УДК 517.97

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

БІЖУЧІ ХВИЛІ В МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Розглядається модель, яка описує динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,\,m}=U'\left(q_{n+1,\,m}-q_{n,\,m}\right)-U'\left(q_{n,\,m}-q_{n-1,\,m}\right)+\\ +U'\left(q_{n,\,m+1}-q_{n,\,m}\right)-U'\left(q_{n,\,m}-q_{n,\,m-1}\right)-V'\left(q_{n,\,m}\right),\ \left(n,\,m\right)\in\mathbb{Z}^2,\end{gathered}\tag{1}$$

де $q_{n,\,m}(t)$ — узагальнена координата $(n,\,m)$-го осцилятора в момент часу t, потенціали $U,\,V\in C^1(\mathbb{R})$.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. В статтях [2; 3] вивчались періодичні біжучі хвилі для таких систем.

Зазначимо, що біжуча хвиля у цьому випадку має вигляд $q_{n,\,m}(t)=u\left(n\cos\varphi+m\sin\varphi-ct\right)$ і для її профілю $u(s)$, де $s=n\cos\varphi+m\sin\varphi-ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$\begin{gathered}c^2u''(s)=U'(u(s+\cos\varphi)-u(s))-U'(u(s)-u(s-\cos\varphi))+\\ +U'(u(s+\sin\varphi)-u(s))-U'(u(s)-u(s-\sin\varphi))-V'\left(u(s)\right).\end{gathered}\tag{2}$$

Вивчаються періодичні та відокремлені біжучі хвилі. Профіль періодичної хвилі задовольняє умову

$$u(s+2k)=u(s),\ s\in\mathbb{R},\ k>0,\tag{3}$$

а відокремленої –

$$\lim_{s\to\pm\infty}u(s)=u(\pm\infty)=0.\tag{4}$$

Розглядаються потенціали $U(r)$ і $V(r)$ вигляду:

$$(i)\ \ U(r)=\frac{c_0^2}{2}r^2+f(r),\ V(r)=-\frac{a^2}{2}r^2+g(r),\ \text{де}\ c_0\ge 0,\ a>0.$$

Крім того, припускається, що неквадратична частина кожного з цих потенціалів $h \in \{f;\, g\}$ задовольняє умови:

(ii) $h(0) = h'(0) = 0$ *і* $h'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$*;*

(iii) *існує* $\mu > 2$ *таке, що* $0 \le \mu h(r) \le r h'(r)$.

(iii^+) *існують* $r_0 > 0$ *і* $\mu > 2$ *такі, що* $h(r_0) > 0$ *і для* $r \ge 0$

$$0 \le \mu h(r) \le r h'(r);$$

або

(iii^-) *існують* $r_0 > 0$ *і* $\mu > 2$ *такі, що* $h(r_0) > 0$ *і для* $r \le 0$

$$0 \le \mu h(r) \le r h'(r);$$

Використовуючи варіаційний метод, одержано наступні результати:

Теорема 1 ([1]). *Нехай виконуються умови* (i), (ii), (iii^+), (iii^-). *Тоді для будь-яких* $k \ge 1$ *і* $c \in (0; c_0]$ *рівняння (2) має розв'язок , який задовольняє умову (3). Тим самим існують дві періодичні біжучі хвилі з профілем и і швидкостями* $\pm c$.

Теорема 2 ([2]). *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$. *Тоді для будь-яких* $k \ge 1$ і $c > c_0$ *рівняння (2) має розв'язок, який задовольняє умову (3). Тим самим існують дві періодичні біжучі хвилі з профілем и і швидкостями* $\pm c$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$. *Тоді для будь-якого* $c > c_0$ *рівняння (2) має розв'язок, який задовольняє умову (4). Таким чином, існують дві відокремлені біжучі хвилі з профілем и та швидкостями* $\pm c$.

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – Вип. 10. – С. 17-23.
2. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 5-12.