

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

# **МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Серія: Фізико-математичні науки**

Збірник наукових праць

**Випуск 4**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка  
2010

УДК 519.6:519.7  
ББК 22  
М34

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:  
Серія КВ № 14521-3492Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до переліку наукових фахових видань  
ВАК України з фізико-математичних наук (постанови Президії ВАК України  
від 14 жовтня 2009 р. № 1-05/4, Бюлетень ВАК України №11, 2009)

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського  
національного університету імені Івана Огієнка,  
протокол № 11 від 26 листопада 2010 року.

#### Рецензенти:

**В. І. Герасименко**, д.ф.-м.н., професор, провідний науковий співробітник Ін-  
ституту математики НАН України;

**В. В. Городецький**, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри алгебри та інфор-  
матики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

#### Редакційна колегія:

Відповідальний редактор  
**Ю. Г. КРИВОНОС**  
академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

Заст. відповідального редактора  
**А. Ф. ВЕРЛАНЬ**  
член-кор. НАПНУ, д.т.н., проф.

Відповідальний секретар  
**І. Б. КОВАЛЬСЬКА**  
к.ф.-м.н., доцент

**В. К. ЗАДІРАКА**  
член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

**В. П. КЛИМЕНКО**  
д.ф.-м.н., проф.

**І. М. КОНЕТ**  
д.ф.-м.н., проф.

**М. О. ПЕРЕСТЮК**  
академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

**Ю. В. ТЕПЛІНСЬКИЙ**  
д.ф.-м.н., проф.

**А. О. ЧИКРІЙ**  
член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

**М34 Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-матема-  
тичні науки** : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глуш-  
кова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський наці-  
ональний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: Ю. Г. Кривонос  
(відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський  
національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — 248 с.

У збірнику друкуються результати досліджень вітчизняних та закордонних  
науковців, що стосуються проблем застосування математичних моделей в різних  
галузях людської діяльності.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів, студентів.

УДК 519.6:519.7  
ББК 22

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2010  
© Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010

УДК 517.9

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук,

О. О. Баранова, студентка,

Ю. П. Білик, студентка

Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

## КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ NESKINCHENNOЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ, РОЗМІЩЕНИХ НА ДВОВИМІРНІЙ РЕШІТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченний ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Отримано результати про існування та єдиність локального та глобального розв'язків задачі Коші.

**Ключові слова:** нелінійні осцилятори, двовимірна решітка, задача Коші, локальний розв'язок, глобальний розв'язок.

**Вступ.** У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній решітці. Нехай  $q_{n,m}(t)$  — узагальнена координата  $(n, m)$ -го осцилятора в момент часу  $t$ . Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m}) + b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,m \rightarrow \pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \quad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [5], [7], [8]. В статті [11] вивчалися періодичні розв'язки для системи осциляторів на двовимірних решітках, а в статтях [1], [9] та [10] — біжучі хвилі. Питання коректності задачі Коші для ланцюгів нелінійних осциляторів вивчалось в [2] і [6], а для систем осциляторів на двовимірних решітках — не розглядалось.

Метою статті є одержання умов існування та єдиності локального та глобального розв'язків задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці.

**Постановка задачі та основні припущення.** Потенціал  $U_{n,m}(r)$  запишемо у вигляді

$$U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r)$$

і покладемо

$$c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}.$$

Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (3)$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \quad (4)$$

де

$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}$ , (такі оператори вивчалися в [3, с. 506]), а нелінійний оператор  $B$  визначається формулою

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}) \quad (5)$$

у просторі дійсних послідовностей  $q = \{q_{n,m}\}$  зі скалярним добутком

$$(q^{(1)}, q^{(2)}) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} q_{n,m}^{(1)} q_{n,m}^{(2)}.$$

Позначимо цей простір  $l_{2,2}$ . Скалярний добуток і норму в  $l_{2,2}$  позначатимемо  $(\cdot, \cdot)$  і  $\|\cdot\|$  відповідно.

Далі нам також знадобиться простір  $l^\infty$  — банахів простір обмежених послідовностей з нормою

$$\|q\|_{l^\infty} = \sup_{n,m \in \mathbb{Z}} |q_{n,m}|.$$

Відмітимо, що рівняння (3) у просторі  $l_{2,2}$  можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p, q), \\ \dot{q} = H'_p(p, q) \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(\|p\|^2 - (Aq, q)) + \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}),$$

де  $p = \dot{q}$ .

Гамільтоніан  $H(p, q)$  задає повну енергію системи, тобто суму кінетичної і потенціальної енергії, причому  $\frac{1}{2}\|p\|^2$  визначає кінетичну енергію, а  $\sum_{n, m \in \mathbb{Z}} V_{n, m}(q_{n, m}) - \frac{1}{2}(Aq, q)$  — потенціальну.

