то перерізом цих компактних множин є одноелементна множина, тобто існує єдине гіперкомплексне число ν_0 таке, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{\nu_0\}$.

Доведення. Оскільки кожна компактна множина гіперкомплексних чисел є замкненою, то послідовність (K_n) є спадною послідовністю не порожніх замкнених підмножин замкненої множини K_1, а отже за теоремою 1 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq 0$. Припустимо, що існує послідовність (K_n) непорожніх компактних множин, яка задовольняє умови теореми, а їх переріз є множина з числом лементів, більшим одного, тобто існують принаймні два різних гіперкомплексних числа ν_1, ν_2, що належать множині $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Зрозуміло, що ці гіперкомплексні числа належать множині K_n, а отже для кожного n

$$diamK_n = \sup_{\nu', \nu'' \in K_n} \left\| \nu' - \nu'' \right\| \geq \left\| \nu - \nu \right\| > 0.$$

Останнє суперечить тому, що $\lim_{n \to \infty} diamK_n = 0$.

Одержане протиріччя доводить, що перетин всіх членів послідовності (K_n), яка задовольняє умови теореми, є одноелементна множина (існує лише одне гіперкомплексне число, яке належить всім членам цієї послідовності). ■

Список використаних джерел

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Пер. с англ. / Р. Беллман. – М: Наука, 1969. – 334 с.
2. Вотякова Л. А. Про один метод побудови алгебри гіперкомплексних чисел. / Л. А. Вотякова. // Десята міжнародна конференція ім. Академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. – К. – 2004. – 334 с.
3. Хорн Р. Матричный анализ: Пер. с англ. / Р. Хорн, У. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 665 с.

COMPACT MULTIPLES OF HYPERTECOMPLE NUMBERS

Abstract. *In this paper a compact set of hypercomplex numbers is indicated. The purpose of this paper is to study the conditions of compactness of the set of hypercomplex numbers.*

Keywords: *hypercomplex numbers, normalized algebra, compact plural.*

Віта Руда

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ НА МАТРИЧНІЙ АЛГЕБРІ M_3^{ch}

Анотація. *У статті розглядається питання існування і властивостей границі функцій, визначених матричній алгебрі* M_3^{ch}.

Ключові слова: *відображення, границя функції, матрична алгебра.*

Вступ. Поняття границі функції є одним з найважливіших понять диференціального числення. Зауважимо, що це поняття є дуже тонким і разом з тим дуже суттєвим і продуктивним поняттям математичного аналізу.

Метою нашої статті є означити і дослідити відображення матричної алгебри M_3^{ch} в себе.

Виклад основного матеріалу: Нехай маємо повну матричну алгебру M_3 всіх квадратних матриць 3-го порядку з дійсними елементами. Розглянемо підмножину матриць M_3 квадратних матриць 3-го порядку з однаковими сумами по рядках.

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a-c \end{pmatrix}, \text{ де } a,b,c \in R.$$

Позначимо її M_3^{ch}

Отже, $M_3^{ch}(R)=\left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a-c \end{pmatrix} \middle\| a,b,c \in R \right\}$.

M_3^{ch} – лінійний простір розмірності 3.

І нехай $D \subset M_3^{ch}$ непорожня множина матриць.

Означення 1: Відповідність *f*, яка кожній матриці з множини *D* відносить одну матрицю, називається відображенням множини *D* в M_3^{ch} і позначають

$$f : D \to M_3^{ch}.$$

Класичне позначення $W = f(A)$.

Оскільки M_3^{ch} алгебра, причому така, що у ній широко використовується ділення, крім того над відображеннями можна виконувати операцію композиції, то основний спосіб задання відображень з M_3^{ch} у M_3^{ch} буде аналітичний.

Такими функціями будуть, насамперед, многочлени

$$f(A)= A_0A^n + A_1A^{n-1} + \ldots + A_{n-1}A + A_n,$$

де $A_0, A_1, A_{n-1}, A_n \in M_3^{ch}$ – фіксовані матриці, дробово-раціональні.

Нехай маємо відображення $W = f(A)$ в деякій кулі $B(A_0, r)$, крім, можливо, точки A_0. [3]

Означення 2: Матриця W_0 називається границею відображення *f* у точці A_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що для всіх *A*, які задовольняють нерівність $0 < \|A - A_0\| < \delta$, виконується нерівність $\|f(A) - W_0\| < \varepsilon$. Позначаємо $\lim\limits_{A \to A_0} f(A_n) = W_0$.

Означення 2': Матриця W_0 називається границею відображення *f* у точці A_0, якщо для будь-якої послідовності матриць (A_n) такої, що для всіх *n* $A_n \neq A_0$, однак $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_0$, послідовність відповідних образів $(f(A_n))$ збігається до W_0**.**

Еквівалентність цих двох означень доводиться точно так саме, як для звичайних числових функцій. [2]

Теорема 1: Якщо відображення $W = f(A_n)$ має границю у точці A_0, то воно обмежене в деякому околі цієї точки.

