С. М. Бак, О. С. Сандульська

ПОБУДОВА ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ЛАНЦЮГА ОСЦИЛЯТОРІВ ЗІ СТЕПЕНЕВИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

В даній статті вивчаються рівняння, що описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Нехай q_n – узагальнена координата n-го осцилятора. Припускається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з двома своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - a_n(q_n - q_{n+1}),\ n \in \mathrm{Z}. \tag{1}$$

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n\to\pm\infty} q_n(t) = 0, \tag{2}$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи представляють інтерес у зв'язку з численним фізичним застосуванням [4], [6], [7]. В працях [1], [4], [9] вивчались періодичні за часом розв'язки в таких ланцюгах, а в [3], [5], [8] – біжучі хвилі. Відома тільки одна праця, в якій розглянуто задачу Коші для таких систем [2]. Огляд відомих результатів про подібні системи зроблено в [10].

В даній статті за допомогою методу умовної мінімізації отримано умови існування T-періодичних розв'язків для системи (1) зі степеневим потенціалом та вказано процедуру їх побудови.

Приведемо спочатку результат, отриманий у статті [1].

Потенціал $U_n(r)$ запишемо у вигляді $U_n(r) = -\frac{c_n}{2}r^2 + V_n(r)$ і покладемо $b_n = c_n - a_n - a_{n-1}$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1}q_{n-1} + b_n q_n - V_n'(q_n),\ n \in \mathrm{Z}. \tag{3}$$

Враховуючи граничні умови (2), при певних припущеннях це рівняння природно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q) \tag{4}$$

в гільбертовому просторі l^2 дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, де $\left(Aq\right)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n$, а нелінійний оператор B визначається формулою $\left(B(q)\right)_n = V_n'(q_n)$. Скалярний добуток і норма в l^2 позначаються $\left(\cdot\,,\cdot\right)$ і $\|\cdot\|$ відповідно.

Передбачається, що

(i) *коефіцієнти* a_n *і* c_n *є* N*-періодичними, тобто* $a_{n+N} = a_n$, $c_{n+N} = c_n$, *і* A *– додатно визначений в* l^2*, тобто існує таке* $\alpha_0 > 0$*, що*

$$\left(Aq, q\right) \ge \alpha_0 \|q\|^2, \; q \in l^2;$$

(ii) *для будь-якого* $n \in \mathbb{Z}$ *функція* $V_n(r)$ *неперервно диференційовна,* $V_n(0) = V_n'(0) = 0$ *і* $V_n'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$*, та виконується умова* N*-періодичності* $V_{n+N} = V_n$;

(iii) *існує таке* $\mu > 2$*, що* $0 < \mu V_n(r) \le V_n'(r) r, \;\; r \ne 0.$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$*. Тоді для будь-якого* $T > 0$ *рівняння (4), має ненульовий* T*-періодичний розв'язок. При цьому існує таке* $T_0 > 0$*, що при* $T \ge T_0$ *цей розв'язок не є постійним.*

Постановка задачі. Будемо розглядати потенціали вигляду

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2} r^2 + \frac{d_n}{p} |r|^p, \tag{5}$$

де $d_n > 0,\; p > 2$. Передбачається, що розглядуваний ланцюг просторово періодичний, тобто існує таке натуральне N, що $a_{n+N} = a_n, c_{n+N} = c_n$ і $d_{n+N} = d_n$. Покладемо $b_n = c_n - a_n - a_{n-1}$. Тоді рівняння (1) прийме вигляд

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n - d_n |q_n|^{p-2} q_n, \;\; n \in \mathrm{Z}. \tag{6}$$

Таким чином, система (3) може розглядатися як диференціально-операторне рівняння в l^2 вигляду (4) з обмеженим самоспряженим лінійним оператором A і обмеженим неперервним нелінійним оператором

$$\left(B(q)\right)_n = d_n \left|q_n\right|^{p-2} q_n.$$

В подальшому використовуються також простори $l^p, 1 \le p \le \infty$, двохсторонніх послідовностей. Норма в l^p позначається $\|\cdot\|_{l^p}$. Через l_0 позначається простір фінітних послідовностей (рівних нулю всюди, за винятком скінченного числа номерів). Як звичайно, $supp\left(v_k\right) = \left\{k \in Z : v_k \neq 0\right\}$.

Надалі передбачається, що виконується наступна умова додатності.

