

**Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка**

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 6

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2012

УДК 519.6:519.7

ББК 22

М34

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:
Серія КВ № 14521-3492Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до переліку наукових фахових видань
ВАК України з фізико-математичних наук (постанова Президії ВАК України
від 14 жовтня 2009 р. № 1-05/4, Бюлетень ВАК України №11, 2009)

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка,
протокол № 7 від 26 червня 2012 року.

Рецензенти:

В. І. Герасименко, д.ф.-м.н., провідний науковий співробітник Інституту математики НАН України;

В. В. Городецький, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри алгебри та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Редакційна колегія:

Відповідальний редактор
Ю. Г. КРИВОНОС
академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

Заст. відповідального редактора
А. Ф. ВЕРЛАНЬ
член-кор. НАПНУ, д.т.н., проф.

Відповідальний секретар
І. Б. КОВАЛЬСЬКА
к.ф.-м.н., доцент

В. К. ЗАДІРАКА
член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

В. П. КЛИМЕНКО
д.ф.-м.н., проф.

І. М. КОНЕТ
д.ф.-м.н., проф.

М. О. ПЕРЕСТЮК
академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

Ю. В. ТЕПЛІНСЬКИЙ
д.ф.-м.н., проф.

А. О. ЧИКРІЙ
член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: Ю. Г. Кривонос (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. — Вип. 6. — 256 с.

У збірнику друкуються результати досліджень вітчизняних та закордонних науковців, що стосуються проблем застосування математичних моделей в різних галузях людської діяльності.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів, студентів.

УДК 519.6:519.7

ББК 22

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2012
© Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012

22. Мансимов К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов. — Баку : Изд-во БГУ, 2002. — 114 с.
23. Габасов Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Мн. : Изд-во БГУ. — 400 с.
24. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А. И. Пропой. — М. : Наука, 1973. — 256 с.
25. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами / Л. Т. Ащепков. — Новосибирск, 1987 — 272 с.
26. Габасов Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Наука, 1973. — 256 с.

In this work there is considered an optimal control problem for Volterra discrete systems. Necessary conditions of optimality are derived.

Key words: *necessary optimality condition, system of Volterra difference equations, discrete maximum principle, singular control, increment formula.*

Отримано: 02.03.2012

УДК 517.9

С. М. Бак*, канд. фіз.-мат. наук,
К. Є. Рум'янцева**, канд. пед. наук

*Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця,

**Вінницький інститут економіки Тернопільського національного
економічного університету, м. Вінниця

КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ З КУБІЧНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченний ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Отримано результат про існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші у випадку кубічного потенціалу.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, задача Коші, глобальний розв'язок, кубічний потенціал.*

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m) -го осцилятора в момент часу t . Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми

найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m}) + b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n, m \rightarrow \pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \quad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [8; 10; 11]. В статті [14] вивчалися періодичні розв'язки для системи осциляторів на двовимірних ґратках, а в статтях [2; 3; 12] та [13] — біжучі хвилі. Питання коректності задачі Коші для ланцюгів нелінійних осциляторів (випадок одновимірної ґратки) вивчалось в [5] і [9], а для систем осциляторів на двовимірних ґратках — в [3] і [4]. Зауважимо, що в статтях [3] і [4] отримано умови існування та єдиності глобального розв'язку, які не задовольняє кубічний потенціал.

Метою статті є одержання умов існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці у випадку кубічної потенціальної функції.

Постановка задачі та основні припущення. Потенціал $U_{n,m}(r)$

запишемо у вигляді $U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r)$ і покладемо $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (3)$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q) \quad (4)$$

де

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m},$$

(такі оператори вивчалися в [6, с. 597]), а нелінійний оператор B визначається формулою

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (5)$$

в просторі $l_2 = l_2(\mathbb{Z}^2)$ дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком

$$(q^{(1)}, q^{(2)}) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} q_{n,m}^{(1)} q_{n,m}^{(2)}.$$

Скалярний добуток і норму в l_2 позначатимемо (\cdot, \cdot) і $\|\cdot\|$ відповідно.

Відмітимо, що рівняння (3) у просторі l_2 можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p, q), \\ \dot{q} = H'_p(p, q); \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(\|p\|^2 - (Aq, q)) + \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}), \quad (6)$$

де $p = \dot{q}$.

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значеннями в l_2 .

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)}, \quad \dot{q}(0) = q^{(1)}. \quad (7)$$

Розглянемо тепер випадок кубічного потенціалу:

$$V_{n,m}(r) = \frac{d_{n,m}}{3} r^3,$$

де $d_{n,m}$ — обмежена послідовність. Передбачається, що оператор A від'ємно визначений, тобто

$$(Aq, q) \leq -\alpha_0 \|q\|^2, \quad \alpha_0 > 0, \quad (8)$$

для $q \in l_2$.

