УДК [37.016:514]
DOI: 10.31652/2412-1142-2022-64-243-257

Ленчук Іван Григорович
доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії,
Житомирський державний університет імені Івана Франка,
м. Житомир, Україна
ORCID ID: 0000-0003-1923-9540
lench456@gmail.com

Працьовитий Микола Вікторович
доктор фізико-математичних наук, професор, декан факультету математики, інформатики та фізики,
Національний педагогічний університет імені Михайла Драгоманова,
м. Київ, Україна
ORCID ID: 0000-0001-6130-9413
prats4444@gmail.com

ОСНОВНІ МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ КОНСТРУКТИВНОЇ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Анотація. Авторами ґрунтовно розглянуто дві основні метричні задачі на точки, прямі та площини, не володіючи методикою застосування і алгоритмами розв’язання яких практично неможливо дійти до результату, працюючи конструктивними методами із площиною загального розташування. У статті представлено схему, на якій у повному обсязі представлено класифікацію похідних задач, що допоможе зацікавленій особі вникнути в суть і зрозуміти зв’язки в теорії розглянутого питання. Дано постановку проблеми, виконано стислий аналіз останніх досліджень і публікацій (головним чином, авторських). Коректно виписано мету статті − навчати студентів педагогічних університетів, які готуються в майбутньому стати вчителями математики, графічних та графоаналітичних методів роботи зі стереометричними фігурами шляхом геометризації й наочної візуалізації звичайних задач на обчислення, тобто займатися творчий пошук, працюючи із зображеннями на робочому місці вчителя інноваційно. У результатах дослідження запропоновано до перегляду шляхи розв’язання чотирьох задач. Перша з них має постановочний характер, коли висвітлено питання відстані від точки до прямої в загальному вигляді. При цьому особлива увага привертається до метричної визначеності будь-якої площини загального розташування, що з методичної точки зору досить важливо. Другою подано задачу на обчислення, яка розв’язана всіма можливими методами, однак домінантним є метод конструктивізму. Інші дві за змістом і суттю – обчислювальні стереометричні задачі, в яких пріоритетним підходом у міркуваннях та в пошуку шляху розв’язання обрано їх геометризацію й унаочнення. Важливо, що в останній із задач відстань від точки до площини слід шукати як проміжний етап обчислень. У кожній із задач студент має можливість оцінити точність власного конструктивного моделювання просторових фігур та отриманих у такий спосіб результатів побудовних операцій. У висновках передбачено продовження авторського дослідження цього ефективного застосування ІКТ та 3D-моделювання в роботі зі студентами.

Ключові слова: конструктивна стереометрія; метричні задачі; перетворення суміщення; графічний та графоаналітичний методи.

1. ВСТУП

Класична геометрія, одна з найдревніших сфер математики, зародилась з яскраво виражених практичних потреб людини. У той час їй не були чужими експеримент, проблеми точності вимірювання тощо. Тісно переплітаючись з вченням про число, взаємно доповнюючись і збагачуючись ідеями і методами, ці теорії значно пізніше здобули свою автономію і відносну незалежність. А ще пізніше була переусвідомлена роль геометрії як навчальної дисципліни в розвитку психологічних якостей особистості, у формуванні уявлень про математику не лише як засіб розв’язання прикладних задач, а й як інструмент виховання таких рис як раціоналізм, альтернативність мислення, розумний прагматизм тощо. Шкода, що останнім часом геометрії все менше залишається місця у навчальному процесі як у середній школі, так і вищої освіти.

Основною метою сучасної освіти є розвиток суб'єкта навчання, його здібностей, творчо-розвивального потенціалу, інтелекту. Такий стан речей у підготовці майбутнього вчителя математики вимагає зміни всієї системи навчання: потрібно кардинально змінювати логіку постановки і реалізації освітнього процесу, впроваджувати нові зв'язки між визначальними блоками професійної підготовки. Геометрія, яка є дисципліною прикладного (практичного) напряму, в розвивальному навчанні студента займає надто вагоме місце.

Постановка проблеми. Одним з головних ідеологів пропаганди геометричних методів у науці та практиці є вчитель математики. Саме він покликаний першим популяризувати науку, пробуджувати інтерес до неї в учня, прививати навички діяти виважено. А тому вчитель має бути добре озброєним і глибоко переконаним. Цьому сприяють різні геометричні курси (дисципліни), наявні у навчальних планах підготовки вчителя математики. Наприклад, в НПУ імені М. П. Драгоманова це аналітична геометрія, проєктивна геометрія, диференціальна геометрія, конструктивна геометрія і методи зображень, топологія, основи фрактальної геометрії, основи геометрії. Метрична геометрія якісно представлена на першому і останньому курсах. Саме на останньому курсі вивчається теорія вимірювання геометричних величин, а на першому − розглядаються планіметричні та стереометричні задачі, пов'язані з відстанню та відхиленням, площами та об'ємами. Метрична складова частково наявна в конструктивній геометрії. Разом із цим, не завжди геометричні ідеї якісно представлені у системі підготовки вчителя математики. Більше того, метрична теорія чисел зовсім не фігурує в навчальному процесі, а елементи теорії міри представлені основами міри Жордана та міри Лебега.

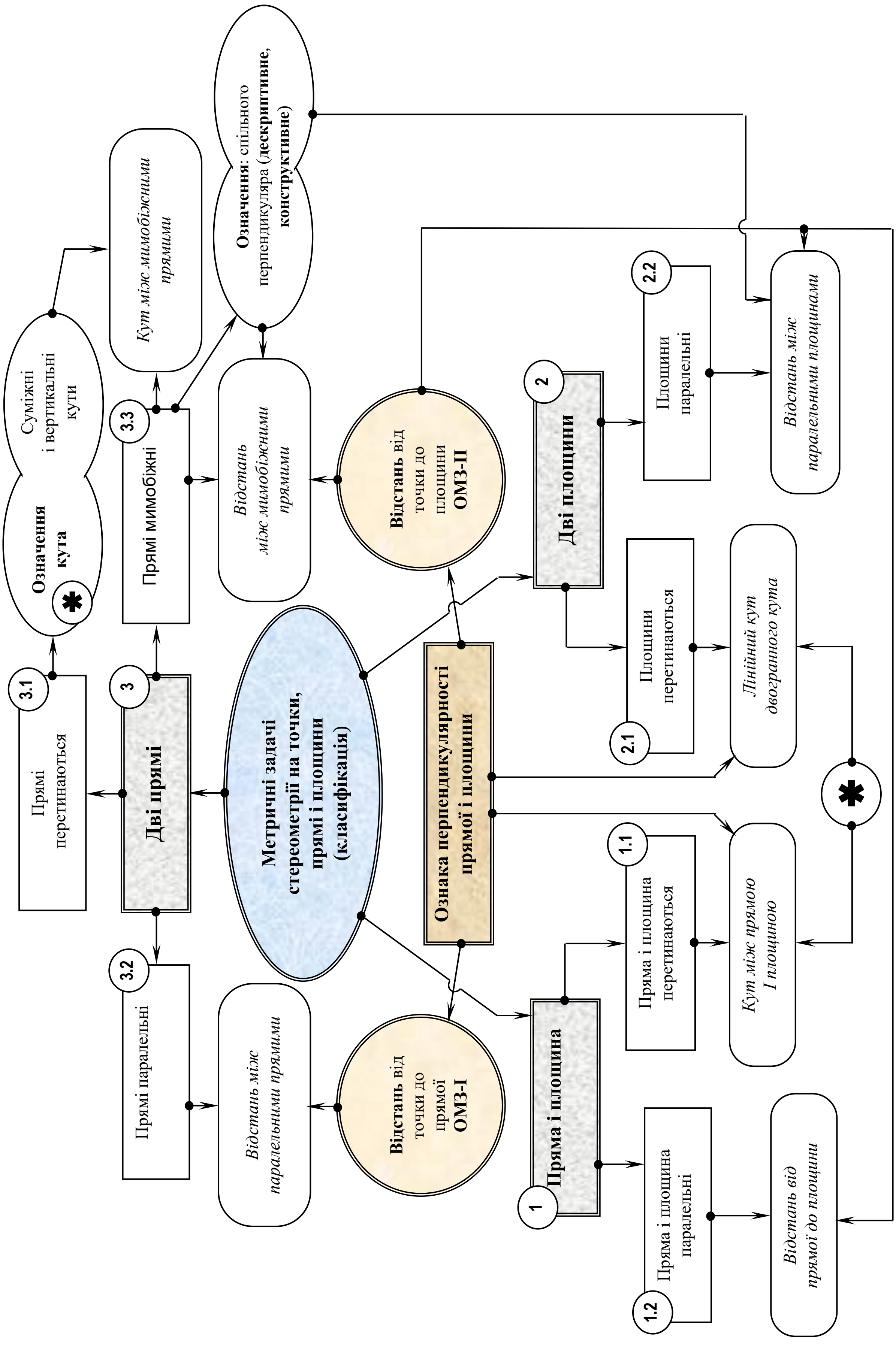
Отож, повернемось до основної теми.