$\left(P\right)$ *Оператор* A *додатно визначений, тобто існує таке* $\alpha_0 > 0$*, що*

$$\left(Aq, q\right) \ge \alpha_0 \|q\|^2.$$

Основні результати. Розглянемо функціонал

$$\Phi(u) = \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \frac{1}{2} \|\dot{u}(t)\|_{l^2}^2 + \frac{1}{2}\left(Au(t), u(t)\right) - \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \left|u_n(t)\right|^p \right\} dt, \tag{7}$$

який визначений на просторі X_T – підпросторі T-періодичних функцій із $H^1_{loc}\left(R; l^2\right)$. Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\left(q, p\right)_T = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\dot{q}(t), \dot{p}(t)\right) + \left(q(t), p(t)\right)\right] dt.$$

Відповідна норма в X_T позначається через $\|\cdot\|_T$.

Функціонал Φ неперервно диференційовний за Фреше і

$$\left\langle \Phi'(u), v \right\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\dot{u}, \dot{v}\right) + \left(Au, v\right) - \left(B(u), v\right)\right] dt, \tag{8}$$

для будь-якого $v \in X_T$. Його критичні точки є розв’язками задачі (6), (2).

Розглянемо наступні два функціонали на X_T:

$$\Psi(u)=\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\|\dot{u}\|_{l^2}^2+\left(Au,u\right)\right]dt,\ \ S(u)=\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}(\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_n\left|u_n(t)\right|^p)dt.$$

Відмітимо, що $\Phi(u)=\Psi(u)-S(u)$.

Для будь-якого $\theta>0$ розглянемо задачу мінімізації

$$I_\theta=\inf\left\{\Psi(v):v\in X_T,\,S(v)=\theta\right\}. \tag{9}$$

Припустимо, що для деякого $\theta>0$ задача (9) має розв'язок і нехай $u\in X_T$ – точка мінімуму. Оскільки функціонали Ψ та S неперервно диференційовні, то існує таке $\lambda\in\mathbb{R}$ (множник Лагранжа), що

$$\int_{-T/2}^{T/2}\left[\left(\dot{u},\dot{v}\right)+\left(Au,v\right)\right]dt=\lambda\int_{-T/2}^{T/2}(\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_n\left|u_n(t)\right|^{p-2}u_n(t)v_n(t))dt \tag{10}$$

для будь-якого $v\in X_T$. Підстановка $v=u$ показує, що $\lambda>0$, оскільки в цьому випадку обидва інтеграли в (10) додатні. Більше того, при $v=u$ ліва частина в (10) рівна $2I_\theta$, а інтеграл в правій частині рівний $p\theta$. Тому

$$\lambda=\frac{2I_\theta}{p\theta}. \tag{11}$$

Покладемо $q=\lambda^{\frac{1}{p-2}}u$. Тоді рівняння (10) зразу ж показує, що q – розв'язок задачі (6), (2). Звідси слідує

Теорема 2. *Нехай u – розв'язок задачі (9). Тоді $q=\lambda^{\frac{1}{p-2}}u$ є T-періодичним розв'язком задачі (1), (2) з потенціалом (5).*

Перейдемо до дослідження задачі (9). Відмітимо спочатку, що $\Psi(sv)=s^2\Psi(v)$ та $S(sv)=s^pS(v)$ для будь-якого $s>0$. Звідси слідує

Лема 1. *Задачі (9) при різних θ еквівалентні. При цьому*

$$I_\theta=\theta^{2/p}I_1. \tag{12}$$

Для подальшого нам знадобиться наступний дискретний варіант принципу концентрованої компактності (див. [11]).

Лема 2. *Нехай* $v^{(m)} = \left\{ v_n^{(m)} \right\}$ *така послідовність невід'ємних елементів в* l^1, *що* $\left\| v^{(m)} \right\|_{l^1} = \theta > 0$. *Тоді існує така підпослідовність (як і раніше позначається* $v^{(m)}$*), що виконується одна із наступних трьох можливостей:*

(a_2) *(жорсткість) існує таке* $n_m \in Z$, *що для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* $r > 0$, *що* $\sum\limits_{|n-n_m| \le r} v_n^{(m)} \ge \theta - \varepsilon;$

(b_2) *(розпливання)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| v^{(m)} \right\|_{l^\infty} = 0;$

(c_2) *(дихотомія) знайдеться* $\alpha \in (0, \theta)$ *з наступною властивістю:*

для будь-якого $\varepsilon > 0$ *існують такі невід'ємні послідовності* $v^{(m,1)}, v^{(m,2)} \in l_0$, *що*

$$\left\| v^{(m)} - \left(v^{(m,1)} + v^{(m,2)} \right) \right\| \le \varepsilon,$$

$$\left| \left\| v^{(m,1)} \right\|_{l^1} - \alpha \right| \le \varepsilon, \quad \left| \left\| v^{(m,2)} \right\|_{l^1} - (\theta - \alpha) \right| \le \varepsilon$$

для всіх достатньо великих m, *і* $dist\left[supp\left(v^{(m,1)}\right), supp\left(v^{(m,2)}\right) \right] \to \infty$ *при* $m \to \infty$.