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від  $t$  зі значеннями в  $l_{2, 2}$ .

Припускається, що виконуються умови:

(i) послідовності  $\{a_{n, m}\}$  і  $\{c_{n, m}\}$  дійсних чисел обмежені;

(ii)  $V_{n, m}(r)$  — функція класу  $C^1$  на  $\mathbb{R}$ , причому  $V_{n, m}(0) = V'_{n, m}(0) = 0$  і для будь-якого  $R > 0$  існує таке  $C = C(R) > 0$ , що для всіх  $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\left|V'_{n, m}(r_1) - V'_{n, m}(r_2)\right| \leq C|r_1 - r_2|, \quad |r_1|, |r_2| \leq R. \quad (6)$$

З умови (i) випливає, що  $A$  є обмеженим самоспряженим оператором в  $l_{2, 2}$ .

**Лема 1.** Нехай виконується умова (ii), тоді оператор  $B$  є обмеженим оператором в  $l_{2, 2}$ . Більше того, оператор  $B$  є неперервним за Ліпшицем на кожній кулі простору  $l_{2, 2}$ .

**Доведення.** Нехай  $q \in l_{2, 2}$  і  $\|q\| \leq R$ . Покажемо, що  $B(q) \in l_{2, 2}$  і  $\|B(q)\| \leq C$  з деякою константою  $C = C(R)$ . Оскільки  $\|q\|_{\infty} \leq \|q\|_{l_{2, 2}} = \|q\| \leq R$ , то з нерівності (6) та умови  $V'_{n, m}(0) = 0$  випливає, що

$$\left|V'_{n, m}(q_{n, m})\right| \leq C|q_{n, m}|.$$

Звідси

$$\|B(q)\| = \left[ \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \left|V'_{n, m}(q_{n, m})\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \left[ \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} |q_{n, m}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = C\|q\|,$$

що і доводить першу частину леми.

Нехай тепер  $q^{(1)} = \{q_{n, m}^{(1)}\}$ ,  $q^{(2)} = \{q_{n, m}^{(2)}\} \in l^2$  і  $\|q^{(i)}\| \leq R$ ,  $i = 1, 2$ .

Тоді

$$\|q^{(i)}\|_{\infty} \leq R$$

і нерівність (6) дає

$$\left| V'_{n,m}(q_n^{(1)}) - V'_{n,m}(q_n^{(2)}) \right| \leq C \left| q_{n,m}^{(1)} - q_{n,m}^{(2)} \right|.$$

Аналогічно до попереднього отримуємо

$$\left\| B(q^{(1)}) - B(q^{(2)}) \right\| \leq C \left\| q^{(1)} - q^{(2)} \right\|,$$

що і доводить неперервність за Ліпшицем. Лему доведено.

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)}, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}^{(1)}. \quad (7)$$

**Основний результат.** Для отримання основного результату нам знадобляться дві теореми, які є наслідками зі стандартних результатів про існування та єдиність локального та глобального розв'язків ([4, с. 391—392]).

Розглянемо в банаховому просторі  $E$  нелінійне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (8)$$

**Теорема 1 (локальна).** Нехай для будь-якого  $R > 0$  існують  $M_1 = M_1(R) > 0$  і  $M_2 = M_2(R) > 0$  такі, що

$$\|f(x)\| \leq M_1 \text{ при } \|x\| \leq R$$

і

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M_2 \|x_1 - x_2\| \text{ при } \|x_1\|, \|x_2\| \leq R.$$

Тоді для будь-якого  $x_0 \in E$  існує  $t_0$  таке, що рівняння (8) має один і тільки один розв'язок  $x = x(t)$  в інтервалі  $(-t_0; t_0)$ , який задовольняє початкову умову  $x(0) = x_0$ .

**Теорема 2 (глобальна).** Нехай існують  $M_0 > 0$ ,  $M_1 > 0$  і  $M_2 > 0$  такі, що

$$\|f(x)\| \leq M_1 + M_0 \|x\|$$

і

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq M_2 \|x_2 - x_1\|.$$

Тоді для будь-якого  $x_0 \in E$  рівняння (8) має один і тільки один розв'язок  $x = x(t)$ , визначений при всіх  $t \in \mathbb{R}$ , який задовольняє початкову умову  $x(0) = x_0$ .