Геометрія, як дисципліна прикладного (практичного) та професійного спрямування, у розвивальному навчанні студента мала б займати надто вагоме місце. Проте не завжди це так у педагогічних університетах у системі підготовки майбутнього вчителя математики.

У позиційній та в метричній стереометрії наріжним каменем конструктивного (побудованого) моделювання фігур є *дві основні позиційні та дві основні метричні задачі* з точками, прямими і площинами. Це задачі на перетин прямої і площини (ОПЗ-1), перетин двох площин (ОПЗ-2), відстань від точки до прямої (ОМЗ-1), відстань від точки до площини (ОМЗ-2) (див. схему). Без них неможливе розв'язання будь-яких інших змістових задач метрики. Щоб фахово здійснювати закономірні операції на зображеннях стереометричних тіл, потрібно ретельно відпрацювати покрокові алгоритми їх розв'язання шляхом уявлень у просторі та адекватних уявлюваних дій на проєкційних рисунках. До того ж, щоб отримати оригінально правдиві результати, операції на рисунках-моделях слід виконувати вельми акуратно.

На зображеннях стереометричних тіл їх грані, основи, перерізи, інші елементи займають (як правило) загальне розташування відносно картинної площини, а тому проєкціюються у спотвореному вигляді. З такими об'єктами, не знаючи методів та прийомів конструктивізму, проводити операції побудовного характеру важко. Як з'ясувалося, вихідними і базовими для обгрунтованих дій на проєекційному рисунку послуговують ОПЗ, ОМЗ та просторові перетворення, зокрема поворот навколо нульової лінії рівня (суміщення) плоских фігур із картинною площиною.

Ми ставимо перед студентами ***проблему*** діяльнісної візуалізації набутих, але не усталених знань шляхом їх структурування і залучення до системного розв'язання різнопланових, зорієнтованих на практицизм стереометричних задач та, завдяки такому підходу, глибокого, ефективного переосмислення і засвоєння майбутніми вчителями математики закономірностей (набуття знань, умінь і навичок) найпершої з наук на професійному рівні.


Метричні задачі стереометрії на точки, прямі і площини (класифікація)
Дві прямі
3
Пряма і площина
1
Дві площини
2
Ознака перпендикулярності прямої і площини
3.1
Прямі перетинаються
3.2
Прямі паралельні
3.3
Прямі мимобіжні
Означення кута
Суміжні і вертикальні кути
Кут між мимобіжними прямими
Означення: спільного перпендикуляра (дескриптивне, конструктивне)
Відстань між мимобіжними прямими
Відстань між паралельними прямими
Відстань від точки до прямої ОМЗ-І
Відстань від точки до площини ОМЗ-ІІ
1.1
Пряма і площина перетинаються
1.2
Пряма і площина паралельні
Кут між прямою і площиною
Відстань від прямої до площини
2.1
Площини перетинаються
2.2
Площини паралельні
Лінійний кут двогранного кута
Відстань між паралельними площинами

Схема

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання якісних, закономірно обґрунтованих побудов із використанням методу суміщення на наочних зображеннях фігур порушували ще на початку 50-х років минулого століття: «В аксонометричних проекціях деякі геометричні побудови, як-от: проведення взаємно перпендикулярних ліній, ділення кутів, побудова кіл і багатокутників за вказаними розмірами і т. ін., можливе у безпосередньому виконанні лише в тому випадку, коли ці фігури проекціюються на площину аксонометричних проекцій без спотворення. У всіх інших розташуваннях фігур виконання вказаних побудов стає неможливим і доводиться використовувати допоміжні прийоми. Одним із застосовуваних прийомів (способів), які дають можливість розв'язувати схожі задачі, є суміщення плоскої фігури з площиною креслення чи з площиною, паралельною площині креслення, з наступним поверненням (підняттям) суміщеної площини у початкове розташування» [1, с. 149].

«Геометрія є наука, яка вивчає властивості фігур, що не змінюються при перетвореннях деякої групи перетворень» (Ф. Клейн, [2, с. 12]). Однак, сьогодні на фізико-математичних факультетах педагогічних університетів, в ЗЗСО перетворення суміщення, як і перетворення обертання навколо проекціювальної прямої, практично не використовується, оскільки ці теми відсутні в навчальних програмах.

Питання позиційної стереометрії, з чіткою алгоритмізацією ОПЗ і з їх теоретичним поданням та практичним застосуванням у деталях розглянуто в навчальному посібнику [3, ч. ІІ, р. І]. Метрика стереометрії більш об'ємна. Їй приділяється належна увага як у вказаному посібнику (ч. ІІ, р. ІІ), так і в низці інших авторських публікацій (див. напр. [4-9]).

Мету статті ми вбачаємо в переосмисленні місця і ролі евклідової стереометрії у справі покращення професійної підготовки майбутніх учителів математики. Реалізацію поставлених цілей пропонуємо здійснювати, у першу чергу, графічними та графоаналітичними методами через геометризацію й унаочнення зображувального моделювання фігур у пошуку розв'язків традиційних (як для ЗЗСО) задач на обчислення.

2. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

ОМЗ-1 сформулюємо спочатку в загальному представленні та ретельно проаналізуємо, не прив'язуючись до конкретного методу зображень, а отже, без особливого акценту на урахування властивостей паралельних проєкцій.

З а д а ч а 1. *На картинній площині дано точку A і пряму a загального розташування. Причому, $A \notin a$. Знайти відстань від точки до прямої.*

У загальному випадку відстань від точки до прямої у стереометрії шукають через три кроки: 1) через дану точку проводять площину, перпендикулярну даній прямій – геометричне місце прямих, серед яких лише одна перетинає пряму, а інші мимобіжні з нею; 2) знаходять точку перетину прямої із проведеною площиною (ОПЗ-І); 3) встановлюють відстань між двома точками. Так, можна отримати, приміром, формулу відстані від точки до прямої в аналітичній геометрії.

Ми ставимо завдання конструктивного вирішення сформульованого питання.

Через точку і пряму, коли точка не належить прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну. Тому виникає бажання здійснити пошук розв'язання задачі не у просторі, а на площині $\Sigma(A, a)$. Проте Σ займає ***загальне*** розташування відносно картинної площини, через що зображення, яке виконане методом зовнішнього паралельного проєкціювання, спотворює як довжину шуканого перпендикуляра, так і прямий кут в його основі.

У строго не зафіксованому в умові задачі взаємному розташуванні точки (A) і прямої (a) у просторі, матимемо графічну невизначеність. Іншими словами, в такій ситуації задача на побудову не може бути розв'язана однозначно.

Щоб ланцюжок конструктивних операцій привів до єдиного розв'язку, потрібно на площину $\Sigma(A, a)$, в якій ведеться пошук розв'язання метричної задачі, затратити **два незалежні метричні параметри**. На метрично визначених зображеннях фігур, обумовлених певними метричними параметрами, термін «знайти відстань» означає «*побудувати відрізок*», який в оригіналі є істинно шуканою метричною характеристикою взаємного розміщення заданих геометричних об'єктів.

