УДК 517.97

Сергій Бак, Галина Ковтонюк, Іван Печериця

ЗАСТОСУВАННЯ МНОГОВИДУ НЕХАРІ В ЗАДАЧІ ПРО ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ В ДИСКРЕТНОМУ НЕЛІНІЙНОМУ РІВНЯННІ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

Анотація. *Вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. За допомогою методу критичних точок із використанням многовиду Нехарі одержано результат про існування розв'язків у вигляді стоячих хвиль з періодичною амплітудою.*

Ключові слова: *дискретне нелінійне рівняння Шредінгера, двовимірна ґратка, стоячі хвилі, критичні точки, многовид Нехарі.*

Універсальні моделі, які здатні описати велику різноманітність фізичних явищ, зустрічаються рідко. Серед рівнянь, які описують дискретні моделі, найбільш відомими є рівняння ланцюгів осциляторів, дискретне рівняння sin-Ґордона, система Фермі–Пасти–Улама, дискретне нелінійне рівняння Шредінгера. В статтях [1; 2; 7; 8; 15; 16; 19; 20] досліджено питання існування біжучих хвиль в системах осциляторів на двовимірній ґратці. В той же час для систем Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці відомі декілька праць [3; 17], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль. В статтях [6; 9; 18] вивчались біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Ґордона на двовимірній ґратці. В статтях [4; 5; 14; 21; 22] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера.

Метою цієї статті є отримання достатніх умов існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера.

В даній роботі вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) - a_{n,m}\psi_{n+1,m}(t) - a_{n-1,m}\psi_{n-1,m}(t) - b_{n,m}\psi_{n,m+1}(t) - \\ -b_{n,m-1}\psi_{n,m-1}(t) - c_{n,m}\psi_{n,m}(t) + \frac{\mu\left|\psi_{n,m}(t)\right|^2}{1+\left|\psi_{n,m}(t)\right|^2}\psi_{n,m}(t) = 0,\ (n,m)\in\mathbb{Z}^2, \tag{1}$$

де $\psi_{n,m}(t)$ – хвильова функція $(n,\ m)$-ї частинки, $(a_{n,m}), (b_{n,m}) \subset \mathbb{R},\ \mu \neq 0$.

Стоячі хвилі в цьому випадку мають вигляд

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m}\exp(-i\omega t), \tag{2}$$

де $(u_{n,m}) \subset \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ – частотою. Будемо вивчати стоячі хвилі з k-періодичною амплітудою, тобто відповідно

$$u_{n+k,m} = u_{n,m+k} = u_{n,m}. \tag{3}$$

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (**Помилка! Джерело посилання не знайдено.**), одержимо рівняння

$$\omega u_{n,m} - a_{n,m}u_{n+1,m} - a_{n-1,m}u_{n-1,m} - b_{n,m}u_{n,m+1} - b_{n,m-1}u_{n,m-1} - c_{n,m}u_{n,m} + \\ +\frac{\mu u_{n,m}^3}{1+u_{n,m}^2} = 0. \tag{4}$$

Позначимо через

$$\left(Lu\right)_{n,m} = a_{n,m}u_{n+1,m} + a_{n-1,m}u_{n-1,m} + b_{n,m}u_{n,m+1} + b_{n,m-1}u_{n,m-1} + c_{n,m}u_{n,m}.$$

Надалі будемо розглядати більш загальне рівняння

$$Lu_{n,m} - \omega u_{n,m} = f\left(u_{n,m}\right) \tag{5}$$

з деякою нелінійністю $f\left(u_{n,m}\right)$. Нехай $F(t)$ первісна функція для функції $f(t)$, тобто $F(t) = \int\limits_0^t f(s)\,ds$. Тоді всюди далі припустимо, що виконуються наступні умови:

(i_1) *послідовності* $\left(a_{n,m}\right)$ *і* $\left(b_{n,m}\right)$ *періодичні, тобто* $a_{n+k,m} = a_{n,m+k} = a_{n,m}$, $b_{n+k,m} = b_{n,m+k} = b_{n,m}$, $c_{n+k,m} = c_{n,m+k} = c_{n,m}$ *і нижньою межею спектра оператора* L *є число 0;*