Теорема 3. *В зроблених припущеннях для будь-якого* $T > 0$ *задача (9) має розв'язок* $u \in X_T$. *Більше того, існує таке* $T_0 > 0$, *що* $u \ne const$ *при* $T \ge T_0$.

Доведення. Розглянемо довільну мінімізуючу послідовність $w^{(m)}$ задачі (9), $w^{(m)} \in X_T$, $S(w^{(m)}) = \theta$ і $\Psi(w^{(m)}) \to I_\theta$. Можна при цьому вважати, що $\Psi(w^{(m)}) \le 2I_\theta$. Згідно умови (P): $\Psi(u) \ge \frac{\beta_0}{2} \|u\|_T^2$, де $\beta_0 = \min\{1, \alpha_0\}$. Тому існує така константа $C > 0$, яка залежить тільки від константи α_0 із умови (P), що

$$\left\| w^{(m)} \right\|_T^2 \le C I_\theta. \tag{13}$$

Нехай $w^{(m)} = w^{(m)}(t) = \left\{ w_n^{(m)}(t) \right\}$. Покладемо

$$v_n^{(m)} = \frac{1}{p} \int_{-T/2}^{T/2} d_n \left| w_n^{(m)}(t) \right|^p dt, \quad v^{(m)} = \left\{ v_n^{(m)} \right\}.$$

Оскільки $H^1\left(-T/2, T/2\right)$ неперервно вкладений в $L^p\left(-T/2, T/2\right)$ (з константою, що не залежить від T), то із нерівності (13) випливає, що

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(v_n^{(m)} \right)^{2/p} \le C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\| w_n^{(m)} \right\|^2_{L^p\left(-T/2, T/2\right)} \le C \left\| w^{(m)} \right\|^2_T \le C I_\theta. \qquad (14)$$

Крім того,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n^{(m)} = \left\| v^{(m)} \right\|_{l^1} = \theta > 0. \qquad (15)$$

До послідовності $v^{(m)}$ застосуємо лему 2. Після переходу до підпослідовності, для $v^{(m)}$ має виконуватися одне із тверджень $\left(a_2\right) - \left(c_2\right)$. Можна показати, що твердження $\left(b_2\right)$ і $\left(c_2\right)$ не можуть виконуватися.

Таким чином, для розглядуваної послідовності $v^{(m)}$ має місце $\left(a_2\right)$ (жорсткість). Відмітимо, що згідно умов періодичності, $\Psi\left(\left\{ u_{n+N}(t) \right\}\right) = \Psi\left(\left\{ u_n(t) \right\}\right)$ і $S\left(\left\{ u_{n+N}(t) \right\}\right) = S\left(\left\{ u_n(t) \right\}\right)$. Тому, замінюючи $\left\{ w_n^{(m)}(t) \right\}$ на $\left\{ w_{n+b_m N}^{(m)}(t) \right\}$ з деяким $b_m \in Z$, можна вважати, що в $\left(a_2\right)$ $n_m = 0$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $r > 0$, що $\sum_{|n|>r} v_n^{(m)} \le \varepsilon.$

Оскільки $d_n > 0$ – періодична послідовність, то остання нерівність означає, що для будь-якого ε знайдеться таке $C > 0$, що

$$\sum_{|n|>r} \int_{-T/2}^{T/2} \left| w_n^{(m)}(t) \right|^p dt \le C\varepsilon. \qquad (16)$$

Згідно (13), послідовність $w^{(m)}$ обмежена в X_T. Переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $w^{(m)} \to u = \left\{ u_n \right\}$ слабко в X_T. Оскільки X_T неперервно вкладений в $L^p\left(-T/2, T/2; l^p\right)$, то $w^{(m)} \to u$

слабко і в останньому просторі. Крім того, $H^1\left(-T/2, T/2\right)$ компактно вкладений в $L^p\left(-T/2, T/2\right)$. Тому, переходячи до підпослідовності, із використанням діагонального процесу, можна вважати, що $w_n^{(m)} \to u_n$ сильно в $L^p\left(-T/2, T/2\right)$ для будь-якого $n \in Z$. Крім того, із рівності $S\left(w^{(m)}\right) = \theta$ випливає, що $w^{(m)}$ обмежена послідовність в $L^p\left(-T/2, T/2; l^p\right)$. Разом зі збіжністю $w_n^{(m)} \to u_n$ і (16) це дає сильну збіжність $w^{(m)} \to u$ в $L^p\left(-T/2, T/2; l^p\right)$. Разом з неперервністю S на $L^p\left(-T/2, T/2; l^p\right)$ це показує, що $S(u) = \theta$. Оскільки Ψ – неперервний квадратичний додатно визначений функціонал, то він слабко напівнеперервний знизу. Звідси випливає, що

$$I_\theta \le \Psi(u) \le \lim_{m\to\infty} \Psi\left(w^{(m)}\right) = I_\theta.$$

Отже, $\Psi(u) = I_\theta$ і u – розв'язок задачі (9).