Здійснимо корективи щодо уявлюваних об'єктів зображення: 1) виберемо, наприклад, будь-яку точку B на прямій a і припустимо, що в оригіналі $\angle A'B'C'$ = 45°; 2) візьмемо ще одну точку C на цій прямій таку, щоб у просторі $A'B' = \frac{1}{2} B'C'$. Тепер, уведені в умову задачі два параметри, площину $\Sigma\,(A, a)$ цілком метрично визначають [10, §34].

Отже, у вихідній ситуації умова просторової задачі була сформульована некоректно, що й призвело до невизначеності. Це зобов'язує, з **методичної** точки зору, на етапі аналізу шляху розв'язання метричної задачі на повному проєкційному кресленні *конструктивними методами* **оцінити** (перевірити) його метричну визначеність.

Зауважимо, що користуючись на кресленні-моделі циркулем та лінійкою досягти очікуваних побудовних результатів можна ***графічним*** або ***графоаналітичним*** методами.

Щодо ***графічного*** розв'язання метричних задач, тут знайшов найширше застосування ***метод суміщення*** із площиною дошки (зошита) визначеної умовою (чи вибраної всередині заданого тіла за чіткими правилами самим виконавцем побудови) плоскої фігури.

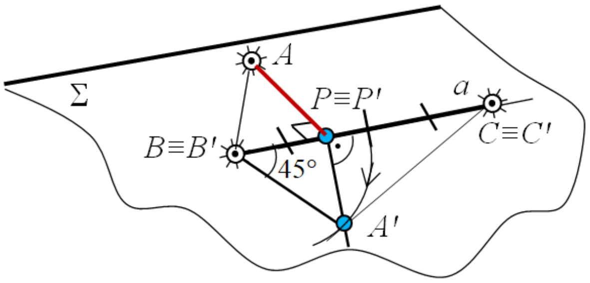


Рис. 1

Уявити динаміку такого просторового перетворення досить просто. Оскільки ми працюємо на кресленні лише з точністю до подібності, то припускаємо, що трикутник-оригінал $A'B'C'$ (рис. 1) після перетворень подібності та руху стороною $B'C'$ «потрапляє» на картинну площину так, щоб сторона BC трикутника-зображення ABC збігалася з $B'C'$. Це означає, що дві його вершини B' і C' тепер уже зображені як в оригіналі. Залишилося третю вершину A' повернути навколо прямої $B'C' \equiv BC$ так, щоб вона теж «упала» на площину зображень. Після виконання цього останнього руху, трикутник $A'B'C'$ належатиме картинній площині, а його форма буде істинною – такою, як в оригіналі. Тобто, кути трикутника будуть зображуватися в натуральну величину, а сторони – у визначених на зображенні (по відношенню до $B'C' \equiv BC$) пропорціях. *У цьому й полягає суть методу суміщення.*

Якщо два незалежні метричні параметри трикутника відомі за умовою задачі ($\angle B'$ = 45°; $A'B' = \frac{1}{2} B'C'$), то виконати фактичну побудову фігури оригінальної форми зовсім нескладно: 1) у вибрану півплощину відкладаємо $\angle C'B'b' = 45°$; 2) на промені b' відкладаємо відрізок $B'A' = \frac{1}{2} B'C'$. Трикутник $A'B'C'$ – шуканий, а операцію суміщення слід вважати завершеною. Далі, з вершини A' відомим планіметричним прийомом опускаємо перпендикуляр $A'P'$ на протилежну сторону трикутника $B'C'$. Відрізок AP ($P' \equiv P$) – єдиний графічно виражений розв'язок ОМЗ-1.

Характерною ознакою ***графоаналітичного*** методу потрібно вважати попереднє встановлення, через порівняно прості алгебричні представлення, визначальних, незмінних в паралельному проекціюванні співвідношень між заданими і шуканими елементами конструкції. Після цього, з урахуванням знайдених залежностей, формується переважно надто проста графічна кінцівка задачі, що є ключовою в накресленні замовленої висновком геометричної фігури. Так, побудовна складова пропозиції помітно мінімізується.

У розглядуваному конкретному випадку визначальною є точка P, тому *перший* (***аналітичний***) етап пошуку розв'язку можна провести в такий спосіб. Побудуємо акуратно «від руки» на вільному місці поля креслення (рис. 2) будь-який трикутник $A_0B_0C_0$, приблизно («на око») дотримуючись взаємних метричних залежностей, тобто з гострим кутом у 45° і такий, в якого прилеглі до кута сторони пов'язані заданим співвідношенням: $B_0A_0 = \frac{1}{2} B_0C_0$.

Опустимо перпендикуляр A_0P_0 на сторону B_0C_0. Далі міркуємо так. Якщо покласти, наприклад, $B_0A_0 = 1$, то $B_0C_0 = 2$, а $B_0P_0A_0$ – рівнобедрений прямокутний трикутник і $\mathrm{B_0P_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. У свою чергу, отримаємо $P_0C_0 = B_0C_0 - B_0P_0 = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, а $B_0P_0 : P_0C_0 = 1 : (2\sqrt{2} - 1)$.

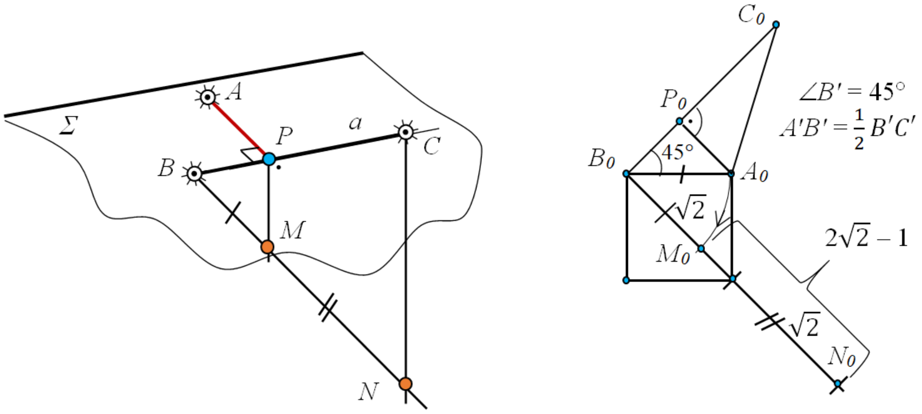


Рис. 2

Графічний (завершальний) етап, виконаний інструментами (чи акуратно «від руки»), добре простежується за рисунком. Нагадаємо, що тут задіяно узагальнену теорему Фалеса та навички в побудові відрізків, які формально представлені виразами із скінченним числом раціональних операцій та добування коренів квадратних ([3], р. ІІ, §1, п. 1.1).

З а д а ч а 2. *Площину загального розташування задано рівнобедреним трикутником ABC (AC = BC) з основою AB =* $6\sqrt{3}$ *та кутом при вершині C, що дорівнює* 120°. *На перпендикулярі, проведеному до площини трикутника у вершині A, узято точку M так, що AM =* $3\sqrt{6}$. *Обчислити відстань від точки M до бічної сторони BC трикутника.*

Сформульовану задачу показово-розвивального характеру частково розглянуто у статті [5], проте ми вирішили (із деякими повтореннями) доповнити умову обчислювальною складовою і додати їй конструктивізму. Але і в цьому випадку варто пам'ятати, що в пошуку обчислювального розв'язку змодельований рисунок має залишатися візуально якісним.

Конструктивний етап. Шуканий перпендикуляр *MQ* із точки *M* до прямої *BC* (рис. 3) є, що очевидно, похилою до площини трикутника *ABC*. Згідно із теоремою про три перпендикуляри, його проєкція *AQ* теж перпендикулярна до *BC*. Саме тому для розв'язання задачі варто спочатку провести у площині загального розташування висоту заданого трикутника з вершини *A* на протилежну їй сторону *BC*. Оскільки кут *C* тупий (дорівнює 120°), точка *Q* – основа перпендикуляра *AQ* лежатиме зовні відрізка *BC*.