(i_2) $f(t) = o(t),\ t \to 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{f(t)}{t} = l < \infty$;

(i_3) $f \in C^1(\mathbb{R})$ *і* $f(t)t < f'(t)t^2,\ t \neq 0$;

(i_4) $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{2}f(t)t - F(t)\right) = \infty.$

Нехай $k \geq 2$ – ціле число. Тоді через E_k позначимо простір всіх k-періодичних послідовностей $\left(u_{n,m}\right)$, які задовольняють умову (3). Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком $(u, v)_k = \sum\limits_{(n,m)\in Q_k} u_{n,m}v_{n,m}$ та нормою $\|u\|_k = \left(\sum\limits_{(n,\,m)\in Q_k}\left|u_{n,m}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, де $Q_k = \left\{(n,\,m) \in \mathbb{Z}^2 : -\left[\dfrac{k}{2}\right] \leq n,m \leq k - \left[\dfrac{k}{2}\right] - 1\right\}$, $[x]$ – ціла частина x.

На цьому просторі розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\left(L_k u - \omega u,\, u\right)_k - \sum_{(n,\,m)\in Q_k} F\left(u_{n,m}\right), \tag{6}$$

де L_k — оператор L, який діє в просторі E_k. Безпосереднім обчисленням одержуємо:

Лема 1. *Похідна Гато функціоналу* J_k *визначається за формулою*

$$\left\langle J_k'(u),\, h\right\rangle = \left(L_k u - \omega u,\, h\right)_k - \sum_{(n,\,m)\in Q_k} f\left(u_{n,m}\right)h_{n,m},\ u,\, h \in E_k,$$

а його критичні точки є розв'язками рівняння (5) з простору E_k.

Для функціоналу J_k означимо многовид Нехарі

$$N_k := \left\{u \in E_k \mid \left\langle J_k'(u),\, u\right\rangle = 0,\ u \neq 0\right\} \subset E_k.$$

Введемо позначення $I_k(u) := \left\langle J_k'(u),\, u\right\rangle$. Це C^1-функціонал, похідна Гато якого визначається формулою

$$\left\langle I_k'\left(u\right), h\right\rangle = 2\left(L_k u-\omega u, h\right)_k - \sum_{(n,\, m)\in Q_k}\left(f\left(u_{n,m}\right)+f'\left(u_{n,m}\right)u_{n,m}\right)h_{n,m}\,.$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови* $(i_1)-(i_4)$, $\omega+l>0$, $\omega<0$. *Тоді множина* N_k *є непорожнім замкненим* C^1*-підмноговидом у просторі* E_k, *на якому* $I_k'\left(u\right)\neq 0$. *Крім того, існує* $\beta_0>0$ *таке, що* $\|u\|_k\geq\beta_0$ *та* $u\in N_k$.

Доведення. Нехай $\delta\in\left(-\omega, l\right)$ і E_δ — спектральний підпростір оператора $L_k-\omega$ в просторі E_k, що відповідає відрізку $\left[0, \delta\right]$. Оскільки $-\omega\in\sigma\left(L_k-\omega\right)$, то $E_\delta\neq\left\{0\right\}$. Нехай $v\in E_\delta\setminus\{0\}$. За умовою (i_2)

$$\left\langle J_k'\left(tv\right), tv\right\rangle = t^2\left(L_k v-\omega v, v\right)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} f\left(tv_{n,m}\right)tv_{n,m} =$$

$$= t^2\left(L_k v-\omega v, v\right)_k - o\left(t^2\right) > 0$$

для достатньо малих $t>0$. З іншого боку,

$$\left\langle J_k'\left(tv\right), tv\right\rangle = t^2\left(L_k v-\omega v, v\right)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} f\left(tv_{n,m}\right)tv_{n,m} \leq$$

$$\leq t^2\left(\delta\|v\|_k^2 - \sum_{(n,m)\in Q_k}\frac{f\left(tv_{n,m}\right)v_{n,m}^2}{tv_{n,m}}\right).$$

За умовою (i_2) сума в дужках збігається до $l\|v\|_k^2$, а тому $\left\langle J_k'\left(tv\right), tv\right\rangle<0$ для достатньо великих $t>0$. Тоді існує $t^*>0$ таке, що $\left\langle J_k'\left(t^*v\right), t^*v\right\rangle=0$ і $t^*v\in N_k$. Отже, $N_k\neq\varnothing$.