Покладемо

$$J(q) = -\frac{1}{2}(Aq, q) + \frac{1}{3} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} d_{n,m} q_{n,m}^3 = \frac{1}{2} a(q) + \frac{1}{3} b(q).$$

Відмітимо, що $a^{1/2}(q)$ — норма на l_2 , еквівалентна стандартній нормі $\|\cdot\|_{l_2}$. Тоді гамільтоніан (6) набуде вигляду

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \|p\|^2 + J(q).$$

Оскільки $|b(q)| \leq c' \|q\|_{l_2}^3 \leq c'' \|q\|^3$, то існує така константа $c > 0$, що

$$|b(q)|^{1/3} \leq ca(q)^{1/2}, \quad q \in l_2. \quad (9)$$

Далі c завжди позначає константу з (9).

Допоміжні леми. Покладемо

$$\gamma = \inf_q \left\{ \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda q) : q \in l_2, q \neq 0 \right\}. \quad (10)$$

Лема 1. Правильна нерівність

$$\gamma \geq \frac{1}{6c^6}.$$

Доведення. Маємо $J(\lambda q) = \frac{\lambda^2}{2} a(q) + \frac{\lambda^3}{3} b(q)$. Якщо $b(q) \geq 0$, то

$$\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda q) = +\infty.$$

Якщо $b(q) < 0$, то

$$\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda q) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)} q\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3(q)}{b^2(q)}.$$

Підносячи нерівність (9) до 6-го степеня, отримуємо необхідне.

Лемі доведено.

Покладемо

$$W_\gamma = \left\{ q \in l_2 : 0 \leq J(\lambda q) < \gamma, \forall \lambda \in [0, 1] \right\}. \quad (11)$$

Очевидно, що W_γ зірковий відносно початку координат, тобто якщо $q \in W_\gamma$, то $\theta q \in W_\gamma$ для будь-якого $\theta \in [0, 1]$.

Лема 2. Множина W_γ містить відкритий еліпсоїд $B = \{q \in l_2 : a(q) < \rho\}$, для будь-якого $\rho > 0$, що задовольняє умовам:

$$\rho \leq \frac{9}{4c^6},$$

$$\frac{\rho}{2} + \frac{c^3}{3} \rho^{3/2} < \gamma.$$

Доведення. Згідно (9)

$$\frac{\lambda^2}{2} a(q) - \frac{\lambda^3 c^3}{3} a^{3/2}(q) \leq J(\lambda q) \leq \frac{\lambda^2}{2} a(q) + \frac{\lambda^3 c^3}{3} a^{3/2}(q).$$

При $a(q) \leq \frac{9}{4c^6}$ маємо

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda c^3}{3} a^{1/2}(q) \geq 0,$$

для всіх $\lambda \in [0, 1]$.

Отже, $J(\lambda q) \geq 0$ для будь-якого $\lambda \in [0, 1]$.

Якщо $a(q) \leq \rho$, то, згідно другої умови для ρ :

$$J(\lambda q) < \frac{\lambda^2}{2} \rho + \frac{\lambda^3 c^3}{3} \rho^{3/2} = \lambda^2 \left[\frac{1}{2} \rho + \frac{\lambda c^3}{3} \rho^{3/2} \right] < \gamma,$$

для всіх $\lambda \in [0, 1]$.

Отже, $J(\lambda q) < \gamma$.

Лемму доведено.

Покладемо

$$W_{*,\gamma} = \{q \in l_2 : a(q) + b(q) > 0, J(q) < \gamma\}.$$

Згідно неперервності функціоналів $a(q)$ і $b(q)$, $W_{*,\gamma}$ — відкрита множина.

Лема 3. $W_\gamma = W_{*,\gamma} \cup B$.

Доведення. Достатньо показати, що $W_\gamma = W_{*,\gamma} \cup \{0\}$.

Нехай $q \in W_\gamma$, $q \neq 0$. Якщо $b(q) \geq 0$, то $a(q) + b(q) > 0$ і $J(q) < \gamma$. Якщо ж $b(q) < 0$, то

$$\sup J(\lambda q) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)} q\right) \geq \gamma.$$

Тоді $-\frac{a(q)}{b(q)} > 1$ і $J(q) < \gamma$. Це показує, що $q \in W_{*,\gamma}$.

Навпаки, нехай $q \in W_{*,\gamma}$. Якщо $b(q) \geq 0$, то

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} J(\lambda q) = J(q) < \gamma$$

і $q \in W_\gamma$. Якщо ж $b(q) < 0$, то нерівність $-\frac{a(q)}{b(q)} > 1$ показує, що

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} J(\lambda q) = J(q),$$

що й дає необхідне. **Лемму доведено.**

В силу відкритості $W_{*,\gamma}$ і B , лема 3 показує, що множина W_γ відкрита, тобто є околом нуля в l_2 .