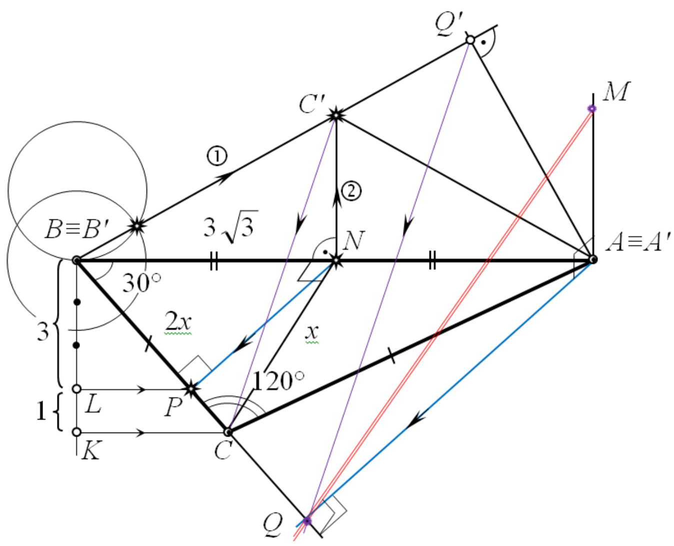


Рис. 3

Аналізуючи рисунок, шанувальник геометрії помітить, що трикутник AQC прямокутний ($\angle Q$ = 90°), а $\angle ACQ$ = 180° – $\angle ACB$ = 60° і $\angle CAQ$ = 30°. Отже, катет CQ прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30°, у два рази менший за гіпотенузу AC, тому матимемо, що $CQ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC$. Розділивши відрізок BC навпіл і відклавши від точки C упродовж променя BC відрізок $CQ = \frac{1}{2}BC$, отримаємо шукану точку Q. Побудову перпендикуляра MQ завершуємо просто.

У конструктивній метричній стереометрії досить часто користуються правилом: щоб провести перпендикуляр із точки на пряму (чи на площину), обґрунтовано зображають перпендикуляр *із вдало обраної* (виконавцем побудови) *іншої точки* на ту ж пряму (площину). Потім через задану точку проводять пряму, паралельну вже побудованому перпендикуляру. Отже, такий підхід ініціює інший шлях побудов.

Зручно, наприклад, опустити перпендикуляр на сторону BC трикутника ABC із точки N, яка є серединою його основи AB. Справді, $\angle A = \angle B$ = 30°, а CN – медіана, бісектриса і висота заданого трикутника. Згідно із фактом, що у прямокутному трикутнику CNB ($\angle N$ = 90°) кожен із його катетів є середнім геометричним між гіпотенузою і власною проєкцією на гіпотенузу, одержимо: $BN^2 : NC^2 = BP : PC$. Звідки, позначивши $CN = x$, матимемо, що $BC = 2x$, $BN = x\sqrt{3}$, а $BP : PC = (x\sqrt{3})^2 : x^2 = 3 : 1$. Розділивши сторону трикутника BC точкою P у відношенні 3:1 (від точки B), з'єднаємо точки N і P відрізком перпендикулярним BC і через точку A паралельно NP проведемо проєкцію похилої AQ, а потім і саму похилу MQ.

Такий підхід до розв'язання задачі на побудову є насправді *графоаналітичним*, а саме: 1) *формально-логічно* розраховано розташування на прямій BC основи P перпендикуляра NP; 2) знайдений результат дозволив *графічно* змоделювати зображенням проекцію похилої AQ за вже відомим її напрямом у площині трикутника ($AQ \parallel NP$); 3) з'єднавши точки M і Q, одержано виважено точний візуальний розв'язок задачі.

Конструктивізму геометрії притаманна розмаїтість у вирішенні багатьох побудовних проблем, що надто корисно в пізнанні дисципліни. Тому скористаємося переміщенням у просторі (*рухом*) і дійдемо до результату винятково *графічним* методом.

Уявимо, що переміщуючи трикутник ABC ми «кладемо» його на картинну площину стороною AB ($A'B' \equiv AB$). Обертанням точки $C \equiv C'$ навколо прямої $A'B'$ суміщаємо її з площиною зображень. Побудувати точку C' циркулем і лінійкою у два кроки просто, якщо взяти до уваги, що в оригіналі $\angle A' = \angle B'$ = 30° (з допомогою серединного перпендикуляра в точці N до BC і двох кіл рівних радіусів, див. рис. 3). Далі площинним прийомом опускаємо з точки A' на пряму $B'C'$ перпендикуляр $A'Q'$. Точка Q' розділяє відрізок $B'C'$ зовнішнім чином у відношенні, в якому точка Q ділить відрізок BC, адже рухи зберігають відношення відрізків на прямій. Відшукання точки Q здійснюємо через узагальнену теорему про пропорційні відрізки [11]. Сполучивши точку Q з точками A і M, отримуємо похилу MQ і її проєкцію AQ, що перпендикулярні BC.

Обчислювальний етап. Повернувшись до трикутника CNB ($\angle N$ = 90°), легко знаходимо, що $CN = x = 3$, $BC = AC = 2x = 6$, а $CQ = 3$ (в одиницях масштабу). Отже, із прямокутного трикутника AMQ, в якому $AM = 3\sqrt{6}$, отримаємо: $MQ = 9$ (од. м.).

Конструктивно до цього останнього результату неважко дійти, використовуючи розглянутий суто графічний метод побудов. Тут, як відомо, основа заданого трикутника $A'B' \equiv AB$ уже є оригінальним відрізком. На картинній площині (після операції суміщення, рис. 3) зображено в натуральну величину прямокутний трикутник $A'Q'C'$, в якого $A'Q' = 3\sqrt{3}$, $Q'C' = 3$, $A'C' = 6$. Поклавши це зображення в основу, знаходимо на виносному кресленні оригінальну довжину відстані $M'Q'$ від точки M' до сторони $B'C'$ трикутника $A'B'C'$ (рис. 4, *а-в*): 1). Обираємо одиницю довжини, поділивши відрізок $Q'C'$ = 3 на три рівні частини. 2). За відомої одиниці довжини, методом середніх геометричних (рис. 4, *б*) у прямокутному трикутнику просто знаходимо відрізок довжиною $\sqrt{6}$. 3). За двома катетами будуємо прямокутний трикутник $A'M'Q'$, гіпотенуза якого $M'Q'$ дорівнює 9 (од. м.).

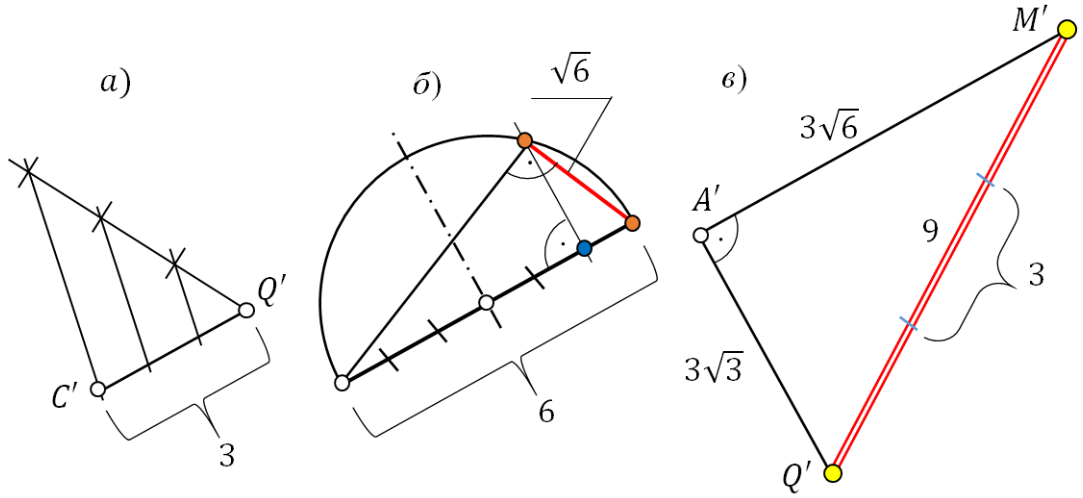


Рис. 4

Можна оцінити точність виконаних графічних побудов. Для цього варто ретельно заміряти (з урахуванням одиниці масштабу) довжину відрізка $M'Q'$ на рисунку 4 та порівняти результат із його розрахунковою довжиною.

Іншу із двох основних метричних задач – на відшукання відстані від точки до площини (ОМЗ-2), найліпше продемонструвати прикладами розв'язання стереометричних пропозицій на обчислення.

