О.А. Ярмолюк, А.М. Шведюк
м. Вінниця

ПРО ДЕЯКІ КВАНТОВІ ІНТЕГРАЛИ

Анотація. *У цій статті розглянуто поняття $\tilde{h}$-первісної та $\tilde{q}$-первісної, $\tilde{h}$-інтеграла та $\tilde{q}$-інтеграла. Доведено $\tilde{h}$-формулу Ньютона-Лейбніца та наведено $\tilde{q}$-формулу для обчислення невласного інтеграла.*

Ключові слова: *квантовий аналіз, $\tilde{h}$-первісна, $\tilde{q}$-первісна, $\tilde{h}$-інтеграл, $\tilde{q}$-інтеграл, формула Ньютона-Лейбніца, невласний інтеграл.*

Annotation. *This article discusses the concept of $\tilde{h}$-antiderivative and $\tilde{q}$–antiderivative, of $\tilde{h}$-integral and $\tilde{q}$-integral. The Newton's –Taylor's –formula is proven and $\tilde{q}$-formula for calculation improper integral introduced.*

Keywords: *quantum analysis, $\tilde{h}$-antiderivative, $\tilde{q}$-antiderivative, $\tilde{h}$-integral, $\tilde{q}$-integral, Newton's –Taylor's –formula, improper integral.*

Постановка проблеми. Дослідження з даної теми з'явилися ще на початку минулого століття в працях К. Адамса [1], Кармайкла [2], Ф. Джексона [3], Р. Т. Мейсона [5] та ін.

Інтерес математиків до досліджень квантового аналізу то зростав, то спадав. Але все ж, на початку вісімдесятих років почали з'являтися нові дослідження, які стосувалися застосування квантового аналізу в багатьох областях математики, зокрема, в новому диференціальному численні та теорії ортогональних многочленів, варіаційному h-численні тощо ([4], [5], [7], [8] та ін.). Дослідження квантового аналізу поділяється на: q-аналіз та h-аналіз, які відіграють важливу роль в теорії алгебраїчних об'єктів, які називаються квантовими рофессо. На основі цієї теорії досліджуються основи рофессор ому q-аналізу та h-аналізу.

Серед літературних джерел, присвячених квантовому аналізу, найбільш новим і широким є [6]. У цій книзі розглянуто основи квантового аналізу, послідовно проведена аналогія з класичним аналізом, також розглянуто деякі початкові відомості з рофессор ому квантового аналізу.

Дана стаття присвячена рофессор ому h-інтегралу та рофессор ому q-інтегралу у квантовому аналізі.

Мета даної статті: розглянути поняття $\tilde{h}$-інтеграла та $\tilde{q}$-інтеграла в рофессор ому квантовому аналізі.

Виклад основного матеріалу. Зауважимо, що поняття симетричної h-похідної ($\tilde{D}_h f(x)$) було розглянуто в [8]. Нагадаємо поняття квантової симетричної h-первісної. Розглянемо довільну функцію $f(x)$.

Означення 1. Функцію $F(x)$, для якої $\tilde{D}_h F(x) = f(x)$, будемо називати симетричною h-первісною, і позначатимемо

$$\int f(x)\tilde{d}_h x. \tag{1}$$

Визначеному симетричному h-інтегралу функції від $x = a$ до $x = b$ ми можемо надати сенс лише в тому випадку, коли a і b відрізняються на величину кратну $2h$.

Тепер нагадаємо означення визначеного симетричного $\tilde{h}$-інтеграла.

Означення 2. Нехай $b - a \in 2hZ$. Тоді визначеним симетричним h-інтегралом функції $f(x)$ від $x = a$ до $x = b$ будемо називати величину

$$\int_a^b f(x)\tilde{d}_h x = \begin{cases} 2h(f(a) + f(a+2h) + ... + f(b-2h), \text{якщо}\, a < b, \\ 0, \text{якщо}\, a = b, \\ -2h(f(b) + f(b+2h) + ... + f(a-2h), \text{якщо}\, a > b. \end{cases} \tag{2}$$

Наступна теорема в деякому сенсі показує правильність (2).