Нехай $u\in N_k$, тоді

$$\left\langle I_k'\left(u\right), u\right\rangle = \left\langle I_k'\left(u\right), u\right\rangle - 2I_k\left(u\right) = \sum_{(n,m)\in Q_k}\left(f\left(u_{n,m}\right)u_{n,m} - f'\left(u_{n,m}\right)u_{n,m}^2\right).$$

За умовою (i_3)ця сума є від'ємною. Тому $I_k'\left(u\right)\neq 0$ і за теоремою про неявну функцію N_k є C^1-підмноговидом в просторі E_k. Замкненість E_k очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини леми. Нехай $\varphi\left(r\right)=\sup\limits_{|t|\leq r}\dfrac{f\left(t\right)}{t}$. Це зростаюча функція при $r\geq 0$ і згідно (i_2) $\varphi\left(r\right)\to 0$ при $r\to 0$. Нехай $u\in N_k$. Зазначимо, що оператор $L_k-\omega$ додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі

$$\left|\omega\right|\|u\|_k^2\leq\left(L_k u-\omega u, u\right)_k = \sum_{(n,m)\in Q_k} f\left(u_{n,m}\right)u_{n,m} \leq$$

$$\leq\varphi\left(\|u\|_{l_k^\infty}\right)\cdot\|u\|_k^2\leq\varphi\left(\|u\|_k\right)\cdot\|u\|_k^2.$$

А це означає, що $\varphi\left(\|u\|_k\right)\geq\left|\omega\right|$. Оскільки функція φ зростаюча, то знайдеться $\beta_0>0$ таке, що $\|u\|_k\geq\beta_0$, $u\in N_k$. □

З рівності (6) випливає, що на N_k

$$J_k\left(u\right)=J_k\left(u\right)-\frac{1}{2}I_k\left(u\right)=\sum_{(n,\,m)\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(u_{n,m}\right)u_{n,m}-F\left(u_{n,m}\right)\right). \tag{7}$$

Лема 3. *Якщо* $u\in N_k$*, то функція* $\varphi\left(t\right)=J_k\left(tu\right)$*,* $t>0$ *має єдину критичну точку при* $t=1$.

Доведення. Знайдемо похідну

$$\varphi'\left(t\right)=\left(\frac{1}{2}\left(L_k\left(tu\right)-\omega tu,\,tu\right)_k-\sum_{(n,\,m)\in Q_k}F\left(tu_{n,m}\right)\right)'=$$

$$=\left(\frac{1}{2}t^2\left(L_k\left(u\right)-\omega u,\,u\right)_k-\sum_{(n,\,m)\in Q_k}F\left(tu_{n,m}\right)\right)'=$$

$$=t\left(L_k\left(u\right)-\omega u,\,u\right)_k-\sum_{(n,\,m)\in Q_k}f\left(tu_{n,m}\right)u_{n,m}=$$

$$=t\left(\left(L_k\left(u\right)-\omega u,\,u\right)_k-\sum_{(n,\,m)\in Q_k}\frac{f\left(tu_{n,m}\right)}{tu_{n,m}}u_{n,m}^2\right).$$

Оскільки на N_k

$$\varphi'\left(1\right)=\left(L_k u_{n,m}-\omega u_{n,m},\,u_{n,m}\right)_k-\sum_{(n,\,m)\in Q_k}f\left(u_{n,m}\right)u_{n,m}=\left\langle J_k'\left(u\right),u\right\rangle=0,$$

то $t=1$ є критичною точкою функції $\varphi\left(t\right)$. Її єдиність випливає зі строгої монотонності функції $\dfrac{f\left(t\right)}{t}$. □