Задача 3. *В основі прямої призми лежить трикутник зі сторонами* 6, 8 і 10 од. м. *Верхня грань призми нахилена до нижньої грані під кутом* α ($\cos\alpha = \frac{4}{5}$) *і відтинає від бічних ребер, які проходять через вершини двох більших кутів основи, відрізки по* 8 од. м. *Знайти об'єм, площу повної поверхні, а також відстань від вершини нижньої основи призми* C_1 *до верхнього її зрізу* ABC.

Аналізуючи умову за кресленням-картиною (рис. 5), помічаємо, що в основі призми лежить прямокутний трикутник ($\angle B_1 = 90°$). Оскільки сторона зрізу AB розміщена перпендикулярно грані BB_1C_1C ($AB \perp B_1C_1$, $AB \perp BB_1$), то заданий кут між площиною зрізу та основою призми вимірюється лінійним кутом CBN ($\angle ABC = 90°$). Працюючи зі схожою призмою, в обчисленнях об'єму доречно розбити її на дві складові: пряму призму $ABCA_1B_1C_1$ і піраміду $CABN$. Так, $V_{ABNA1B1C1} = 192$, а $V_{CABN} = 48$, що підраховується за відомими формулами. Остаточно для шуканого об'єму матимемо: $V_п = 240$ (куб. од. м.).

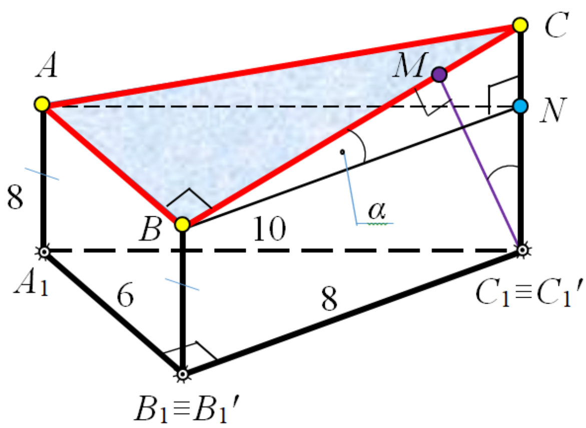


Рис. 5

Для відшукання повної поверхні призми, потрібно знайти площу бічних граней та площу основ: $S_{\Delta A A1B1C1} = 24$, $S_{\Delta AA1B1B} = 48$. $S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta ABN}}{\cos\alpha} = 30$. Дві інші бічні грані мають форму прямокутних трапецій зі спільною основою $CC_1 = CN + NC_1$, де $NC_1 = 8$, а CN знаходимо із прямокутного трикутника CNB: $CN = NB \cdot \text{tg}\ \alpha = 6$. Отже, $CC_1 = 14$, $S_{BB1C1C} = 88$, $S_{AA1C1C} = 110$. У сумі матимемо: Sп = 300 (кв. од. м.).

Відстань від вершини призми C_1 до зрізу ABC потрібно шукати у площині грані BB_1C_1C, оскільки шуканий відрізок C_1M перпендикулярний двом прямим верхньої грані AB і BC. Трикутники BNC і C_1MC подібні – вони прямокутні зі спільним гострим кутом при вершині C. Отже, $BC : C_1C = BN : C_1M$. Звідси маємо, що $C_1M = (C_1C \cdot BN): BC = 11{,}2$ (од. м.).

Щоб візуалізувати відшукання оригінального розташування основи перпендикуляра M на відрізку BC (і площі трикутника ABC), потрібно перемістити грань BB_1C_1C у просторі, поклавши ребром B_1C_1 на картинну площину, а потім сумістити її з цією площиною обертанням навколо нульової лінії рівня (рис. 6).

Припустивши, що відрізок основи призми $BC \equiv B'C'$ зображено істинною величиною (8 од. м.), першим обертанням грань $QRCB$ зрізаної призми сумістимо із площиною зображень. При цьому зріз призми, перпендикулярний указаній грані, виродиться у відрізок $B'C'$. Другим обертанням зрізу навколо осі $B_1'C_1'$ на 90° отримаємо зображення прямокутного трикутника $A'B'C'$ натуральної величини (тут, згідно з умовою, катет $A'B' = 6$ од. м.).

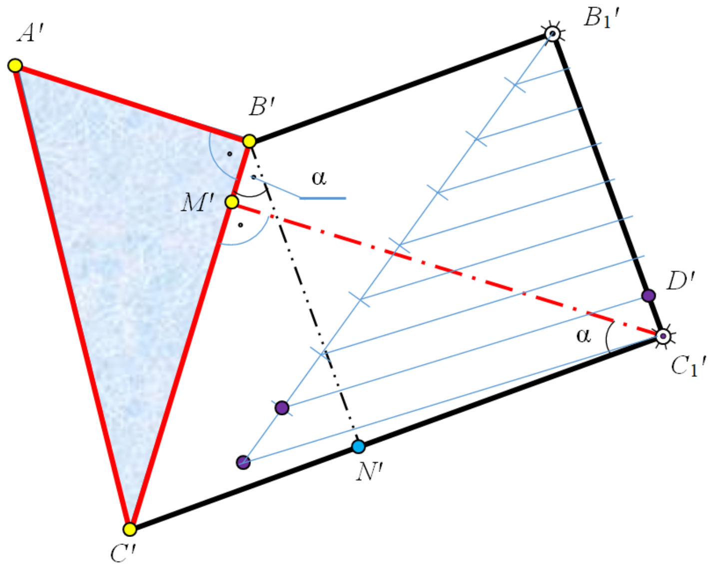


Рис. 6

Працюючи за такою схемою, обов'язково слід решту лінійних елементів грані BB_1C_1C «перевести» в одиниці масштабу відрізка $B_1'C_1'$. Одиницю масштабу отримуємо поділивши відрізок $B'C'$ на 8 (вісім) рівних частин. Тут $C_1'D' = \frac{1}{8}\ B_1'C_1'$ – виконує роль відрізка в 1 одиницю масштабу. Кут α – оригінальний.

Задача 4. *У правильній чотирикутній піраміді з двогранним кутом при основі* 75° *через сторону основи проведено площину перерізу під кутом* 45° *до площини основи. Знайти відношення об'єму верхньої* (*зрізаної*) *частини піраміди до об'єму всієї піраміди.*

Обґрунтуємо побудову перерізу піраміди січною площиною ([12], с. 239).

Середня лінія MN, яка проходить через центр O квадрата $ABCD$ в основі піраміди, перпендикулярна двом його сторонам AB і CD (рис. 7). Апофема SM лівої грані SAB перпендикулярна AB (згідно із теоремою про три перпендикуляри). Отже, $\angle SMN = 75°$ – лінійний кут, яким вимірюється двогранний кут при основі AB правильної піраміди. Апофеми бічних граней SN і SM разом із середньою лінією MN визначають площину симетрії піраміди (SMN), яка теж перпендикулярна AB і CD ($AB \parallel CD$). Тому будь-яка пряма площини (SMN) перпендикулярна CD і, отже, площина перерізу, що вміщує CD, перетне площину симетрії (SMN) по прямій NF, яка утворює з площиною основи даний лінійний кут ($\angle FNM$ = 45°).

Таким чином, розпочинати побудову перерізу потрібно із проведення у площині симетрії піраміди (SMN) відрізка NF під кутом 45° до NM. Січна площина перетинатиме бічну грань SAB по відрізку $PQ \parallel CD$, оскільки вона проходить через відрізок $CD \parallel AB$. Грані SAD і SBC площина перерізу перетне вздовж рівних відрізків DP і CQ, що випливає із рівності трикутників PAD і QBC (за двома сторонами і кутом між ними).

