для кожного u з $\left\|u\right\|_{L^2(-k,\,k)} \leq \left\|u\right\|_k < \dfrac{\pi}{2}$ маємо

$$J_k\left(u\right) \geq \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}\left|u'\left(s\right)\right|^2 - \frac{c_0^2}{2}\left|Au\left(s\right)\right|^2 - \frac{c_0^2}{2}\left|Bu\left(s\right)\right|^2 - \varepsilon\left|Au\left(s\right)\right|^2 - \varepsilon\left|Bu\left(s\right)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + K\left(1 - \cos\left(u\left(s\right)\right)\right)\right\} ds \geq \frac{1}{2}\left(c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon\right)\left\|u'\right\|^2_{L^2(-k,\,k)} + \frac{K}{4}\left\|u\right\|^2_{L^2(-k,\,k)} \geq \alpha\left\|u\right\|_k^2,$$

де $\alpha = \min\left\{ \dfrac{1}{2}\left(c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon\right), \dfrac{K}{4} \right\} > 0$. Отже, для $\left\|u\right\|_k^2 = r^2$: $J_k\left(u\right) \geq \alpha r^2 > 0$.

Для того, щоб знайти $e \in E_k$ таке, що $\left\|e\right\|_k > r$ і $J_k\left(e\right) \leq J_k\left(0\right)$, зафіксуємо $u_0 \in E_k$. Тоді для всіх $\lambda \geq 0$, згідно нерівності $1 - \cos\left(u\right) \leq \dfrac{u^2}{2}$, маємо

$$J_k\left(\lambda u_0\right) \leq \frac{c^2}{2}\lambda^2\left\|u_0'\right\|^2_{L^2(-k,\,k)} - d\lambda^{\mu}\left\|Au_0\right\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,\,k)} - d\lambda^{\mu}\left\|Bu_0\right\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,\,k)} +$$

$$+4d_0 k + \frac{K}{2}\lambda^2\left\|u_0\right\|^2_{L^2(-k,\,k)}.$$

Звідси, враховуючи, що $\mu > 2$, $d > 0$, $d_0 \geq 0$, маємо: $\lim_{\lambda \to +\infty} J_k\left(\lambda u_0\right) = -\infty$, що й дає необхідне. Лему доведено. □

Лема 5. *Нехай виконується умова* (i) *і* $c > c_0$, *тоді функціонал* J_k *задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доводиться ця лема подібно до леми 3.4 зі статті [14]. Наступна теорема є основним результатом цієї статті:

Теорема 6. Нехай виконується умова (i), $c > c_0$, $k \geq 1$ і

$$b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,\, 1]} I\left(\gamma\left(t\right)\right) < 4kK,$$

де $\Gamma = \left\{\gamma \in C\left(\left[0, 1\right], H\right) : \gamma\left(0\right) = 0, \gamma\left(1\right) = e\right\}$. *Тоді рівняння (2) має несталий розв'язок* $u \in E_k$. *Тим самим існують дві періодичні біжучі хвилі з профілем* u *і швидкостями* $\pm c$.

Доведення. Леми 4 і 5 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал. Отже, J_k має критичну точку $u_0 \in E_k$: $J_k\left(u_0\right) = b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,\, 1]} I\left(\gamma\left(t\right)\right) < 4kK$, де $\Gamma = \left\{\gamma \in C\left(\left[0, 1\right], H\right) : \gamma\left(0\right) = 0, \gamma\left(1\right) = e\right\}$. За лемою 2 ця критична точка є розв'язком рівняння (2), який задовольняє умову (3).

Покажемо, що цей розв'язок несталий. Справді, сталий розв'язок $u \in E_k$ рівняння (2) обов'язково задовольняє тотожність $\sin\left(u\right) \equiv 0$, а отже, $u = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Якщо n – парне, то $J_k\left(\pi n\right) = 0$, але $b > 0$. Якщо ж n – непарне, то $J_k\left(\pi n\right) = 4kK$, але $b < 4kK$. Теорему доведено. □

Таким чином, у цій статті одержано результат про існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Гордона з нелінійною взаємодією сусідніх осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці (теорема 6), який поширює результат статті [14].

Анотація:

Розглядається дискретне рівняння *sin*-Гордона, яке описує динаміку нескінченного ланцюга нелінійних атомів на двовимірній ґратці. За допомогою

методу критичних точок одержано результат про існування періодичних біжучих хвиль.

Ключові слова: дискретне рівняння *sin*-Гордона, двовимірна ґратка, періодичні біжучі хвилі, метод критичних точок.

Annotation:

We consider a discrete sine-Gordon equation that describes the dynamics of an infinite chain of nonlinear atoms on two dimensional lattice. By the critical points method, result on existence of periodic traveling waves is obtained.

Keywords: discrete sine-Gordon equation, two dimensional lattice, periodic traveling waves, critical points method.

Література:

1. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів / С. М. Бак // Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140-153.

2. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. – 2012. – Т. 37, №1. – С. 76-88.

3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. – 2011. – Т. 35, №1. – С. 60-65.

4. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, №2. – С. 154-175.

5. Олексієнко В. О. Існування гомоклінічних біжучих хвиль у дискретному рівнянні sin-Гордона / В. О. Олексієнко, *Ю. С. Кудрич*, В. С. Студент // Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти: зб. наук. пр. – Вінниця, 2013. – Вип. 10. – С. 60 – 64.

6. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201-250.

7. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators / S. M. Bak // Communications in Mathematical Analysis. – 2007. – Volume 3, № 1. – P. 19-26.

8. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. – 1998. – 306. – P. 1-108.

9. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. – Berlin: Springer, 2004. – 427 pp.

10. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319-341.

11. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – Volume 3, №1 (February). – P. 105-114.

12. Ioos G. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators / G. Ioos, K. Kirchgassner // Commun. Math. Phys. – 2000. – 211. – P. 439-464.

13. Kreiner C.-F. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine-Gordon equation with linear pair interaction / C.-F. Kreiner, J. Zimmer // Discrete and continuous dynamical systems. – Vol. 25, Number 3, November. – 2009. – P. 1-17.

14. Kreiner C.-F. Travelling wave solutions for the discrete sine-Gordon equation with nonlinear pair interaction / C.-F. Kreiner, J. Zimmer // Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications. – Vol. 70, № 9. – 2009. – P. 3146-3158.

15. Makita P. D. Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices // Nonlinear Analysis. – 2011. – 74. – P. 2071-2086.

16. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices / A. Pankov. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 pp.

17. Srikanth P. On periodic motions of two-dimensional lattices // Functional analysis with current applications in science, technology and industry / P. Srikanth. – 1998. – Volume 377. – P. 118-122.