Доведемо останнє твердження теореми. Припустимо, що $u = \{u_n\}$ – сталий розв'язок задачі (9). Тоді

$$0 < \theta = S(u) = \frac{1}{p}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \left|u_n\right|^p T.$$

Звідси $\theta \le C\|u\|_{l^p}^p T$ або $\|u\|_{l^p} \ge C_0\theta / T^{1/p}$. Тоді

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\left(Au, u\right)T \ge \frac{\alpha_0}{2}\|u\|_{l^2}^2 T \ge \frac{\alpha_0\left(C_0\theta\right)^2}{2} T^{1-2/p}. \tag{17}$$

З іншого боку, нехай $v = \{v_n\}$ таке, що $v_n \equiv 0$ при $n \ne 0$, $v_0(t) = \lambda \sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)$ при $0 \le t \le \eta T$, $v_0(t) = 0$ при $\eta T < t < T$ і v_0 продовжена на всю вісь як T-періодична функція ($0 < \eta < 1$). Константу λ виберемо із умови $S(v) = \theta$. Маємо

$$S(v)=\alpha_0\int_0^T\left|\lambda\sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)\right|^p dt=\alpha_0\left(\eta T\right)\lambda^p A_p,$$

де $A_p=\int_0^1\left|\sin 2\pi t\right|^p dt$. Звідси $\lambda=\left(\alpha_0\eta T A_p\right)^{-1/p}$. Далі

$$2\Psi(v)=\lambda^2\int_0^{\eta T}\left[\left(\frac{2\pi}{\eta T}\cos^2\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)\right)^2+b_0\sin^2\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)\right]dt=\lambda^2 A_2\left(\frac{4\pi^2}{\eta T}+b_0\eta T\right)=$$

$$=A_2\left(d_0A_p\eta T\right)^{-2/p}\left(\frac{4\pi^2}{\eta T}+b_0\eta T\right)=A_2\left(d_0A_p\right)^{-2/p}\left(\eta T\right)^{1-2/p}\left(4\pi^2\left(\eta T\right)^{-2}+b_0\right).$$

Відмітимо, що згідно умови $\left(P\right)$, $b_0\geq\alpha_0>0$. Виберемо $\eta\in\left(0,1\right)$ таким чином, що $A_2b_0\left(d_0A_p\right)^{-2/p}\eta^{1-2/p}<\alpha_0\left(C_0\theta\right)^2$. Пряме обчислення з урахуванням (17) показує, що при достатньо великих T: $\Psi(v)<\Psi(u)$. Отже, u не може бути розв'язком задачі (9). Теорему доведено. □

Анотація

В даній статті за допомогою методу умовної мінімізації отримано умови існування T-періодичних розв'язків для системи рівнянь, які описують нескінченні ланцюги лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів зі степеневим потенціалом, а також вказано процедуру їх побудови.

Ключові слова: ланцюг осциляторів, періодичні розв'язки, критичні точки функціоналу, гірський перевал.

Література

1. *Бак С.Н., Панков А.А.* О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов //Доповіді НАН України. – 2004. – №9. – С.13-16.

2. *Бак С.Н., Панков А.А.* О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов //Український математичний журнал. – 2006. – №6. – Т.58. – С.723-729.
3. *Бак С.М.* Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів //Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140-153.
4. *Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: Existence,linear stability and quantization // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201 – 250.
5. *Bak S.M.* Peridoc traveling waves in chains of oscillators// Communications in Mathematical Analysis. – 2007. – Volume 3, Number 1. – P. 19–26.
6. *Braun O.M., Kivshar Y.S.* Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model //Physics Repts. – 1998. – 306. – P. 1 – 108.
7. *Braun O.M., Kivshar Y.S.* The Frenkel–Kontorova model. – Berlin: Springer, 2004. – 427 p.
8. *Iooss G., Kirschgässner K.* Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators //Commun. Math. Phys. – 2000. – 211. – P. 439 – 464.
9. *MacKay R.S., Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible a Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators //Nonlinearity. – 1994. – P.1623 – 1643.
10. *Pankov A.* Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 p.
11. *Pankov A., Zakharchenko N.* On some discrete variational problems //Acta Appl. Math. – 2001. – 65. – P. 295 – 303.