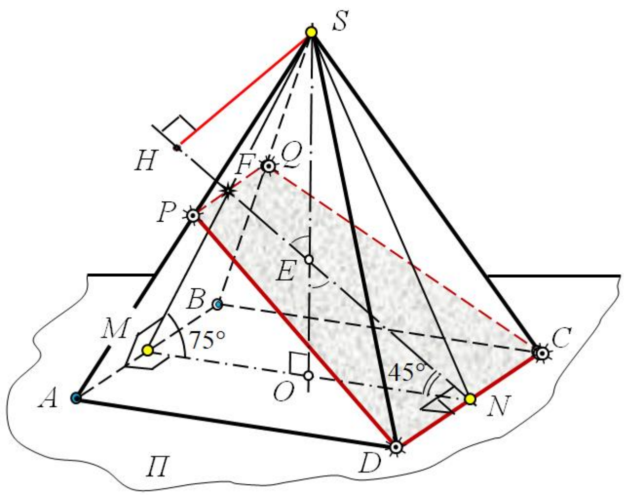


Рис. 7

Маємо, що перерізом буде рівнобічна трапеція $PQCD$, яка відсікає від заданої піраміди $SABCD$ піраміду $SPQCD$. Об'єм кожної піраміди слід виражати формулою $V = \frac{1}{3}\, S_{о} \cdot h$. Якщо подати об'єми обох пірамід функцією деякого параметра a, то в шуканому відношенні цей параметр скоротиться. Тому для зручності у викладах покладемо, наприклад, сторону основи правильної чотирикутної піраміди рівною a.

Тепер площа основи піраміди $SABCD$, що очевидно, дорівнює a^2; висоту SO легко знаходимо у прямокутному трикутнику SOM, катет якого $MO = \frac{a}{2}$, а гострий кут рівний 75°: $SO = MO \cdot \text{tg } 75° = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. Отже, $V_1 = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. (*)

Для відшукання об'єму піраміди $SPQCD$ потрібно знайти площу її основи (трапеції $PQCD$) і висоту, тобто відстань від вершини S до площини перерізу.

Спочатку знайдемо площу трапеції $PQCD$. Її більша основа CD дорівнює a; висота NF є стороною трикутника NFM, в якого кут при вершині F рівний 60°, а $NM = a$. За теоремою синусів маємо: $\frac{NF}{\sin 75°} = \frac{NM}{\sin 60°}$. Звідси отримаємо $NF = \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$. Меншу основу трапеції PQ шукатимемо з подібності трикутників SPQ і SAB: $\frac{PQ}{AB} = \frac{SF}{SM}$. Тут $AB = a$, у трикутнику SFN кут при вершині F рівний 120°, а при вершині N – 30°. Тому цей трикутник рівнобедрений, а SF = = NF. У трикутнику SOM $SM = \frac{MO}{\cos 75°} = \frac{\sqrt{2}\, a}{\sqrt{3}-1}$. Таким чином, із записаного вище відношення отримаємо: $PQ = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Площу трапеції $PQCD$ обчислюємо за формулою $S = \frac{CD+PQ}{2} \cdot NF$. Отож, маємо: $S_{\text{PQCD}} = \frac{\sqrt{2}a^2(\sqrt{3}+1)^2}{12}$.

Відомо, що у просторі відстань від точки до площини знаходять через три кроки: 1) через точку проводять пряму, перпендикулярну площині; 2) шукають точку перетину прямої з площиною (ОПЗ-1); 3) заміряють відстань між двома точками.

У стереометричних фігурах, як правило, через задану точку проводять площину, перпендикулярну даній площині, в якій (за ознакою перпендикулярності двох площин) і буде розміщено шуканий перпендикуляр до прямої їх перетину. У нашій ситуації площина симетрії піраміди (SMN) перпендикулярна її перерізу $PQCD$ і вони перетинаються по прямій NF. Отже, відстань від точки S до січної площини (висота піраміди $SPQCD$) вимірюється відрізком перпендикуляра SH, проведеного з точки S на пряму NF.

Зауважимо, оскільки $\angle SFN$ = 120° (трикутник SFN – тупокутній), то основа H перпендикуляра лежить зліва від точки F, тобто за межами відрізка NF (що нижче буде продемонстровано конструктивно).

Прямокутні трикутники SHE і NOE подібні, адже $\angle SEH = \angle NEO$ як вертикальні. Причому, обидва трикутники рівнобедрені та прямокутні. Отже: $\frac{SH}{NO} = \frac{SE}{NE}$. Звідси, як результат, отримаємо: $SH = \frac{a}{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}$.

Записуємо вираз для об’єму піраміди $SPQCD$: $V_2 = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{12(\sqrt{3}-1)}$. (**)

Поділивши рівності (**) і (*), остаточно матимемо: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{3}+1}{6} \approx 0,45534$.

Констатуємо, що так отримане відношення менше одиниці, що цілком природньо. Задачу на обчислення розв’язано.

Тепер варто додати задачі конструктивізму, змоделювавши побудовним методом місце розташування основи H перпендикуляра SH на відрізку NF, його довжину і оригінальну форму та розміри трапеції в перерізі піраміди.

Переміщенням у просторі «кладемо» середню лінію NM в основі піраміди на картинну площину. Це буде відрізок, довжина якого (у міліметрах) істинно рівна a. Поворотом навколо лінії нульового рівня $N'M'$ суміщаємо площину симетрії піраміди (SMN) з картинною площиною (рис. 8, *а*). При цьому трапеція $PQCD$, перпендикулярна площині (SMN), вироджується у відрізок $N'F'$, що є висотою трапеції в натуральну величину. Перпендикуляр $S'H'$ опускаємо на січну площину як у планіметрії. Тепер на рисунку 7 можна (за потреби) строго знайти точку H, поділивши зовнішнім чином відрізок NF у відношенні, в якому точка H' ділить відрізок $N'F'$, адже поділ відрізка в заданому відношенні є інваріантом будь-якого руху.

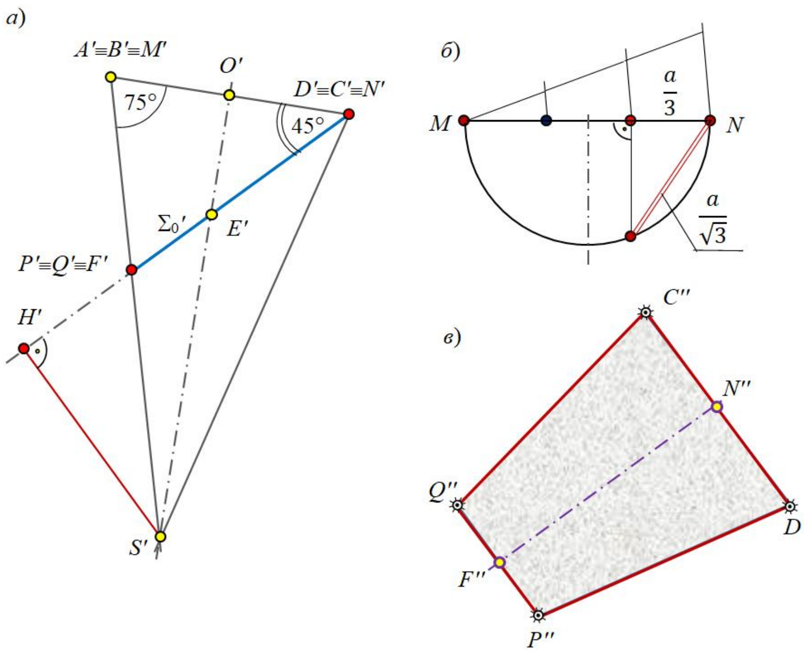


Рис. 8

Щоб отримати оригінальним за формою і розмірами переріз піраміди, потрібно виконати ще один поворот трапеції $P'Q'C'D'$ на 90° навколо висоти $N'F'$, сумістивши її з площиною зображень (рис. 8, *в*). Тут, щоб отримати в натуральну величину довжину меншої основи трапеції $P'Q'$, скористаємося середніми геометричними у прямокутному трикутнику (рис. 8, *б*). Решту елементів трапеції беремо з рисунка 8, *а*.

Таким чином, зараз задачу розв’язано графоаналітичним методом, адже для зображення трапеції використано отриману вище формулу $PQ = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Чи можна змоделювати відрізок PQ суто графічно? Так, звичайно. З цією метою досить сумістити з картинною площиною бічну грань піраміди (рівнобедрений трикутник) SAB, основу $AB = a = N'M'$ і висоту $S'M'$ якого слід узяти з рисунка 8, *а*. Розділивши висоту побудованого трикутника у відношенні $S'F'$: $F'M'$ та провівши через отриману точку пряму паралельно його основі, в перетині з бічними сторонами матимемо оригінальний за довжиною відрізок PQ (рисунок відсутній).