Щоб скористатися теоремою 1 зведемо рівняння (4) до рівняння першого порядку в просторі  $E = l_{2,2} \times l_{2,2}$

$$\dot{x} = Gx, \quad (9)$$

де  $x = (q, p)$  і  $Gx = (p, Aq - B(q))$  (стандартний прийом приведення рівняння другого порядку до системи першого порядку). Згідно леми 1, оператор  $G$  є неперервним за Ліпшицем в просторі  $E$ . Норма в  $E$  визначається рівністю:

$$\|x\|_E = \left( \|q\|^2 + \|p\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

З теореми 1 випливає основний результат статті про існування та єдиність локального розв'язку:

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови (i) та (ii) з константою. Тоді для будь-яких  $q^{(0)} \in l_{2,2}$  і  $q^{(1)} \in l_{2,2}$  задача (4), (7) має єдиний розв'язок класу  $C^2$ , який визначений на деякому інтервалі  $(-t_0; t_0)$ .*

**Доведення.** Враховуючи обмеженість операторів  $A$  та  $B$ , для всіх  $\|x\|_E \leq R$  маємо:

$$\begin{aligned} \|Gx\|_E &= \left( \|p\|^2 + \|Aq - B(q)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \|p\|^2 + \|Aq\|^2 - 2(Aq, B(q)) + \|B(q)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left( \|p\|^2 + \|Aq\|^2 + 2\|Aq\|\|B(q)\| + \|B(q)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left( \|p\|^2 + 2\|Aq\|^2 + 2\|B(q)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \|p\|^2 + C_1\|q\|^2 + C_2\|q\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left( C_0\|p\|^2 + C_0\|q\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{C_0}\|x\|_E \leq \sqrt{C_0}R = M_1, \end{aligned}$$

де  $C_0 = \max\{1; C_1 + C_2\}$ ,  $M_1 = \sqrt{C_0}R$ .

Аналогічно для  $\|x_1\|_E, \|x_2\|_E \leq R$ , де  $x_1 = (q^{(1)}, p^{(1)})$ ,  $x_2 = (q^{(2)}, p^{(2)}) \in E$ , враховуючи обмеженість оператора  $A$  і лему 1, маємо:

$$\begin{aligned} Gx_1 - Gx_2 &= \left( p^{(1)}, Aq^{(1)} - B(q^{(1)}) \right) - \left( p^{(2)}, Aq^{(2)} - B(q^{(2)}) \right) = \\ &= \left( p^{(1)} - p^{(2)}, A(q^{(1)} - q^{(2)}) + B(q^{(2)}) - B(q^{(1)}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|Gx_1 - Gx_2\|_E &= \left( \|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + \|A(q^{(1)} - q^{(2)}) + B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left( \|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + \|A(q^{(1)} - q^{(2)})\|^2 + 2(A(q^{(1)} - q^{(2)}), B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})) + \right. \\
&\quad \left. + \|B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left( \|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + 2\|A(q^{(1)} - q^{(2)})\|^2 + 2\|B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left( \|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + 2C_1\|q^{(1)} - q^{(2)}\|^2 + 2C\|q^{(1)} - q^{(2)}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left( C_0\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + C_0\|q^{(1)} - q^{(2)}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sqrt{C_0} \|x_1 - x_2\|_E = M_2 \|x_1 - x_2\|_E,
\end{aligned}$$

де  $C_0 = \max\{1; 2C_1 + 2C\}$ ,  $M_2 = \sqrt{C_0}$ .

Отже, за теоремою 1 для  $x_0 = (q^{(0)}, q^{(1)}) \in E$  існує  $t_0$  таке, що рішення (9) має єдиний розв'язок  $x = x(t) = (q(t), p(t))$  в інтервалі  $(-t_0; t_0)$ , який задовольняє початкову умову  $x(0) = x_0$ , тобто

$$(q(0), \dot{q}(0)) = (q^{(0)}, q^{(1)}).$$

Теорему доведено.

За допомогою теореми 2, аналогічно до теореми 3, можна отримати основний результат статті про існування та єдиність глобального розв'язку:

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови (i) та (ii) з константою  $C$ , яка не залежить від  $R$ . Тоді для будь-яких  $q^{(0)} \in l_{2,2}$  і  $q^{(1)} \in l_{2,2}$  задача (4), (7) має єдиний розв'язок класу  $C^2$ , який визначений при всіх  $t \in \mathbb{R}$ .*

Посилена умова (ii) не виконується для багатьох цікавих нелінійностей, які планується розглянути у подальших дослідженнях.