Лема 4. W_γ — обмежена множина.

Доведення. Якщо $b(q) \geq 0$, то $J(q) \geq \frac{1}{2}a(q)$ і $a(q) < 2\gamma$. Якщо ж $b(q) < 0$, то за лемою 3, $b(q) > -a(q)$. Значить, $J(q) > \frac{1}{6}a(q)$ і $a(q) < 6\gamma$. Таким чином, W_γ міститься в обмеженій множині $\{q \in l_2 : a(q) < 6\gamma\}$. **Лему доведено.**

Основний результат. Наступна теорема є основним результатом цієї статті.

Теорема 1. Нехай $V_{n,m}(r) = \frac{d_{n,m}}{3}r^3$, де $d_{n,m}$ — обмежена послідовність, оператор A від'ємно визначений і $q^{(0)} \in W_\gamma$, $q^{(1)} \in l_2$ такі, що $\frac{1}{2}\|q^{(1)}\|^2 + J(q^{(0)}) < \gamma$. Тоді задача Коші з початковими даними $q^{(0)}, q^{(1)}$ має єдиний глобальний розв'язок.

Доведення. Існування та єдиність локального розв'язку $q(t)$ випливає із теореми 1 статті [4]. Далі, як і в доведенні теореми 3, випадок (а) (див. [3]), достатньо показати, що $q(t)$ залишається обмеженим.

Покажемо, що $q(t) \in W_\gamma$. Припустимо, що це не так і нехай $t_1 > 0$ найменше значення $t > 0$, для якого $q(t_1) \notin W_\gamma$. Тоді $q(t_1)$ належить межі ∂W_γ множини W_γ . Оскільки W_γ зірковий, то $\theta q(t_1) \in W_\gamma$ для будь-якого $\theta \in [0, 1)$. Значить, $J(\theta q(t_1)) < \gamma$. Переходячи до границі при $\theta \rightarrow 1$, отримуємо, що $J(q(t_1)) \leq \gamma$. Якщо $J(q(t_1)) < \gamma$, то, згідно означення W_γ і того, що $J(\theta q(t_1)) < \gamma$, отримуємо $q(t_1) \in W_\gamma$. Останнє протирічить зробленому припущенню. Таким чином, $J(q(t_1)) = \gamma$.

Оскільки гамільтоніан H зберігається (див. [3]), то

$$J(q(t_1)) \leq \frac{1}{2}|\dot{q}(t_1)|^2 + J(q(t_1)) = \frac{1}{2}|q^{(1)}|^2 + J(q^{(0)}) < \gamma.$$

Отримане протиріччя показує, що $q(t) \in W_\gamma$ для всіх $t > 0$, для яких q визначене. Отже, розв'язок існує при всіх $t > 0$.

Оскільки рівняння (1) інваріантне відносно заміни t на $-t$, то розв'язок визначено при всіх $t \in \mathbb{R}$. **Теорему доведено.**

Доведена теорема дає існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші у випадку, коли початкові дані достатньо малі в l_2 -нормі.

Оскільки множина початкових даних із теореми 1 статті [4] відкрита і містить нульові дані, то отримуємо такий наслідок.

Наслідок. Нехай $V_{n,m}(r) = \frac{d_{n,m}}{3} r^3$, де $d_{n,m}$ — обмежена послідовність, оператор A від'ємно визначений. Тоді існує таке $\delta > 0$, що для будь-яких $q^{(0)}, q^{(1)} \in l_2$ з $\|q^{(0)}\| \leq \delta$ і $\|q^{(1)}\| \leq \delta$ задача Коші має єдиний глобальний розв'язок.

Висновок. У статті одержано умови існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці (теорема 1), які поширюють результати статей [3—5].

Список використаних джерел:

1. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154–175.
2. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2011. — Т. 35, № 1. — С. 60–65.
3. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 3–9.
4. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С. М. Бак, О. О. Баранова, Ю. П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 18–24.
5. Бак С. Н. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний журнал. — 2006. — Т. 58, № 6. — С. 723–729.
6. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наук. думка, 1965. — 798 с.
7. Рид М. Методы современной математической физики : в 4-х т. / М. Рид, Б. Саймон. — М. : Мир, 1978. — Т. 2. — 395 с.
8. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. — 1997. — Vol. 103. — P. 201–250.
9. Bak S. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations / S. Bak, G. N'Guerekata, A. Pankov // Communications in Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 8, № 1. — P. 79–86.

10. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // *Physics Repts.* — 1998. — Vol. 306. — P. 1–108.
11. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. — Berlin : Springer, 2004. — 427 p.
12. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // *Nonlinearity.* — 2007. — Vol. 20. — P. 319–341.
13. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // *Discrete and continuous dynamical systems.* — 2003. — Vol. 3, №1. — P. 105–114.
14. Srikanth P. On periodic motions of two-dimensional lattices / P. Srikanth // *Functional analysis with current applications in science, technology and industry.* — 1998. — Vol. 377. — P. 118–122.

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear oscillators on 2D-lattice. It is obtained result on existence and uniqueness of global solution to the Cauchy problem in the case of cubic potential.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D-lattice, Cauchy problem, global solution, cubic potential.*

Отримано: 21.03.2012

УДК 519.24+51-7

В. І. Баранецький, молодший науковий співробітник

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка, м. Дрогобич

ДИСПЕРСІЯ ПРОГНОЗОВАНИХ ЗНАЧЕНЬ ЯК КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ ПОБУДОВИ КОМПОЗИЦІЙНИХ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ПЛАНІВ ДЛЯ ТРЬОХКОМПОНЕНТНИХ СПОЛУК

Описано використання дисперсії прогнозованого значення, як критерію оптимальності при виборі експериментальних планів. Наведено метод побудови композиційних матриць планування експериментів для трьохкомпонентних сполук. Отримано декілька композиційних матриць для експериментальних планів другого та третього порядків.

Ключові слова: *композиційні експериментальні плани, планування експерименту, дисперсія прогнозованого значення.*

Із бурхливим розвитком обчислювальної техніки побудова математичних моделей для дослідження задач у фізиці, хімії, біології, матеріалознавстві та інших областях науки є досить актуальною.

ЗМІСТ

Абрамчук В. С., Абрамчук І. В. Ітераційні методи розв'язування систем лінійних рівнянь з довільними невивірженими матрицями	3
Амирова Р. Р., Мансимов К. Б. Об оптимальности особых управлений в задаче управления для двумерного разностного уравнения типа Вольтерра	17
Бак С. М., Рум'янцева К. Є. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці	29
Баранецький В. І. Дисперсія прогнозованих значень як критерій оптимальності побудови композиційних експериментальних планів для трьохкомпонентних сполук.....	36
Бейко І. В., Щирба О. В. Узагальнені розв'язки оптимізаційних крайових задач та ітераційні методи їх побудови	41
Бігун Я. Й. Усереднення багатоточкової крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом	50
Гнатюк В. О., Гнатюк Ю. В. Метод січної площини розв'язування задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнзначного відображення скінченновимірним підпростором	56
Гудима У. В. Критерії сильної єдиності екстремального елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої функції рівномірної апроксимації компактнзначного відображення множинами однозначних відображень	70
Довгунь А. Я., Ясинський В. К. Проблема існування розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з післядією та інтегральними контракторами у просторі Скорохода	78
Ємець О. О., Черненко О. О. Оптимізація дробово-лінійної цільової функції за додаткових лінійних обмежень на дискретній множині.....	91
Єрмоменко В. О. Періодичні розв'язки функціонально-сингулярно збурених лінійних звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків.....	97

Юлтухівська О. І. Про нерівності типу Вендрофа для розривних функцій.....	113
Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених багатопарових просторових областях	119
Ленюк М. П. Гібридне інтегральне перетворення типу (Конторовича — Лебедева) — Бесселя — Ейлера на полярній осі.....	135
Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кусково-стала інтерфлетация при обчисленні 3 D коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій.....	150
Мартинюк О. В. Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. II	157
Мироник В. І., Тупкало І. С. Дослідження властивостей розв'язків двоточнової за часом задачі для одного класу сингулярних еволюційних рівнянь.....	171
Нікітіна О. М. Інтегральне перетворення, породжене диференціальним оператором Ейлера другого порядку на сегменті полярної осі з однією точкою спряження	183
Поселюжна В. Б., Семчишин Л. М. Розв'язування деяких класів інтегральних рівнянь нестационарним колокаційно-ітеративним методом.....	195
Сорич В. А., Сорич Н. М. Сумісне наближення класів $\bar{\psi}$ -інтегралів сумами Фейєра.....	204
Тарновецька О. Ю. Обчислення невластних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Ейлера—Лежандра на полярній осі.....	212
Хімка У. Т. Асимптотична нормальність різницевої процедури стохастичної оптимізації	221
Царков Є. Ф., Береза В. Ю., Дорошенко І. В. Асимптотичні методи аналізу стохастичної стійкості.....	228
Чабанюк Я. М., Горун П. П. Збіжність дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації	234
Відомості про авторів	249
Алфавітний покажчик авторів	253

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 6

Підписано до друку 27.06.2012 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офсетний. Друк різнографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 14,9. Обл.-вид. арк. 13,8.
Тираж 100. Зам. № 534.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.