Щоб оцінити точність конструктивних операцій, варто якомога більш точно заміряти довжину відрізка $a = N'M'$ і підставити це значення у формули, виведені для площі основи і висоти піраміди $SPQCD$, прийнявши їх за істинні. Далі слід заміряти (рис. 8) довжини відрізків $S''H''$, $N''F''$, $P''Q''$ і $C''D''$, обчислити площу трапеції $P''Q''C''D''$ і знайти абсолютну та відносну похибки рисункових операцій.

У наших замірах a = 4,4 см. Підставивши у формули (*) і (**) значення a, ми отримали $V_1 \approx 52{,}9866$ (см^3), а $V_2 \approx 24{,}13$ (см^3). Таким чином, $\frac{V_2}{V_1} \approx 0{,}455398$. Абсолютна похибка складає $0{,}58 \cdot 10^{-4}$ (см^3), а відносна – $1{,}274 \cdot 10^{-2}$ %.

Далі пропонуємо кмітливим суб’єктам навчання попрацювати самостійно.

Задачі для розв’язання ([13], § 9).

№ 1. На ребрі SB правильного тетраедра $SABC$ узято точку K таку, що $SK : KB = 2 : 1$. Опустіть перпендикуляр із точки K на ребра SA і SC та знайдіть точку перетину висоти SO тетраедра з площиною, яка проходить через проведені перпендикуляри.

№ 2. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ висота SO дорівнює стороні основи AB. Із вершини D опустіть перпендикуляр на площину грані SBC.

№ 3. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з відношенням ребер $AB : AD : AA_1 = = 1 : 2 : 1$ через вершини B, C_1 і D проведено площину. На ребрі A_1D_1 узято точку P_1. Опустіть перпендикуляр із точки P_1 на площину BC_1D, якщо: 1) $AP_1 : P_1B_1 = 1 : 1$; 2) $AP_1 : P_1B_1 = 1 : 2$; 3) $AP_1 : P_1B_1 = 2 : 3$.

№ 4. У трикутній піраміді $SABC$ основою є прямокутний трикутник ABC із прямим кутом у вершині C і катетами $AC = 3$, $BC = 4$. Висота піраміди проекціюється в точку C і дорівнює гіпотенузі AB. Опустіть із точки С перпендикуляр на площину грані SAB.

№ 5. В основі призми лежить рівносторонній трикутник ABC. Дві бічні грані призми – ромби зі спільним ребром AA_1 і гострим кутом 60°. Опустіть перпендикуляр із точки P, узятій на ребрі AA_1, на діагональ BC_1 грані BB_1C_1C, якщо $AP : PA_1 = 1 : 3$.

№ 6. Правильний тетраедр $SABC$ перетнули площиною, яка проходить через ребро AC і точку K, що належить ребру SB, причому $SK : KB = 2 : 1$. Знайдіть відношення об’ємів пірамід $SKAC$ і $KABC$.

№ 7. Через сторону основи правильної чотирикутної піраміди проведена площина, яка відтинає від протилежної грані трикутник площею 4 см^2. Знайдіть бічну поверхню піраміди, що відсічена проведеною площиною, якщо бічна поверхня заданої піраміди рівна 25 см^2.

Додайте обчислювального змісту задачам №№ 1-5, а задачі за №№ 6, 7 геометризуйте та унаочніть процес розв’язання конструктивно.

3. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Кваліфіковане переформулювання обчислювальної стереометричної задачі змістовно наповнює умову завданнями, які наочно-образно, уявлювано-динамічними прийомами в закономірних реалізаціях візуалізуються [14, 15] на картинній площині, що додає глибшого розуміння її змісту та практицизму процесу моделювання. Зацікавленість, успіх у пізнанні геометрії досягається не стільки числом розв’язаних задач, скільки постановкою проблем, глибиною мислення, навичками й уміннями якісного оперування геометричними образами, а одним із найперших обов’язків учителя є переорієнтувати студента (учня) на прикладну значущість і життєву доцільність опанування геометрії.

Сьогодні в стереометрії переважно розв’язують задачі обчислювального змісту, що не сприяє всебічному розвитку особистості. Ми пропонуємо умови традиційних, звичних задач геометризувати, не нехтуючи обчислювальною складовою, а доповнюючи завданнями конструктивного характеру, зорієнтованими на прикладний зміст дисципліни, з більшими можливостями візуального моделювання чи то рисунком, чи з допомогою сучасних ІКТ у комп'ютерній графіці [16].

Побудовні методи розв'язування задач розвивають візуальну грамотність, здатність міркувати і виражати якісними зображеннями власні думки, сприяють розумінню сутності закономірних стереометричних ситуацій, зв'язків між визначальними елементами фігур, спонукаючи суб'єкта навчання до творчо-розвивального просторового уявлення і логічного мислення.

Ґрунтовні дослідження питань конструктивізму в геометрії (зокрема, у стереометрії) ми проводимо упродовж кількох десятків років. Відповідно до сучасних можливостей і тенденціям у навчанні, плануємо надалі залучати майбутніх учителів математики до моделювання як планіметричних, так і стереометричних фігур та їх комбінацій із педагогічно виваженим, доречним застосуванням ІКТ, відомих ППЗН, мультимедіа тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф. Аксонометрия. Москва: Гостехиздат, 1953. 291 с.

[2] Яглом И. М. Геометрические преобразования. Ч. II. Москва: Госиздат технико-теоретической литературы, 1956. 612 с.

[3] Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: навч. посібник для студентів матем. спец-й ВПНЗ. Житомир : ЖДУ ім. І. Франка, 2010. 367 с.

[4] Працьовитий М. В., Ленчук І. Г. Евклідова геометрія: конструктивна складова. Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 5. Педагогічні науки: Реалії та перспективи. Вип. 50: зб. наук. праць. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014. С. 174-186.

[5] Ленчук І. Г. Просторові перетворення фігур у задачах стереометрії. Вид-во: «Педагогічна преса». Наук.-метод. журнал «Математика в рідній школі», 2015. №6. С. 33-39.

[6] Ленчук І. Г. Геометрична підготовка вчительських кадрів в університетах України: акценти на конструктивізм. Науковий журнал: Фізико-математична освіта. Вип. 2 (8). Суми: Вид-во СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2016. С. 67-71.

[7] Ленчук І. Г., Працьовитий М. В. Психолого-педагогічні передумови застосування геометричних знань до розв'язування задач. Наукові записки: [збірник наукових статей] / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова; упор. Л. Л. Макаренко. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2018. Випуск CXXXXI (141). С.113-121

[8] Ленчук І. Г., Працьовитий М. В.. Роль і місце виносних креслень у конструктивній стереометрії. Вид-во: «Педагогічна преса». Наук.-метод. журнал «Математика в рідній школі», 2019. №1-2. С. 20-23.

[9] Ленчук І. Г. Конструктивне моделювання стереометричних задач з перерізами. Збірник наукових праць: Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Випуск 60. – Київ-Вінниця: Вид-во ВДПУ ім. М. Коцюбинського, 2021. С. 272-281.

[10] Четверухін М. Ф. Рисунки просторових фігур у курсі геометрії: посіб. для викладачів. Київ: Радянська школа, 1953. 188 с.

[11] Погорєлов О. В. Геометрія : Стереометрія: підручник для 10-11 кл. сер. шк. Київ : Освіта, 1998. 128 с.

[12] Методика викладання стереометрії : 3-тє вид. / Д. М. Маєргойз та ін.; за ред. О. М. Астряба і О. С. Дубинчук. Київ : Радянська школа, 1956. 280 с.

[13] Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по решению математических задач. Геометрия: уч. пособ. для ст-в ф-м ф-тов ПИ. Москва: Просвещение, 1985. 223 с.