Доведення:

Нехай $\lim\limits_{A \to A_0} f(A_n) = W_0$. Тоді, для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема $\varepsilon = 1$, існує $\delta > 0$ таке, що для всіх *v*, які задовольняють нерівність $0 < \|A - A_0\| < \delta$, виконується нерівність: $\|f(A) - W_0\| < 1$.

Якщо відображення $W = f(A_n)$ не визначене в точці A_0, то для всіх *A*, які належать кулі $B(A_0, \delta)$, крім точки A_0, їх образи $f(A)$ належать кулі $B(W_0, 1)$. А це й і означає, що відображення *f* обмежене в деякому околі точки A_0. Якщо ж відображення *f* визначене у точці A_0, то, взявши кулю радіуса *r*, більшого ніж $\max(1, \| f(A_0) - W_0 \|)$, маємо що для всіх *A*, які належать кулі $B(A_0, \delta)$, їх образи $f(A)$ належать кулі $B(W_0, r)$.

Теорема 2: Якщо відображення $W = f(A_n)$ має границю у точці A_0, то вона єдина. [1]

Доведення:

Нехай існує відображення *f* з M_3^{ch} в M_3^{ch}, яке у точці A_0 має більше однієї границі, тобто нехай

$$\lim_{A \to A_0} f(A) = W_0', \lim_{A \to A_0} f(A) = W_0'',$$

причому $W_0' \neq W_0''$. Тоді $\|W_0' - W_0''\| > 0$. А тому для $\frac{1}{3}\|W_0' - W_0''\|$ можна вказати $\delta_1 > 0$ таке, що для всіх *A*, які задовольняють нерівність $0 < \|A - A_0\| < \delta_1$, виконується нерівність $\| f(A) - W_0' \| < \frac{1}{3}\|W_0' - W_0''\|$.

Аналогічно для $\frac{1}{3}\|W_0' - W_0''\|$ можна вказати $\delta_2 > 0$ таке, що для всіх *A*, які задовольняють нерівність $0 < \|A - A_0\| < \delta_2$, виконується нерівність $\| f(A) - W_0'' \| < \frac{1}{3}\|W_0' - W_0''\|$.

Нехай $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$ Тоді, для всіх *A*, які задовольняють нерівність $0 < \|A - A_0\| < \delta$, виконується обидві нерівності

$$\| f(A) - W_0' \| < \frac{1}{3}\|W_0' - W_0''\|, \| f(A) - W_0'' \| < \frac{1}{3}\|W_0' - W_0''\|.$$

А тому $\|W_0' - W_0''\| = \|W_0' - f(A) + f(A) - W_0''\| \leq \|W_0' - f(A)\| + \| f(A) - W_0'' \| <$

$$< \frac{1}{3}\|W_0' - W_0''\| + \frac{1}{3}\|W_0' - W_0''\| = \frac{2}{3}\|W_0' - W_0''\|.$$

Отримане протиріччя спростовує наше припущення. Отож, якщо відображення має границю, то вона єдина.

Нехай існує відображення *f* з M_3^{ch} в M_3^{ch} визначене в деякій множині матриць *D*. Ця множина є множиною точок в евклідовому просторі з обраною системою координат. Будемо вважати, що *D* є область (відкрита зв'язна множина). Відповідність *f* за певним правилом відносить матриці $A = xE_0 + yE_1 + zE_2$ деяку матрицю $W = sE_0 + tE_1 + lE_2$. Цю відповідність можна розглянути як три відповідності: перша – трійці дійсних чисел (x, y, z) з множини *D* відносить одне дійсне число (коефіцієнт при E_0), друга – трійці дійсних чисел (x, y, z) з множини *D* відносить одне дійсне число (коефіцієнт при E_1), третя також трійці дійсних чисел (x, y, z) з множини *D* відносить одне дійсне число (коефіцієнт при E_2). Таким чином відображення $f : D \to M_3^{ch}$, породжує три числові функції трьох змінних $s : D \to R, t : D \to R, l : D \to R$.

Тому відображення $f : D \to M_3^{ch}$ можна подати у вигляді

$$W = f(A) = f(xE_0 + yE_1 + zE_2) = s(x, y, z)E_0 + t(x, y, z)E_1 + l(x, y, z)E_2$$

Наприклад відображення

$$W = A^2 = (xE_0 + yE_1 + zE_2)^2$$

подається у вигляді

$$W = x^2E_0 + (2xy - zy)E_1 + (2xz - zy)E_2.$$

Теорема 3: Границя відображення

$$W = f(A) = f(xE_0 + yE_1 + zE_2) = s(x, y, z)E_0 + t(x, y, z)E_1 + l(x, y, z)E_2$$

у точці $A_0 = x_0E_0 + y_0E_1 + z_0E_2$ існує тоді і лише тоді, коли існують

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} s(x, y, z), \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} t(x, y, z), \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} l(x, y, z),$$

