УДК 517.97

Сергій Бак,
докт. фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Галина Ковтонюк,
канд. пед. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Юлія Горбачова,
студентка факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,

СТОЯЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ КЛЕЙНА-ҐОРДОНА З КУБІЧНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Анотація. *У статті одержано результат про існування стоячих хвиль в дискретному рівнянні Клейна-Ґордона з кубічною нелінійністю.*
Ключові слова: *дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона, стоячі хвилі, кубічна нелінійність, критичні точки, теорема про зачеплення, періодичні апроксимації.*
Abstract. *The article provides a result on the existence of standing waves in the discrete Klein-Gordon equation with cubic nonlinearity using the critical point method.*
Keywords: *discrete Klein-Gordon type equations, standing waves, cubic nonlinearity, critical points, linking theorem, periodic approximations.*

Вступ. Дискретні гамільтонові системи широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. До таких систем, зокрема, належать системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні рівняння типу Шредінгера, дискретні рівняння типу Клейна–Ґордона та ін. Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [1-3].

Біжучі і стоячі хвилі є важливими класами розв'язків таких систем. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна–Ґордона вивчалися в працях [5; 6; 10; 11]. В цих статтях досліджено питання існування і стійкості стоячих хвиль в таких рівняннях. Зауважимо, що питання існування стоячих хвиль в дискретних рівняннях типу Шредінгера вивчалося в працях [4; 8; 9].

Постановка задачі та основні припущення. У даній статті розглянемо дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n - f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $q_n = q_n(t)$ – узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t, $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ – одновимірний дискретний оператор Лапласа. Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь та описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно звязаних нелінійних осциляторів.

Будемо вивчати рівняння (1) з кубічною нелінійністю вигляду

$$f(r) = d_n |r|^2 r, \quad \{d_n\} \subset \mathbb{R}, \ p \in \mathbb{N}.$$

Розв'язки системи (1) у вигляді стоячих хвиль матимуть вигляд

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \tag{2}$$

де $u_n \in \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ – частотою.

Підставляючи стоячу хвилю (2) в систему (1) і враховуючи, що $|\exp(-i\omega t)| = 1$, одержимо систему

$$-\Delta u_n - (\omega^2 - m^2) u_n = d_n |u_n|^2 u_n, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Позначимо через $(Lu)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n$ і розглянемо більш загальну систему

$$(Lu)_n - \omega^2 u_n = d_n |u_n|^2 u, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Зауважимо, що оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l_k^2. Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків (див. [7]). Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються спектральними проміжками. Два з них напівскінченні. Якщо N=1, то скінченні проміжки не існують. Однак, у загальному випадку скінченні проміжки існують і найбільш цікавий випадок, коли ω^2 належить скінченному проміжку.

Всюди далі припускається, що виконується умова N-періодичності:

(i) *існує таке $N \in \mathbb{N}$, що коефіцієнти a_n, b_n і d_n є N-періодичними, тобто*

$$a_{n+N} = a_n,\ b_{n+N} = b_n \text{ і } d_{n+N} = d_n.$$

Будемо вивчати стоячі хвилі з kN-періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка на нескінченності збігається до нуля (локалізовані розв'язки), тобто

$$u_{n+kN} = u_n, \tag{5}$$

де k – фіксоване натуральне число, та

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{6}$$

відповідно.

Варіаційне формулювання задачі. З системою (4) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}\left(Lu - \omega^2 u, u\right) - \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^4,$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ із скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n v_n\ .$$

Позначимо через l_k^2 скінченновимірний простір всіх kN-періодичних послідовностей зі скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{n\in Q_k} u_n v_n$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{n\in Q_k} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[\frac{kN}{2}\right] \le n \le kN - \left[\frac{kN}{2}\right] - 1 \right\},$$

і $\left[\frac{kN}{2}\right]$ – ціла частина $\frac{kN}{2}$.

На просторі l_k^2 розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\left(L_k u - \omega^2 u, u\right)_k - \frac{1}{4}\sum_{n \in Q_k} d_n u_n^4,$$

де L_k – оператор L, який діє в просторі l_k^2.

За зроблених припущень функціонали J та J_k належать класу C^1, а критичні точки цих функціоналів є розв'язками системи (4) з просторів l^2 та l_k^2 відповідно.

Таким чином, система (4) є системою рівнянь Ейлера-Лагранжа для функціоналів дії J та J_k у відповідних просторах. Ця система завжди має нульовий розв'язок, тому нас цікавлять нетривіальні критичні точки цих функціоналів.

Існування періодичних розв'язків. Виявляється, що функціонал J_k задовольняє умови теореми про зачеплення, а отже, має нетривіальні критичні точки.

Теорема 1. *Нехай виконується умова* (i), $d_n > 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a,b)$ *та* $b \ne +\infty$. *Тоді для будь-якого* $k \ge 1$ *система (4) має нетривіальний* kN*-періодичний розв'язок* $u \in l_k^2$.

Існування локалізованих розв'язків. Тепер за допомогою методу періодичних апроксимацій можна довести існування нетривіальних локалізованих розв'язків системи (4). Ці розв'язки є критичними точками функціоналу J. Однак цей функціонал не задовольняє умову Пале–Смейла і тому скористатися в даному випадку теоремою про зачеплення не вийде. Проте критичні точки функціоналу J можна побудувати за допомогою переходу до границі при $k \to \infty$ в критичних точках функціоналу J_k. Цей метод називається методом періодичних апроксимацій.

Отже основним результатом даної статті є теорема:

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (i), $d_n > 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a,b)$ *та* $b \neq +\infty$. *Тоді система (4) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$.

Оскільки спектр оператора $-\Delta + m^2$ є відрізком $[m^2, 4+m^2]$, то з теореми 2 одержуємо наслідок:

Наслідок 1. Нехай $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ та $\omega^2 < m^2$. Тоді система (3) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.

Література:

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. Physica D. 1997. Vol. 103. P. 201-250.
2. Braun O. M., Kivshar Y. S. Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model. Physics Repts. 1998. Vol. 306. P. 1-108.
3. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. Physica D. 2006. Vol. 216. P. 327-345.
4. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18-34.
5. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina, M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. Discr. Cont. Dyn. Sys. 2013. Vol. 33(6). P. 2389-2401.
6. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. Nonlinear and Disorder: Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers. 2001. P. 205-211.
7. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. Providence, R. I. : American Math. Soc. 2000. 251 p.
8. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2017. Вип. 16. С. 21-29.
9. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. Математичні студії, 2010. Т. 33, №1. С. 78-84.
10. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. 2021. Вип. 22. С. 5-19.
11. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика та інформатика. Том 39, № 2. 2021. С. 7-21.