[14] В. Г. Кремень, & В. В. Ільїн, (2020). «Презентація візуальної грамотності в освітньому процесі та її експлуатація в культурі мислення». *Інформаційні технології і засоби навчання*, *75*(1), 1-12. [Електронний ресурс]. Доступно: https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.3660.

[15] Richard S. Palais, «*The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium*», Notices of the American Mathematical Society, vol. 46 (6), pp. 647–658, 1999.

[16] F. Botana, M. Abánades, and J. Escribano. «*Using a Free Open Source Software to Teach Mathematics*», Computer Applications in Engineering Education, 22 (4), pp. 728-735, 2014.

MAIN METRIC PROBLEMS OF CONSTRUCTIVE STEREOMETRY

Lenchuk Ivan Hryhorovych
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of Algebra and Geometry
Department Ivan Franko Zhytomyr State University,
Zhytomyr, Ukraine
ORCID ID: 0000-0003-1923-9540
lench456@gmail.com

Pratsiovytyi Mykola Viktorovych
Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Dean of the Faculty of Mathematics, Informatics and Physics
Mikhail Dragomanov National Pedagogical University, Kiev, Ukraine
ORCID ID: 0000-0001-6130-9413
prats4444@gmail.com

Annotation. The authors have thoroughly considered two basic metric problems on points, lines, and planes, without having a method of application and algorithms for solving which it is practically impossible to obtain a result, working by constructive methods with the plane of general arrangement. In the article the scheme is developed, on which in full the classification of derivative problems is presented, which will help the interested person to penetrate into the essence and to understand connections in the theory of the considered question. The statement of the problem is given, and a brief analysis of recent research and publications (mainly those of the author) is made. Correctly written out the purpose of the article, which provides for teaching students of teacher training universities, who are preparing in the future to become teachers of mathematics, graphic and graphoanalytical methods of working with stereometric shapes by geometrization and visualization of ordinary calculation problems, that is to engage in creative research, operating with images in the teacher's workplace innovatively. The results of the study propose for revision the ways of solving four problems. The first of them has a staged character, where the question of the distance from a point to a line in a general form is illuminated. At the same time the specific technique draws special attention to the metrical certainty of any plane of general arrangement, which from the methodological point of view is essential. The second is a calculation problem, which is solved by all possible methods, but with an emphasis on the constructivist method. The other two are computational stereometric problems, in which geometrization and visualization are chosen as the priority approach in reasoning and in finding a solution. It is important that in the last of the tasks the distance from the point to the plane should be sought as an intermediate stage of calculations. In each problem the student is given an opportunity to evaluate the accuracy of his or her own constructive modeling of spatial figures and the results of construction operations obtained in this way. The conclusion provides a continuation of the author's research in terms of the effective use of ICT and 3D-modeling in the work with students.

Key words: constructive stereometry; metric problems; convergence transformation; graphic and graphoanalytic methods.

References (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

[1] Hlazunov E. A., Chetverukhyn N. F. (1953). *Aksonometryya* [Axonometry]. Moskva: Hostekhyzdat. 291 s. [in Russian].

[2] Yahlom Y. M. (1956). *Heometrycheskye preobrazovanyya* [Geometric transformations]. CH. II. Moskva: Hosyzdat tekhnyko-teoretycheskoy lyteratury. 612 s. [in Russian].

[3] Lenchuk I. (2010). *Konstruktyvna stereometrija v zadachakh* [Constructive stereometry in problems]: navchanyi posibnyk dlia studentiv matematychnykh spetsialnostei VPNZ. Zhutomyr: vud-vo ZhDU im. I. Franka. [in Ukrainian].

[4] Prats′ovytyy M. V., Lenchuk I. H. (2014). *Evklidova heometriya: konstruktyvna skladova* [Euclidean geometry: a constructive component]. Naukovyy chasopys NPU im. M. P. Drahomanova. Seriya 5. Pedahohichni nauky: Realiyi ta perspektyvy. Vyp. 50: zb. nauk. prats′. Kyyiv: Vyd-vo NPU im. M. P. Drahomanova. S. 174-186. [in Ukrainian].

[5] Lenchuk I. H. (2015). *Prostorovi peretvorennya fihur u zadachakh stereometriyi* [Spatial transformations of figures in stereometry problems]. Vyd-vo: «Pedahohichna presa». Nauk.-metod. zhurnal «Matematyka v ridniy shkoli». №6. S. 33-39. [in Ukrainian].

[6] Lenchuk I. H. (2016). *Heometrychna pidhotovka vchytel's'kykh kadriv v universytetakh Ukrayiny: aktsenty na konstruktyvizm* [Geometric training of teachers in universities of Ukraine: accents on constructivism]. Naukovyy zhurnal: Fizyko-matematychna osvita. Vyp. 2 (8). Sumy: Vyd-vo SumDPU im. A. S. Makarenka. S. 67-71. [in Ukrainian].

[7] Lenchuk I. H., Prats′ovytyy M. V. (2018). *Psykholoho-pedahohichni peredumovy zastosuvannya heometrychnykh znan' do rozv'yazuvannya zadach* [Psychological and pedagogical prerequisites for the application of geometric knowledge to solve problems]. Naukovi zapysky: [zbirnyk naukovykh statey] / M-vo osvity i nauky Ukrayiny, Nats. ped. un-t imeni M. P. Drahomanova; upor. L. L. Makarenko. Kyyiv: Vyd-vo NPU im. M. P. Drahomanova. Vypusk SKHKHKHKHI (141). S.113-121 [in Ukrainian].

[8] Lenchuk I. H., Prats′ovytyy M. V. (2019). *Rol′ i mistse vynosnykh kreslen′ u konstruktyvniy stereometriyi* [The role and place of remote drawings in constructive stereometry]. Vyd-vo: «Pedahohichna presa». Nauk.-metod. zhurnal «Matematyka v ridniy shkoli». №1-2. S. 20-23. [in Ukrainian].

[9] Lenchuk I. H. (2021). *Konstruktyvne modelyuvannya stereometrychnykh zadach z pererizamy* [Constructive modeling of stereometric problems with sections]. Zbirnyk naukovykh prats′: Suchasni informatsiyni tekhnolohiyi ta innovatsiyni metodyky navchannya v pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiya, teoriya, dosvid, problemy. Vypusk 60. – Kyyiv-Vinnytsya: Vyd-vo VDPU im. M. Kotsyubyns′koho. S. 272-281. [in Ukrainian].

[10] Chetverukhin M. F. (1953). *Rysunky prostorovykh fihur u kursi heometriyi* [Drawings of spatial figures in the course of geometry: manual]: posib. dlya vykladachiv. Kyyiv : Radyans′ka shkola. 188 s. [in Ukrainian].

[11] Pohoryelov O. V. (1998). *Heometriya: Stereometriya: Pidruchnyk dlya 10-11 klasiv seredn'oyi shkoly* [Geometry: Stereometry: Textbook for 10-11 grades of high school]. K.: Osvita. [in Ukrainian].

[12] *Metodyka vykladannya stereometriyi* [Methods of teaching stereometry]: 3-tye vyd. / D. M. Mayerhoyz ta in. ; za red. O. M. Astryaba i O. S. Dubynchuk (1956). Kyyiv : Radyans′ka shkola. 280 s. [in Ukrainian].

[13] Gusev V. A., Litvinenko V. N., Mordkovich A. G. Praktikum po resheniyu matematicheskikh zadach. Geometriya: uch. posob. dlya st-v f-m f-tov PI. Moskva: Prosveshcheniye, 1985. 223 s. [in Russian].

[14] V. G. Kremen′, & V. V. Il′yin, (2020). «Prezentatsiya vizual′noyi hramotnosti v osvitn′omu protsesi ta yiyi ekspluatatsiya v kul′turi myslennya». Informatsiyni tekhnolohiyi i zasoby navchannya, 75(1), 1-12. [Elektronnyy resurs]. Dostupno: https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.3660. [in Ukrainian].

[15] Richard S. Palais (1999). «The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium», Notices of the American Mathematical Society, vol. 46 (6), pp. 647–658. (in English).

[16] F. Botana, M. Abánades, and J. Escribano (2014). «Using a Free Open Source Software to Teach Mathematics», Computer Applications in Engineering Education, 22 (4), pp. 728-735. (in English).