## Список використаних джерел:

1. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Украинський математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154—175.
2. Бак С. Н. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов / С. Н. Бак, А. А. Панков // Украинський математичний журнал. — 2006. — Т. 58, № 6. — С. 723—729.
3. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наук. думка, 1965. — 798 с.
4. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 534 с.
5. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. — 1997. — P. 201—250.
6. Bak S. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations / S. Bak, G. N'Guerekata, A. Pankov // Communications in Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 8, № 1. — P. 79—86.
7. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. — 1998. — P. 1—108.
8. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar — Berlin : Springer, 2004. — 427 p.
9. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — Vol. 20. — P. 319—341.
10. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, № 1 (February). — P. 105—114.
11. Srikanth P. On periodic motions of two-dimensional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. — 1998. — Vol. 377. — P. 118—122.

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear oscillators on 2D-lattice. It is obtained results on existence and uniqueness of local and global solutions to the Cauchy problem.

**Key words:** *nonlinear oscillators, 2D-lattice, Cauchy problem, local solution, global solution.*

Отримано 03.10.2010

## ЗМІСТ

<b>Андрєєв М. В.</b> Теорія рішень в задачі вибору моделі для прогнозування майбутнього спостереження .....	3
<b>Атаманюк А. В.</b> Новий підхід до розв'язання задачі маршрутизації .....	11
<b>Бак С. М., Баранова О. О., Білик Ю. П.</b> Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розмішених на двовимірній решітці .....	18
<b>Бартіш М. Я., Ковальчук О. В., Коркуна Н. М.</b> Модифікація методу лінійної інтерполяції для розв'язування систем нелінійних рівнянь .....	25
<b>Бомба А. Я., Теребус А. В.</b> Моделювання ідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів .....	31
<b>Верлань А. Ф., Положаєнко С. А.</b> Моделирование пространственных гравитационных аномалий, обусловленных особыми точками потенциальных полей .....	41
<b>Гнатюк Ю. В., Гудима У. В., Гнатюк В. О.</b> Характеризація екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної несиметричної апроксимації багатозначного відображення однозначними .....	50
<b>Демчук М. Б.</b> Математичне моделювання процесу нагнітання в'язучого розчину в пористе середовище .....	61
<b>Дияк І. І., Макар І. Г., Ящук Ю. О.</b> Побудова та дослідження чисельних розв'язків задач теорії пружності на основі h-адаптивних апроксимацій .....	76
<b>Єлейко Я. І., Рабик Л. В.</b> Оцінки очікуваної дохідності та ризику портфеля фінансових активів з розподілами дохідностей, відмінних від нормального розподілу .....	86
<b>Кирилов С. О.</b> Про остаточність деяких оцінок щодо збіжності ортогональних рядів .....	93
<b>Конет І. М., Ленюк М. П.</b> Обчислення невластних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є – Ейлера – Бесселя на обмеженій справа декартовій півосі .....	100

<b>Ленюк О. М.</b> Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Ейлера — Фур'є — (Конторовича–Лебедева) на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі.....	114
<b>Литвин О. М., Лобанова Л. С., Залужна Г. В.</b> Про один метод побудови точного розв'язку початково-крайової задачі для рівняння нестационарної теплопровідності в області складної форми.....	132
<b>Михалевич В. М.</b> К системе принятия решения .....	139
<b>Мусурівський В. І.</b> Проблема стабілізації імпульсних систем випадкової структури із постійним запізненням .....	148
<b>Пилипюк Т. М.</b> Гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є — Лежандра — Бесселя на полярній осі із спектральним параметром в крайових умовах та умовах спряження.....	154
<b>Пічугіна О. С.</b> Опукле продовження кубічних многочленів на переставленнях та його застосування у розв'язанні практичних задач оптимізації .....	176
<b>Проскурня Ю. С., Гривко Б. С.</b> Анализ и оптимизация портфеля инвестора в условиях неопределенности .....	190
<b>Чабанюк Я. М., Хімка У. Т., Раєвський М. В.</b> Процедура стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації з марковськими переключеннями .....	200
<b>Cheremnikh E. V., Diaba F., Ivasyk G. V.</b> On time asymptotic of the solutions of transport evolution equation.....	208
<b>Ясинский В. К., Береза В. Ю., Ясинский Е. В.</b> Существование второго момента решения линейного стохастического уравнения в частных производных с марковскими возмущениями и его поведение на бесконечности....	223
<b>Василь Васильович Скопецький (16.06.1944—04.09.2010)</b> .....	240
Відомості про авторів .....	241
Алфавітний покажчик авторів .....	245

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

## **МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Серія: Фізико-математичні науки**

Збірник наукових праць

**Випуск 4**

---

---

Підписано до друку 14.12.2010 р. Формат 60x84/16. Папір офісний.  
Гарнітура "Таймс". Друк різнографічний. Обл.-вид. арк. 13,2.  
Умовн. друк. арк. 14,5. Тираж 100. Зам. № 432.

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка.  
Вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.