За лемою 3 точки мінімуму функціоналу J_k на N_k є розв'язками рівняння (5). Тому природно розглянути наступну задачу мінімізації

$$m_k=\inf\left\{J_k\left(u\right):u\in N_k\right\}. \tag{8}$$

Лема 4. *Нехай виконуються умови* $\left(i_1\right)-\left(i_4\right)$*,* $\omega+l>0$*,* $\omega<0$*. Тоді задача (8) має розв'язок.*

Доведення. Нехай $\left(u^j\right)$, $u^j\in N_k$ — мінімізуючи послідовність для J_k, тобто $J_k\left(u^j\right)\to m_k$. З рівності (7) маємо

$$J_k\left(u^j\right)=\sum_{(n,\,m)\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(u_{n,m}^j\right)u_{n,m}^j-F\left(u_{n,m}^j\right)\right).$$

Тоді умова $\left(i_4\right)$ означає, що $\left\|u^j\right\|_{l^\infty}$ обмежена. Оскільки простір E_k скінченновимірний, а l^∞-норма еквівалентна евклідовій нормі на E_k, то послідовність

(u^j) є обмеженою. Переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що (u^j) збігається до $u \in N_k$ і $J_k(u) = m_k$. □

З леми 4 випливає основний результат цієї статті:

Теорема. *Нехай виконуються умови* $(i_1)-(i_4)$, $\omega + l > 0$, $\omega < 0$. *Тоді для будь-якого* $k \geq 2$ *рівняння (5) має нетривіальний* k*-періодичний розв'язок* $u^{(k)} \in E_k$. *Крім того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (5) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u^{(k)} \in E_k$.

Список використаних джерел:

1. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, №2. – С. 154–175.
2. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці // Український математичний журнал. – 2017. – Т. 69, №4. – С. 435–444.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці // Математичні студії. – 2012. – Т. 37, №1. – С. 76–88.
4. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – 2017. – Вип. 16. – С. 21-29.
5. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуванню нелінійністю // Математичні студії. – 2010. – Т. 33, №1. – С. 78–84.
6. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Ґордона на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. – Вип. 9. – С. 5–10.
7. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – Вип. 10. – С. 17–23.
8. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 5–12.
9. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2014. – Т. 57, №3. – С. 45–52.
10. Бак С.М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. – Вип. 5. – С. 3-9.
11. Бак С.М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С.М. Бак, О.О. Баранова, Ю.П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. – Вип. 4. – С. 18-24.
12. Бак С.М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці / С.М. Бак, К.Є. Рум'янцева // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. – Вип. 6. – С. 29-36.
13. Бак С.М. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. – Вип. 18. – С. 5-14.
14. Мезенцев В. К. Двумерные солитоны в дискретных системах / В. К. Мезенцев, С. Л. Мушер, И. В. Рыженкова, С. К. Турицын // Письма в ЖЭТФ. – 1994. – Т. 60, вып. 11. – С. 815-821.
15. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice / S. M. Bak // Journal of Mathematical Sciences, 2016. – Vol. 217, №2 (August). – P. 187–197.

16. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice / S. M. Bak // Ukrainian mathematical Journal. – 2017. – Vol. 4 (69). – P.509-520.
17. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice / S. M. Bak, G. M. Kovtonyuk // Matematychni Studii. – 2018. – Vol. 50, No.1. – P.75-87.
18. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice / S. Bak // Journal of mathematical physics, analysis, geometry. – 2018. – Vol. 14, № 1. – P. 16-26.
19. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319–341.
20. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – Volume 3, №1 (February). – P. 105–114.
21. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations // Nonlinearity. – 2006. – 19. – P. 27–40.
22. Pankov A. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity / A. Pankov, V. Rothos // Proc. Royal Society A. – 2008. – 464. – P. 3219–3236.

APPLICATION OF NEHARI MANIFOLD IN THE PROBLEM OF THE EXISTENCE OF STANDARD WAVES IN THE DISCRETE NONLINEAR SHRÖDINGER TYPE EQUATION

Abstract. *A discrete nonlinear Schrödinger equation on a two-dimensional lattice is studied. Using the method of critical points using a variety of Nehari we obtain the result of the existence of solutions in the form of standing waves with periodic amplitude.*

Key words: *discrete nonlinear Schrödinger equation, 2D-lattice, standing waves, critical points, Nehari manifold.*