Теорема 1 ($\tilde{h}$-формула Ньютона-Лейбніца). Нехай $F(x)$ є симетричною h-первісною для функції $f(x)$ і $b - a \in 2hZ$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\tilde{d}_h x = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Доведення. Нехай $b > a$. Тоді

$$\int_a^b f(x) d_{\tilde{h}} x = 2h \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{2h}-1} f(a + 2jh) =$$

$$= 2h \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{2h}-1} \tilde{D}_h F(x)\Big|_{x=a+2jh} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{2h}-1} (F(a + (j+1)2h) - F(a + 2jh)) = F(b) - F(a),$$

що і потрібно було довести. Випадок $b < a$ розглядається аналогічно, а випадок $b = a$ тривіальний.

Нагадаємо тепер означення симетричної q-первісної. Зауважимо, що поняття симетричної q-похідної ($\tilde{D}_q f(x)$) було розглянуто в [7]. Розглянемо довільну функцію $f(x)$.

Означення 3. Функція $F(x)$ називається симетричною q-первісною для функції $f(x)$, якщо $\tilde{D}_q F(x) = f(x)$. Позначимо її

$$\int f(x)\tilde{d}_q x. \tag{4}$$

Тепер дамо означення визначеного симетричного q-інтеграла.

Означення 4. Нехай $0 < \tilde{q} < 1$. Покладемо за означенням

$$\int_a^b f(x)\tilde{d}_q x = \int_0^b f(x)\tilde{d}_q x - \int_0^a f(x)\tilde{d}_q x. \tag{5}$$

де $\int_0^a f(x)\tilde{d}_q x.$ можна обчислити за формулою:

$$\int_0^a f(x)\tilde{d}_q x = a\left(q^{-1}-q\right)\sum_{n=1,3,...} q^n f\left(q^n a\right) \tag{6}$$

Як частинний випадок,

$$\int_{q^{m+1}}^{q^{m-1}} f\left(x\right)d_q x = \left(q^{-1}-q\right)\left(\sum_{n=1,3,....} q^{n+m-1} f\left(q^{n+m-1}\right) - \sum_{n=1,3,...} q^{n+m+1} f\left(q^{n+m+1}\right)\right) =$$

(7)

$$=\left(q^{-1}-q\right)q^m f\left(q^m\right)$$

Невласний інтеграл можливо визначити за формулою

$$\int_0^{\infty} f\left(x\right)d_q x = \sum_{m=\pm1,\pm3,....} \int_{q^{m+1}}^{q^{m-1}} f\left(x\right)d_q x =$$

(8)

$$\left(q^{-1}-q\right)\sum_{m=\pm1,\pm3,....} q^m f\left(q^m\right)$$

Висновки. Таким чином, у цій статті розглянуто поняття симетричної h-первісної, симетричної q-первісної, симетричного h-інтеграла, симетричного q-інтеграла. А також доведено $\tilde{h}$-формулу Ньютона-Лейбніца та введено $\tilde{q}$-формулу для обчислення невласного інтеграла. Подані формули ми можемо використовувати при обчислення інтегралів у квантовому аналізі.

Література

1. Adams C. R. On the linear ordinary q-difference equation / C. R. Adams // Am. Math. Ser. II. – 1929. – Vol. 30. – P. 195-205.
2. Carmichael R. D. The general theory of linear q-difference equations / R. D. Carmichael // Am. J. Math. – 1912. Vol. 34. – P. 147-168.
3. Jackson F. H. q-Difference equations / F. H. Jackson // Am. J. Math. – 1910. – Vol. 32. – P. 305-314.
4. Kac V. Finite-dimensional representations of quantum affine algebras at roots of 1 / V. Kac, J. Beck // AMS Math. Journal. – 1996. – Vol. 9. – P. 391-423.
5. Mason T. E. On properties of the solution of linear q-difference equations with entire fucntion coefficients / T. E. Mason // Am. J. Math. – 1915. – Vol. 37. – P. 439-444.
6. Кац В. Квантовый аналіз / В. Кац, П. Чен; перевод с англ. Ф. Попеленского и Ж. Тотровой. – М.: МЦНМО, 2005. – 128 с.
7. Качанюк С. С. Квантові симетричні q-похідні / С. С. Качанюк // Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти: зб. наук. Праць. – Вінниця, 2016. – Вип. 13. – 9-11 с.
8. Магдич В. І. Поняття симетричної h-похідної / В. І. Магдич // Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти: зб. наук. Праць. – Вінниця, 2016. – Вип. 13. – 16-18 с.