причому

$$\lim_{A \to A_0} f(A) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} s(x, y, z)E_0, \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} t(x, y, z)E_1, \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} l(x, y, z)E_2.$$

Теорема 4: Якщо відображення *f* і *g* у точці A_0 мають границі, то для будь-яких дійсних чисел *a* і *b*, відображення $af + bf$ у точці A_0 має границю, причому

$$\lim_{A \to A_0} (af(A) + bg(A)) = a \lim_{A \to A_0} f(A) + b \lim_{A \to A_0} g(A).$$

Теорема 5: Якщо відображення *f* і *g* у точці A_0 мають границі, то відображення $f \cdot g$ у точці A_0 має границю, причому

$$\lim_{A \to A_0} (f \cdot g) = \lim_{A \to A_0} f(A)g(A) = \lim_{A \to A_0} f(A) \lim_{A \to A_0} g(A).$$

Теорема 6: Якщо відображення *f* і *g* у точці A_0 мають границі, то існує $r > 0$ таке, що для всіх *A*, які задовольняють нерівність $0 < \|A - A_0\| < r$,

$$|g(A)| \neq 0, \left|\lim_{A \to A_0} g(A)\right| \neq 0$$

то відображення $\frac{f}{g}$ у точці A_0 має границю, причому

$$\lim_{A \to A_0} \frac{f(A)}{g(A)} = \frac{\lim_{A \to A_0} f(A)}{\lim_{A \to A_0} g(A)}.$$

Теорема 7: (композиція відображень) Якщо відображення *f* у точці A_0 має границю, тобто

$$\lim_{A \to A_0} f(A) = W_0,$$

і існує така куля $B(A_0, r)$, що для всіх $A \neq A_0$ з цієї куля $f(A) \neq W_0$, а відображення g має границю у точці W_0, то у точці A_0 має границю складене відображенню $g(f(A))$, причому

$$\lim_{A \to A_0} g(f(A)) = \lim_{W \to W_0} g(W)$$

Висновки. В статті ми розглянули границі функцій, визначених на матричній алгебрі M_3^{ch}.

Список використаних джерел

1. Дубинчук О. С., Слепкань З. І. Алгебра і елементарні функції. – К.: Рад. шк., 1968. – 580 с.
2. Землякова Ж., Чупахіна О. Елементарні функції в матричній алгебрі M_3 // Сучасні проблеми фізики та математики. Вип. – Вінниця, 2003. – С.207-212.
3. Колмагоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 525 с.

LIMIT OF FUNCTIONS, DEFINED ON MATRIX ALGEBRA M_3^{ch}

Abstract. *The article deals with the question of the existence and properties of the limit of functions defined by matrix algebra* M_3^{ch}.

Keywords: *function, limit of function, matrix algebra.*

Сергій Руденко

АДАПТАЦІЯ АЛГОРИТМУ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ШАХОВОЮ ПРОГРАМОЮ ШЛЯХОМ ПРОВЕДЕННЯ ОЦІНКИ ПОЗИЦІЇ ЯК ЛЮДИНА

Анотація*: стаття присвячена дослідженням в області штучного інтелекту, а саме розробці алгоритму прийняття рішення комп'ютером за людським способом оцінки позиції чи ситуації в режимі реального часу.*

Ключові слова*: штучний інтелект, нейромережа, оцінка позиції, комп'ютерні шахи.*

У наш час надзвичайно велика увага приділяється дослідженню та розробці механізму штучного інтелекту (ШІ). Основна задача ШІ – розв'язати поставлену задачу, базуючись на попередньому досвіді і, найголовніше, навчатися. На сьогоднішній день ШІ є одним з основних елементів будь-якої інтелектуальної системи (ІС) [1].

Основна ідея застосування ШІ – спростити життя людині: пришвидшити виконання рутинної роботи, підвищити якість виконання поставлених завдань тощо. Особливий інтерес викликають сьогодні дослідження в області ігрових технологій: шахи і го, покер, комп'ютерні стратегії в режимі реального часу. В будь-якій з цих областей важливу роль відіграє те, наскільки учасник ігрового процесу зможе швидко і якісно пристосуватися до дій противника, його емоцій. Можливість навчатися на помилках, запам'ятовувати виграшні стратегії, робити переоцінку ситуації з урахуванням можливих продовжень, швидкість реакції, де це потрібно – ось основні критерії оцінки дієздатності алгоритму [4].

Об'єкт і предмет дослідження. Об'єктом дослідження є процес аналізу шахової позиції. Предметом дослідження є методи пошуку і прийняття рішення.

Метою роботи є розробка алгоритму прийняття рішення про наступний хід, шляхом оцінювання позиції з використанням «таблиць ходів» та відсіканням вперед.

Нейромережа оперує гілками розвитку після будь-якого ходу, але для того, щоб вибрати ту чи іншу гілку, навіть живій людині, необхідно спочатку оцінити позицію: поточну, а потім – яка виникне після якогось ходу.